Journal de l'École polytechnique / publié par le Conseil d'instruction de cet établissement

NOTE

SUR

LA THÉORIE DES SOLUTIONS SINGULIÈRES;

PAR E. CATALAN,

Répétiteur de Géométrie descriptive à l'École Polytechnique.

I.

Dans la plupart des Traités de calcul intégral, la théorie des solutions singulières est présentée de la manière suivante :

« Soit $F(x, y, c) = o$ l'intégrale générale d'une équation différentielle » donnée, c étant la constante arbitraire, laquelle peut être remplacée par » une fonction de x et de y, qu'il s'agit de déterminer. Si l'on différentie » par rapport à x, y et c, on aura

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dc = o;$$

» d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} - \frac{\left(\frac{dF}{dc}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}\frac{dc}{dx}.$$

» Cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ doit être égale à celle qu'on aurait trouvée en regar- » dant c comme une constante ; donc on doit avoir

$$\frac{\left(\frac{dF}{dc}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}\frac{dc}{dx} = o.$$

» En négligeant la solution $\frac{dc}{dx} = 0$, laquelle donne $c =$ constante, on con-
» clura que, pour avoir les solutions singulières de l'équation différentielle
» proposée, il faut éliminer c, soit entre les équations

$$F(x, y, c) = 0, \qquad \frac{dF}{dc} = 0,$$

» soit entre les équations

$$F(x, y, c) = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = \infty. \text{ »}$$

La première règle conduit à des résultats exacts toutes les fois que la dérivée $\frac{dF}{dc}$ n'est pas indépendante de c; la seconde me paraît fausse.

En effet, si l'on suppose $\frac{dF}{dy} = \infty$, sans supposer en même temps $\frac{dF}{dx} = \infty$, il est clair que la valeur de $\frac{dy}{dx}$ se réduit à zéro. Conséquemment, en éliminant c entre les équations $F(x, y, c) = 0$, $\frac{dF}{dy} = \infty$, on obtiendra une équation $\varphi(x, y) = 0$, qui, ne satisfaisant pas à l'équation différentielle proposée, ne sera ni une intégrale particulière, ni une solution singulière.

En d'autres termes, si l'on élimine c entre les équations $F(x, y, c) = 0$ et $\frac{dF}{dy} = \infty$, on aura, non l'*enveloppe* des courbes représentées par $F(x, y, c) = 0$, mais le lieu des points de ces courbes pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des x.

Soit, par exemple, l'équation différentielle

$$(1) \qquad 3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y\frac{dy}{dx} + (2y + x) = 0.$$

L'intégrale générale est

$$(2) \qquad (x + c)^2 = 3c(2y - c).$$

En prenant la dérivée par rapport à c, on obtient

$$x + c = 3(y - c);$$

d'où

$$c = \frac{-x + 3y}{4}.$$

La substitution de cette valeur, dans l'équation précédente, donne

$$(3) \qquad 3y^2 - 2xy - x^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en

$$(4) \qquad 3y + x = 0,$$
$$(5) \qquad y - x = 0.$$

Ainsi, les paraboles représentées par l'équation (2) ont pour enveloppes les droites (4) et (5). Actuellement, si l'on met l'intégrale générale sous la forme

$$x + c = \sqrt{3c(2y - c)},$$

et qu'on suppose infinie la dérivée prise par rapport à y, on aura

$$2y = c;$$

d'où

$$(6) \qquad x + 2y = 0.$$

Il est évident que cette équation ne vérifie pas l'équation (1), et qu'elle représente, non l'enveloppe du système des paraboles, mais seulement une droite qui rencontre ces courbes en des points pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des x.

En outre, on voit que cette dernière équation peut être déduite de l'équation (1), dans laquelle on supposerait $\frac{dy}{dx} = 0$.

II.

La règle, ordinairement exacte, qui prescrit d'éliminer c entre $F(x, y, c) = 0$ et $\frac{dF}{dc} = 0$, ne donne rien, si l'intégrale générale est sous la forme $c = f(x, y)$. En effet, dans ce cas, l'équation dérivée devient $1 = 0$. Comment faire alors pour obtenir les solutions singulières, s'il y en a? Les considérations suivantes pourront peut-être servir à résoudre cette question.

III.

Soit $F(x, y, z) = o$ l'équation d'une surface. Si nous regardons l'ordonnée verticale z comme constante, cette équation représentera toutes les sections faites dans la surface par des plans parallèles aux xy. Si nous différentions en laissant z constante, l'équation

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = o$$

donnera l'inclinaison de la tangente en un point d'une section horizontale quelconque, ce point ayant pour coordonnées x, y. Enfin, si nous éliminons z entre cette dernière équation et celle de la surface, l'équation $\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o$, à laquelle nous parviendrons, donnera l'inclinaison de la tangente horizontale pour un point quelconque de la surface. Cette équation $\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o$ a pour intégrale générale $F(x, y, z) = o$.

Actuellement, imaginons le plan tangent à la surface en un point x, y, z; son équation est

$$\frac{dF}{dx}(X - x) + \frac{dF}{dy}(Y - y) + \frac{dF}{dz}(Z - z) = o.$$

Si nous voulons que ce plan soit vertical, nous devrons avoir *généralement* $\frac{dF}{dz} = o$. Et si nous éliminons z entre $\frac{dF}{dz} = o$ et $F = o$, nous obtiendrons une équation commune à tous les points pour lesquels le plan tangent est vertical. Cette équation, qui représente un cylindre parallèle à l'axe des z, donne l'enveloppe des courbes représentées par $F(x, y, c) = o$; elle est aussi la solution singulière de $\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o$.

IV.

La règle que nous venons de démontrer est en défaut dans un cas : c'est lorsque l'équation de la surface est sous la forme $z = F(x, y)$. Mais alors l'équation du plan tangent est

$$Z - z = \frac{dF}{dx}(X - x) + \frac{dF}{dy}(Y - y).$$

Pour que cette équation se réduise à la forme

$$X - x = m(Y - y),$$

m n'étant ni nul ni infini, il faut que l'on ait

$$\frac{dF}{dx} = \infty, \quad \frac{dF}{dy} = \infty,$$

et qu'en même temps, le rapport de ces deux dérivées ne soit ni nul ni infini.

Par exemple, reprenons l'équation (2), et mettons-la sous la forme

$$c = \frac{3y - x \pm \sqrt{9y^2 - 6xy - 3x^2}}{4}.$$

Si nous posons $\frac{dF}{dc} = 0$, nous n'obtenons rien; mais les dérivées de c, par rapport à x et à y, sont

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{4}\left(-1 \mp 3\frac{y + x}{\sqrt{9y^2 - 6xy - 3x^2}}\right), \quad \frac{dc}{dy} = \frac{1}{4}\left(+3 \pm 3\frac{3y - x}{\sqrt{9y^2 - 6xy - 3x^2}}\right).$$

Si nous égalons à zéro la quantité $9y^2 - 6xy + 3x^2$, ces deux dérivées deviendront infinies, et leur rapport ne sera ni nul ni infini. La solution singulière est donc

$$9y^2 - 6xy - 3x^2 = 0,$$

ou

$$3y^2 - 2xy - x^2 = 0,$$

comme ci-dessus.

V.

Il peut arriver que la surface représentée par $z = F(x, y)$ touche, *suivant une ligne,* le plan des xz ou un plan parallèle à ce dernier. Dans ce cas, l'équation du plan tangent vertical doit se réduire à la forme $Y = \beta$, β étant une constante. Cette condition exige que $\frac{dF}{dy}$ devienne infinie pour

$y = \beta$, l'autre dérivée $\frac{dF}{dx}$ n'étant pas infinie. Alors l'enveloppe des courbes représentées par l'intégrale générale $c = F(x, y)$ devient une droite parallèle à l'axe des x; elle se confond avec le lieu des points de ces courbes pour lesquels la tangente est parallèle à cet axe; et, conséquemment, la règle qui prescrit de poser $\frac{dF}{dy} = \infty$ sans considérer en même temps l'équation $\frac{dF}{dx} = \infty$, pourra conduire, par exception, à un résultat exact.

La même remarque s'applique à l'équation isolée $\frac{dF}{dx} = \infty$; elle pourra donner une solution singulière de la forme $x = \alpha$.

Soit, par exemple, l'intégrale générale

$$c = x + \sqrt{y}.$$

Si nous posons $\frac{dc}{dy} = \infty$, nous obtenons, pour solution singulière, $y = 0$.

L'intégrale $c = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{y}}$ donnerait de la même manière les deux solutions singulières représentées par

$$x = 0, \quad y = 0.$$

FIN DU XXXI[e] CAHIER.