

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURÉS ET APPLIQUÉES

CATALAN, E.

Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet.

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 1 (1875), p. 209-240.

http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1875_3_1_A11_0



Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par la Cellule MathDoc
dans le cadre du pôle associé BnF/CMD
<http://portail.mathdoc.fr/GALLICA/>

Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet;

PAR M. E. CATALAN [*].

1.

Si l'on suppose

(1)
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = l(n) + \varphi(n) + C,$$

on a les formules connues

(2)
$$C = \int_0^1 \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{l(x)} \right] dx,$$

(3)
$$\varphi(n) = - \int_0^1 \left[\frac{x}{1-x} + \frac{1}{l(x)} \right] x^{n-1} dx.$$

Une simple identité permet de remplacer les intégrales définies par d'autres, qui se rattachent aux fonctions elliptiques.

Si, dans l'égalité (1), on change n en $2n$, et que l'on retranche, on trouve

(4)
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = l(2) + \varphi(2n) - \varphi(n);$$

mais, ainsi qu'il est aisément de le reconnaître,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n} [**].$$

[*] Des extraits de ce petit Mémoire ont paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (juillet 1873) et dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique* (juillet-novembre 1872).

[**] Voir la Note à la fin.

Par conséquent, le premier membre de l'égalité (4) équivaut à

$$\begin{aligned} l(2) &= \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \dots \right) \\ &= l(2) - \int_0^1 (x^{2n} - x^{2n+1} + x^{2n+2} - \dots) dx, \end{aligned}$$

ou à

$$l(2) - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx.$$

La relation (4) devient donc

$$(5) \quad \varphi(n) - \varphi(2n) = \int_1^0 \frac{x^{2n}}{1+x} dx.$$

Dans cette égalité (5), changeons n en $2n, 4n, 8n, \dots$, puis faisons la somme : à cause de $\varphi(\infty) = 0$, nous aurons

$$(6) \quad \varphi(n) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} [x^{2n} + x^{4n} + x^{8n} + \dots];$$

ce qui est la formule annoncée.

Il en résulte, comme cas particulier,

$$\varphi(1) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} [x^2 + x^4 + x^8 + \dots];$$

puis, par la relation (1),

$$(7) \quad C = 1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} [x^2 + x^4 + x^8 + \dots].$$

II.

On tire de la formule (6), en changeant la notation,

$$\varphi(1) = \int_0^1 \frac{dq}{1+q} [q^2 + q^4 + q^8 + q^{16} + \dots],$$

$$\varphi(5) = \int_0^1 \frac{dq}{1+q} [q^{10} + q^{20} + q^{40} + q^{80} + \dots],$$

$$\varphi(9) = \int_0^1 \frac{dq}{1+q} [q^{18} + q^{36} + q^{72} + q^{144} + \dots],$$

.....

Soit, comme dans un autre Mémoire [*],

$$(8) \quad F(q) = q + q^2 + q^4 + q^8 + \dots$$

Alors la première des séries ci-dessus égale $F(q) - q$; la deuxième égale $F(q^5) - q^5$, etc. Il résulte, des égalités précédentes,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \varphi(1) + \varepsilon_5 \varphi(5) + \varepsilon_9 \varphi(9) + \dots \\ = \int_0^1 \frac{dq}{1+q} [\varepsilon_1 F(q) + \varepsilon_5 F(q^5) + \varepsilon_9 F(q^9) + \dots - \varepsilon_1 q - \varepsilon_5 q^5 - \varepsilon_9 q^9 - \dots] [**]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 F(q) + \varepsilon_5 F(q^5) + \varepsilon_9 F(q^9) + \dots &= f(q) = \frac{1}{4} \left(\frac{2\omega}{\pi} - 1 \right), \\ \varepsilon_1 q + \varepsilon_5 q^5 + \varepsilon_9 q^9 + \dots &= f(q) - f(q^2) = \frac{(1-k')\omega}{4\pi} [***]; \end{aligned}$$

on a donc simplement

$$(9) \quad \varepsilon_1 \varphi(1) + \varepsilon_5 \varphi(5) + \varepsilon_9 \varphi(9) + \dots = -\frac{1}{4} l(2) + \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{dq}{1+q} (1-k')\omega.$$

III.

Le calcul précédent, appliqué à la formule (3), donne

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \varphi(1) + \varepsilon_5 \varphi(5) + \varepsilon_9 \varphi(9) + \dots \\ = - \int_0^1 dq \left[\frac{1}{1-q} + \frac{1}{q l(q)} \right] (\varepsilon_1 q + \varepsilon_5 q^5 + \varepsilon_9 q^9 + \dots), \end{aligned}$$

[*] *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 76.

[**] En général, ε_n représente l'excès du nombre des diviseurs de n , ayant la forme $4\mu + 1$, sur le nombre de ceux qui ont la forme $4\mu - 1$. (*Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 75.)

[***] Suivant la notation de M. Bertrand,

$$\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dq}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 q}}.$$

(*Recherches sur quelques produits indéfinis*, pp. 74 et 76.)

ou

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 \varphi(1) + \epsilon_5 \varphi(5) + \epsilon_9 \varphi(9) + \dots \\ = - \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dq \left[\frac{1}{1-q} + \frac{1}{q l(q)} \right] (1 - k') \omega. \end{array} \right.$$

Conséquemment

$$\int_0^1 \frac{dq}{1+q} (1 + k') \omega + \int_0^1 dq \left[\frac{1}{1-q} + \frac{1}{q l(q)} \right] (1 - k') \omega = \pi l(2),$$

ou, après quelques réductions,

$$(11) \quad \int_0^1 \left[2 \frac{1 - q k'}{1 - q^2} + \frac{1 - k'}{q l(q)} \right] \omega dq = \pi l(2) \quad [*].$$

[*] Ce résultat semblera peut-être digne de remarque, si l'on fait attention que ω, k' sont des fonctions transcendantes de q , *définies* par les formules

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\frac{2\omega}{\pi} - 1 \right) &= \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \dots, \\ \frac{(1 - k')\omega}{4\pi} &= \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \dots. \end{aligned}$$

(*Recherches, etc.*, p. 76.) En outre, d'après les égalités (7), (8),

$$C = 1 - \int_0^1 \frac{dq}{1+q} [-q + F(q)],$$

puis

$$\int_0^1 \frac{dq}{1+q} F(q) = 2 + l(2) - C,$$

ou enfin

$$\int_0^1 \frac{dq}{1+q} F(q) = 0,729\ 637\ 154\ 538\ 522\dots$$

Ainsi l'on peut évaluer $\int_0^1 \frac{dq}{1+q} F(q)$, bien que la transcendante $F(q)$ ne paraisse pas exprimable sous forme finie.

IV.

Pour généraliser les formules (6), (7), soit

$$(12) \quad \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu+1} + \cdots + \frac{1}{\mu+n-1} = l(\mu+n-1) + \varphi(n, \mu) + C_\mu,$$

μ étant une quantité positive et la fonction $\varphi(n, \mu)$ s'annulant, comme $\varphi(n)$, pour n infini. La *constante* C_μ , qui devient $C_1 = C$ si $\mu = 1$, est définie par la condition

$$(13) \quad C_\mu = \lim \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu+1} + \cdots + \frac{1}{\mu+n-1} - l(\mu+n-1) \right].$$

D'après l'équation (12), et par des transformations connues,

$$(14) \quad \varphi(n, \mu) + C_\mu = \int_0^1 \left[x^{\mu-1} \frac{1-x^n}{1-x} + \frac{1-x^{\mu+n-2}}{l(x)} \right] dx.$$

Lorsque n devient infini, cette relation se réduit à

$$(15) \quad C_\mu = \int_0^1 \left[\frac{x^{\mu-1}}{1-x} + \frac{1}{l(x)} \right] dx.$$

Par suite,

$$(16) \quad \varphi(n, \mu) = - \int_0^1 \left[\frac{x}{1-x} + \frac{1}{l(x)} \right] x^{\mu+n-2} dx;$$

et, si l'on fait $x = e^{-z}$,

$$(17) \quad C_\mu = - \int_0^\infty \left[\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-\mu z}}{1-e^{-z}} \right] dz,$$

$$(18) \quad \varphi(n, \mu) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{e^z - 1} \right] e^{-(\mu+n-1)z} dz$$

V.

L'intégrale contenue dans l'égalité (16) représente, comme l'on sait, $\frac{d.I\Gamma(\mu)}{d\mu}$; donc

$$(19) \quad C_\mu = - \frac{d.I\Gamma(\mu)}{d\mu} [^*];$$

et, en particulier,

$$(20) \quad C = - \left[\frac{d.I\Gamma(\mu)}{d\mu} \right]_{(\mu=1)},$$

formule connue.

VI.

La comparaison des valeurs (2), (14) donne cette relation simple :

$$(21) \quad C - C_\mu = \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x} dx.$$

Il en résulte que la différence $C - C_\mu$ est réductible à l'intégrale d'une différentielle rationnelle, si μ est commensurable. Par exemple,

$$C - C_{\frac{1}{2}} = - 2 \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = - 2 \ln(2).$$

On a aussi, par la formule (20), en supposant μ inférieur à l'unité,

$$C - C_{1-\mu} = \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x} dx,$$

et, par conséquent,

$$(22) \quad C_\mu - C_{1-\mu} = \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} - x^{-\mu}}{1-x} dx,$$

ou

$$(23) \quad C_\mu - C_{1-\mu} = \pi \cot \mu \pi [**].$$

[*] On voit que $-C_\mu$ est la fonction $Z'(\mu)$ de Legendre.

[**] BIEKEENS DE HAAN, Table 3.

Ainsi la fonction C_μ sera déterminée entre $\mu = \frac{1}{2}$ et $\mu = 1$, si elle l'est pour $\mu < \frac{1}{2}$. D'ailleurs, la relation (22) équivaut à l'équation d'Euler

$$\Gamma(\mu) \Gamma(1 - \mu) = \frac{\pi}{\sin \mu \pi}.$$

En effet, on tire de celle-ci

$$l\Gamma(\mu) + l\Gamma(1 - \mu) = -l \sin \mu \pi,$$

puis

$$\frac{d.l\Gamma(\mu)}{d\mu} - \frac{d.l\Gamma(1 - \mu)}{d\mu} = -\pi \cot \mu \pi;$$

etc.

VII.

Indépendamment de ces deux expressions de la *constante d'Euler*

$$(2) \quad C = \int_0^1 \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{l(x)} \right] dx,$$

$$(7) \quad C = 1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} [x^2 + x^4 + x^6 + x^{16} + \dots],$$

on a [*]

$$C = \frac{1}{2} + 2 \int_0^\infty \frac{x dx}{1+x^2} \frac{1}{e^{2\pi x} - 1}.$$

Ces diverses formules ne semblent pas se prêter au calcul numérique de C [**]. Pour en trouver une autre un peu plus satisfaisante,

[*] *Note sur une formule de M. Botesu.* (*Bulletins de l'Académie*, novembre 1872.)

[**] Il en est de même d'une ingénieuse transformation, employée par Binet, et d'après laquelle

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{l(1-\gamma)} = \int_0^1 \beta_1 d\beta - \gamma \int_0^1 \beta_2 d\beta + \gamma^2 \int_0^1 \beta_3 d\beta - \dots,$$

en supposant

$$(1-\gamma)^k = 1 - \beta_1 \gamma + \beta_2 \gamma^2 - \beta_3 \gamma^3 + \dots$$

reprendons l'égalité (1)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = l(n) + \varphi(n) + C.$$

Comme

$$l(n) = l \frac{n}{n-1} + l \frac{n-1}{n-2} + \dots + l \frac{2}{1},$$

on peut l'écrire ainsi

$$C = 1 - \left(l \frac{2}{1} - \frac{1}{2} \right) - \left(l \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) - \dots - \left(l \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n} \right) - \dots;$$

ou, si l'on fait

$$(25) \quad u_n = l \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n} \quad [*];$$

$$(26) \quad C = 1 - \sum_2^\infty u_n.$$

Or

$$l \frac{n}{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)^2} + \frac{1}{3(n-1)^3} - \frac{1}{4(n-1)^4} + \dots;$$

donc

$$\sum_2^\infty u_n = \sum_2^\infty \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2} S_2 + \frac{1}{3} S_3 - \frac{1}{4} S_4 + \dots,$$

S_2, S_3, S_4, \dots représentant, suivant la notation habituelle, les sommes des puissances entières, négatives, des nombres naturels. A cause de

$$\sum_2^\infty \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1,$$

la formule (26) se réduit à

$$(27) \quad C = \frac{1}{2} S_2 - \frac{1}{3} S_3 + \frac{1}{4} S_4 - \frac{1}{5} S_5 + \dots$$

Les termes du second membre, alternativement positifs et négatifs,

[*] *Comptes rendus*, t. XLIII, p. 628. *Mélanges mathématiques*, p. 165.

décroissent indéfiniment; donc la série est convergente. Pour qu'elle le devienne davantage, ajoutons au second membre

$$-l(2) + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = 0 \quad [*].$$

De là résulte

$$(28) \quad C = 1 - l(2) + \frac{1}{2}(S_2 - 1) - \frac{1}{3}(S_3 - 1) + \frac{1}{4}(S_4 - 1) - \dots \quad [**].$$

VIII.

En combinant l'équation (28) avec celle-ci :

$$(29) \quad 1 - C = \frac{1}{2}l(2) + \frac{1}{3}(S_3 - 1) + \frac{1}{5}(S_5 - 1) + \frac{1}{7}(S_7 - 1) + \dots \quad [***],$$

on trouve un résultat assez curieux, savoir

$$(30) \quad l(2) = (S_2 - 1) + \frac{1}{2}(S_4 - 1) + \frac{1}{3}(S_6 - 1) + \frac{1}{4}(S_8 - 1) + \dots$$

Pour vérifier cette relation (dans laquelle on pourrait introduire les Nombres de Bernoulli), il suffit de se rappeler que

$$S_{2p} = \frac{1}{\Gamma(2p)} \int_0^\infty \frac{z^{2p-1} dz}{e^z - 1}.$$

[*] Artifice employé par Legendre.

[**] Cette formule, qui n'est pas nouvelle, est comprise dans une équation donnée par Legendre (*Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 432) et reproduite par M. Serret (*Calcul différentiel* de Lacroix, t. II, p. 334). Mais la démonstration de Legendre est inadmissible. En effet, cet illustre Géomètre y fait usage d'une série dont le premier terme est $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ (p. 430). Du reste, on connaît divers procédés, très-expéditifs, qui permettent de calculer C avec un grand nombre de décimales.

[***] LEGENDRE, p. 434. SERRET, p. 335.

On conclut de cette valeur

$$S_{2p} - 1 = \frac{1}{\Gamma(2p)} \left[\int_0^\infty \frac{z^{2p-1} dz}{e^z - 1} - \int_0^\infty e^{-z} z^{2p-1} dz \right] = \frac{1}{\Gamma(2p)} \int_0^\infty \frac{z^{2p-1} dz}{e^z (e^z - 1)}.$$

L'égalité (30) devient

$$l(2) = 2 \int_0^\infty \frac{dz}{e^z (e^z - 1)} \left[\frac{z}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{z^5}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} + \dots \right];$$

ou, si l'on somme la série,

$$l(2) = \int_0^\infty \frac{e^z + e^{-z} - 2}{ze^z (e^z - 1)} dz = \int_0^\infty \frac{e^z - 1}{z} e^{-2z} dz;$$

etc.

Le même calcul, appliqué à la relation (29), la transforme en

$$1 - C - \frac{1}{2} l(2) = \int_0^\infty \frac{dz}{e^z (e^z - 1)} \left[\frac{z^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \right];$$

ou, par la sommation de la série, en

$$1 - C - \frac{1}{2} l(2) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^z - e^{-z} - 2z}{ze^z (e^z - 1)} dz.$$

Au moyen de l'expression précédente de $l(2)$, cette égalité se réduit à

$$1 - C = \int_0^\infty \frac{e^z - 1 - z}{ze^z (e^z - 1)} dz;$$

ou encore à

$$C = \int_0^\infty \frac{(z-1) e^z + 1}{ze^z (e^z - 1)} dz = \int_0^\infty \left(\frac{e^z}{e^z - 1} - \frac{1}{z} \right) e^{-z} dz,$$

formule connue.

IX.

A cause des équations (3), (6), on a

$$(31) \int_0^1 \frac{dx}{1+x} [x^{2\mu} + x^{4\mu} + x^{8\mu} + \dots] + \int_0^1 \left[\frac{x}{1-x} + \frac{1}{l(x)} \right] x^{\mu-1} dx = 0,$$

au moins lorsque μ est entier. Afin de voir si la même relation subsiste pour toutes les valeurs positives de cette variable, prenons l'équation dérivée

$$(32) \int_0^1 \frac{dx l(x)}{1+x} [2x^{2\mu} + 4x^{4\mu} + 8x^{8\mu} + \dots] + \int_0^1 \left[\frac{x l(x)}{1-x} + 1 \right] x^{\mu-1} dx = 0.$$

Si l'on remplace μ par 2μ , on trouve aisément

$$(33) 2 \int_0^1 \frac{dx l(x)}{1+x} x^{2\mu} + \int_0^1 \left[\frac{l(x)}{1-x} + \frac{1}{x} \right] (x^\mu - 2x^{2\mu}) dx = 0;$$

ou, en supprimant une intégrale nulle,

$$\int_0^1 \frac{dx l(x)}{1-x} x^\mu = 4 \int_0^1 \frac{dx l(x)}{1-x^2} x^{2\mu+1}.$$

Il est visible que cette équation est identique. Il en est donc de même pour l'égalité (33).

Si maintenant, dans cette égalité (33), on change μ en $2\mu, 4\mu, 8\mu, \dots$, et qu'en même temps on multiplie par 2, 4, 8, ..., on retombe sur la relation (32). Donc celle-ci est générale, et l'équation (31) l'est pareillement.

Par suite, la formule (16) peut être écrite ainsi :

$$(34) \varphi(n, \mu) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} [x^{2(\mu+n-1)} + x^{4(\mu+n-1)} + x^{8(\mu+n-1)} + \dots] \quad [*].$$

[*] Si μ est entier, le second membre représente $\varphi(\mu+n-1)$ (6); donc, dans ce cas, $\varphi(n, \mu) = \varphi(\mu+n-1)$. Cette relation s'accorde avec l'égalité (12).

X.

De l'équation (31), on conclut

$$\int_0^1 \frac{x^{2\mu}}{1+x} dx + \int_0^1 \left[\frac{x}{1-x} + \frac{1}{l(x)} \right] (x^{\mu-1} - x^{2\mu-1}) dx = 0,$$

ou

$$\int_0^1 \left(\frac{x^{2\mu}}{1+x} + \frac{x^{\mu-1} - x^{2\mu-1}}{1-x} \right) dx + \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} - x^{2\mu-1}}{l(x)} dx = 0.$$

La seconde intégrale a pour valeur

$$l\left(\frac{1}{2}\right) = -l(2) \quad [*];$$

donc

$$(35) \quad \int_0^1 \frac{1+x-2x^{\mu+1}}{1-x^2} x^\mu dx = l(2),$$

ou, par le changement de x^2 en x ,

$$(36) \quad \int_0^1 \frac{x^{\frac{\mu-1}{2}} + x^{\frac{\mu}{2}} - 2x^\mu}{1-x} dx = 2l(2).$$

Cette intégrale définie, assez remarquable, peut évidemment en donner d'autres. Au lieu d'écrire ces nouvelles formules, nous allons tirer, de l'équation (36), une relation entre les transcendantes C_μ .

On a

$$(15) \quad C_\mu = \int_0^1 \left[\frac{x^{\mu-1}}{1-x} + \frac{1}{l(x)} \right] dx;$$

et, par conséquent,

$$(37) \quad C_\mu + C_{\mu+\frac{1}{2}} - 2C_{2\mu} = \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} + x^{\mu-\frac{1}{2}} - 2x^{2\mu-1}}{1-x} dx.$$

[*] BIERENS DE HAAN, Table 168.

Le second membre se déduit du premier membre de la relation (36), par le changement de $\frac{\mu-1}{2}$ en $\mu-1$; et, puisque l'intégrale (36) est indépendante de μ , on a

$$(38) \quad C_\mu + C_{\mu+\frac{1}{2}} - 2C_{2\mu} = 2l(2).$$

Lorsque $\mu = \frac{1}{2}$, cette relation générale se réduit à

$$C_{\frac{1}{2}} - C_1 = 2l(2) \text{ (VI).}$$

XI.

Si nous réduisons en série la fraction $\frac{1+x-2x^{\mu+1}}{1-x^2}$, nous aurons

$$\frac{1+x-2x^{\mu+1}}{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (1+x-2x^{\mu+1})x^{2n-2}.$$

L'équation (35) devient donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (1+x-2x^{\mu+1})x^{\mu+2n-2} dx = l(2),$$

ou

$$(39) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu+2n-1} + \frac{1}{\mu+2n} - \frac{1}{\mu+n} \right) = l(2),$$

ou encore

$$(40) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2+2n\mu+n}{(\mu+n)(\mu+2n-1)(\mu+2n)} = l(2).$$

Chacune de ces deux formules donne, on le voit, une infinité de développements de $l(2)$. Elles subsistent même pour $\mu = 0$; car, dans ce cas, la première se réduit à

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = l(2);$$

et la seconde, transformée de la première, devient

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots = l(2).$$

La convergence des séries (39), (40), assez faible déjà si $\mu = 0$, diminue quand ce paramètre augmente. Par exemple, pour $\mu = 99$, la formule (39) devient

$$\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101} - \frac{1}{100} \right) + \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{103} - \frac{1}{101} \right) + \left(\frac{1}{104} + \frac{1}{105} - \frac{1}{102} \right) + \dots = l(2).$$

On voit que les termes du premier membre ne décroissent guère plus rapidement que ceux de la série *divergente*

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{103} + \frac{1}{105} + \dots,$$

du moins pour les premières valeurs de n . Mais, quand ce nombre grandit, le terme général de la série (40) tend vers $\frac{2\mu+1}{2n(2n-1)}$: la série est donc convergente.

XII.

Soient

$$(41) \quad A_\mu = C_{\mu+\frac{1}{2}} - C_{2\mu} = \int_0^1 \frac{x^{\mu-\frac{1}{2}} - x^{2\mu-1}}{1-x} dx,$$

$$(42) \quad B_\mu = C_\mu - C_{2\mu} = \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} - x^{2\mu-1}}{1-x} dx,$$

d'après l'égalité (37). Pour essayer de déterminer A_μ , B_μ , observons que la relation (38) donne

$$A_\mu + B_\mu = 2l(2),$$

et que, d'un autre côté,

$$A_\mu - B_\mu = - \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} (1 - x^{\frac{1}{2}})}{1-x} dx,$$

ou, plus simplement,

$$(43) \quad A_\mu - B_\mu = -2 \int_0^1 \frac{x^{2\mu-1}}{1+x} dx.$$

Par conséquent,

$$A_\mu = l(2) - \int_0^1 \frac{x^{2\mu-1}}{1+x} dx, \quad B_\mu = l(2) + \int_0^1 \frac{x^{2\mu-1}}{1+x} dx;$$

ou, si l'on veut,

$$(44) \quad A_\mu = \int_0^1 \frac{1-x^{2\mu-1}}{1+x} dx, \quad B_\mu = \int_0^1 \frac{1+x^{2\mu-1}}{1+x} dx.$$

L'intégrale (43) n'étant pas exprimable sous forme finie, du moins en général, il en est de même pour les quantités A_μ , B_μ . Néanmoins, la dernière recherche nous donne ces formules de réduction :

$$(45) \quad \begin{cases} \int_0^1 \frac{x^{\mu-\frac{1}{2}} - x^{2\mu-1}}{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1-x^{2\mu-1}}{1+x} dx, \\ \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} - x^{2\mu-1}}{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1+x^{2\mu-1}}{1+x} dx. \end{cases}$$

XIII.

Prenons l'équation connue

$$(46) \quad I\Gamma(\mu) = (\mu - \frac{1}{2})l(\mu) - \mu + \frac{1}{2}l(2\pi) + \varpi(\mu),$$

dans laquelle $\varpi(\mu)$ représente la *fonction de Binet*, savoir :

$$(47) \quad \varpi(\mu) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-\mu x}}{x} dx.$$

Il en résulte, à cause de la formule (19) et de $\int_0^{\infty} e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu}$,

$$(48) \quad C_\mu = \frac{1}{2\mu} - l(\mu) - \varpi'(\mu) \quad [*],$$

$$(49) \quad \varpi'(\mu) = -\frac{1}{2\mu} - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-\mu x} dx.$$

[*] Dans la Note insérée aux *Comptes rendus*, le terme $-l(\mu)$ a été omis.

Si l'on fait $e^x = \frac{1}{\alpha}$, la dernière équation devient

$$(50) \quad \varpi'(\mu) = -\frac{1}{2\mu} - \int_0^1 \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{1}{l(\alpha)} \right] \alpha^{\mu-1} d\alpha,$$

et, par l'égalité (31),

$$(51) \quad \varpi'(\mu) = -\frac{1}{2\mu} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} [x^{2\mu} + x^{4\mu} + x^{8\mu} + \dots].$$

Conséquemment (48),

$$(52) \quad C_\mu = \frac{1}{\mu} - l(\mu) - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} [x^{2\mu} + x^{4\mu} + x^{8\mu} + \dots];$$

puis, comme ci-dessus,

$$(7) \quad C_1 = C = 1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} [x^2 + x^4 + x^8 + \dots].$$

XIV.

Dans la relation

$$(38) \quad C_\mu + C_{\mu+\frac{1}{2}} - 2C_{2\mu} = 2l(2),$$

substituons aux quantités C_μ , $C_{\mu+\frac{1}{2}}$, $C_{2\mu}$ leurs valeurs

$$(52) \quad \begin{cases} C_\mu = \frac{1}{\mu} - l(\mu) - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} [x^{2\mu} + x^{4\mu} + x^{8\mu} + \dots], \\ C_{\mu+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mu+\frac{1}{2}} - l(\mu+\frac{1}{2}) - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} [x^{2\mu+1} + x^{4\mu+2} + x^{8\mu+4} + \dots], \\ C_{2\mu} = \frac{1}{2\mu} - l(2\mu) - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} [x^{4\mu} + x^{8\mu} + x^{16\mu} + \dots]; \end{cases}$$

nous aurons

$$\frac{1}{\mu + \frac{1}{2}} + l \frac{\mu}{\mu + \frac{1}{2}} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} [-x^{2\mu} - x^{2\mu+1} + x^{4\mu} - x^{4\mu+2} + x^{8\mu} - x^{8\mu+4} + \dots] = 0,$$

ou

$$\frac{1}{\mu + \frac{1}{2}} + l \frac{\mu}{\mu + \frac{1}{2}} + \int_0^1 dx [-x^{2\mu} + x^{4\mu} (1-x) + x^{8\mu} (1-x+x^2-x^3) + x^{16\mu} (1-x+x^2-\dots-x^7) + \dots] = 0.$$

On peut remplacer $\frac{1}{\mu + \frac{1}{2}} = \frac{2}{2\mu + 1}$ par $2 \int_0^1 x^{2\mu} dx$. De plus, $l \frac{\mu}{\mu + \frac{1}{2}} = -l \frac{2\mu + 1}{2\mu} = -l \left(1 + \frac{1}{2\mu}\right)$; donc la relation précédente devient

$$l \left(1 + \frac{1}{2\mu}\right) = \int_0^1 dx [x^{2\mu} + x^{4\mu} (1-x) + x^{8\mu} (1-x+x^2-x^3) + \dots].$$

Si l'on intègre chaque terme, et que l'on remplace 2μ par α , on a enfin

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} l \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) &= \frac{1}{\alpha+1} + \left(\frac{1}{2\alpha+1} - \frac{1}{2\alpha+2}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{4\alpha+1} - \frac{1}{4\alpha+2} + \frac{1}{4\alpha+3} - \frac{1}{4\alpha+4}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{8\alpha+1} - \frac{1}{8\alpha+2} + \dots + \frac{1}{8\alpha+8}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{16\alpha+1} - \dots + \frac{1}{16\alpha+16}\right) \\ &+ \dots \end{aligned} \right.$$

Dans ce nouveau développement, α est une quantité *positive* quelconque. $\alpha = 1$ donne l'expression ordinaire du logarithme de 2. Si l'on suppose $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 2$, on trouve

$$l(3) = \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{12}\right) + \dots,$$

$$l\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \dots - \frac{1}{24}\right) + \dots$$

XV.

De l'équation (51), on conclut

$$\varpi(\mu) - \varpi(1) = -\frac{1}{2}l(\mu)$$

$$+ \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)} \left[\frac{x^{2\mu} - x^2}{2} + \frac{x^{4\mu} - x^4}{4} + \frac{x^{8\mu} - x^8}{8} + \dots \right],$$

ou, parce que $\varpi(1) = 1 - \frac{1}{2}l(2\pi)$ (46),

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varpi(\mu) = 1 - \frac{1}{2}l(2\mu\pi) \\ \quad + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)} \left[\frac{x^{2\mu} - x^2}{2} + \frac{x^{4\mu} - x^4}{4} + \frac{x^{8\mu} - x^8}{8} + \dots \right]. \end{array} \right.$$

Pour simplifier cette formule, prenons $\mu = \frac{1}{2}$:

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}l(\pi) + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)} \left[\frac{x - x^2}{2} + \frac{x^2 - x^4}{4} + \frac{x^4 - x^8}{8} + \dots \right],$$

on

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}l(\pi) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)} \left[-x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \dots \right].$$

Mais, à cause de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, on tire, de la relation (51),

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}l(2);$$

donc l'égalité précédente se réduit à

$$0 = 1 - l\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)} \left[-x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \dots \right].$$

Combinant celle-ci avec la relation (54), on obtient

$$(55) \quad \varpi(\mu) = \frac{1}{2}l\left(\frac{\pi}{8\mu}\right) + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)} \left[-x + \frac{x^{2\mu}}{2} + \frac{x^{4\mu}}{4} + \frac{x^{8\mu}}{8} + \dots \right].$$

Voilà donc une expression de la transcendante $\varpi(\mu)$, qui subsiste

pour toutes les valeurs positives de μ , et qui dépend d'une série dont la convergence augmente indéfiniment avec cette variable. Au moyen de l'identité

$$0 = \frac{1}{2} l\left(\frac{\pi^2}{4}\right) + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x) l(x)} (1-x) \quad [^*],$$

on peut écrire ainsi la dernière formule

$$(56) \quad \varpi(\mu) = -\frac{1}{2} l(2\mu\pi) + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x) l(x)} \left[-1 + \frac{x^{2\mu}}{2} + \frac{x^{4\mu}}{4} + \frac{x^{6\mu}}{8} + \dots \right].$$

De celle-ci, l'on conclut ces deux résultats simples :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x) l(x)} \left[-1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{8} + \dots \right] &= 1, \\ \int_0^1 \frac{dx}{(1+x) l(x)} \left[-1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8} + \dots \right] &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} l\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

XVI.

Si, dans la relation (46), on substitue à $\varpi(\mu)$ sa valeur (56), on trouve

$$(57) \quad l\Gamma(\mu) = (\mu - 1) l(\mu) - \mu + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x) l(x)} \left[-1 + \frac{x^{2\mu}}{2} + \frac{x^{4\mu}}{4} + \frac{x^{6\mu}}{8} + \dots \right];$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(58) \quad \begin{cases} l\Gamma(\mu) = (\mu - 1) l(\mu) - \mu \\ \quad - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x) l(x)} \left[\frac{1-x^{2\mu}}{2} + \frac{1-x^{4\mu}}{4} + \frac{1-x^{6\mu}}{8} + \dots \right] \quad [**]. \end{cases}$$

En général,

$$\int_0^1 \frac{dx (1-x^q)}{(1+x) l(x)} = l \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q+2}{2}\right)} \quad [***];$$

[*] BIERENS DE HAAN, Table 171.

[**] Est-il nécessaire de rappeler que

$$-1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots ?$$

[***] BIERENS DE HAAN, Table 171.

donc

$$\int_0^1 \frac{dx(1-x^{2\mu})}{(1+x)l(x)} = l \frac{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu + 1)} = -l \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})}.$$

Appliquant cette transformation à chacune des parties de l'intégrale (58), nous aurons

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)} \left[\frac{1-x^{2\mu}}{2} + \frac{1-x^{4\mu}}{4} + \frac{1-x^{8\mu}}{8} + \dots \right] \\ &= -l\Gamma(\frac{1}{2}) - \left[\frac{1}{2}l \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} + \frac{1}{4}l \frac{\Gamma(2\mu + 1)}{\Gamma(2\mu + \frac{1}{2})} + \frac{1}{8}l \frac{\Gamma(4\mu + 1)}{\Gamma(4\mu + \frac{1}{2})} + \dots \right], \end{aligned}$$

ou bien

$$(59) \quad \begin{cases} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)} \left[\frac{1-x^{2\mu}}{2} + \frac{1-x^{4\mu}}{4} + \frac{1-x^{8\mu}}{8} + \dots \right] \\ = -l \left\{ \sqrt{\pi} \left[\frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(2\mu + 1)}{\Gamma(2\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(4\mu + 1)}{\Gamma(4\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \dots \right\}; \end{cases}$$

puis, au lieu de la formule (58),

$$(60) \quad \Gamma(\mu) = \mu^{\mu-1} e^{-\mu} \sqrt{\pi} \left[\frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(2\mu + 1)}{\Gamma(2\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(4\mu + 1)}{\Gamma(4\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \dots$$

XVII.

On tire, de cette égalité (60) :

$$\begin{aligned} \Gamma(2\mu) &= (2\mu)^{2\mu-1} e^{-2\mu} \sqrt{\pi} \left[\frac{\Gamma(2\mu + 1)}{\Gamma(2\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(4\mu + 1)}{\Gamma(4\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(8\mu + 1)}{\Gamma(8\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \dots, \\ [\Gamma(\mu)]^2 &= \mu^{2\mu-2} e^{-2\mu} \pi \left[\frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \right] \left[\frac{\Gamma(2\mu + 1)}{\Gamma(2\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(4\mu + 1)}{\Gamma(4\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \dots; \end{aligned}$$

et, par la division,

$$\frac{\Gamma(2\mu)}{[\Gamma(\mu)]^2} = 2^{2\mu-4} \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\mu + 1)},$$

ou

$$(61) \quad \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu + \frac{1}{2})}{\Gamma(2\mu)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}},$$

formule de Legendre.

XVII.

On sait, et il est d'ailleurs évident [*], que

$$e = \lim \frac{n}{\sqrt{1 \cdot 2 \cdots n}},$$

quand n est un nombre entier, croissant indéfiniment. Une transformation de l'égalité (60) va nous permettre de généraliser cette propriété.

Le produit des facteurs fractionnaires peut être écrit ainsi :

$$\left[\frac{\mu \Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(2\mu) \Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{(4\mu) \Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{8}} \cdots$$

Or :

$$\mu^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{4}} \mu^{\frac{1}{8}} \cdots = \mu, \quad 2^{\frac{1}{4}} 4^{\frac{1}{8}} 8^{\frac{1}{16}} \cdots = 2^{\frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} \cdots} = 1;$$

donc

$$(62) \quad \Gamma(\mu) = 2\sqrt{\pi} \mu^{\mu} e^{-\mu} \left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{\Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{8}} \cdots$$

Appliquons la formule de Legendre à chacun des facteurs du produit indéfini

$$(63) \quad P_{\mu} = \left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{\Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{8}} \cdots;$$

nous aurons

$$P_{\mu} = \left[\frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\mu)}{\Gamma(2\mu)} \frac{2^{2\mu-1}}{\sqrt{\pi}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(2\mu) \Gamma(2\mu)}{\Gamma(4\mu)} \frac{2^{4\mu-1}}{\sqrt{\pi}} \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{\Gamma(4\mu) \Gamma(4\mu)}{\Gamma(8\mu)} \frac{2^{8\mu-1}}{\sqrt{\pi}} \right]^{\frac{1}{8}} \cdots,$$

ou

$$P_{\mu} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\mu)}{[\Gamma(2\mu)]^{\frac{1}{2}}} 2^{\mu} \times \frac{\Gamma(2\mu)}{[\Gamma(4\mu)]^{\frac{1}{4}}} 2^{\mu} \times \frac{\Gamma(4\mu)}{[\Gamma(8\mu)]^{\frac{1}{8}}} 2^{\mu} \times \cdots$$

[*] Par la formule de Stirling.

Le produit des p facteurs, qui suivent immédiatement $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, est égal à

$$2^{p\mu} \frac{\Gamma(\mu)}{[\Gamma(2^p\mu)]^{\frac{1}{2^p}}}.$$

Conséquemment,

$$P_\mu = \frac{\Gamma(\mu)}{2\sqrt{\pi}} \lim \frac{2^{p\mu}}{[\Gamma(2^p\mu)]^{\frac{1}{2^p}}};$$

puis, par la formule (62),

$$e^\mu = \mu^\mu \lim \frac{2^{p\mu}}{[\Gamma(2^p\mu)]^{\frac{1}{2^p}}}.$$

En élévant les deux membres à la puissance $\frac{1}{\mu}$, on a donc

$$e = \lim \frac{2^p\mu}{[\Gamma(2^p\mu)]^{\frac{1}{2^p}}}.$$

D'après la démonstration précédente, p est un nombre entier, et la fonction contenue dans le second membre est *discontinue*. Mais si nous prenons

$$\gamma = \frac{x}{[\Gamma(x)]^{\frac{1}{x}}},$$

x étant une variable positive, la fonction *continue* γ deviendra égale à la première fonction, toutes les fois que x prendra les valeurs $2\mu, 4\mu, 8\mu, \dots$; donc les deux fonctions tendent vers la même limite; et, en résumé,

$$(64) \quad e = \lim \frac{x}{[\Gamma(x)]^{\frac{1}{x}}},$$

x croissant indéfiniment [*].

[*] Le même raisonnement est applicable à la fonction *discontinue* $Z = \frac{n}{[\Gamma(n+1)]^{\frac{1}{n}}}$:

si l'on prend la fonction *continue*, auxiliaire, $z = \frac{x}{[\Gamma(x+1)]^{\frac{1}{x}}}$, les valeurs de z seront

égales à celles de Z pour $x = n$. On peut donc abréger, d'une manière notable, la démonstration précédente. Néanmoins je l'ai conservée, à cause des transformations de $\Gamma(\mu)$.

Par exemple, le nombre e est la limite des quantités

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\frac{3}{2}}{\left[\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right]^{\frac{2}{3}}}, \quad \frac{\frac{5}{2}}{\left[\frac{1}{2}\frac{3}{2}\sqrt{\pi}\right]^{\frac{2}{5}}}, \quad \frac{\frac{7}{2}}{\left[\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\sqrt{\pi}\right]^{\frac{2}{7}}}, \dots$$

XVIII.

Dans la formule (60), supposons que μ soit un nombre entier n .
Nous aurons

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n^n e^{-n} \sqrt{\pi} \\ &\times \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 4n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 4n-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 8n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 8n-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right]^{\frac{1}{8}} \dots, \end{aligned}$$

ou, par le calcul effectué plusieurs fois,

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n^n e^{-n} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1} \\ &\times \left[\frac{2n+2 \dots 4n}{2n+1 \dots 4n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4n+2 \dots 8n}{4n+1 \dots 8n-1} \right]^{\frac{1}{4}} \dots \end{aligned} \right.$$

On tire de cette équation

$$(66) \quad e^n = \frac{(2n)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1} \left[\frac{2n+2 \dots 4n}{2n+1 \dots 4n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4n+2 \dots 8n}{4n+1 \dots 8n-1} \right]^{\frac{1}{4}} \dots$$

Ainsi toute puissance entière et positive de e est développable en un produit indéfini. En particulier,

$$(67) \quad [^*] \quad e = \frac{2}{1} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}\right)^{\frac{1}{8}} \dots$$

[*] Cette formule, qui me paraît curieuse, ne diffère pas, au fond, de la première des égalités (56).

XIX.

Il est visible que

$$\begin{aligned} & \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1} \left[\frac{2n+2}{2n+1} \cdots \frac{4n}{4n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} \cdots \frac{2n-2}{2n-3} \frac{2n-2}{2n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{2n} \left[\frac{2n}{2n-1} \frac{2n+2}{2n-1} \cdots \frac{4n}{4n-1} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donc la formule (65) équivaut à

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n^n e^{-n} \sqrt{2n} \left[\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} \cdots \frac{2n-2}{2n-3} \frac{2n-2}{2n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left[\frac{2n}{2n-1} \frac{2n+2}{2n+1} \cdots \frac{4n}{4n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4n+2}{4n+1} \cdots \frac{8n}{8n-1} \right]^{\frac{1}{4}} \cdots \end{aligned}$$

Mais, par la formule de Stirling,

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + \varepsilon_n),$$

ε_n devenant zéro pour n infini. La comparaison de ces deux valeurs de $\Gamma(n+1)$ donne

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} \cdots \frac{2n-2}{2n-3} \frac{2n-2}{2n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \quad \times \left[\frac{2n}{2n-1} \frac{2n+2}{2n+1} \cdots \frac{4n}{4n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4n+2}{4n+1} \cdots \frac{8n}{8n-1} \right]^{\frac{1}{4}} \cdots, \end{array} \right.$$

on

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(1 + \varepsilon_n) = -\frac{1}{2} l(\pi) + \frac{1}{2} l \left[\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} \cdots \frac{2n-2}{2n-3} \frac{2n-2}{2n-1} \right] \\ \quad + \frac{1}{2} l \left[\frac{2n}{2n-1} \frac{2n+2}{2n+1} \cdots \frac{4n}{4n-1} \right] \\ \quad + \frac{1}{4} l \left[\frac{4n+2}{4n+1} \cdots \frac{8n}{8n-1} \right] + \dots, \end{array} \right.$$

et comme la formule de Stirling est

$$l(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) = nl(n) - n + \frac{1}{2} l(2\pi n) + l(1 + \varepsilon_n),$$

il s'ensuit que la série (69) représente la *fonction complémentaire* $l(1 + \varepsilon_n)$, fonction dont le développement, en *série divergente*, est

$$\frac{B_1}{1 \cdot 2n} + \frac{B_3}{3 \cdot 4n^3} + \frac{B_5}{5 \cdot 6n^5} + \dots$$

XX.

Au moyen de la formule de Wallis, on peut encore simplifier les relations (68), (69). En effet, suivant cette formule,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} \frac{2n+2}{2n+1} \cdots \right]^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$\left[\frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2n-1}{2n} \frac{2n+1}{2n} \frac{2n+1}{2n+2} \cdots \right]^{\frac{1}{2}};$$

donc, après une réduction évidente,

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{2n+1}{2n} \frac{2n+1}{2n+2} \cdots \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2n+2}{2n+1} \cdots \frac{4n}{4n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \quad \times \left[\frac{4n+2}{4n+1} \cdots \frac{8n}{8n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \cdots, \end{array} \right.$$

et

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(1 + \varepsilon_n) = -\frac{1}{2} l(2) + \frac{1}{2} l \left[\frac{2n+1}{2n} \frac{2n+1}{2n+2} \cdots \right] \\ \quad + \frac{1}{2} l \left[\frac{2n+2}{2n+1} \cdots \frac{4n}{4n-1} \right] + \frac{1}{4} l \left[\frac{4n+2}{4n+1} \cdots \frac{8n}{8n-1} \right] + \cdots \end{array} \right.$$

XXI.

Il est facile de voir que chacun de ces produits fractionnaires, le premier excepté, a pour limite $\sqrt{2}$. Soit

$$Q_n = \frac{2n+2}{2n+1} \frac{2n+4}{2n+3} \cdots \frac{4n}{4n-1};$$

et, par conséquent,

$$lQ_n = l\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) + l\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right) + \cdots + l\left(1 + \frac{1}{4n-1}\right).$$

Le second membre est compris entre

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} = S_n$$

et

$$S_n - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(4n-1)^2} \right];$$

ou, à plus forte raison, compris entre S_n et $S_n - \frac{1}{8n}$.

Or

$$S_n = \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{4n} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right];$$

donc [*]

$$\lim S_n = l(2) - \frac{1}{2} l(2) = \frac{1}{2} l(2);$$

puis

$$\lim lQ_n = \frac{1}{2} l(2),$$

ou

$$\lim Q_n = \sqrt{2}.$$

Chacun des produits $Q_n, Q_{2n}, Q_{4n}, \dots$ ayant pour limite $\sqrt{2}$, il résulte de l'égalité (70) que

$$\lim \left[\frac{2n+1}{2n} \frac{2n+1}{2n+2} \frac{2n+3}{2n+2} \frac{2n+3}{2n+4} \cdots \right] = 1,$$

propriété assez visible *a priori*.

[*] Note sur une formule de M. Botesu.

XXII.

On a

$$Q_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})\dots(2n-\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(2n+1)\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)\Gamma(2n+\frac{1}{2})};$$

et, par conséquent,

$$(72) \quad \lim \frac{\Gamma(2n+1)\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)\Gamma(2n+\frac{1}{2})} = \sqrt{2},$$

n étant un nombre entier, indéfiniment grand [].*Le raisonnement dont nous avons fait usage ci-dessus (XVII) est encore applicable; donc, μ étant une variable positive, indéfiniment croissante,

$$(73) \quad \lim \frac{\Gamma(2\mu+1)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})} = \sqrt{2};$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(74) \quad \lim \frac{\int_0^1 \theta^{2\mu} (1-\theta)^{\mu-\frac{1}{2}} d\theta}{\int_0^1 \theta^{2\mu-\frac{1}{2}} (1-\theta)^\mu d\theta} = \sqrt{2};$$

ou encore, avec la notation de Binet,

$$(75) \quad \lim \frac{B(2\mu+1, \mu+\frac{1}{2})}{B(2\mu+\frac{1}{2}, \mu+1)} = \sqrt{2}.$$

[*] Si l'on fait $T_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}$, la fraction considérée est $\frac{T_{2n}}{T_n}$. Les valeurs du numérateur sont comprises parmi celles du dénominateur; donc il semblerait que l'on dût avoir $\lim \frac{T_{2n}}{T_n} = 1$. Mais cette conclusion serait erronée, parce que les fonctions T_n, T_{2n} deviennent infinies avec n .

Ainsi le rapport des intégrales $B(2\mu + 1, \mu + \frac{1}{2})$, $B(2\mu + \frac{1}{2}, \mu + 1)$, qui tendent vers zéro, tend lui-même vers $\sqrt{2}$.

XX.

De

$$Q_n = \frac{2n+2}{2n+1} \frac{2n+4}{2n+3} \cdots \frac{4n}{4n-1},$$

on tire

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{(4n-2)4n}{(4n-3)(4n-1)} : \frac{2n}{2n-1},$$

ou

$$Q_n = Q_{n-1} \frac{4n-2}{4n-3} \frac{4n-2}{4n-1}.$$

Et comme

$$Q_1 = \frac{4}{3} = \frac{2}{1} \frac{2}{3},$$

il s'ensuit que

$$(76) \quad \sqrt{2} = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \frac{10}{9} \frac{10}{11} \frac{14}{13} \frac{14}{15} \cdots$$

Si de cette relation (probablement connue), on rapproche la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \frac{8}{7} \frac{8}{9} \frac{10}{9} \frac{10}{11} \cdots,$$

on trouve

$$(77) \quad \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{8}{7} \frac{8}{9} \frac{12}{11} \frac{12}{13} \frac{16}{15} \frac{16}{17} \cdots \quad [*].$$

[*] On sait qu'Euler a donné un grand nombre de résultats analogues aux précédents.

XXI.

Reprendons l'équation

$$(46) \quad l\Gamma(\mu) = \left(\mu - \frac{1}{2}\right)l(\mu) - \mu + \frac{1}{2}l(2\pi) + \varpi(\mu)$$

et comparons-la avec l'égalité (62), écrite sous la forme

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} l\Gamma(\mu) = \mu l(\mu) - \mu + l(2\pi) \\ \quad + \frac{1}{2}l(\pi) + \frac{1}{2}l\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})}\right] + \frac{1}{4}l\left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu + \frac{1}{2})}\right] + \dots \end{array} \right.$$

Il en résulte, par la soustraction,

$$(79) \quad \varpi(\mu) = \frac{1}{2}l(2\mu) + \frac{1}{2}l\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})}\right] + \frac{1}{4}l\left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu + \frac{1}{2})}\right] + \frac{1}{8}l\left[\frac{\Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu + \frac{1}{2})}\right] + \dots$$

Ce développement de la fonction de Binet serait peu propre au calcul numérique; mais l'on en conclut

$$(80) \quad \varpi(\mu) - \frac{1}{2}\varpi(2\mu) = \frac{1}{4}l(\mu) + \frac{1}{2}l\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})}\right],$$

relation qui donne $\varpi(2\mu)$ si $\varpi(\mu)$ est connue, et réciproquement.

La même combinaison, appliquée à la formule (55), conduit à celle-ci :

$$(81) \quad \varpi(\mu) - \frac{1}{2}\varpi(2\mu) = -\frac{1}{4}l(\mu\pi) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}(1-x^{2\mu});$$

donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}(1-x^{2\mu}) = -\frac{1}{2}l(\mu^2\pi) - l\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} = l\frac{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu + 1)};$$

ce qui est exact (XVI).

XXII.

A cause de

$$(19) \quad C_\mu = - \frac{dL\Gamma(\mu)}{d\mu},$$

la relation

$$(62) \quad \Gamma(\mu) = 2\sqrt{\pi}\mu^\mu e^{-\mu} \left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{\Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{8}} \dots$$

équivaut à

$$2C_\mu = -2l(\mu) + [C_\mu - C_{\mu+\frac{1}{2}}] + [C_{2\mu} - C_{2\mu+\frac{1}{2}}] + [C_{4\mu} - C_{4\mu+\frac{1}{2}}] + \dots$$

On conclut de celle-ci

$$2C_{2\mu} = -2l(2\mu) + [C_{2\mu} - C_{2\mu+\frac{1}{2}}] + [C_{4\mu} - C_{4\mu+\frac{1}{2}}] + \dots;$$

puis

$$(38) \quad C_\mu + C_{\mu+\frac{1}{2}} - 2C_{2\mu} = 2l(2),$$

comme précédemment.

XXIII.

En partant de la *définition*

$$(13) \quad C_\mu = \lim \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu+1} + \dots + \frac{1}{\mu+n-1} - l(\mu+n-1) \right],$$

jointe à cette relation (38), on peut trouver de nouvelles séries, *en nombre infini*, ayant pour limite $l(2)$. Posons, pour abréger,

$$u_n = \frac{1}{\mu+n-1} + \frac{1}{\mu+n-\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\mu+n-1};$$

alors

$$\lim \left[\sum_1^n u_n + l \frac{(2\mu + n - 1)^2}{(\mu + n - 1)(\mu + n - \frac{1}{2})} \right] = 2l(2),$$

ou

$$\sum_1^n u_n + \lim \left[\frac{(\mu + n - 1)^2}{(\mu + n - 1)(\mu + n - \frac{1}{2})} \right] = 2l(2).$$

Mais, quand n augmente indéfiniment, la fraction $\frac{(2\mu + n - 1)^2}{(\mu + n - 1)(\mu + n - \frac{1}{2})}$ tend vers l'unité; donc enfin

$$(82) \quad \frac{1}{2} \sum_1^\infty \left[\frac{1}{\mu + n - 1} - \frac{1}{\mu + n - \frac{1}{2}} - \frac{2}{2\mu + n - 1} \right] = l(2).$$

Par exemple,

$$(83) \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \right) + \dots = l(2).$$

NOTE.

L'un des derniers numéros du *Journal de Schlömilch* cite, comme nouveauté, une Note de M. *Unferdinger*, relative à la limite de $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$, pour $n = \infty$. Cette Note a paru dans les *Bulletins de l'Académie de Vienne (Sitzungsberichte der Mathematischen)*, année 1867! Pour trouver la limite dont il s'agit, l'auteur emploie les sommes des puissances négatives des nombres naturels, les *Nombres de Bernoulli*, la constante d'Euler, etc. Si M. Unferdinger avait consulté les *Nouvelles Annales*, il aurait pu y lire, dès 1858, diverses solutions élémentaires de la Question 458 [*].

Toutes ces solutions, beaucoup plus simples que celle de l'hono-

[*] $\lim \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = l(2)$. (*Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 434; t. XVIII, p. 195.)

rable Géomètre autrichien, sont encore *trop compliquées*. En effet, la proposition énoncée est une conséquence immédiate des relations

$$(A) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ell(2),$$

$$(B) \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n}.$$

Il est vrai que, les procédés simples étant presque toujours ceux qui se présentent en dernier, c'est seulement vers 1872 que j'ai rencontré, par hasard, l'identité (B). [Note sur une formule de M. Botesu. (*Bulletins de l'Académie de Belgique*.)]

