SUR LES ÉQUATIONS SIMULTANÉES HOMOGÈNES

PAR

E. CATALAN

PROFESSEUR D'ANALYSE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

I. Je suppose que, dans les équations de la forme ordinaire:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{du}{S}=\dots \qquad (1),$$

les quantités P, Q, R, S,... soient des fonctions, *homogènes et du premier degré,* des variables $x, y, z, u,\dots$; et pour fixer les idées, je considère soulement le cas où le nombre de ces variables se réduirait à quatre; de manière que

$$\left.\begin{aligned} P &= Ax + By + Cz + Du\,, \\ Q &= A'x + B'y + C'z + D'u\,, \\ R &= A''x + B''y + C''z + D''u\,, \\ S &= A'''x + B'''y + C'''z + D'''u. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Si l'on désigne par $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ des constantes quelconques, et que l'on pose pour abréger:

$$K=\Sigma\lambda A\,,\quad L=\Sigma\lambda B\,,\quad M=\Sigma\lambda C\,,\quad N=\Sigma\lambda D\,, \qquad (3)$$

on pourra remplacer chacun des rapports (1) par

$$\frac{\lambda dx+\lambda' dy+\lambda'' dz+\lambda''' du}{Kx+Ly+Mz+Nu} \qquad (4)$$

Maintenant, disposons des facteurs $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ de façon que

$$\frac{\lambda}{K}=\frac{\lambda'}{L}=\frac{\lambda''}{M}=\frac{\lambda'''}{N}=\frac{1}{s} \qquad (5)$$

s étant une inconnue auxiliaire; c'est-à-dire prenons les équations

$$\left.\begin{aligned}
&(A - s)\lambda + A'\lambda' + A''\lambda'' + A'''\lambda''' = 0\,,\\
&B\lambda + (B' - s)\lambda' + B''\lambda'' + B'''\lambda''' = 0\,,\\
&C\lambda + C'\lambda' + (C'' - s)\lambda'' + C'''\lambda''' = 0\,,\\
&D\lambda + D'\lambda' + D''\lambda'' + (D''' - s)\lambda''' = 0:
\end{aligned}\right\}\qquad (6)$$

l' inconnue s sera déterminée par l'équation

$$\begin{vmatrix}
A-s, & A', & A'', & A''',\\
B\,, & B'-s, & B'', & B''',\\
C\,, & C', & C''-s, & C''',\\
D\,, & D', & D'', & D'''-s,
\end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

II. A cause des relations (5) la fraction (4) se réduit à

$$\frac{1}{s}\,\frac{d(\lambda x + \lambda' y + \lambda'' z + \lambda''' u)}{\lambda x + \lambda' y + \lambda'' z + \lambda''' u}$$

Par conséquent, si l'on représente par s_1, s_2, s_3, s_4 les racines de l'équation (7) (supposées *inégales* pour plus de simplicité); par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda'_1, \ldots$ *des valeurs correspondantes* de λ, λ', λ'', λ''', vérifiant les équations (6), on aura pour intégrales des équations differentielles proposées:

$$\left(\frac{\lambda_1 x + \lambda'_1 y + \lambda''_1 z + \lambda'''_1 u}{k_1}\right)^{\frac{1}{s_1}} = \left(\frac{\lambda_2 x + \lambda'_2 y + \lambda''_2 z + \lambda'''_2 u}{k_2}\right)^{\frac{1}{s_2}}$$

$$\left(\frac{\lambda_3 x + \lambda'_3 y + \lambda''_3 z + \lambda'''_3 u}{k_3}\right)^{\frac{1}{s_3}} = \left(\frac{\lambda_4 x + \lambda'_4 y + \lambda''_4 z + \lambda'''_4 u}{k_4}\right)^{\frac{1}{s_4}} \qquad (*)\ (8)$$

III. - *Application* - Je suppose que les équations (1) se réduisent à

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{x} \qquad (9),$$

auquel cas les équations (6) deviennent

$$\lambda - s\lambda' = 0\,,\quad \lambda' - s\lambda'' = 0\,,\quad \lambda'' - s\lambda''' = 0\,,\quad \lambda''' - s\lambda = 0 \qquad (10)$$

(*) Pour plus de symétrie, j'ai pris quatre constantes arbitraires; mais, ainsi que cela doit être, elles se réduisent à trois; car l'on peut faire

$$k_2 = \alpha^{s_2} k_1^{\frac{s_2}{s_1}}\,,\quad k_3 = \beta^{s_3} k_1^{\frac{s_3}{s_1}}\,,\quad k_4 = \gamma^{s_4} k_1^{\frac{s_4}{s_1}}$$

Il résulte, de celles-ci,

$$s^4 - 1 = 0 \qquad (11);$$

ou

$$s_1 = +1, \quad s_2 = -1, \quad s_3 = +\sqrt{-1}, \quad s_4 = -\sqrt{-1}.$$

D'ailleurs, on satisfait aux équations (10) en prenant

$$\begin{array}{llll}
\lambda_1 = 1, & \lambda'_1 = 1, & \lambda''_1 = 1, & \lambda'''_1 = 1, \\
\lambda_2 = -1, & \lambda'_2 = +1, & \lambda''_2 = -1, & \lambda'''_2 = +1, \\
\lambda_3 = +\sqrt{-1}, & \lambda'_3 = -1, & \lambda''_3 = -\sqrt{-1}, & \lambda'''_3 = +1, \\
\lambda_4 = -\sqrt{-1}, & \lambda'_4 = -1, & \lambda''_4 = +\sqrt{-1}, & \lambda'''_4 = +1.
\end{array}$$

Par conséquent, les intégrales cherchées sont

$$\frac{x+y+z+u}{k_1} = \frac{k_2}{-x+y-z+u} = \left[\frac{u-y+(x-z)\sqrt{-1}}{k_3}\right]^{-\sqrt{-1}}$$
$$= \left[\frac{u-y-(x-z)\sqrt{-1}}{k_4}\right]^{+\sqrt{-1}};$$

ou plutot:

$$(y+u)^2 - (x+z)^2 = A \qquad (12),$$

$$l(x+y+z+u) = \beta - \sqrt{-1}\, l\left[u-y+(x-z)\sqrt{-1}\right]$$
$$= \gamma + \sqrt{-1}\, l\left[u-y-(x-z)\sqrt{-1}\right] \qquad (13);$$

A, β, γ étant les trois constantes arbitraires.

Pour simplifier la dernière équation, je suppose:

$$R^2 = (u-y)^2 + (x-z)^2, \quad u-y = R\cos\varphi, \quad x-z = R\sin\varphi \quad (14);$$

d'où résulte, par des formules connues:

$$l\left[u-y+(x-z)\sqrt{-1}\right] = lR + \sqrt{-1}\,\varphi,$$
$$l\left[u-y-(x-z)\sqrt{-1}\right] = lR - \sqrt{-1}\,\varphi.$$

Les équations (13) deviennent alors:

$$l(x+y+z+u) = \beta - \sqrt{-1}\, lR + \varphi = \gamma + \sqrt{-1}\, lR + \varphi;$$

ou, ce qui est équivalent:

$$l(x+y+z+u) = \frac{\beta+\gamma}{2} + \varphi,$$

$$lx = \frac{\beta-\gamma}{2\sqrt{-1}}.$$

Les intégrales cherchées sont donc, finalement:

$$(y+u)^2-(x-z)^2=A \qquad (12)$$

$$l(x+y++z+u)=B+\varphi, \qquad (15)$$

$$(u-y)^2+(x-z)^2=R^2: \qquad (16)$$

les costantes arbitraires sont A,B,R. Quant à l'angle φ; il est déterminé par les relations (14).

IV. *Remarque*. La méthode précédente permettra, quelquefois, d'intégrer *indirectement* certaines équations qu'il semblerait impossible d'attaquer de front. Par exemple, si l'on reprend les équations

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{u}=\frac{du}{x} \qquad (9),$$

et qu'on élimine z et u, l'on trouve

$$\frac{x}{y}=y^2\frac{d^3y}{dx^3}+4y\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \qquad (7).$$

D'une autre côté, si l'on pouvait éliminer u, z et φ entre les équations (12), (14), (15), (16), on arriverait à une certaine équation

$$F(x, y, A, B, R)=0 \qquad (18)$$

Satisfaisant à l'équation (17) et contenant trois constantes arbitraires: la première serait donc l' intégrale générale de la seconde. Mais, si cette élimination est impraticable, rien n'empêche de regarder z, u et φ comme des variables auxiliaires et du *prendre pour intégrale de l'équation* (17), *le système des équations* (12), (14), (15) et (16).

V. Je laisse de côte l'examen des cas dans lesquels l'équation *caractéristique* (7) aurait une racine nulle, ou des racines égales; mais ils ne sauraient offrir de difficultés véritables. Par exemple si l'on prend les équations

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}, \qquad (19)$$

on trouve $s_1=0$, Mais il est évident que les équations équivalent à

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dy-dz}{z-y}=\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)}.$$

Par conséquent, les intégrales du système (19) sont

$$(x-y)^2(x+y+z)=A,$$

$$(y-z)^2(x+y+z)=B.$$

Liége, 9 octobre 1865.