

Journal de l'École
polytechnique / publié par le
Conseil d'instruction de cet
établissement

École polytechnique (Palaiseau, Essonne). Journal de l'École polytechnique / publié par le Conseil d'instruction de cet établissement. 1865.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DES POLYÈDRES^(*),

PAR M. E. CATALAN.

Travaillez, prenez de la peine :
C'est le fonds qui manque le moins.

I. — POLYÈDRES CONJUGUÉS.

1. Étant donné un polyèdre P , supposé convexe pour plus de simplicité, on peut toujours construire un polyèdre p , conjugué du premier, c'est-à-dire tel, que ses faces aient pour pôles, relativement à une sphère donnée O , les sommets correspondants du polyèdre P ; et tel, en outre, que ses sommets soient les pôles des faces de P , relativement à la même sphère (GERGONNE, *Annales de Mathématiques*, t. XV, p. 158). De plus,

(*) La question proposée par l'Académie des Sciences, comme sujet du Concours pour le grand prix de Mathématiques (1863), était celle-ci :

« *Perfectionner, en quelque point important, la théorie géométrique des polyèdres.* »

Le présent Mémoire est la reproduction, aussi fidèle que possible, de celui qui a été déposé au Secrétariat de l'Institut le 22 décembre 1862. Sauf quelques renvois, nécessités par la nouvelle disposition des figures, pas un mot de la rédaction primitive n'a été changé. (23 janvier 1865.)

XLI^e Cahier.

I

d

deux arêtes correspondantes, A, a , sont réciproques, c'est-à-dire que, passant par deux points réciproques, M, m , elles sont perpendiculaires au rayon OMm et perpendiculaires entre elles (CATALAN, *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, p. 273).

2. Puisque, dans deux polyèdres conjugués, les arêtes sont en même nombre, on peut convenir de classer les polyèdres d'après le nombre de leurs arêtes (PH. BRETON, *Comptes rendus*, t. LI, p. 722), bien qu'il soit plus naturel, et plus conforme à l'étymologie, de les classer d'après le nombre de leurs faces (POINSOT, *Comptes rendus*, t. XLVI, p. 71). On pourra même, si l'on considère un polyèdre P ayant A arêtes, supposer que le nombre S de ses sommets soit, par exemple, supérieur au nombre F de ses faces. En effet, si le contraire arrivait, le polyèdre P serait nécessairement conjugué d'un polyèdre p dans lequel le nombre s des sommets et le nombre f des faces satisferaient à la première hypothèse.

II. — CONSÉQUENCES DU THÉORÈME D'EULER.

3. Le théorème d'Euler, exprimé par l'équation

$$(1) \quad F + S = A + 2,$$

est, jusqu'à présent, la relation la plus générale et la plus importante à laquelle satisfassent les éléments de tout polyèdre convexe. En outre, ces éléments sont liés par les quatre équations suivantes :

$$(2) \quad f_3 + f_4 + f_5 + \dots + f_n = F,$$

$$(3) \quad s_3 + s_4 + s_5 + \dots + s_p = S,$$

$$(4) \quad 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots + nf_n = 2A,$$

$$(5) \quad 3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \dots + ps_p = 2A.$$

Dans ces équations, f_n représente le nombre des faces de $n^{\text{ième}}$ espèce (à n côtés), et s_p , le nombre des sommets de $p^{\text{ième}}$ espèce (à p arêtes).

4. D'après l'hypothèse ci-dessus (2), A est connu; en sorte que, dans chaque cas particulier, il s'agira de trouver, pour les inconnues F, S, f_3 ,

$f_4, \dots, s_3, s_4, \dots$, des valeurs entières, positives, satisfaisant aux équations fondamentales (1), (2), (3), (4), (5). Avant d'essayer la résolution générale du problème, nous allons rappeler quelques conséquences de ces équations.

5. Si l'on élimine f_3 entre les équations (2) et (4), puis s_3 entre les équations (3) et (5), on trouve

$$\begin{aligned} f_4 + 2f_5 + \dots + (n-3)f_n &= 2A - 3F, \\ s_4 + 2s_5 + \dots + (p-3)s_p &= 2A - 3S. \end{aligned}$$

Donc

$$(6) \quad F \leq \frac{2}{3} A,$$

$$(7) \quad S \leq \frac{2}{3} A.$$

Ces inégalités, combinées avec l'équation (1), donnent

$$(8) \quad F \leq \frac{1}{3} A + 2,$$

$$(9) \quad S \leq \frac{1}{3} A + 2$$

(GERGONNE, *Annales de Mathématiques*, t. XV, p. 164).

Ainsi, dans tout polyèdre convexe ayant A arêtes, le nombre des faces est compris entre $\frac{2}{3}A$ et $\frac{1}{3}A + 2$. Il en est de même pour le nombre des sommets.

6. *Remarque.* — Les limites qui viennent d'être indiquées peuvent être atteintes. En effet :

1° Dans un prisme ayant pour base un polygone de n côtés :

$$S = 2n, \quad F = n + 2, \quad A = 3n;$$

donc

$$S = \frac{2}{3} A, \quad F = \frac{1}{3} A + 2.$$

2° Dans un polyèdre formé par l'ensemble de deux pyramides ayant pour base commune un polygone de n côtés :

$$S = n + 2, \quad F = 2n, \quad A = 3n;$$

donc

$$S = \frac{1}{3} A + 2, \quad F = \frac{2}{3} A$$

(CATALAN, *Éléments de Géométrie*).

7. *Seconde remarque.* — Parmi les polyèdres qui ont un nombre d'arêtes donné, il en peut exister dont le nombre des faces et le nombre des sommets aient toutes les valeurs qui satisfont aux inégalités ci-dessus. Soit, par exemple, $A = 15$. Alors ces inégalités sont vérifiées par

$$\begin{array}{c|c|c|c} F = 10, & F = 9, & F = 8, & F = 7, \\ S = 7; & S = 8; & S = 9; & S = 10. \end{array}$$

D'après la première remarque, les valeurs extrêmes répondent à une *double pyramide pentagonale* et à un *prisme pentagonal*.

Le deuxième système ($F = 9, S = 8$) peut être réalisé par un polyèdre P ayant pour faces *trois quadrilatères* ABCD, AEFD, EFGH, et *six triangles* AEH, ABH, BGH, BCG, CFG, CDF (*fig. 1, Pl. I*). En effet, ce polyèdre a *huit* sommets.

Enfin, le troisième système ($F = 8, S = 9$) peut être regardé comme répondant à un polyèdre conjugué de P; ce nouveau polyèdre aurait pour faces *deux triangles* et *six quadrilatères*.

8. En éliminant F, S, A entre les équations fondamentales, on trouve les deux relations

$$(10) \quad 2(s_3 + s_4 + \dots + s_p) - (f_3 + 2f_4 + \dots + \overline{n-2}f_n) = 4,$$

$$(11) \quad 2(f_3 + f_4 + \dots + f_n) - (s_3 + 2s_4 + \dots + \overline{p-2}s_p) = 4,$$

entre lesquelles il est facile d'éliminer une inconnue quelconque.

9. D'abord, si l'on ajoute membre à membre ces deux dernières équations

tions, f_4 et s_4 sont éliminés, et l'on obtient

$$f_3 + s_3 = 8 + (f_5 + s_5) + 2(f_6 + s_6) + 3(f_7 + s_7) + \dots$$

Par conséquent :

1° *Dans tout polyèdre convexe, la somme du nombre des faces triangulaires et du nombre des angles trièdres est égale à 8, plus la somme du nombre des faces pentagonales et du nombre des angles pentaèdres; plus deux fois la somme du nombre des faces hexagonales et du nombre des angles hexaèdres; etc.*

2° *Tout polyèdre convexe a des faces triangulaires ou des angles trièdres.*

10. L'élimination de f_3 et de s_3 , entre les équations (10) et (11), conduit à

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 - (f_7 + 2f_8 + \dots) - 2(s_4 + 2s_5 + \dots) = 12,$$

$$3s_3 + 2s_4 + s_5 - (s_7 + 2s_8 + \dots) - 2(f_4 + 2f_5 + \dots) = 12;$$

donc

$$(12) \quad 3f_3 + 2f_4 + f_5 \geq 12,$$

$$(13) \quad 3s_3 + 2s_4 + s_5 \geq 12;$$

et, conséquemment :

1° *Tout polyèdre convexe a des faces triangulaires, ou quadrangulaires, ou pentagonales;*

2° *Tout polyèdre convexe a des angles trièdres, ou tétraèdres, ou pentaèdres;*

3° *Si la surface d'un polyèdre est formée seulement de triangles, ou si elle est formée de triangles, d'hexagones, d'heptagones, etc., le nombre des triangles est égal ou supérieur à 4;*

4° *Si un polyèdre a seulement des angles trièdres, ou s'il a des angles trièdres, hexaèdres, heptaèdres, etc., le nombre des angles trièdres est égal ou supérieur à 4;*

Etc.

11. Si l'on élimine s_5 et f_5 entre les équations (10) et (11), on trouve

$$4s_3 + 2s_4 - 2s_6 - 4s_7 - \dots + f_3 - 2f_4 - 5f_5 - 8f_6 - \dots = 20,$$

$$4f_3 + 2f_4 - 2f_6 - 4f_7 - \dots + s_3 - 2s_4 - 5s_5 - 8s_6 - \dots = 20;$$

donc

$$(14) \quad 4s_3 + 2s_4 + f_3 \geq 20,$$

$$(15) \quad 4f_3 + 2f_4 + s_3 \geq 20.$$

Ces deux inégalités prouvent que :

1° Si un polyèdre convexe n'a ni angles trièdres ni angles tétraèdres, il a au moins 20 faces triangulaires ;

2° Si un polyèdre convexe n'a ni faces triangulaires ni faces quadrangulaires, il a au moins 20 angles trièdres ;

3° Si un polyèdre a un seul angle trièdre, et qu'il n'ait aucun angle tétraèdre, il a au moins 16 faces triangulaires ;

4° Si un polyèdre a une seule face triangulaire, et qu'il n'ait aucune face quadrangulaire, il a au moins 16 angles trièdres ;

Etc., etc., etc.

III. — CONDITIONS DE POSSIBILITÉ DES POLYÈDRES.

12. Il n'est pas toujours possible de construire un polyèdre avec des éléments donnés, satisfaisant aux équations fondamentales. Par exemple, ces équations sont vérifiées par

$$f_3 = F = 6, \quad s_3 = 4, \quad s_4 = 0, \quad s_5 = 0, \quad s_6 = 1, \quad S = 5, \quad A = 9.$$

Il semblerait, d'après ces valeurs, qu'il peut exister un *hexaèdre à six faces triangulaires, ayant quatre angles trièdres et un angle hexaèdre*. Mais, comme l'existence d'un angle hexaèdre exige celle d'au moins sept faces, le polyèdre supposé est impossible.

De même, les équations fondamentales sont vérifiées par

$$f_3 = 4, \quad f_5 = 2, \quad s_3 = 6, \quad s_4 = 1, \quad F = 6, \quad S = 7, \quad A = 11.$$

Mais, deux faces ne pouvant avoir plus de deux sommets communs, il

faut, pour qu'un polyèdre ait deux faces pentagonales, que le nombre de ses sommets soit *au moins huit*. Donc les éléments donnés n'appartiennent à aucun polyèdre.

13. D'après la première des deux remarques précédentes, *si l'un des angles est de $p^{\text{ième}}$ espèce (à p arêtes), le polyèdre a au moins $p + 1$ faces et $p + 1$ sommets. De même, si l'une des faces est de $n^{\text{ième}}$ espèce (à n côtés), le polyèdre a au moins $n + 1$ sommets et $n + 1$ faces.*

De là résulte que, dans les équations fondamentales, les inconnues n , p doivent satisfaire aux inégalités :

$$(16) \quad n \leq F - 1, \quad n \leq S - 1, \quad p \leq F - 1, \quad p \leq S - 1;$$

ou, si F et S sont inconnus, à ces deux-ci :

$$(17) \quad n \leq \frac{1}{2} A, \quad p \leq \frac{1}{2} A.$$

Soient, par exemple, comme au n° 12,

$$A = 9, \quad F = 6, \quad S = 5 :$$

on doit prendre $n \leq 4$, $p \leq 4$. Conséquemment, les équations à résoudre sont

$$f_3 + f_4 = 6, \quad s_3 + s_4 = 5, \quad 3f_3 + 4f_4 = 18, \quad 3s_3 + 4s_4 = 18.$$

Elles forment donc un *système déterminé*, vérifié par

$$f_3 = 6, \quad f_4 = 0, \quad s_3 = 2, \quad s_4 = 3.$$

Ces éléments appartiennent à un *hexaèdre à faces triangulaires*, formé par la réunion de deux tétraèdres ayant une face commune.

14. Pour arriver à de nouvelles *conditions de possibilité*, supposons, successivement, qu'un polyèdre ait 2, 3, 4, ..., f_n faces de n côtés.

S'il en a *deux*, elles ne peuvent avoir plus de deux sommets communs; donc

$$S \geq n + (n - 2),$$

ou

$$S \geq 2(n-1).$$

S'il en a *trois*, la troisième a, au plus, deux sommets en commun avec chacune des deux premières faces; donc

$$S \geq 2(n-1) + n - 4,$$

ou

$$S \geq 3(n-2).$$

Si le polyèdre a *quatre* faces de n côtés, le nombre de ses sommets est au moins égal au nombre précédent, augmenté de $n-6$; donc

$$S \geq 4(n-3).$$

Enfin, si le polyèdre a f_n faces de n côtés,

$$S \geq f_n(n+1-f_n).$$

Si donc le nombre S est connu, le nombre f_n des faces de n côtés doit satisfaire à la relation

$$(18) \quad f_n^2 - (n+1)f_n + S \geq 0.$$

On trouve, de la même manière,

$$2A \geq f_n(2n+1-f_n),$$

ou

$$(19) \quad f_n^2 - (2n+1)f_n + 2A \geq 0.$$

La considération du polyèdre conjugué donne ensuite

$$(20) \quad s_p^2 - (p+1)s_p + F \geq 0,$$

$$(21) \quad s_p^2 - (2p+1)s_p + 2A \geq 0.$$

15. Remarque. — Les inégalités précédentes supposent, respectivement,

$$(22) \quad f_n < n+1, \quad f_n < 2n+1, \quad s_p < p+1, \quad s_p < 2p+1:$$

sans ces restrictions évidentes, elles deviendraient illusoires.

16. Bien que les inégalités (16), (17), ..., (22), jointes aux équations fondamentales, diminuent beaucoup le nombre des *polyèdres possibles*, ces relations sont, probablement, loin encore d'exprimer toutes les conditions auxquelles doivent satisfaire les éléments d'un polyèdre. En effet, ces éléments sont assujettis à des conditions d'ordre ou d'arrangement qui resteront peut-être toujours inconnues. Dans les numéros suivants, nous allons en faire connaître quelques-unes, presque évidentes, et qui cependant, si nous ne nous trompons, n'avaient pas encore été remarquées.

17. THÉORÈME I. — *Soit un polyèdre quelconque, ayant pour sommets A, B, C, D, Si, au sommet A, se réunissent a_n faces de $n^{\text{ième}}$ espèce; que, au sommet B, se réunissent b_n faces de $n^{\text{ième}}$ espèce, etc.; on aura*

$$(23) \quad nf_n = a_n + b_n + c_n + \dots$$

Démonstration. — Si l'on fait le tour de chaque face de $n^{\text{ième}}$ espèce, on rencontrera nf_n sommets. Mais, dans cette énumération, le sommet A aura été compté a_n fois, le sommet B, b_n fois, etc.

18. COROLLAIRE. — *Si, à chacun des sommets du polyèdre se réunissent l faces de $n^{\text{ième}}$ espèce, l' faces de $n'^{\text{ième}}$ espèce, l'' faces de $n''^{\text{ième}}$ espèce, ..., on aura*

$$(24) \quad nf_n = lS, \quad n'f_{n'} = l'S, \quad n''f_{n''} = l''S, \dots$$

19. THÉORÈME II (*conjugué* du précédent). — *Soit un polyèdre quelconque ayant pour faces A (*), B (**), Γ , Δ , Si la face A appartient à α_p angles polyèdres de $p^{\text{ième}}$ espèce; que la face B appartienne à β_p angles polyèdres de $p^{\text{ième}}$ espèce, etc.; on aura*

$$(25) \quad ps_p = \alpha_p + \beta_p + \gamma_p + \dots$$

20. Corollaire. — *Si chacune des faces du polyèdre appartient à λ angles polyèdres de $p^{\text{ième}}$ espèce, à λ' angles polyèdres de $p'^{\text{ième}}$ espèce, à*

(*) Alpha.

(**) Béta.

λ'' angles polyèdres de $p''^{\text{ième}}$ espèce, ...; on aura

$$(26) \quad ps_p = \lambda F, \quad p's_{p'} = \lambda' F, \quad p''s_{p''} = \lambda'' F, \dots$$

21. THÉORÈME III. — Si l'on désigne par α le nombre des arêtes qui aboutissent au sommet A, par β le nombre des arêtes qui aboutissent au sommet B, etc., on a

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n + \dots, \\ \beta = b_3 + b_4 + b_5 + \dots + b_n + \dots, \\ \gamma = c_3 + c_4 + c_5 + \dots + c_n + \dots, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Démonstration. — La somme $a_3 + a_4 + a_5 + \dots$, par exemple, indique le nombre des faces qui composent l'angle polyèdre A; donc cette somme égale α .

22. Remarque. — Si l'on ajoute membre à membre ces égalités, et que l'on ait égard au Théorème I, on obtient

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots,$$

ou

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = 2A;$$

ce qui est évident.

23. THÉORÈME IV (conjugué du précédent). — Si l'on désigne par a le nombre des côtés de la face A, par b le nombre des côtés de la face B, etc., on a

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \dots + \alpha_p + \dots, \\ b = \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \dots + \beta_p + \dots, \\ c = \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \dots + \gamma_p + \dots, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

IV. — REPRÉSENTATION SYMBOLIQUE DES POLYÈDRES.

24. Il est extrêmement difficile, pour ne pas dire impossible, de se repré-

senter nettement un polyèdre, lorsque le nombre de ses éléments n'est pas très-petit. On peut, il est vrai, se donner, presque arbitrairement, l'une des projections d'un polyèdre, et en déduire, moyennant quelques conditions nouvelles, l'autre projection ; mais il résulte, des constructions que l'on est obligé d'effectuer, une grande confusion de lignes ; et d'ailleurs, l'ordre dans lequel doivent naturellement être disposés les éléments d'un polyèdre étant inconnu *à priori*, il arrivera très-rarement que le corps dont on aura ainsi les deux projections soit celui que l'on avait en vue, et dont on s'était donné les nombres d'arêtes, de faces et de sommets.

Il est donc nécessaire d'imaginer *une figure symbolique*, une sorte de notation algébrique, au moyen de laquelle on puisse (jusqu'à un certain point), non-seulement reconnaître si un polyèdre dont les éléments sont donnés est possible, mais encore l'ordre dans lequel ils doivent se grouper. C'est à quoi l'on parvient sans peine en faisant usage des théorèmes précédents.

25. Pour rendre l'explication plus claire, je suppose d'abord qu'il s'agisse de représenter symboliquement l'hexaèdre ABCDEFGH (*fig. 2, Pl. I*), résultant d'un tétraèdre doublement tronqué. Les éléments de cette figure sont

$$f_3 = 2, \quad f_4 = 2, \quad f_5 = 2, \quad F = 6, \quad s_3 = S = 8, \quad A = 12.$$

Avec ces éléments, je construis la table à double entrée ci-jointe :

	3 A	3 B	3 C	3 D	3 E	3 F	3 G	3 H	
3	0	0	1	1	1	1	1	1	6
4	2	2	1	1	0	1	0	1	8
5	1	1	1	1	2	1	2	1	10

Dans une première colonne horizontale sont inscrits *les noms* des huit sommets : chacun d'eux est surmonté du nombre 3 des arêtes qui y aboutissent.

Trois autres colonnes horizontales, marquées 3, 4, 5, servent à inscrire

les nombres de faces *triangulaires, quadrangulaires ou pentagonales*, auxquelles appartient un sommet déterminé. Par exemple, le sommet E appartenant à une face triangulaire et à deux faces pentagonales, les nombres inscrits dans la colonne verticale E sont 1, 0, 2.

Enfin, les sommes 6, 8, 10, des nombres placés dans les colonnes horizontales, sont inscrites dans une dernière colonne verticale.

26. Remarques. — 1° D'après l'équation (23),

$$6 = 3f_3, \quad 8 = 4f_4, \quad 10 = 5f_5.$$

2° D'après l'équation (27),

$$\alpha = 3 = 0 + 2 + 1, \quad \beta = 3 = 0 + 2 + 1, \quad \gamma = 3 = 1 + 1 + 1, \text{ etc.}$$

27. On peut rendre la représentation *symbolique* plus complète, en fractionnant les colonnes horizontales du tableau, en autant d'autres colonnes que l'indique le nombre des faces triangulaires, quadrangulaires et pentagonales. En même temps, si l'on remplace chaque *chiffre un*, à inscrire dans une colonne verticale, par la lettre placée en tête de cette colonne, il arrivera que les lettres contenues dans une colonne horizontale quelconque seront précisément celles qui désignent les sommets d'une même face. Enfin, les lettres A, B, Γ, Δ, ..., qui servent à désigner les diverses faces, peuvent

		3	3	3	3	3	3	3	3
		A	B	C	D	E	F	G	H
3	A			C	D	E			
3	B						F	G	H
4	Γ	A	B	C	D				
4	Δ	A	B				F		H
5	E	A			D	E		G	H
5	Z		B	C		E	F	G	

être, pour plus de régularité, placées dans une première colonne verticale.

Au moyen de ces modifications, le tableau prend la disposition suivante (p. 12).

A l'inspection de ce second tableau, on voit que le polyèdre (s'il existe) a :

1° *Huit angles trièdres*; 2° *deux faces triangulaires*, CDE, FGH; 3° *deux faces quadrangulaires*, ABCD, ABFH; 4° *deux faces pentagonales*, ADEGH, BCEFG.

28. *Remarque.* — Les côtés qui limitent les faces, c'est-à-dire les arêtes du polyèdre, sont représentés par les *combinaisons binaires répétées* :

AB, AD, AH, BC, BF, CD, CE, DE, EG, FG, FH, GH.

Leur nombre est égal à *douze*, ce qui devait être.

29. Dans le cas général, le *premier tableau symbolique* sera formé d'après les trois règles suivantes :

1° *Les nombres placés dans les colonnes verticales A, B, C, D, ..., ont pour sommes, respectivement, les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, placés en tête de ces colonnes*;

2° *Les nombres placés dans les colonnes horizontales 3, 4, 5, 6, ..., ont pour sommes, respectivement, $3f_3, 4f_4, 5f_5, 6f_6, \dots$* ;

3° *Chacun des termes de la colonne horizontale 3 ne peut surpasser f_3 ; chacun des termes de la colonne horizontale 4 ne peut surpasser f_4 ; etc.*

Il est évident, en effet, que le nombre des faces d'*espèce donnée*, qui ont un sommet commun, ne peut surpasser le nombre total des faces de cette espèce.

	α	β	γ	δ	ε	ζ	η		
	A	B	C	D	E	F	G		
3	a_3	b_3	c_3	d_3	e_3	f_3	g_3		$3f_3$
4	a_4	b_4	c_4	d_4	e_4	f_4	g_4		$4f_4$
5	a_5	b_5	c_5	d_5	e_5	f_5	g_5		$5f_5$
6	a_6	b_6	c_6	d_6	e_6	f_6	g_6		$6f_6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	f_n	g_n		nf_n

30. On voit que la construction de ce premier tableau équivaut à la recherche des solutions entières, positives ou nulles, des équations (23) et (27). On pourra résoudre empiriquement les deux problèmes en traçant, sur une table, une sorte d'*échiquier* ayant un grand nombre de cases, et en essayant de le remplir avec des jetons, de manière à satisfaire aux conditions précédentes. Ce procédé pourra nécessiter d'assez longs tâtonnements; mais il sera presque toujours plus rapide, néanmoins, que la solution directe et algébrique.

31. Pour construire le *second tableau symbolique*, on devra fractionner les lignes horizontales du premier tableau, comme nous l'avons expliqué ci-dessus (27), à l'occasion d'un cas particulier. Ainsi, la ligne horizontale 3 en donnera f_3 , la ligne horizontale 4 en donnera f_4 , etc. Mais, en inscrivant les lettres A, B, C, D, ..., on devra satisfaire à ces trois nouvelles conditions :

4° *Deux lignes horizontales quelconques ne peuvent renfermer une même combinaison de trois lettres ;*

5° *Une même combinaison de deux lettres ne peut appartenir à plus de deux lignes horizontales ;*

6° *Le nombre total de ces combinaisons binaires répétées doit être égal à A (28).*

Les deux premières propositions sont visibles : si deux lignes horizontales contenaient les trois lettres A, B, C, *deux faces du polyèdre auraient trois sommets communs*, ce qui est impossible. De même, si trois lignes horizontales renfermaient A et B, *l'arête AB appartiendrait à trois faces*, etc.

32. Remarque. — *Le nombre des combinaisons binaires répétées, qui renferment la lettre A, est égal à α ; le nombre de celles qui renferment B est égal à β ; etc.*

En effet, les arêtes qui aboutissent au sommet A sont représentées par les combinaisons binaires dans lesquelles entre la lettre A.

33. Afin d'appliquer la méthode précédente, prenons

$$A = 19, \quad F = 11, \quad S = 10.$$

On satisfait à ces données en supposant

$$f_3 = 8, \quad f_4 = 2, \quad f_6 = 1, \quad s_3 = 4, \quad s_4 = 4, \quad s_5 = 2.$$

Après quelques essais, ou par la résolution des équations (23) et (27), on trouve que le premier tableau symbolique peut être rempli de la manière suivante :

	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	
3	2	1	1	1	2	3	3	3	4	4	24
4	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	8
6	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	6

Si donc le polyèdre est possible, au sommet A se réuniront *deux triangles* et *un hexagone*; au sommet B se réuniront *un triangle*, *un quadrilatère* et *un hexagone*, etc.

Au moyen du premier tableau, et en ayant égard aux règles ci-dessus (31), on forme ainsi le second tableau symbolique.

		3	3	3	3	4	4	4	4	5	5
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
3	A	A						G		I	
3	B							G		I	K
3	Γ						F			I	K
3	Δ				D		F			I	
3	E	A	B					G			
3	Z					E			H		K
3	H			C		E			H		
3	Θ						F		H		K
4	I		B			E		G			K
4	K			C	D		F		H		
6	Λ	A	B	C	D	E				I	

Nous pouvons regarder la face Λ , qui a le plus grand nombre de côtés, comme formant la base du polyèdre, et nous pouvons projeter tous les sommets sur le plan de cette face. Seulement, l'ordre dans lequel doivent se suivre les lettres A, B, C, D, E, I, qui désignent les sommets de Λ , est loin d'être arbitraire. En effet, les arêtes du polyèdre étant (28) :

$$\begin{aligned} &AG, AB, AI, BE, BG, CE, CH, CD, DF, DI, EH, EK, \\ &FI, FH, FK, GI, GK, HK, IK; \end{aligned}$$

celles qui appartiennent à la face Λ sont

$$AB, BE, EC, CD, DI, IA;$$

donc Λ est un hexagone ABECDI. Après cette discussion, l'ordre dans lequel les faces doivent être assemblées est complètement déterminé, et le polyèdre se projette suivant la *fig. 3, Pl. I.*

34. Soient encore

$$A = 9, \quad F = 5, \quad S = 6.$$

On satisfait aux équations fondamentales en prenant

$$f_3 = 3, \quad f_4 = 1, \quad f_5 = 1, \quad s_3 = 6.$$

Par suite, la troisième ligne du premier tableau symbolique contiendra *cinq termes égaux à 1*, et la deuxième *quatre termes égaux à 1*.

Ce tableau aura donc une disposition *équivalente* à celle-ci :

	3	3	3	3	3	3	
	A	B	C	D	E	F	
3	1	1	1	1	2	3	9
4	1	1	1	1	0	0	4
5	1	1	1	1	1	0	5

Mais alors les deux dernières lignes du second tableau symbolique contiendraient A, B, C, D, contrairement à la cinquième règle (31). Donc le

polyèdre est impossible. Du reste, cette conclusion était évidente par les n^{os} 13 et 14.

35. Supposons qu'avec des éléments donnés, et en observant les règles indiquées ci-dessus, on ait pu construire le second tableau symbolique. On doit se demander si le polyèdre représenté par ce tableau *existe réellement*.

Pour essayer de résoudre cette question, remarquons d'abord qu'au moyen du tableau l'on peut toujours construire, d'une infinité de manières, sinon un polyèdre proprement dit, au moins une figure présentant un *réseau de polygones convexes, d'espèces données, en nombre connu, et assemblés dans un ordre déterminé*. Si ces polygones étaient plans, la figure serait un polyèdre. Dans tous les cas, chacun de ces polygones peut être pris pour périmètre d'une petite surface courbe, formant l'une des faces d'un corps que, pour plus de clarté, j'appellerai *polyèdre à faces courbes* (*). Il s'agit de savoir si l'on peut disposer des indéterminées du problème, de manière que tous les polygones constituant le réseau soient plans, et que le polyèdre à faces courbes se transforme en un véritable polyèdre.

36. Rapportons la figure à trois axes rectangulaires quelconques; désignons par a, a', a'' les coordonnées du sommet A, par b, b', b'' les coordonnées du sommet B; etc. Soit

$$(a) \quad x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu = \delta$$

l'équation d'une quelconque des faces du polyèdre cherché. Si ce polyèdre doit être terminé par F faces, les équations analogues à celle qui vient d'être écrite contiendront $\frac{1}{2} F$ coefficients, entre lesquels il existe F *équations de conditions*, savoir :

$$(b) \quad \begin{cases} \cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

(*) Par exemple, prenons arbitrairement les deux quadrilatères gauches ABCD, EFGH (*fig. 4, Pl. I*), menons les droites AE, BF, CG, DH; puis, *pour fermer la figure*, supposons que, sur chacun des six quadrilatères qu'elle présente, on construise un paraboloïde hyperbolique: le corps ainsi défini serait un *hexaèdre à faces paraboloidiques*.

D'un autre côté, si le plan (a) doit contenir n sommets A, B, C, . . . , l'équation (a) donnera lieu aux n équations de conditions :

$$(c) \quad \begin{cases} a \cos \lambda + a' \cos \mu + a'' \cos \nu = \delta, \\ b \cos \lambda + b' \cos \mu + b'' \cos \nu = \delta, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Le nombre de ces relations, qui contiennent $3S$ coordonnées, est donc

$$(4) \quad 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots = 2A.$$

Conséquemment, le *polyèdre à faces courbes* se transforme en un polyèdre proprement dit, si l'on peut satisfaire, par des valeurs réelles et finies, aux $2A + F$ équations (b) et (c), qui renferment $3S + 4F$ inconnues, coordonnées ou coefficients.

Si l'on élimine d'abord les $4F$ coefficients, on obtiendra $2A - 3F$ équations entre les $3S$ coordonnées (*). Éliminant ensuite $2A - 3F - 1$ coordonnées, on trouvera, finalement, une équation entre $3(S + F) - 2A + 1$ coordonnées; ou, à cause du théorème d'Euler, *une équation entre $A + 7$ coordonnées*. Mais ce nombre peut encore être réduit.

37. En effet, les $3S$ coordonnées des S sommets déterminent, non-seulement la *forme* et la *grandeur* du polyèdre, mais encore sa *situation* à l'égard des trois axes rectangulaires; et ce dernier élément est étranger à la question. Afin de l'éliminer, prenons pour origine le sommet A, pour axe des x l'arête AB, et le plan de la face ABC. . . pour plan des xy . Nous aurons, dans les trois premières équations (c):

$$a = 0, \quad a' = 0, \quad a'' = 0, \quad b' = 0, \quad b'' = 0, \quad c'' = 0;$$

d'où

$$\delta = 0, \quad \cos \lambda = 0, \quad \cos \mu = 0, \quad \cos \nu = \pm 1.$$

L'équation de condition entre $A + 7$ coordonnées n'en contiendra donc,

(*) Ceci suppose $2A - 3F \geq 1$. Dans le cas où l'on aurait $2A = 3F$ (6), on éliminerait seulement $4F - 1$ coefficients; puis, dans l'équation résultante, on prendrait arbitrairement la valeur du dernier coefficient, ainsi que les valeurs de $3S - 1$ coordonnées.

véritablement, que $A + 1$. Conséquemment, *on peut prendre arbitrairement les valeurs d'un nombre de coordonnées égal à celui des arêtes*; pourvu, bien entendu, qu'il en résulte, pour les autres inconnues, des valeurs finies et réelles.

38. Cette conclusion, qui revient à celle de Legendre (*Éléments de Géométrie*, Note VIII), est peut-être trop absolue. En effet, si l'on dispose de A coordonnées, de manière à satisfaire seulement à la dernière condition, il pourra très-bien arriver que certaines faces du polyèdre demandé, au lieu d'être, ainsi qu'il est nécessaire, des polygones convexes, soient des polygones étoilés. Alors la figure trouvée, au lieu d'être le polyèdre convexe représenté par le tableau symbolique, se composerait d'un réseau de *polygones plans, d'espèces données, en nombre connu, les uns convexes, les autres étoilés, et assemblés dans un ordre déterminé* (*). Quoi qu'il en soit, nous croyons avoir réduit la *théorie de la possibilité des polyèdres* à l'analyse indéterminée du premier degré et à un problème analogue à celui du *Cavalier*, du *Solitaire*, etc., c'est-à-dire appartenant à la *Géométrie de situation dans le plan*.

39. *Remarque.* — La discussion précédente pourrait être complètement supprimée, si, comme l'a proposé Poincaré (*Comptes rendus*, t. XLVI, p. 71), on appelait *polyèdre, un enchaînement de triangles dont chacun se lie à un autre par un côté commun, et dont l'ensemble forme une surface fermée de toutes parts*. Il est clair, en effet, qu'une telle figure existe, du moment qu'on peut se donner sa projection sur un plan, et cette projection résulte immédiatement de la construction du tableau symbolique.

40. Pour rendre ceci plus sensible, proposons-nous de construire un polyèdre ayant vingt-deux faces triangulaires. A cause de $f_3 = F = 22$, les nombres d'arêtes et de sommets sont $A = 33$, $S = 13$.

Après quelques tâtonnements, on trouve que le tableau symbolique peut être rempli de la manière suivante :

(*) Par exemple, si le tableau symbolique représente le parallépipède (P) (*fig. 5, Pl. I*) et que l'on ne prenne pas convenablement les coordonnées des sommets E, H, ce polyèdre convexe pourra être remplacé par la figure (Q).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N
A	B	C										
A	B		D									
A		C		E								
A			D			G						
A				E		G						
	B	C			F							
	B		D					I				
	B				F			I				
		C		E			H					
		C			F		H					
			D			G			K			
			D					I	K			
				E		G					M	
				E			H				M	
					F		H			L		
					F			I		L		
						G			K			N
						G					M	N
							H			L		N
							H				M	N
								I	K			N
								I		L		N

Par conséquent, la projection du polyèdre, sur le plan de la face ABC, est analogue à la *fig. 7, Pl. I.*

V. — RECHERCHE DES POLYÈDRES QUI ONT UN NOMBRE D'ARÊTES DONNÉ.

41. Reprenons les équations fondamentales :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & F + S = A + 2, \\
 (2) \quad & f_3 + f_4 + f_5 + \dots + f_n = F, \\
 (3) \quad & s_3 + s_4 + s_5 + \dots + s_p = S, \\
 (4) \quad & 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots + nf_n = 2A, \\
 (5) \quad & 3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \dots + ps_p = 2A,
 \end{aligned}$$

dans lesquelles (13)

$$(17) \quad n \leq \frac{1}{2} A, \quad p \leq \frac{1}{2} A.$$

Pour plus de symétrie, posons

$$(29) \quad \begin{cases} f_3 + s_3 = x_3, & f_4 + s_4 = x_4, \dots, & f_n + s_n = x_n \text{ (*)}, \\ f_3 - s_3 = y_3, & f_4 - s_4 = y_4, \dots, & f_n - s_n = y_n; \end{cases}$$

et nous aurons, au lieu des équations (1), (4), (5) :

$$\begin{aligned}
 (30) \quad & x_3 + x_4 + x_5 + \dots + x_n = A + 2, \\
 (31) \quad & 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + \dots + nx_n = 4A, \\
 (32) \quad & 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 + \dots + ny_n = 0.
 \end{aligned}$$

42. On tire, des équations (30), (31) :

$$\begin{aligned}
 (33) \quad & x_3 = X_1 - 4(X - 2), \\
 (34) \quad & x_4 = A - X_1 + 3(X - 2),
 \end{aligned}$$

en supposant

$$\begin{aligned}
 (35) \quad & X = x_5 + x_6 + \dots + x_n, \\
 (36) \quad & X_1 = 5x_5 + 6x_6 + \dots + nx_n.
 \end{aligned}$$

(*) On peut supposer $p = n$, attendu que, si le contraire arrive, le calcul donnera $s_n = 0$ ou $f_n = 0$.

En outre, les valeurs générales de y_3 et de y_4 , qui satisfont à l'équation (32), sont données par les deux formules

$$(37) \quad y_3 = Y_1 - 4\theta,$$

$$(38) \quad y_4 = 3\theta - Y_1,$$

dans lesquelles θ représente un entier quelconque, positif ou négatif, et

$$(39) \quad Y_1 = 5y_5 + 6y_6 + \dots + ny_n.$$

43. Dans la question de géométrie qui nous occupe, les *indéterminées* $\theta, x_5, x_6, \dots, x_n, y_5, y_6, \dots, y_n$ ne sont pas complètement arbitraires. En effet :

1° $x_5, x_6, x_7, \dots, x_n$ sont positives ou nulles.

2° Les conditions

$$x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0,$$

donnent

$$(40) \quad X \geq 4(X - 2),$$

$$(41) \quad X \leq A + 3(X - 2);$$

puis

$$X \leq A + 2,$$

condition évidente.

3° Les inconnues $f_5, s_5, f_6, s_6, \dots$ doivent être entières; donc l'on doit prendre $y_5, y_6, y_7, \dots$, *respectivement, de même parité que* $x_5, x_6, x_7, \dots$.

4° Les inconnues $f_3, s_3, f_4, s_4, \dots$ doivent être *positives*; donc les valeurs *absolues* de $y_5, y_6, y_7, \dots$ *ne doivent pas surpasser les valeurs des inconnues correspondantes* $x_5, x_6, x_7, \dots$.

5° Les conditions

$$x_3 + y_3 = \mathfrak{N} \cdot 2, \quad x_3 - y_3 = \mathfrak{N} \cdot 2,$$

se réduisent à

$$(x_6 + x_8 + x_{10} + \dots) \pm (y_5 + y_7 + y_9 + \dots) = \mathfrak{N} \cdot 2;$$

donc $x_6 + x_8 + x_{10} + \dots$ et $y_5 + y_7 + y_9 + \dots$ *doivent être de même parité.*

6° Les conditions

$$x_4 + y_4 = \mathfrak{N} \cdot 2, \quad x_4 - y_4 = \mathfrak{N} \cdot 2,$$

se réduisent à

$$A + (x_6 + x_8 + x_{10} + \dots) + \theta - (y_5 + y_7 + \dots) = \mathfrak{N} \cdot 2,$$

$$A + (x_6 + x_8 + x_{10} + \dots) - \theta + (y_5 + y_7 + \dots) = \mathfrak{N} \cdot 2;$$

ou, par ce qui précède, à

$$A \pm \theta = \mathfrak{N} \cdot 2,$$

donc θ doit être de même parité que A .

7° Les conditions

$$x_3 + y_3 \geq 0, \quad x_3 - y_3 \geq 0,$$

conduisent à ces deux-ci :

$$(42) \quad \theta \leq \frac{X_1 + Y_1}{4} - (X - 2),$$

$$(43) \quad \theta \geq \frac{Y_1 - X_1}{4} + (X - 2).$$

8° Enfin, les conditions

$$x_4 + y_4 \geq 0, \quad x_4 - y_4 \geq 0,$$

donnent

$$(44) \quad \theta \geq \frac{X_1 + Y_1 - A}{3} - (X - 2),$$

$$(45) \quad \theta \leq \frac{A + Y_1 - X_1}{3} + (X - 2).$$

44. L'élimination de θ , entre les quatre dernières inégalités, conduit aux conditions *surabondantes* :

$$X_1 \geq 4(X - 2), \quad X_1 + Y_1 \leq 4A, \quad X_1 \leq A + 3(X - 2), \quad X_1 - Y_1 \leq 4A.$$

La première et la troisième ont déjà été obtenues (40), (41). A cause des valeurs de X_1 , Y_1 , les deux autres conditions expriment, simplement, que les quantités $3f_3 + 4f_4$ et $3s_3 + 4s_4$ ne sont pas négatives.

45. *Application.* — Soit $A = 67$. On satisfait aux conditions 1°, 3°, 4° et 5° en prenant

$$x_5 = 3, \quad x_8 = 4, \quad x_{12} = 3,$$

$$y_5 = 1, \quad y_8 = -2, \quad y_{12} = 3.$$

Ces valeurs donnent

$$X = 10, \quad X_1 = 83, \quad Y_1 = 25;$$

de sorte que les relations (40), (41) sont vérifiées.

Les inégalités (42), (43), (44), (45) deviennent ensuite

$$\theta \leq 19, \quad \theta \geq -\frac{13}{2}, \quad \theta \geq \frac{17}{3}, \quad \theta \leq 11.$$

Donc, à cause de la condition 6°:

$$\theta = 7, \quad \theta = 9, \quad \theta = 11;$$

puis, par les formules (37) et (38):

$$y_3 = -3, \quad y_3 = -11, \quad y_3 = -19,$$

$$y_4 = -4, \quad y_4 = 2, \quad y_4 = 8.$$

D'ailleurs,

$$x_3 = 51, \quad x_4 = 8;$$

donc enfin

$$f_3 = 24, \quad f_3 = 20, \quad f_3 = 16;$$

$$s_3 = 27, \quad s_3 = 31, \quad s_3 = 35;$$

$$f_4 = 2, \quad f_4 = 5, \quad f_4 = 8;$$

$$s_4 = 6, \quad s_4 = 3, \quad s_4 = 0;$$

$$f_5 = 2, \quad f_8 = 1, \quad f_{12} = 3;$$

$$s_5 = 1, \quad s_8 = 3, \quad s_{12} = 0;$$

$$F = 32, \quad F = 31, \quad F = 30;$$

$$S = 37, \quad S = 38, \quad S = 39.$$

Considérons, par exemple, le polyèdre qui aurait pour éléments :

$$f_3 = 16, \quad f_4 = 8, \quad f_5 = 2, \quad f_8 = 1, \quad f_{12} = 3, \quad F = 30,$$

$$s_3 = 35, \quad s_4 = 0, \quad s_5 = 1, \quad s_8 = 3, \quad s_{12} = 0, \quad S = 39.$$

	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	8	8	8						
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	6	6	6	48
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	32
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	1	2	1	1	1	10		
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	8	
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	2	0	0	1	36

VI. — POLYÈDRES SEMI-RÉGULIERS.

J'admets en outre que, *dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les faces de même espèce sont égales*, et que, *dans tout polyèdre semi-régulier, du second genre, les angles polyèdres de même espèce sont égaux* (**).

(**) Cette définition, aussi bien que la plus grande partie du présent Mémoire, date de l'année dernière. Il y a quelques semaines, j'ai appris, par hasard, que les polyèdres semi-réguliers du *premier genre* sont connus presque tous depuis longtemps sous le nom de *solides d'Archimède*. NIL NOVI SUB SOLE!
(24 avril 1862).

Un *prisme triangulaire régulier*, dont les faces perpendiculaires aux bases sont des carrés, est un polyèdre *semi-régulier*, du premier genre.

Pour obtenir un polyèdre semi-régulier, du second genre, il suffit de placer symétriquement, par rapport à leur base commune ABC (*fig. 7, Pl. I*), deux *pyramides triangulaires* ABCD, ABCE, dont les hauteurs OD, OE soient égales au tiers de AB. En effet, d'après cette construction, le triangle BDE est égal au triangle équilatéral ABC; donc l'*angle tétraèdre B est régulier; etc.*

47. Les définitions précédentes, jointes à deux corollaires du Théorème d'Euler (10), prouvent que :

1° *Tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, a les arêtes égales entre elles;*

2° *Tout polyèdre semi-régulier, du second genre, a les angles dièdres égaux entre eux;*

3° *Dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les sommets sont trièdres, tétraèdres ou pentaèdres;*

4° *Dans tout polyèdre semi-régulier, du second genre, les faces sont triangulaires, quadrangulaires ou pentagonales.*

48. PROBLÈME. — *Quels sont les polyèdres semi-réguliers, du premier genre?*

Pour résoudre cette question, rappelons d'abord que : si, à chacun des sommets du polyèdre, se réunissent l faces de $n^{\text{ième}}$ espèce, l' faces de $n'^{\text{ième}}$ espèce, l'' faces de $n''^{\text{ième}}$ espèce, ..., on aura

$$(24) \quad nf_n = lS, \quad n'f_{n'} = l'S, \quad n''f_{n''} = l''S, \dots$$

De plus (47, 3°),

$$(46) \quad 3 \leq l + l' + l'' + \dots \leq 5.$$

Il s'agit donc de satisfaire à ces relations, par des valeurs entières de $n, n', n'', \dots, l, l', l'', \dots$

49. D'abord, si l'on élimine $f_n, f_{n'}, f_{n''}, \dots$ entre les équations (24)

et les équations fondamentales, on trouve

$$F = \left(\frac{l}{n} + \frac{l'}{n'} + \frac{l''}{n''} + \dots \right) S, \quad 2A = (l + l' + l'' + \dots) S;$$

donc, par le Théorème d'Euler,

$$S = \frac{4}{2 \left(\frac{l}{n} + \frac{l'}{n'} + \dots \right) + 2 - (l + l' + l'' + \dots)},$$

ou

$$(47) \quad S = \frac{4}{2 \left(\frac{l}{n} + \frac{l'}{n'} + \dots \right) + 2 - p};$$

en posant, pour abréger,

$$(48) \quad l + l' + l'' + \dots = p.$$

50. Remarques. — 1° Le nombre p , égal à 3, 4 ou 5 (46), désigne l'espèce des sommets du polyèdre.

2° Le nombre des inconnues $n, n', n'', \dots$, indique de combien d'espèces sont les faces du polyèdre. Parmi ces inconnues, il y en a au moins une égale à 3, 4 ou 5 (10, 1°).

3° Le dénominateur de la valeur de S doit, évidemment, être positif et plus petit que l'unité.

51. En désignant par D ce dénominateur, et en supposant, successivement, que les faces du polyèdre soient de deux, trois, quatre ou cinq espèces, nous trouvons les douze cas principaux suivants :

1°	$p = 3$	$l = 1, \quad l' = 2$	$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n'} \right) - 1$
2°	$p = 4$	$l = 1, \quad l' = 3$	$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n'} \right) - 2$
3°	$p = 4$	$l = 2, \quad l' = 2$	$D = 4 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) - 2$
4°	$p = 5$	$l = 1, \quad l' = 4$	$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n'} \right) - 3$
5°	$p = 5$	$l = 2, \quad l' = 3$	$D = 2 \left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n'} \right) - 3$
6°	$p = 3$	$l = 1, \quad l' = 1, \quad l'' = 1$	$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} \right) - 1$
7°	$p = 4$	$l = 1, \quad l' = 1, \quad l'' = 2$	$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{2}{n''} \right) - 2$
8°	$p = 5$	$l = 1, \quad l' = 1, \quad l'' = 3$	$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{3}{n''} \right) - 3$
9°	$p = 5$	$l = 1, \quad l' = 2, \quad l'' = 2$	$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n'} + \frac{2}{n''} \right) - 3$
10°	$p = 4$	$l = 1, \quad l' = 1, \quad l'' = 1, \quad l''' = 1$	$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \frac{1}{n'''} \right) - 2$
11°	$p = 5$	$l = 1, \quad l' = 1, \quad l'' = 1, \quad l''' = 2$	$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \frac{2}{n'''} \right) - 3$
12°	$p = 5$	$l = 1, \quad l' = 1, \quad l'' = 1, \quad l''' = 1, \quad l^{iv} = 1$	$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \frac{1}{n'''} + \frac{1}{n^{iv}} \right) - 3$

52. Les hypothèses 5°, 8°, 9°, 10°, 11° et 12° peuvent être immédiatement rejetées. En effet :

1° La somme des fractions $\frac{2}{n}, \frac{3}{n'}$ est, tout au plus, égale à

$$\frac{2}{4} + \frac{3}{3} = \frac{3}{2};$$

donc elle rendrait négatif le dénominateur D.

2° La somme des fractions $\frac{1}{n}, \frac{1}{n'}, \frac{1}{n''}$ est, tout au plus, égale à

$$\frac{3}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{29}{20};$$

donc elle ne surpasse pas $\frac{3}{2}$.

3° La somme des fractions $\frac{1}{n}, \frac{2}{n'}, \frac{2}{n''}$ est, tout au plus, égale à

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30};$$

donc elle ne surpasse pas $\frac{3}{2}$.

Etc.

53. A cause de $D > 0$, $D < 1$, les *six* autres cas principaux se décomposent comme il suit :

CAS PRINCIPAUX.	CAS SECONDAIRES.
$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n'} \right) - 1$	$n = 3, \quad n' < 12$ $n = 4, \quad n' < 8$ $n = 5, \quad n' < 7$ $n' = 3, \quad n > 5$ $n' = 4, \quad n > 5$ $n' = 5, \quad n < 10$
$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n'} \right) - 2$	$n = 3, \quad n' = 4$ $n = 4, \quad n' = 3$ $n = 5, \quad n' = 3$ $n' = 3, \quad n > 5$
$D = 4 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) - 2$	$n = 3, \quad n' = 4$ $n = 5, \quad n' = 3$
$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n'} \right) - 3$	$n = 4, \quad n' = 3$ $n = 5, \quad n' = 3$
$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} \right) - 1$	$n = 3, \quad \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} > \frac{1}{6}$ $n = 4, \quad \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} > \frac{1}{4}$ $n = 5, \quad \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} > \frac{3}{10}$
$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} \right) - 2$	$n = 3, \quad n' = 5, \quad n'' = 4$ $n'' = 3, \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{n'} > \frac{1}{3}$

54. Au moyen des considérations suivantes, le nombre des cas *secondaires* peut être réduit.

1° $p=3$, $l=1$, $l'=2$. A chacun des sommets du polyèdre, tels que A, B (*fig. 8, Pl. I*), aboutissent une face P, de n côtés, et deux faces Q, de n' côtés. Par conséquent, *les faces adjacentes à Q, prises de deux en deux, sont de même espèce*; ce qui exige que n' soit pair.

2° $p=4$, $l=2$, $l'=2$. Si deux faces adjacentes pouvaient être égales, les nombres n , n' seraient *pairs*. A cause de $n=3$, *chaque face triangulaire est adjacente à trois faces carrées ou à trois faces pentagonales* (*).

3° $p=3$, $l=1$, $l'=1$, $l''=1$. Les nombres n , n' , n'' doivent être *pairs* (1°). En même temps, si l'on suppose $n'' > n'$, l'égalité

$$\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} > \frac{1}{4}$$

donne

$$n' < 8.$$

4° $p=4$, $l=1$, $l'=1$, $l''=2$, $n''=3$. Les triangles qui forment deux des faces de chaque angle polyèdre ne peuvent être adjacents, comme ABC, ABD (*fig. 9, Pl. I*); car l'égalité des angles polyèdres exigerait que les faces P, Q fussent triangulaires. D'un autre côté, si les faces triangulaires étaient disposées comme on le voit *fig. 10, Pl. I*, les faces P, Q, R devraient être égales, contrairement à l'hypothèse. Donc *le polyèdre est impossible*.

55. Le tableau précédent peut donc être ainsi modifié :

(*) Si le polyèdre est possible.

CAS PRINCIPAUX.	CAS SECONDAIRES.
$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n'} \right) - 1$ $l = 1, \quad l' = 2.$	$n = 3, \quad n' = 4, 6, 8, 10$ $n = 4, \quad n' = 6$ $n = 5, \quad n' = 6$ $n' = 4, \quad n > 5$
$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n'} \right) - 2$ $l = 1, \quad l' = 3$	$n = 3, \quad n' = 4$ $n > 3, \quad n' = 3$
$D = 4 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) - 2$ $l = 2, \quad l' = 2$	$n = 3, \quad n' = 4$ $n = 3, \quad n' = 5$
$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n'} \right) - 3$ $l = 1, \quad l' = 4$	$n = 4, \quad n' = 3$ $n = 5, \quad n' = 3$
$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} \right) - 1$ $l = 1, \quad l' = 1, \quad l'' = 1$	$n = 4, \quad n' = 6, \quad n'' = 8, 10$
$D = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{2}{n''} \right) - 2$ $l = 1, \quad l' = 1, \quad l'' = 2$	$n = 3, \quad n' = 5, \quad n'' = 4$

56. Si l'on substitue ces valeurs dans les formules (47) et (24), et que l'on ait égard au Théorème d'Euler, on arrive aux résultats indiqués dans ce nouveau tableau (*) :

(*) On a fait abstraction du cas de $l = 1, l' = 2, n = 3, n' = 4$, parce qu'il est compris dans la ligne VI.

	l	l'	l''	n	n'	n''	S	f_n	$f_{n'}$	$f_{n''}$	F	A
I	1	2		3	6		12	4	4		8	18
II	1	2		3	8		24	8	6		14	36
III	1	2		3	10		60	20	12		32	90
IV	1	2		4	6		24	6	8		14	36
V	1	2		5	6		60	12	20		32	90
VI	1	2		n	4		$2n$	2	n		$n+2$	$3n$
VII	1	3		3	4		24	8	18		26	48
VIII	1	3		n	3		$2n$	2	$2n$		$2n+2$	$4n$
IX	2	2		3	4		12	8	6		14	24
X	2	2		3	5		30	20	12		32	60
XI	1	4		4	3		24	6	32		38	60
XII	1	4		5	3		60	12	80		92	150
XIII	1	1	1	4	6	8	48	12	8	6	26	72
XIV	1	1	1	4	6	10	120	30	20	12	62	180
XV	1	1	2	3	5	4	60	20	12	30	62	120

57. D'après la discussion précédente, *il n'y a pas de polyèdres semi-réguliers, du premier genre, autres que ceux dont les éléments sont contenus dans ce tableau.* Il reste à constater l'existence de ceux-ci, et à déterminer les moyens de les construire. C'est ce que nous ferons tout à l'heure, après avoir établi quelques propositions propres à simplifier la suite de cette discussion.

58. PROBLÈME. — *Décomposer la surface d'une sphère en polygones réguliers.*

Si l'on veut que les polygones de même espèce soient égaux entre eux, et qu'autour de deux sommets quelconques les angles égaux se succèdent dans le même ordre, ce nouveau problème ne diffère pas, au fond, de

celui que nous avons principalement en vue. Considérons, en effet, le polyèdre dont les sommets coïncident avec ceux de la figure sphérique, et conservons les notations précédentes : les lettres S, F, A représenteront, respectivement, le nombre des points *distribués régulièrement sur la sphère*, le nombre des polygones sphériques, et le nombre des arcs de grands cercles, tous égaux entre eux, tracés sur la sphère. De même, f_n désignera le nombre des polygones sphériques de $n^{\text{ième}}$ espèce; etc. Soit, en outre, x_n l'angle de ce polygone sphérique. En exprimant que la surface de la sphère est égale à la somme des polygones sphériques qui la composent, et en prenant pour unité le rayon de la sphère, nous avons d'abord

$$\sum [nx_n - (n-2)\pi]f_n = 4\pi;$$

ou, à cause des relations (24),

$$nf_n = lS, \quad n'f_{n'} = l'S, \quad n''f_{n''} = l''S, \dots : \\ \sum \left[lx_n - \left(1 - \frac{2}{n} \right) l\pi \right] S = 4\pi.$$

La somme des angles sphériques réunis autour d'un sommet quelconque est égale à quatre droits; donc

$$(49) \quad \sum lx_n = 2\pi;$$

en sorte que l'équation précédente se réduit à

$$S = \frac{4}{2 - \sum l + 2 \sum \frac{l}{n}}.$$

Celle-ci ne diffère pas de l'équation (47). Conséquemment, ainsi que nous l'avons annoncé, la recherche des polyèdres *semi-réguliers*, du premier genre, se réduit à la décomposition, en polygones réguliers, d'une surface sphérique : à chaque élément de la première figure correspond un élément de la seconde, et *vice versa*. De plus, il est évident que si un polyèdre a pour sommets les sommets de la figure sphérique, et pour arêtes les cordes des côtés de celle-ci, ce polyèdre est *semi-régulier*.

59. THÉORÈME. — *Tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, est inscriptible.*

Soit P un polyèdre semi-régulier donné. Soit P' un polyèdre semi-régulier, de même espèce que P, et inscrit à une sphère. Si ces deux figures ont les arêtes égales, ce que l'on peut toujours supposer, *les deux polyèdres ont leurs faces égales chacune à chacune et semblablement disposées*; donc, par le Théorème de Cauchy, ils sont égaux. Conséquemment, le polyèdre P est inscriptible.

60. COROLLAIRE I. — *Dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les angles dièdres, déterminés par des faces respectivement égales, sont égaux entre eux.*

Soient ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig. 11, Pl. I*) deux faces égales, et ABGF, A'B'G'F' deux autres faces égales, adjacentes aux premières. Abaissons, du centre O de la sphère circonscrite au polyèdre, les perpendiculaires OP, OQ, OP', OQ' sur ces diverses faces, et menons encore les apothèmes PR, QR, P'R', Q'R'. Les quadrilatères inscriptibles OPRQ, OP'R'Q' sont égaux, comme ayant les côtés respectivement égaux. Donc

$$\widehat{\text{PRQ}} = \widehat{\text{P'R'Q'}}.$$

61. COROLLAIRE II. — *Dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les sommets adjacents à un sommet donné sont situés sur une circonférence ayant pour pôle le sommet donné.*

62. D'après le théorème précédent, la détermination des éléments d'un polyèdre semi-régulier P se réduit à un simple problème de Trigonométrie sphérique. Soit ABCD... (*fig. 12, Pl. I*) le polygone sphérique de n côtés, correspondant à une face de P; soit O le pôle du petit cercle passant par les sommets de ce polygone. Si l'on abaisse l'arc OP perpendiculaire à AB, et que l'on fasse

$$\widehat{\text{ABC}} = x_n, \quad \overline{\text{arc AB}} = y,$$

on aura, par le moyen du triangle APO,

$$(50) \quad \cos \frac{1}{2} y = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{1}{2} x_n} = \frac{\cos \frac{\pi}{n'}}{\sin \frac{1}{2} x_{n'}} = \frac{\cos \frac{\pi}{n''}}{\sin \frac{1}{2} x_{n''}} = \dots$$

Ces relations, jointes à l'équation (49), permettront de calculer les angles $\gamma, x_n, x_{n'}, x_{n''}, \dots$, lorsque les valeurs de $n, n', n'', \dots, l, l', l'', \dots$ seront connues.

63. Représentons par z_n l'arc AO, c'est-à-dire le *rayon sphérique* du petit cercle ABCD. . . .

Le même triangle APO donne encore :

$$(51) \quad \sin z_n = \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma}{\sin \frac{\pi}{n}}, \quad \cos z_n = \cot \frac{1}{2} x_n \cot \frac{\pi}{n}.$$

Il est visible que $\sin z_n$ représente le *rayon du petit cercle* ABCD. . . . Par conséquent, la face ABCD. . . du polyèdre P a pour mesure

$$n \sin^2 z_n \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n},$$

ou

$$n \sin^2 \frac{1}{2} \gamma \cot \frac{\pi}{n}.$$

Donc, en désignant par Π la somme des aires de toutes les faces, on a

$$\Pi = \sin^2 \frac{1}{2} \gamma \sum n f_n \cot \frac{\pi}{n};$$

ou, à cause des relations (24),

$$(52) \quad \Pi = S \sin^2 \frac{1}{2} \gamma \sum l \cot \frac{\pi}{n}.$$

On conclut immédiatement de là, pour le volume V du polyèdre,

$$(53) \quad V = \frac{1}{3} S \sin^2 \frac{1}{2} \gamma \sum l \cot \frac{\pi}{n} \cos z_n.$$

De plus, l'arête du polyèdre est représentée par

$$(54) \quad a = 2 \sin \frac{1}{2} \gamma.$$

64. Dans la figure du n° 60, l'angle PRQ, qui mesure l'inclinaison des faces AG, AD, est égal à la somme des angles PRO, QRO.

Or,

$$\cos PRO = \frac{PR}{OR}, \quad \cos QRO = \frac{QR}{OR}.$$

D'ailleurs,

$$PR = PA \cos \frac{\pi}{n} = \sin z_n \cos \frac{\pi}{n} = \sin \frac{1}{2} \gamma \cot \frac{\pi}{n},$$

$$QR = \sin \frac{1}{2} \gamma \cot \frac{\pi}{n'}, \quad OR = \cos \frac{1}{2} \gamma;$$

donc

$$\cos PRO = \frac{\tan \frac{1}{2} \gamma}{\tan \frac{\pi}{n}}, \quad \cos QRO = \frac{\tan \frac{1}{2} \gamma}{\tan \frac{\pi}{n'}}.$$

Par suite, l'angle dièdre PRQ est déterminé par la formule

$$(55) \quad R = \arccos \left(\frac{\tan \frac{1}{2} \gamma}{\tan \frac{\pi}{n}} \right) + \arccos \left(\frac{\tan \frac{1}{2} \gamma}{\tan \frac{\pi}{n'}} \right).$$

Il en résulte que la somme des angles dièdres, pour un sommet quelconque du polyèdre, est

$$(56) \quad \sum R = 2 \sum l \arccos \left(\frac{\tan \frac{1}{2} \gamma}{\tan \frac{\pi}{n}} \right).$$

Cette dernière relation paraît assez remarquable, si on la compare à l'équation qui donne $\frac{1}{2} \gamma$. En effet, à cause des relations (49) et (50), on a

$$(57) \quad \Pi = \sum l \arcsin \left(\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{1}{2} \gamma} \right).$$

Énumération et construction des polyèdres du premier genre.

65. Reprenons le tableau de la page 32, et examinons si les polyèdres semi-réguliers dont les éléments y sont inscrits existent réellement, ou, ce

qui est équivalent (58), s'il est possible de décomposer la surface d'une sphère en F polygones réguliers, parmi lesquels il y en ait f_n de $n^{\text{ième}}$ espèce, $f_{n'}$ de $n'^{\text{ième}}$ espèce, etc.

66.

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 1, \quad l' = 2, \quad n = 3, \quad n' = 6, \quad f_3 = 4, \quad f_6 = 4, \\ F = 8, \quad S = 12, \quad A = 18. \end{array} \right.$$

Octaèdre à faces triangulaires et hexagonales. — Pour construire ce polyèdre, représenté dans l'épure I (*fig. 32, Pl. II*), il suffit de couper par quatre plans un *tétraèdre régulier*, de manière que ses faces deviennent des *hexagones réguliers*.

67.

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 1, \quad l' = 2, \quad n = 3, \quad n' = 8, \quad f_3 = 8, \quad f_8 = 6, \\ F = 14, \quad S = 24, \quad A = 36. \end{array} \right.$$

Décatétraèdre à faces triangulaires et octogonales. — Ce polyèdre résulte du cube, tronqué de manière que ses faces deviennent des octogones réguliers, épure II (*fig. 36, Pl. II*).

68.

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 1, \quad l' = 2, \quad n = 3, \quad n' = 10, \quad f_3 = 20, \quad f_{10} = 12, \\ F = 32, \quad S = 60, \quad A = 90. \end{array} \right.$$

Triacontadoèdre à faces triangulaires et décagonales. — Cette figure est un dodécaèdre, tronqué de manière que ses faces deviennent des décagones réguliers, épure III (*fig. 37, Pl. III*).

69.

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 1, \quad l' = 2, \quad n = 4, \quad n' = 6, \quad f_4 = 6, \quad f_6 = 8, \\ F = 14, \quad S = 24, \quad A = 36. \end{array} \right.$$

Décatétraèdre à faces carrées et hexagonales, déduit de l'octaèdre régulier, épure IV (*fig. 38, Pl. III*).

70.

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 1, \quad l' = 2, \quad n = 5, \quad n' = 6, \quad f_5 = 12, \quad f_6 = 20, \\ F = 32, \quad S = 60, \quad A = 90. \end{array} \right.$$

Triacontadoèdre à faces pentagonales et hexagonales, déduit de l'icosaèdre régulier, épure V (fig. 40, Pl. III).

71.

$$(VI) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 1, \quad l' = 2, \quad n = n, \quad n' = 4, \quad f_n = 2, \quad f_4 = n, \\ F = n + 2, \quad S = 2n, \quad A = 3n. \end{array} \right.$$

Prisme régulier, à faces latérales carrées, épure VI (fig. 43, Pl. III).

72.

$$(VII) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 1, \quad l' = 3, \quad n = 3, \quad n' = 4, \quad f_3 = 8, \quad f_4 = 18, \\ F = 26, \quad S = 24, \quad A = 48. \end{array} \right.$$

Icohexaèdre à faces triangulaires et carrées.

Les équations (49) et (50) deviennent

$$x_3 + 3x_4 = 2\pi, \quad \cos \frac{1}{2}y = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}x_3} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{1}{2}x_4}.$$

On tire de celles-ci, par un calcul facile ;

$$\sin \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{4}\sqrt{12 - 2\sqrt{2}}, \quad \sin \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{4}\sqrt{6 - \sqrt{2}}, \quad \cos \frac{1}{2}y = \sqrt{\frac{12 + 2\sqrt{2}}{17}}.$$

La formule (55) donne ensuite, pour l'angle de deux faces carrées,

$$\cos \frac{1}{2}R = \tan \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}};$$

d'où

$$\cos R = -\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, l'inclinaison de deux faces carrées adjacentes est égale à 135 degrés. De là résulte que les faces carrées, prises deux à deux, sont parallèles, perpendiculaires, ou inclinées à 135 degrés.

73. La même formule (55) donne, pour l'*inclinaison* R' d'une face triangulaire et d'une face carrée,

$$\cos R' = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[2 - \sqrt{2} - \sqrt{(2 + \sqrt{2})(10 + \sqrt{2})} \right];$$

ou, plus simplement,

$$\cos R' = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

74. La distance des faces carrées au centre de la sphère a pour expression, d'après la formule (51),

$$\cos z_4 = \cot \frac{1}{2} x_4 = \sqrt{\frac{7 + 4\sqrt{2}}{17}}.$$

Par conséquent, la distance entre deux faces carrées parallèles (72) est

$$d = 2\sqrt{\frac{7 + 4\sqrt{2}}{17}}.$$

Enfin, à cause de

$$a = 2 \sin \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{2}}{17}},$$

on trouve

$$\frac{a}{d} = \sqrt{2} - 1.$$

75. De ces résultats on déduit la construction suivante :

A un cube donné $abcd a'b'c'd'$ (*fig. 28, Pl. II*), ayant pour arête d , on inscrit le prisme octogonal régulier $ef \dots lm e'f' \dots l'm'$. Sur les faces latérales de ce prisme, on trace les droites $AB, IK, BC, KL, \dots$, parallèles aux plans des deux bases, de manière à déterminer les carrés $ABIK, BCKL, \dots$, tous égaux entre eux, et concentriques avec les faces qui les contiennent. Sur les deux bases du prisme, on mène les droites $eh, mi, fl, gk, e'h', m'i', f'l', g'k'$: elles déterminent deux carrés $VXYZ, RSTU$, égaux aux premiers. Opérant ensuite des *troncatures*, au moyen des seize plans $ABV, BCVX, \dots, IKR$, on obtient enfin l'*icohexaèdre demandé*.

Ce polyèdre est représenté, par ses deux projections, sur l'épure VII (*fig. 39, Pl. III*).

76.

$$(VIII) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 1, \quad l' = 3, \quad n = n, \quad n' = 3, \quad f_n = 2, \quad f_3 = n, \\ F = n + 2, \quad S = 2n, \quad A = 3n. \end{array} \right.$$

Polyèdre semi-régulier, à faces latérales triangulaires (*). — Soient, dans deux plans parallèles, deux polygones réguliers égaux, *tellement disposés, que les rayons* r *de l'un correspondent aux apothèmes* b *de l'autre*. Si la distance d des deux plans est moyenne proportionnelle entre $r - b$ et $2r + 4b$, les droites $Aa, Ba, Bb, Cb, \dots$, seront égales aux côtés des deux polygones (*fig. 29, Pl. II*). Par conséquent, le polyèdre $ABC \dots abc \dots$ aura, pour faces latérales, des triangles équilatéraux, assemblés trois à trois, etc.

L'épure VIII (*fig. 45, Pl. IV*) représente les cas de $n = 4, n = 5, n = 6$.

77.

$$(IX) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 2, \quad l' = 2, \quad n = 3, \quad n' = 4, \quad f_3 = 8, \quad f_4 = 6, \\ F = 14, \quad S = 12, \quad A = 24. \end{array} \right.$$

Décatétraèdre à faces triangulaires et carrées. — Cette figure est un cube, tronqué de manière que ses faces restent des carrés, épure IX (*fig. 46, Pl. IV*).

78.

$$(X) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 2, \quad l' = 2, \quad n = 3, \quad n' = 5, \quad f_3 = 20, \quad f_5 = 22, \\ F = 32, \quad S = 30, \quad A = 60. \end{array} \right.$$

Triacontadoèdre à faces triangulaires et pentagonales. — Pour le construire, il suffit (68) d'opérer des troncatures dans un dodécaèdre régulier, de sorte que les faces restent des pentagones réguliers, épure X (*fig. 44, Pl. IV*).

79.

$$(XI) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 1, \quad l' = 4, \quad n = 4, \quad n' = 3, \quad f_4 = 6, \quad f_3 = 32, \\ F = 38, \quad S = 24, \quad A = 60. \end{array} \right.$$

(*) Si le mot *prisme* n'éveillait pas l'idée de faces latérales parallélogrammiques, peut-être pourrait-on appeler ce polyèdre : *prisme régulier tordu*.

La possibilité du *Triacontaoctaèdre* ABCDE... (*fig. 30, Pl. II*) est bien plus difficile à démontrer que celle des polyèdres précédents. Pour la mettre hors de doute, nous appliquerons d'abord les équations (50). Elles deviennent, à cause de

$$\cos \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}, \quad x_4 + 4x_3 = 2\pi :$$

$$\cos \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{\sqrt{2} \sin 2x_3} = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} x_3}.$$

La dernière donne, par un calcul facile,

$$4 \cos^3 x_3 + 4 \cos^2 x_3 - 1 = 0;$$

ou, en posant

$$(58) \quad \cos x_3 = \frac{1}{\nu} :$$

$$(59) \quad \nu^3 - 4\nu - 4 = 0.$$

La racine réelle de cette équation a pour valeur

$$\nu = 2,382975770.$$

On conclut de là :

$$x_3 = 65^\circ 11' 16'', 5, \quad x_4 = 99^\circ 14' 54'', \quad \gamma = 43^\circ 41' 27''.$$

De plus,

$$a = 2 \sin \frac{1}{2} \gamma = 0,744205.$$

80. D'après la formule (55), les angles dièdres BF, CF, CL, . . . , *égaux entre eux* (60), ont pour valeur

$$R = 2 \arccos \left(\frac{\tan \frac{1}{2} \gamma}{\sqrt{3}} \right);$$

c'est-à-dire que

$$\cos \frac{1}{2} R = \frac{\tan \frac{1}{2} \gamma}{\sqrt{3}}.$$

Le calcul logarithmique donne

$$R = 153^{\circ} 14' 5''.$$

On trouve, de la même manière, que les angles dièdres BC, AB, . . . , sont donnés par la formule

$$R' = \arccos \left(\frac{\tan \frac{1}{2} \gamma}{\sqrt{3}} \right) + \arccos \left(\tan \frac{1}{2} \gamma \right).$$

On en déduit

$$R' = 76^{\circ} 37' 2'', 4 + 66^{\circ} 21' 58'', 2 = 142^{\circ} 59' 1''.$$

81. Soient Ω, Ω' les centres des carrés sphériques ABCD, FPQL (*fig. 13, Pl. I*). Il est visible que les arcs de grands cercles $\Omega\Omega'$ et CF se coupent en leur milieu commun m . Conséquemment, si nous conservons les notations précédentes, et que nous désignons $\Omega\Omega'$ par δ , nous aurons

$$\cos \frac{1}{2} \delta = \cos z_4 \cos \frac{1}{2} \gamma + \sin z_4 \sin \frac{1}{2} \gamma \cos \left(\frac{1}{2} x_4 + x_3 \right).$$

Or :

$$\cos \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos x_3)}} = \sqrt{\frac{\nu}{2(\nu - 1)}}, \quad \sin \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{\nu - 2}{2(\nu - 1)}},$$

$$\sin z_4 = \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu - 1}}, \quad \cos z_4 = \frac{1}{\sqrt{\nu - 1}}, \quad \cos \left(\frac{1}{2} x_4 + x_3 \right) = -\cos x_3 = -\frac{1}{\nu};$$

donc

$$\cos \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{(\nu - 1)\sqrt{2}} \left(\sqrt{\nu} - \frac{\nu - 2}{\nu} \right).$$

Mais, si l'on multiplie le premier membre de l'équation (59) par $\nu - 1$, on reconnaît que l'équation résultante peut être mise sous la forme

$$(60) \quad \nu \sqrt{\nu} = \nu^2 - 2;$$

donc

$$\cos \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, l'arc $\Omega\Omega'$ est égal à un *quadrans*. Autrement dit, *les plans des faces*

carrées voisines, telles que ABCD, FPQL, *sont perpendiculaires entre eux*. Cette conclusion était facile à prévoir.

82. Dans le triangle ΩCm :

$$C = \frac{1}{2}x_4 + x_3, \quad Cm = \frac{1}{2}y, \quad C\Omega = z_4, \quad \Omega m = \frac{\pi}{4};$$

donc

$$\sin \Omega = \sqrt{2} \sin \frac{1}{2}y \sin x_3;$$

ou, par la substitution des valeurs précédentes,

$$\sin \Omega = \frac{1}{\nu} \sqrt{\nu^2 - \nu - 2}.$$

Au moyen de la relation (60), on réduit cette valeur à

$$\sin \Omega = \sqrt{\frac{\sqrt{\nu} - 1}{\nu}},$$

par suite,

$$\Omega = 28^\circ 31' 53'', 2.$$

83. La distance des faces carrées au centre du polyèdre a pour expression

$$\cos z_4 = \frac{1}{\sqrt{\nu} - 1} = 0,850\,340.$$

On conclut de là

$$\frac{a}{d} = \sqrt{\frac{\nu - 2}{2}} = 0,437\,593,$$

d étant la distance comprise entre deux faces carrées parallèles.

84. Il est maintenant facile de construire le *Triacontaoctaèdre*. Sur les faces d'un cube ayant pour arête d , on trace des carrés ABCD, LFPQ, MGRS, IHTU, KENO, VXYZ (*fig. 30, Pl. II*), concentriques avec ces faces, et dont les côtés, égaux à $d.0,439\,593$, soient inclinés de $73^\circ 31' 53'', 2$ sur les arêtes du cube. Opérant alors des troncatures, au moyen des *trente-deux plans* ABE, BCF, CFL, . . . , on obtient enfin le polyèdre représenté sur l'épure XI (*fig. 48, Pl. IV*).

85.

$$(XII) \quad \left\{ \begin{array}{l} l=1, \quad l'=4, \quad n=5, \quad n'=3, \quad f_3=12, \quad f_3=80, \\ F=92, \quad S=60, \quad A=150. \end{array} \right.$$

L'*Ennécontadoèdre* se déduit du dodécaèdre régulier, à peu près comme le Triacontadoèdre du cube. D'abord, les relations (50) et suivantes, appliquées à ce nouveau polyèdre, donnent, en supposant $\cos \frac{1}{2} x_3 = s$:

$$\cos \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2\sqrt{1-s^2}}, \quad \sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3-4s^2}{1-s^2}}, \quad \sin \frac{1}{2} R = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \cos \frac{1}{2} \delta,$$

$$\sin z_3 = \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma}{\sin \frac{\pi}{5}}, \quad \sin \Omega = 2s \sin \frac{\pi}{5} \sqrt{3-4s^2}, \quad a = \sqrt{\frac{3-4s^2}{1-s^2}}.$$

L'équation qui donne $\cos \frac{1}{2} x_3$ est

$$s^3 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{5} = 0,$$

ou

$$s^3 - \frac{1}{2}s - 0,202\,254\,249 = 0.$$

On trouve

$$s = 0,857\,780\,75 \dots$$

Par suite:

$$x_3 = 61^\circ 51' 48'', \quad \Omega = 13^\circ 54' 42'', \quad \frac{a}{c} = 0,649\,979,$$

c étant l'arête du dodécaèdre régulier inscrit à la sphère de rayon 1. Si donc, après avoir construit ce dodécaèdre, on trace sur ses diverses faces des pentagones réguliers concentriques avec celles-ci, et dont les côtés, égaux à $c \cdot 0,649\,979$, soient inclinés de $22^\circ 5' 18''$ sur les arêtes voisines; qu'enfin l'on opère des troncatures, au moyen de *quatre-vingts* plans convenablement menés, on obtiendra le polyèdre représenté dans l'épure XII (*fig. 49, Pl. V*).

86.

$$(XIII) \quad \left\{ \begin{array}{l} l=1, \quad l'=1, \quad l''=1, \quad n=4, \quad n'=6, \quad n''=8, \\ f_4=12, \quad f_6=8, \quad f_8=6, \quad F=26, \quad S=48, \quad A=72. \end{array} \right.$$

Icohexaèdre à faces carrées, hexagonales et octogonales. — Ce polyèdre est inscriptible à un cube formé par les prolongements des faces orthogonales.

De plus, les formules du n° 63 prouvent que le rapport entre l'arête a de l'icohexaèdre et l'arête c du cube, a pour valeur $\frac{2\sqrt{2}-1}{7}$. D'après cela, il est facile de construire le premier polyèdre au moyen du second.

Sur les diagonales ac , bd de la face $abcd$ (*fig. 34, Pl. II*), on prend

$$al = bm = ci = dk = \frac{2}{7}ac - \frac{1}{7}ab.$$

On construit le carré $lmik$, auquel on inscrit l'octogone régulier $ABCDEFGH$. On fait la même construction sur les autres faces du cube. Il ne reste plus ensuite qu'à faire passer les plans $ABX, V_1, CDPQ, EFRS, \dots$, et les plans $BCQIY, X_1, DESTOP, FGL, K_1, ZR, \dots$, pour obtenir l'icohexaèdre.

87. Cette figure se projette, sur le plan de la face $RS \dots YZ$, suivant un octogone régulier, entouré de quatre rectangles et de six hexagones, épure XIII (*fig. 47, Pl. IV*).

L'angle dièdre suivant RS (*fig. 34*) a pour cosinus $-\sqrt{\frac{1}{2}}$; cet angle est donc égal à $\frac{3}{2}$ angle droit; etc.

88. Remarque. — Si l'on représente par α, β, γ les trois faces de l'angle trièdre S , et par A, B, C les angles dièdres opposés à ces faces, on trouve, à cause de

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{2}{3}\pi, \quad \gamma = \frac{3}{4}:$$

$$\cos A = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos B = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos C = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Par conséquent

$$A + C = \frac{3}{2} \pi,$$

et

$$A + B + C = \frac{9}{4} \pi.$$

Ainsi, lorsqu'un angle trièdre a pour faces un carré, un hexagone régulier et un octogone régulier, la somme des trois angles dièdres est égale à $\frac{9}{2}$ d'angle droit.

89.

$$(XIV) \quad \begin{cases} l=1, & l'=1, & l''=1, & n=4, & n'=6, & n''=10, \\ f_4=30, & f_6=20, & f_{10}=12, & F=62, & S=120, & A=180. \end{cases}$$

Hexécontadoèdre à faces carrées, hexagonales et décagonales. — On reconnaît sans peine qu'il est inscriptible à un dodécaèdre régulier, formé par les prolongements des faces décagonales, et qu'il est également inscriptible à un icosaèdre régulier, formé par les prolongements des faces hexagonales.

Cela posé, les équations (49) et suivantes deviennent

$$x_4 + x_6 + x_{10} = 2\pi,$$

$$\cos \frac{1}{2} \gamma = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sin \frac{1}{2} x_4} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{3}}{\sin \frac{1}{2} x_6} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sin \frac{1}{2} x_{10}}.$$

On tire, de celles-ci:

$$\cos \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{6(35 + 2\sqrt{5})}{241}}, \quad \sin \frac{1}{2} x_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{35 - 2\sqrt{5}}{15}},$$

$$\sin \frac{1}{2} x_6 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{35 - 2\sqrt{5}}{10}}, \quad \sin \frac{1}{2} x_{10} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{33 + 5\sqrt{5}}{3}}.$$

On a ensuite:

$$\cos z_{10} = \cot \frac{1}{2} x_{10} \cot \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{15 - 5\sqrt{5}}{33 + 5\sqrt{5}}} \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} - 1},$$

$$a = 2 \sin \frac{1}{2} \gamma = 2 \sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}}.$$

Soit c l'arête du dodécaèdre circonscrit au polyèdre. On a, par une formule connue,

$$\cos z_{10} = \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}};$$

d'où

$$c = \sqrt{\frac{50(5 + \sqrt{5})(33 - 5\sqrt{5})}{241(25 + 11\sqrt{5})}}.$$

Enfin, divisant la valeur de a par celle de c , on obtient, toutes réductions faites,

$$(61) \quad \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5} + 1}{10} = \frac{2}{5} \cos \frac{\pi}{5}.$$

90. On peut arriver plus simplement à ce dernier résultat. ABC, ABD, CBD (*fig. 14, Pl. I*) étant trois faces du dodécaèdre régulier, formant un même angle trièdre, traçons sur chacune d'elles un décagone régulier, concentrique avec la face considérée, ayant cinq côtés parallèles à ceux de cette même face. Menons ensuite les droites aa' , bb' , $c'c''$, $d'd''$, ... : il résultera, de cette construction, un polyèdre à *soixante-deux faces rectangulaires, hexagonales et décagonales*. Par conséquent, si $aa' = ab$, ce polyèdre sera l'hexécontadoèdre semi-régulier.

Or, en appelant p , P les apothèmes Op , OP , et A l'angle dièdre du dodécaèdre, on a

$$p = \frac{1}{2} a \cot \frac{\pi}{10}, \quad P = \frac{1}{2} c \cot \frac{\pi}{5}, \quad \cos A = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

D'un autre côté, la condition $aa' = ab$ équivaut à

$$a = 2 \cdot (P - p) \sin \frac{1}{2} A.$$

Conséquemment,

$$a = \left[c \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - a \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} - 1} \right] \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}};$$

etc.

91. Si, du milieu de l'arête AB, on abaisse PR perpendiculaire à OB,

on a

$$PR = \frac{1}{2} c \sin OBP = \frac{1}{2} c \cos \frac{\pi}{5};$$

donc

$$a = \frac{4}{5} PR.$$

De là résulte la construction de l'hexécontadoèdre représenté, par ses deux projections, dans l'épure XIV (*fig. 50, Pl. V*).

92. Soient, comme au n° 88, α, β, γ les trois faces de chacun des angles trièdres de l'hexécontadoèdre, et A, B, C les angles dièdres opposés. On a

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{2}{3} \pi, \quad \gamma = \frac{4}{5} \pi.$$

Il en résulte

$$\cos A = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}}, \quad \cos B = -\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}, \quad \cos C = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}};$$

puis

$$\cos (A + B) = \sin C;$$

et enfin

$$A + B + C = \frac{5}{2} \pi.$$

Par conséquent, *lorsqu'un angle trièdre a pour faces un carré, un hexagone régulier et un décagone régulier, la somme des trois angles dièdres est égale à cinq angles droits.*

93.

$$(XV) \quad \begin{cases} l = 1, & l' = 1, & l'' = 2, & n = 3, & n' = 5, & n'' = 4, \\ f_3 = 20, & f_5 = 12, & f_4 = 30, & F = 62, & S = 20, & A = 120. \end{cases}$$

Hexécontadoèdre à faces carrées, triangulaires et pentagonales. — Ce polyèdre est, comme le précédent, inscriptible à un dodécaèdre et à un icosaèdre. Si on veut le construire au moyen du dodécaèdre régulier, on aura,

en conservant les notations du n° 90 :

$$p = \frac{1}{2} a \cot \frac{\pi}{5}, \quad P = \frac{1}{2} c \cot \frac{\pi}{5}, \quad \cos A = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$a = 2 (P - p) \sin \frac{1}{2} A ;$$

puis

$$a = (c - a) \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{10(\sqrt{5} - 1)}}.$$

On tire, de cette équation,

$$(62) \quad \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5} + 1}{6} = \frac{2}{3} \cos \frac{\pi}{5}.$$

De là résulte

$$p = \frac{2}{3} OR.$$

On voit aussi, en comparant les formules (62) et (61), que si deux hexécontadoèdres sont inscrits à un même dodécaèdre régulier, les arêtes de ces deux polyèdres sont dans le rapport de 3 à 5.

Le second hexécontadoèdre semi-régulier est représenté dans l'épure XV (*fig. 51, Pl. V*).

94. Remarque sur les polyèdres semi-réguliers à trois espèces de faces.

— Dans l'icohexaèdre, les faces octogonales, hexagonales et carrées sont en même nombre que les faces, les sommets et les arêtes du cube. De même, dans le premier hexécontadoèdre, les faces décagonales, hexagonales et carrées sont en même nombre que les faces, les sommets et les arêtes du dodécaèdre. Enfin, les faces pentagonales, triangulaires et carrées du second hexécontadoèdre satisfont encore à la même relation.

95. PROBLÈME. — *Quels sont les polyèdres semi-réguliers, du second genre?*

Soit P un polyèdre semi-régulier, du premier genre. Si l'on construit le polyèdre p , conjugué de P relativement à la sphère circonscrite O (n°s 1, 59), il est visible que ce polyèdre p , circonscrit à la même sphère, sera semi-

régulier, *du second genre*. Nous pourrions donc, dès à présent, dresser un tableau corrélatif de celui que nous avons donné ci-dessus (n° 56), et renfermant les éléments de quinze polyèdres du second genre, *tous possibles et tous inscriptibles*.

Néanmoins, comme il n'est pas évident, *à priori*, que ce tableau contiendrait toutes les solutions du problème actuel, nous allons résoudre celui-ci directement, en suivant la même marche que ci-dessus.

96. Supposons donc que chacune des faces du polyèdre cherché appartienne à λ angles polyèdres de $p^{\text{ième}}$ espèce, à λ' angles polyèdres de $p'^{\text{ième}}$ espèce, etc.; nous aurons

$$(63) \quad ps_p = \lambda F, \quad p's_{p'} = \lambda' F, \quad p''s_{p''} = \lambda'' F, \dots,$$

et

$$(64) \quad 3 \leq \lambda + \lambda' + \lambda'' + \dots \leq 5.$$

Par suite, à cause des équations (3), (5) :

$$S = \left(\frac{\lambda}{p} + \frac{\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''}{p''} + \dots \right) F, \quad 2A = (\lambda + \lambda' + \lambda'' + \dots) F;$$

puis, par le théorème d'Euler,

$$(65) \quad F = \frac{4}{2 \left(\frac{\lambda}{p} + \frac{\lambda'}{p'} + \dots \right) + 2 - n}$$

en supposant

$$(66) \quad \lambda + \lambda' + \lambda'' + \dots = n (*).$$

Ces équations (65), (66) ne diffèrent, que par la notation, des équations (47), (48), relatives au premier problème. Elles donneraient donc lieu aux mêmes discussions que celles-ci, et elles admettent les mêmes solutions entières.

Par conséquent, il n'y a pas de polyèdres semi-réguliers, du second

(*) Le nombre n , égal à 3, 4 ou 5, désigne l'espèce des faces du polyèdre (n° 50, 1°).

genre, autres que ceux dont les éléments sont indiqués dans le tableau suivant :

	λ	λ'	λ''	p	p'	p''	F	S_p	$S_{p'}$	$S_{p''}$	S	A
I	1	2		3	6		12	4	4		8	18
II	1	2		3	8		24	8	6		14	36
III	1	2		3	10		60	20	12		32	90
IV	1	2		4	6		24	6	8		14	36
V	1	2		5	6		60	12	20		32	90
VI	1	2		p	4		$2p$	2	p		$p+2$	$3p$
VII	1	3		3	4		24	8	18		26	48
VIII	1	3		p	3		$2p$	2	$2p$		$2p+2$	$4p$
IX	2	2		3	4		12	8	6		14	24
X	2	2		3	5		30	20	12		32	60
XI	1	4		4	3		24	6	32		38	60
XII	1	4		5	3		60	12	80		92	150
XIII	1	1	1	4	6	8	48	12	8	6	26	72
XIV	1	1	1	4	6	10	120	30	20	12	62	180
XV	1	1	2	3	5	4	60	20	12	30	62	120

97. ABCD (*fig. 16, Pl. I*) étant une face du polyèdre, supposons que les angles polyèdres en A, B, . . . soient de $p^{\text{ième}}$ espèce, de $p'^{\text{ième}}$ espèce, etc. Désignons par ϕ_p chacune des faces de l'angle polyèdre A, par $\phi_{p'}$ chacune des faces de l'angle polyèdre B, etc. Soit, en outre, θ la valeur commune de chacun des angles dièdres (n^{os} 47, 2^o). Si l'on considère les polygones sphériques réguliers correspondant aux angles polyèdres A, B, C, . . ., on a, de la même manière qu'au n^o 62,

$$(67) \quad \sin \frac{1}{2} \theta = \frac{\cos \frac{\pi}{p}}{\cos \frac{1}{2} \phi_p} = \frac{\cos \frac{\pi}{p'}}{\cos \frac{1}{2} \phi_{p'}} = \dots$$

De plus,

$$(68) \quad \sum \lambda \varphi_p = (n - 2) \pi.$$

Si l'on suppose

$$\theta = \pi - \gamma, \quad \varphi_p = \pi - x_p,$$

on obtient, au lieu de ces équations :

$$\sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{\cos \frac{\pi}{p}}{\sin \frac{1}{2} x_p} = \frac{\cos \frac{\pi}{p'}}{\sin \frac{1}{2} x_{p'}} = \dots,$$

$$\sum \lambda x_p = 2\pi.$$

Celles-ci ne diffèrent, des équations (50) et (49), que par le changement de n en p . Et comme, d'après le tableau ci-dessus, les seules valeurs de p , p' , p'' , ... qu'il convient d'essayer, sont précisément les anciennes valeurs de n , n' , n'' (n° 56), il s'ensuit que *à toute solution des équations (50) et (49) correspond une solution des équations (67) et (68), et réciproquement*. De là résultent les propositions suivantes, qu'il suffit d'énoncer :

98. THÉORÈME. — 1° *Tout polyèdre semi-régulier, du second genre, est conjugué d'un polyèdre semi-régulier, du premier genre, ET VICE VERSA ;*
 2° *Tout polyèdre semi-régulier, du second genre, est circonscriptible ;*
 3° *Si deux polyèdres conjugués, P, p, sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à la même sphère O, de façon que les sommets du premier soient les pôles des faces du second, ET VICE VERSA, deux arêtes correspondantes quelconques sont réciproques (n° 1).*

99. On a vu (n° 58) que la recherche des polyèdres du premier genre équivaut à la décomposition de la sphère en polygones réguliers. De même, à tout polyèdre du second genre correspond une *décomposition de la sphère inscrite, en polygones égaux et tels, qu'autour d'un même sommet les angles sont tous égaux entre eux*.

Si la première décomposition est effectuée, il suffira, pour obtenir la décomposition *conjuguée*, de joindre, par des arcs de grands cercles, les

centres des polygones qui ont un côté commun. Au contraire, pour revenir de la seconde décomposition à la première, on doit chercher, dans chacun des polygones sphériques, *le point également distant de tous les côtés : les points ainsi déterminés sont les sommets des nouveaux polygones.*

Soient, en effet, I, K, L, M (*fig. 17, Pl. I*) les centres des polygones réguliers ayant un sommet commun A, et appartenant à la première décomposition : le polygone IKLM fera partie de la seconde. Or, les points P, R, S, T sont les milieux des arcs AC, AE, AF, AB, lesquels sont tous égaux (n° 58) ; donc

$$\text{arc AP} = \text{arc AR} = \text{arc AS} = \dots$$

100. Remarque. — Si, du point A comme pôle, avec l'arc AP pour rayon sphérique, on trace une circonférence de petit cercle, elle touche, aux points P, R, S, T, les arcs AB, AC, AE, AF. Autrement dit, *les polygones sphériques, relatifs à la seconde décomposition, sont circonscriptibles.*

Cette propriété, rapprochée de celle qui a été énoncée au n° 61, donne lieu au théorème suivant :

101. THÉORÈME — *Si deux polyèdres P, p, semi-réguliers et conjugués, sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même sphère :*

1° *Les sommets de P, adjacents à un sommet A, sont situés sur une circonférence qui a pour pôle le sommet A ;*

2° *Les faces de p, adjacentes à une face a, sont tangentes à un cône de révolution dont le sommet est sur le diamètre perpendiculaire à a ;*

3° *Chacune des faces de p est circonscrite à une circonférence qui a pour centre un sommet de P.*

102. Les éléments de chacun des polyèdres du second genre pouvant être déterminés par les équations (67) et (68), il serait facile d'exprimer, en fonction des quantités qui entrent dans ces équations, l'aire et le volume de cette figure, les longueurs de ses arêtes, etc. On obtiendrait ainsi des formules analogues à celles des n°s 63, 64.

Nous négligeons ce calcul, qui présente peu d'intérêt, et nous revenons immédiatement au tableau de la page 51.

Enumération et construction des polyèdres du second genre.

105.

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1, \quad \lambda' = 2, \quad p = 3, \quad p' = 6, \quad s_3 = 4, \quad s_6 = 4, \\ S = 8, \quad F = 12, \quad A = 18. \end{array} \right.$$

Dodécaèdre à faces triangulaires. — Ce polyèdre, conjugué de l'octaèdre à faces triangulaires et hexagonales (66), dérive, comme celui-ci, du tétraèdre régulier.

Mais, tandis que l'octaèdre est un tétraèdre tronqué, le dodécaèdre dont nous nous occupons peut être considéré comme un tétraèdre *accru* (*).

Supposons, en effet, que sur les faces d'un tétraèdre régulier ABCD (*fig.* 18, *Pl.* I), on élève, en prenant ces faces comme bases, quatre pyramides triangulaires régulières EABC, FABD, GBCD, HACD, dans lesquelles les angles dièdres EA, EB, EC, FA, etc., tous égaux entre eux, aient une grandeur convenable : la figure composée des cinq tétraèdres sera le dodécaèdre demandé. Il est représenté dans l'épure I' (*fig.* 56, *Pl.* VI).

Ce dodécaèdre n'est pas *primitif*, ce qui devait être (POINSON, *Comptes rendus*, t. XLVI, p. 73).

104. La détermination des éléments du dodécaèdre résulte simplement des équations (67) et (68), qui deviennent

$$\sin \frac{1}{2} \theta = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{1}{2} \varphi_3} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{1}{2} \varphi_6}, \quad \varphi_3 + 2 \varphi_6 = \pi.$$

On tire, de ces relations :

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \varphi_6 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \cos \frac{1}{2} \varphi_6 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{3}}, \\ \sin \varphi_6 &= \cos \frac{1}{2} \varphi_3 = \frac{1}{6} \sqrt{11}, \quad \cos \varphi_3 = -\frac{7}{18}, \\ \sin \frac{1}{2} \theta &= \frac{3}{\sqrt{11}}, \quad \cos \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{2}{11}}, \quad \cos \theta = -\frac{7}{11}, \quad \sin \theta = \frac{6}{11} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(*) Faute d'une dénomination satisfaisante, j'emploie celle-ci.

Les Tables donnent ensuite :

$$\varphi_3 = \text{BEC} = 112^\circ 53' 7'', 4, \quad \varphi_6 = \text{EBC} = \text{ECB} = 33^\circ 33' 26'', 3,$$

$$\theta = \text{angle EC} = 129^\circ 31' 16''.$$

105. Si l'on représente par α l'inclinaison de la face EBC sur la face ABC, et par β l'angle dièdre du tétraèdre régulier ABCD, on doit avoir, en même temps :

$$\frac{\sin \theta}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi_6}, \quad 2\alpha = \theta - \beta.$$

La première équation donne :

$$\sin \alpha = 2 \sqrt{\frac{2}{33}}, \quad \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{33}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{17}{33}, \quad \alpha = 29^\circ 29' 46''.$$

A cause de $\cos \beta = \frac{1}{3}$, $\sin \beta = \frac{2}{3} \sqrt{2}$, la seconde équation devient identique.

106.

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1, \quad \lambda' = 2, \quad p = 3, \quad p' = 8, \quad s_3 = 8, \quad s_8 = 6, \\ S = 14, \quad F = 24, \quad A = 36. \end{array} \right.$$

Icotétraèdre à faces triangulaires, ayant huit angles trièdres et six angles octaèdres. — Ce polyèdre, représenté dans l'épure II' (*fig. 54, Pl. VI*), résulte de la juxtaposition d'un octaèdre régulier intérieur et de huit pyramides triangulaires régulières. Il n'est donc pas *primitif*.

107. Les équations

$$\sin \frac{1}{2} \theta = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{1}{2} \varphi_3} = \frac{\cos \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{1}{2} \varphi_8}, \quad \varphi_3 + 2\varphi_8 = \pi, \quad \frac{\sin \theta}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi_8}$$

donnent :

$$\sin \frac{1}{2} \varphi_8 = \frac{1}{4} \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{1}{2} \varphi_8 = \frac{1}{4} \sqrt{12 + 2\sqrt{2}}, \quad \cos \varphi_8 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4},$$

$$\begin{aligned}\sin \varphi_8 &= \cos \frac{1}{2} \varphi_3 = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 4\sqrt{2}}, \\ \sin \frac{1}{2} \theta &= 2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{2}}{34}}, \quad \cos \theta = -\frac{3 + 8\sqrt{2}}{17}, \quad \sin \theta = \frac{2}{17} (6 - \sqrt{2}), \\ \sin \alpha &= 2 \sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{2}}{51}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{-5 + 32\sqrt{2}}{51}.\end{aligned}$$

Par suite :

$$\varphi_8 = 31^\circ 22' 21'', \quad \varphi_3 = 117^\circ 15' 17'', \quad \theta = 147^\circ 21' 0'', \quad \alpha = 18^\circ 56' 22''.$$

108.

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1, \quad \lambda' = 2, \quad p = 3, \quad p' = 10, \quad s_3 = 20, \quad s_{10} = 12, \\ S = 32, \quad F = 60, \quad A = 90. \end{array} \right.$$

Hexécontaèdre à faces triangulaires, ayant vingt angles trièdres et douze angles décaèdres. — Ce polyèdre, conjugué du triacontadoèdre régulier à faces triangulaires et décagonales (68), se déduit de l'icosaèdre régulier, comme les deux polyèdres précédents se déduisent du tétraèdre et de l'octaèdre. Il est donc *non-primitif* (épure III') (*fig. 55, Pl. VI*).

Les équations (67) et (68) deviennent

$$\sin \frac{1}{2} \theta = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{1}{2} \varphi_3} = \frac{\cos \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{1}{2} \varphi_{10}}, \quad \varphi_3 + 2\varphi_{10} = \pi.$$

On conclut, de celles-ci :

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{2} \varphi_{10} &= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{40}}, \quad \cos \frac{1}{2} \varphi_{10} = \sqrt{\frac{35 + \sqrt{5}}{40}}, \quad \cos \varphi_{10} = \frac{15 + \sqrt{5}}{20}, \\ \cos \frac{1}{2} \varphi_3 &= \sin \varphi_{10} = \frac{1}{20} \sqrt{170 - 30\sqrt{5}}, \quad \sin \frac{1}{2} \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{170 + 30\sqrt{5}}{61}}, \\ \cos \theta &= -\frac{24 + 15\sqrt{5}}{61}, \quad \sin \theta = \frac{2}{61} (9\sqrt{5} - 10).\end{aligned}$$

L'icosaèdre *central* donne ensuite l'équation

$$\frac{\sin \theta}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi_{10}};$$

d'où l'on conclut :

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{74 - 30\sqrt{5}}{183}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{5(7 + 12\sqrt{5})}{183}.$$

On trouve enfin

$$\varphi_{10} = 30^\circ 28' 49'', \quad \varphi_3 = 119^\circ 2' 21'', \quad \theta = 160^\circ 36' 45'', \quad \alpha = 11^\circ 12' 41''.$$

109.

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1, \quad \lambda' = 2, \quad p = 4, \quad p' = 6, \quad s_4 = 6, \quad s_6 = 8, \\ S = 14, \quad F = 24, \quad A = 36. \end{array} \right.$$

Icotétraèdre à faces triangulaires, ayant six angles tétraèdres et huit angles hexaèdres. — Ce polyèdre, conjugué du décatétraèdre à faces carrées et hexagonales (69), est un hexaèdre accru, épure IV' (fig. 57, Pl. VI).

En conservant les mêmes notations que précédemment, on trouve ces valeurs très-simples :

$$\sin \frac{1}{2} \varphi_6 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos \varphi_6 = \frac{2}{3}, \quad \sin \varphi_6 = \cos \frac{1}{2} \varphi_4 = \frac{1}{3} \sqrt{5}, \quad \sin \frac{1}{2} \theta = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\cos \frac{1}{2} \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin \theta = \frac{3}{5}, \quad \cos \theta = -\frac{4}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{3}{5} = \sin \theta.$$

Le dernier résultat équivaut à

$$\theta = 2\alpha + \frac{\pi}{2};$$

ce qui doit être, attendu que, dans l'hexaèdre *intérieur*, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

On a enfin

$$\varphi_6 = 67^\circ 11' 23'', \quad \varphi_4 = 83^\circ 37' 14'', \quad \theta = 143^\circ 7' 48'', \quad \alpha = 26^\circ 33' 54''.$$

110.

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1, \quad \lambda' = 2, \quad p = 5, \quad p' = 6, \quad s_5 = 12, \quad s_6 = 20, \\ S = 32, \quad F = 60, \quad A = 90. \end{array} \right.$$

Hexécontaèdre à faces triangulaires, ayant douze angles pentaèdres et vingt angles hexaèdres. — Ce polyèdre, conjugué du triacontaèdre à faces pentagonales et hexagonales (70), se compose d'un dodécaèdre régulier intérieur et de douze pyramides pentagonales régulières, ayant pour bases les faces du dodécaèdre, épure V' (fig. 52, Pl. V).

Les équations qui déterminent les éléments de ce polyèdre sont :

$$\sin \frac{1}{2} \theta = \frac{\cos \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{1}{2} \varphi_6} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{1}{2} \varphi_6}, \quad \varphi_6 + 2\varphi_6 = \pi, \quad \frac{\sin \theta}{\sin \frac{2\pi}{5}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi_6}.$$

On en tire :

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \varphi_6 &= \frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{3}}, \quad \cos \varphi_6 = \frac{9-\sqrt{5}}{12}, \\ \sin \varphi_6 &= \cos \frac{1}{2} \varphi_6 = \frac{1}{12} \sqrt{58+18\sqrt{5}}, \quad \sin \frac{1}{2} \theta = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{42+2\sqrt{5}}{109}}, \\ \cos \frac{1}{2} \theta &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{58-18\sqrt{5}}{109}}, \quad \sin \theta = \frac{6}{109} (5\sqrt{5}-4), \quad \cos \theta = -\frac{80+9\sqrt{5}}{109}, \\ \sin \alpha &= 2 \sqrt{\frac{25-4\sqrt{5}}{545}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{345+32\sqrt{5}}{545}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\varphi_6 = 55^\circ 41' 26'', \quad \varphi_3 = 68^\circ 37' 8'', \quad \theta = 156^\circ 43' 7'', \quad \alpha = 20^\circ 4' 36''.$$

111.

$$(VI) \quad \begin{cases} \lambda = 1, & \lambda' = 2, & p = p, & p' = 4, & s_p = 2, & s_4 = p, \\ S = p+2, & F = 2p, & A = 3p. \end{cases}$$

Double pyramide, épure VI (fig. 41, Pl. III). — Chacun des angles tétraèdres doit être régulier. Par suite, si l'on désigne par R le rayon du cercle circonscrit à la base des deux pyramides, par B chacun des angles de cette base, et par h la hauteur de chaque pyramide, on a

$$h = R \tan \frac{1}{2} B.$$

112.

$$(VII) \quad \begin{cases} \lambda = 1, & \lambda' = 3, & p = 3, & p' = 4, & s_3 = 8, & s_4 = 18, \\ S = 26, & F = 24, & A = 48. \end{cases}$$

Icotétraèdre à faces quadrangulaires, ayant huit angles trièdres et dix-huit angles tétraèdres. — Ce polyèdre ne semble pas d'abord dériver simplement d'un polyèdre régulier. Pour avoir une idée nette de sa forme, nous emploierons l'icohexaèdre à faces triangulaires et carrées (72). Celui-ci admet trois sections principales, situées dans trois plans perpendiculaires deux à deux; et ces sections sont des octogones réguliers, ayant pour côtés les médianes des faces carrées de l'icohexaèdre (75). De là résulte que l'icotétraèdre admet également trois sections principales régulières : ABC...GH, GIKLCMNP, ARK...NQ (fig. 33, Pl. II), situées dans trois plans perpendiculaires deux à deux, et dont les sommets coïncident avec ceux des dix-huit angles tétraèdres. Quant aux huit sommets trièdres, U, V, X, Y, ..., on les détermine aisément en observant que chacun d'eux est l'intersection de trois plans connus : par exemple, le sommet U est situé sur les plans BAR, BCL, LKR. Enfin, les sommets U, V, X, Y, ... sont situés sur les diagonales du cube qui aurait, pour centres de ses faces, les points A, C, ..., G, K, N. L'icotétraèdre à faces quadrangulaires est donc un cas particulier du trapézoèdre de la Cristallographie, épure VII' (fig. 59, Pl. VI).

113. — Nous avons trouvé (72) :

$$\sin \frac{1}{2} x_4 = \frac{1}{4} \sqrt{12 - 2\sqrt{2}}, \quad \sin \frac{1}{2} x_3 = \frac{1}{4} \sqrt{6 - \sqrt{2}},$$

$$\cos \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{12 + 2\sqrt{2}}{17}}.$$

Or (97) :

$$\varphi_4 = \pi - x_4, \quad \varphi_3 = \pi x_3, \quad \theta = \pi - \gamma;$$

donc

$$\cos \frac{1}{2} \varphi_4 = \frac{1}{4} \sqrt{12 - 2\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{1}{2} \varphi_3 = \frac{1}{4} \sqrt{6 - \sqrt{2}},$$

$$\sin \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{12 + 2\sqrt{2}}{17}};$$

puis

$$\cos \varphi_4 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}, \quad \cos \varphi_3 = -\frac{2 + \sqrt{2}}{8}, \quad \cos \theta = -\frac{7 + 4\sqrt{2}}{17}.$$

On trouve enfin :

$$\varphi_4 = 81^\circ 34' 44'', \quad \varphi_3 = 115^\circ 15' 48'', \quad \theta = 138^\circ 6' 34''.$$

114.

$$(VIII) \begin{cases} \lambda = 1, & \lambda' = 3, & p = p', & p' = 3, & s_p = 2, & s_3 = 2p, \\ S = 2p + 2, & F = 2p, & A = 4p. \end{cases}$$

Polyèdre formé par l'ensemble de deux pyramides régulières () égales, à p faces latérales quadrangulaires, ayant pour base commune un polygone régulier gauche, de $2p$ côtés.*

Les équations (67), (68) donnent, dans le cas actuel :

$$\cos \frac{1}{2} \varphi_3 = \frac{1}{2} \sqrt{3 - 2 \cos \frac{\pi}{p}}, \quad \sin \frac{1}{2} \theta = \frac{1}{2 \cos \frac{1}{2} \varphi_3}, \quad \varphi_p = 2\pi - 3\varphi_3 (**).$$

Dans l'épure VIII' (fig. 42, Pl. III), nous avons supposé, successivement, $p = 4$, $p = 5$, $p = 6$ (76) (***).

Il résulte, de ces hypothèses :

$$\begin{aligned} 1^\circ & \begin{cases} \cos \varphi_3 = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{2}), & \cos \theta = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{7}; \\ \varphi_3 = 101^\circ 57' 10'', & \theta = 105^\circ 8' 30''; \end{cases} \\ 2^\circ & \begin{cases} \cos \varphi_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} = -\cos 72^\circ, & \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \\ \varphi_3 = 108^\circ, & \theta = 116^\circ 33' 54''; \end{cases} \\ 3^\circ & \begin{cases} \cos \varphi_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, & \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \\ \varphi_3 = 111^\circ 28' 14'', & \theta = 125^\circ 15' 53''. \end{cases} \end{aligned}$$

(*) Ou plutôt par la *pénétration de deux angles polyèdres réguliers égaux*.

(**) Les deux premières formules peuvent être remplacées par celles-ci :

$$\cos \varphi_3 = \frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{p}, \quad \cos \theta = \frac{\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{p}}{\frac{3}{2} - \cos \frac{\pi}{p}}.$$

(***) Si l'on supposait $p = 3$, le polyèdre serait un cube.

115. Sur l'épure, les projections horizontales des trois polygones gauches sont des polygones réguliers. Il est visible que cette propriété est générale.

116.

$$(IX) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2, \quad \lambda' = 2, \quad p = 3, \quad p' = 4, \quad s_3 = 8, \quad s_4 = 6, \\ S = 14, \quad F = 12, \quad A = 24. \end{array} \right.$$

Dodécaèdre à faces quadrangulaires. — Ce polyèdre, conjugué du *décatétraèdre à faces triangulaires et carrées* (77), a une construction analogue à celle de l'*icotétraèdre* (112). Il admet trois sections principales, AFCE, ABCD, BFDE (*fig. 31, Pl. II*), situées dans trois plans perpendiculaires deux à deux, et dont les sommets sont ceux des angles tétraèdres. Quant aux sommets trièdres, G, L, K, I, M, N, . . . , la détermination en est facile, attendu que chacun d'eux est l'intersection de trois plans connus. Par exemple, le sommet M est dans le plan mené par BC, parallèlement à EF; dans le plan mené par BF, parallèlement à AC, et dans le plan mené par FC, parallèlement à BD. De plus, ces plans sont précisément ceux des faces BMCN, BMFG, CLFM, lesquelles sont des losanges.

117. Il est visible que $MN = \frac{1}{2} EF$. De là résulte $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, *les faces du dodécaèdre sont des losanges, dans lesquels le rapport des diagonales est $\frac{1}{\sqrt{2}}$* . Par suite,

$$\cos BMC = -\frac{1}{3}, \quad \cos BM = -\frac{1}{2}, \quad \text{angle BM} = 120^\circ.$$

Ces résultats, auxquels on peut arriver aussi par les équations (67), (68), prouvent que le polyèdre dont il s'agit ne diffère pas du *dodécaèdre rhomboïdal* de la Cristallographie, épure IX' (*fig. 53, Pl. VI*).

118.

$$(X) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2, \quad \lambda' = 2, \quad p = 3, \quad p' = 5, \quad s_3 = 20, \quad s_5 = 12, \\ S = 32, \quad F = 30, \quad A = 60. \end{array} \right.$$

Triacontaèdre. — Ce corps, dont Romé de l'Isle s'est occupé (*), résulte assez aisément du dodécaèdre régulier. En effet, si les faces du dodécaèdre sont les bases de douze pyramides pentagonales régulières, égales entre elles, le polyèdre ainsi formé aura, en général, *soixante faces triangulaires*. Mais si les deux triangles qui s'appuient sur une arête du dodécaèdre sont dans un même plan, les soixante faces triangulaires seront remplacées par *trente faces quadrangulaires*, égales entre elles. On reconnaît sans peine que ces *quadrilatères sont des losanges*, épure X' (*fig. 61, Pl. VII*).

119. Remarque. — Le *triacontaèdre* et le *triacontadoèdre à faces triangulaires et pentagonales* (78), polyèdres conjugués, dérivent du dodécaèdre régulier, l'un par troncature, l'autre par *accroissement*.

120.

$$(XI) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1, \quad \lambda' = 4, \quad p = 4, \quad p' = 3, \quad s_4 = 6, \quad s_3 = 32, \\ S = 38, \quad F = 24, \quad A = 60. \end{array} \right.$$

Icotétraèdre à faces pentagonales. — Pour déterminer la forme et les éléments de ce polyèdre, nous le déduirons du *triacontaoctaèdre* (79), dont il est le conjugué. Dans ce dernier polyèdre, qui est *inscriptible*, chaque sommet appartient à *un carré* et à *quatre triangles équilatéraux*, et, si l'on considère la décomposition correspondante de la sphère circonscrite (58), on y trouve ce même arrangement.

Soit donc, sur cette sphère, ABCDEFK (*fig. 19, Pl. I*) la figure formée par le carré ABCD et par les triangles équilatéraux ABE, EBK, KBF, FBC. Si, par les sommets A, E, K, F, C, on mène les plans tangents à la sphère, ils détermineront, par leurs intersections avec le plan tangent en B, l'une des faces de l'icotétraèdre cherché.

Soit (*fig. 20, Pl. I*) *acfke* cette face, dans laquelle $ac = ae$, et $cf = fk = ke$.

Soient $\gamma, \phi, \kappa, \varepsilon, \alpha$ les points de contact des côtés avec la circonférence inscrite, circonférence qui a pour centre le sommet B (101, 3°). Si nous

(*) *Cristallographie de Haüy*, t. II, p. 57.

prenons pour unité le rayon de la sphère, nous aurons, en conservant les notations des n^{os} 79 et suivants :

$$B\gamma = B\phi = \dots = 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma, \quad \gamma B\phi = \phi B\alpha = \dots = x_3,$$

$$\alpha B\gamma = x_4, \quad c\gamma = c\phi = \dots = 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma \operatorname{tang} \frac{1}{2} x_3,$$

$$a\gamma = a\alpha = 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma \operatorname{tang} \frac{1}{2} x_4.$$

En effet, *ac* est perpendiculaire à l'arête BC (98, 3°); donc *Bγ* est tangente à l'arc BC; etc.

121. Nous avons trouvé (79 et 81) :

$$\cos \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{\nu}{2(\nu-1)}}, \quad \sin \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{\nu-2}{2(\nu-1)}},$$

$$\nu^3 - 4\nu - 4 = 0, \quad \nu = 2,382\,975\,770,$$

$$4x_3 + x_4 = 2\pi, \quad x_3 = 65^\circ 11' 16'', 5, \quad x_4 = 99^\circ 14' 54'', \quad \gamma = 43^\circ 41' 27'',$$

en supposant

$$\cos x_3 = \frac{1}{\nu}.$$

Il résulte, de ces valeurs :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}, \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} x_3 = \sqrt{\frac{\nu-1}{\nu+1}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} x_4 = -\operatorname{tang} 2x_3 = -\frac{2\sqrt{\nu^2-1}}{2-\nu^2} = \frac{2\sqrt{\nu^2-1}}{\nu\sqrt{\nu}},$$

$$c\gamma = c\phi = \dots = 2\sqrt{\frac{(\nu-2)(\nu-1)}{\nu(\nu+1)}},$$

$$a\alpha = a\gamma = \frac{4}{\nu^2} \sqrt{(\nu-2)(\nu^2-1)} = \nu \sqrt{\frac{(\nu-2)(\nu-1)}{\nu+1}},$$

$$c = f = k = e = 114^\circ 48' 43'', 5, \quad a = 80^\circ 45' 6''.$$

Chacune des faces de l'icotétraèdre est donc un pentagone dont tous les éléments sont connus. De plus, les angles égaux à *c* sont assemblés trois à trois, et les angles égaux à *a* sont assemblés quatre à quatre. On peut donc,

de proche en proche, construire ou projeter la surface de ce polyèdre, épure XI' (*fig.* 58, *Pl.* VI).

122. Remarque. — Les sommets tétraèdres, tels que a , appartiennent à un octaèdre régulier. En effet, cette figure est conjuguée du cube formé par les prolongements des faces carrées du *triacontaoctaèdre* (84).

123.

$$(XII) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1, \quad \lambda' = 4, \quad p = 5, \quad p' = 3, \quad s_3 = 12, \quad s_3 = 80, \\ S = 92, \quad F = 60, \quad A = 150. \end{array} \right.$$

Hexécontaèdre à faces pentagonales. — Dans l'*Ennécontadoèdre*, chaque angle polyèdre est formé par la réunion d'un pentagone régulier et de quatre triangles équilatéraux (85). Par suite, en raisonnant comme dans le cas de l'Icotétraèdre (120), on trouve que la face de l'Hexécontaèdre est un pentagone circonscriptible $acmhf$ (*fig.* 21, *Pl.* I), dans lequel

$$\begin{aligned} \alpha B \gamma &= ABC = x_3, \\ \gamma B \mu &= \mu B \eta = \dots = CBM = x_3. \end{aligned}$$

De plus (*fig.* 22, *Pl.* I),

$$B\alpha = B\gamma = \dots = 2 \tan \frac{1}{2} \gamma, \quad c\gamma = c\mu = \dots = 2 \tan \frac{1}{2} \gamma \tan \frac{1}{2} x_3,$$

$$a\gamma = a\alpha = 2 \tan \frac{1}{2} \gamma \tan \frac{1}{2} x_3.$$

Mais (85):

$$\tan \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{3 - 4s^2}, \quad \cos \frac{1}{2} x_3 = s, \quad x_3 + 4x_3 = 2\pi,$$

$$s_3 - \frac{1}{2}s - 0,202\,254\,249 = 0,$$

$$s = 0,857\,780\,75\dots,$$

$$x_3 = 61^\circ 51' 48'';$$

donc :

$$\tan \frac{1}{2} x_3 = \frac{1}{s} \sqrt{1 - s^2}, \quad \tan \frac{1}{2} x_3 = -\tan 2x_3 = -\frac{4s(2s^2 - 1)\sqrt{1 - s^2}}{8s^4 - 8s^2 + 1},$$

$$B\alpha = B\gamma = \dots = 2\sqrt{3 - 4s^2}, \quad c\gamma = c\mu = \dots = \frac{2}{s} \sqrt{(3 - 4s^2)(1 - s^2)},$$

$$a\gamma = a\alpha = -\frac{8s(2s^2-1)}{8s^4-8s^2+1} \sqrt{(3-4s^2)(1-s^2)},$$

$$c = m = h = f = \pi - x_3 = 118^\circ 8' 12'',$$

$$a = \pi - x_3 = 4x_3 - \pi = 67^\circ 27' 12''.$$

124. Soit donc $acmhf$ (*fig. 22, Pl. I*) un pentagone circonscriptible, dont les angles aient les valeurs qui viennent d'être écrites.

1° Autour du sommet a , assemblons quatre autres pentagones égaux au premier, de manière que l'angle pentaèdre a soit régulier : il résultera, de cette construction, une surface polyédrale ouverte, à cinq faces, et ayant pour base le *pentédécagone régulier gauche* $flmcb...qrf$ (*fig. 23, Pl. I*).

2° Dans chacun des angles *rentrants* f, c, e, k, p , introduisons un pentagone égal à tous les autres, en observant que chacun d'eux soit disposé de la même manière par rapport à l'angle qu'il vient fermer.

3° Au moyen de ces cinq nouveaux pentagones, nous pourrons construire cinq surfaces polyédrales S, T, U, V, X (*fig. 35, Pl. II*), égales à la première, et qui, par leur combinaison avec celle-ci, constitueront une *calotte polyédrale* à trente faces, ayant pour base un polygone 1 2 3...30, de trente côtés.

4° L'ensemble de cette surface polyédrale et d'une seconde surface, symétrique de la première relativement au centre du polygone gauche qui leur sert de base commune, donne enfin l'hexécontaèdre représenté par l'épure XII' (*fig. 62, Pl. VII*).

125. *Remarques.* — I. Dans l'exécution de cette épure, nous avons supposé les cinq faces de l'angle pentaèdre a également inclinées sur le plan horizontal. D'après cette hypothèse, l'inclinaison commune α est donnée par la formule

$$\cos \alpha = \frac{\tan \frac{1}{2} a}{\tan \frac{\pi}{5}} = \frac{\tan 33^\circ 43' 36''}{\tan 36^\circ};$$

d'où il résulte

$$\alpha = 23^\circ 14' 25''.$$

II. Dans l'angle trièdre c , chacun des angles trièdres peut être calculé par la relation connue

$$\cos C = \frac{\tan \frac{1}{2} c}{\tan c}.$$

En observant que $c = \pi - x_3$ (123), on la transforme aisément en celle-ci :

$$\sin \frac{1}{2} C = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} x_3},$$

qui donne

$$C = 153^\circ 10' 24''.$$

III. Pour obtenir la projection horizontale de l'angle pentaèdre S , il a fallu, préalablement, projeter l'angle pentaèdre α sur un plan parallèle à l'arête hf et perpendiculaire à ΩS , Ω étant le centre de l'icosaèdre régulier dont α , S , T , U , V , X sont six sommets. D'ailleurs, l'angle $\alpha \Omega S = \Omega$ est déterminé par la formule connue

$$\cos \Omega = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

qui conduit à

$$\Omega = 63^\circ 26' 6'' \text{ (*)}.$$

126.

$$(XIII) \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1, \quad \lambda' = 1, \quad \lambda'' = 1, \quad p = 4, \quad p' = 6, \quad p'' = 8, \\ s_4 = 12, \quad s_6 = 8, \quad s_8 = 6, \quad S = 26, \quad F = 48, \quad A = 72. \end{array} \right.$$

Tessaracontaoctaèdre. — Ce polyèdre, conjugué de l'icohexaèdre à faces carrées, hexagonales et octogonales (86), a toutes ses faces triangulaires. Il a douze angles tétraèdres, huit angles hexaèdres et six angles octaèdres.

L'icohexaèdre étant inscriptible à un cube, formé par les prolongements des faces octogonales, il en résulte que les sommets octaèdres de la nouvelle

(*) Ces constructions auxiliaires, non indiquées sur l'épure XII', rendent celle-ci très-longue et très-difficile. Malgré tout le soin que nous avons pu prendre, elle renferme encore quelques légères inexactitudes. Cette observation est applicable à plusieurs des dessins qui accompagnent ce Mémoire.

figure coïncident avec ceux d'un octaèdre régulier. On peut donc considérer le tessaracontaoctaèdre comme formé de *six pyramides égales*, ayant pour bases des *octogones réguliers gauches*.

127. Afin de déterminer les éléments de ce polyèdre, reportons-nous à l'icohexaèdre conjugué de celui-ci (86). Les équations (49) et (50), appliquées à l'icohexaèdre, deviennent

$$\cos \frac{1}{2} \gamma = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{1}{2} x_4} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{1}{2} x_6} = \frac{\cos \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{1}{2} x_8}, \quad x_4 + x_6 + x_8 = 2\pi.$$

On conclut aisément, de celles-ci :

$$\cos x_4 = -\frac{2 - \sqrt{2}}{12}, \quad \cos x_6 = -\frac{6 - \sqrt{2}}{8}, \quad \cos x_8 = -\frac{1 + 6\sqrt{2}}{12},$$

puis

$$x_4 = 92^\circ 47' 53'', \quad x_6 = 124^\circ 58' 31'', \quad x_8 = 142^\circ 13' 36''.$$

Soit maintenant ABC (*fig. 24, Pl. I*) une face du tessaracontaoctaèdre, A étant le sommet tétraèdre, B le sommet hexaèdre et C le sommet octaèdre. Nous aurons (97) :

$$\begin{aligned} A &= \pi - x_4 = 87^\circ 12' 7'', \\ B &= \pi - x_6 = 55^\circ 1' 29'', \\ C &= \pi - x_8 = 37^\circ 46' 24''; \end{aligned}$$

puis

$$\sin \frac{1}{2} \theta = \cos \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{12}{14 - \sqrt{2}}}, \quad \cos \theta = -\frac{71 + 12\sqrt{2}}{97},$$

θ étant l'angle dièdre du tessaracontaoctaèdre. On trouve

$$\theta = 155^\circ 4' 56''.$$

128. Ω étant le centre du polyèdre, soit δ l'inclinaison des arêtes CA,

CB sur l'axe $C\Omega$, supposé vertical. On a

$$\sin \delta = \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\sin \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{10 - \sqrt{2}}{3}},$$

$$\delta = 45^\circ 40' 38''.$$

129. La projection *horizontale* du triangle CAB est un triangle *cab* (*fig. 25, Pl. I*), dans lequel

$$\frac{ca}{cb} = \frac{CA}{CB} = \frac{\sin B}{\sin A};$$

de plus, l'angle $cab = 45$ degrés. Le triangle *cab* est donc connu.

130. Les éléments du tessaracontaoctaèdre étant ainsi déterminés, on construit aisément l'épure XIII' (*fig. 60, Pl. VI*).

131.

$$(XIV) \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1, \quad \lambda' = 1, \quad \lambda'' = 1, \quad p = 4, \quad p' = 6, \quad p'' = 10, \\ s_4 = 30, \quad s_6 = 20, \quad s_{10} = 12, \quad S = 62, \quad F = 120, \quad A = 180. \end{array} \right.$$

L'*Hécatonicoèdre* semi-régulier a *douze sommets décaèdres*, qui coïncident avec ceux d'un icosaèdre régulier. Il se compose donc de *douze pyramides égales*, ayant pour bases des *décagones réguliers gauches*, épure XIV' (*fig. 63, Pl. VII*).

Les considérations qui nous ont servi tout à l'heure sont évidemment applicables au nouveau polyèdre. Elles donnent, à cause des valeurs trouvées dans le n° 89 :

$$\cos A = \cos(\pi - x_4) = -\cos x_4 = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{30},$$

$$\cos B = \cos(\pi - x_6) = -\cos x_6 = \frac{15 - 2\sqrt{5}}{20},$$

$$\cos C = \cos(\pi - x_{10}) = -\cos x_{10} = \frac{9 + 5\sqrt{5}}{24};$$

puis

$$A = 88^\circ 59' 31'', \quad B = 58^\circ 14' 17'', \quad C = 32^\circ 46' 12''.$$

On a ensuite :

$$\sin \frac{1}{2} \theta = \cos \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{6(35 + 2\sqrt{5})}{241}}, \quad \cos \theta = -\frac{179 + 24\sqrt{5}}{241},$$

$$\theta = 164^{\circ} 53' 17''.$$

132. Soit $C\Omega C'A$ (*fig. 26, Pl. I*) la section faite dans le polyèdre, au moyen d'un plan passant par deux sommets décaèdres voisins C, C' , par un sommet tétraèdre A et par le centre Ω .

On a, comme ci-dessus (128) :

$$\sin \delta = \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\sin \frac{\pi}{10}} = \frac{\sin 16^{\circ} 23' 6''}{\sin 18^{\circ}},$$

$$\delta = 65^{\circ} 54' 15''.$$

Dans le quadrilatère $AC\Omega A'$, on connaît $C = C' = \delta$, et $\Omega = 63^{\circ} 26' 6''$ (125, III). On peut donc, comme pour le tessaracontaoctaèdre, construire le triangle CAB (127), d'abord en vraie grandeur, puis en projection horizontale; etc.

133.

$$(XV) \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1, \quad \lambda' = 1, \quad \lambda'' = 2, \quad p = 3, \quad p' = 5, \quad p'' = 4, \\ F = 60, \quad s_3 = 20, \quad s_5 = 12, \quad s_4 = 30, \quad S = 62, \quad A = 120. \end{array} \right.$$

Hexécontaèdre à faces quadrangulaires, ayant vingt angles trièdres, trente angles tétraèdres et douze angles pentaèdres. — Comme l'hécatonicoèdre, ce polyèdre est inscriptible à un icosaèdre régulier. Il en résulte que l'hexécontaèdre peut être considéré comme composé de douze pyramides égales, à faces quadrangulaires, ayant pour bases des décagones réguliers gauches (126).

134. $ABCD$ (*fig. 27, Pl. I*) étant une face, soient A, D les sommets tétraèdres, B le sommet trièdre, C le sommet pentaèdre. Les formules générales deviennent

$$A = D = \pi - x_4, \quad B = \pi - x_3, \quad C = \pi - x_5,$$

$$\cos \frac{1}{2} \gamma = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{1}{2} x_4} = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{1}{2} x_3} = \frac{\cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{1}{2} x_5}, \quad 2x_4 + x_3 + x_5 = 2\pi.$$

A cause de

$$\frac{1}{2} (x_3 + x_5) = \pi - x_4,$$

l'équation qui donne $\cos \gamma$ est

$$16 \cos \gamma - 2(1 + \cos \gamma) - (3 + \sqrt{5})(1 + \cos \gamma) - 2(1 + \sqrt{5})(1 - \cos \gamma) = 0.$$

On en tire :

$$\cos \gamma = \frac{19 + 8\sqrt{5}}{41}.$$

Conséquemment :

$$\cos x_3 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}, \quad \cos x_4 = \frac{2\sqrt{5} - 5}{10}, \quad \cos x_5 = \frac{5 - 9\sqrt{5}}{40}.$$

Les Tables donnent ensuite :

$$\gamma = 25^\circ 52' 42'', \quad x_3 = 61^\circ 43' 53'', \quad x_4 = 93^\circ 1' 33'', \quad x_5 = 112^\circ 13' 1''.$$

On a donc, dans le quadrilatère ABCD :

$$A = D = 86^\circ 58' 27'', \quad B = 118^\circ 16' 7'', \quad C = 67^\circ 46' 59''.$$

135. L'inclinaison δ des arêtes CA, CB sur l'axe passant par le sommet C est donnée (128) par la formule

$$\sin \delta = \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\sin \frac{\pi}{5}}.$$

On trouve

$$\delta = 71^\circ 33' 57''.$$

Au moyen de ces valeurs, nous avons construit l'épure XV' (*fig.* 64, *Pl. VII*).

136. *Remarque sur les polyèdres semi-réguliers à trois espèces de sommets.* — Dans le *tessaracontaoctaèdre*, les sommets *tétraèdres*, *octaèdres*, *hexaèdres* sont en même nombre que les *arêtes*, les *sommets* et les *faces* d'un cube. De même, les sommets *tétraèdres*, *hexaèdres* et *décaèdres* de l'*hécatonicoèdre* sont en même nombre que les *arêtes*, les *sommets* et les *faces* du dodécaèdre régulier. Enfin, les sommets *trièdres*, *pentaèdres* et *tétraèdres* de l'*hexécontaèdre à faces quadrangulaires* satisfont à une relation analogue (93).

3 décembre 1862.

