Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques [...]

NOTE
SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. E. CATALAN.

Trouver une surface, passant par une courbe donnée, et telle, qu'un point matériel sollicité par la pesanteur, étant posé sur la surface en un point de la courbe, avec une vitesse de grandeur et de direction convenables, parcoure cette courbe.

Supposons la courbe rapportée à trois axes rectangulaires, celui des z étant vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur. Soient

$$x = f(z), \quad y = f_1(z) \tag{1}$$

les équations de cette ligne. La surface cherchée aura une équation de la forme

$$x - f(z) = [y - f_1(z)]\,\varphi(y, z). \tag{2}$$

D'un autre côté, lorsqu'un point matériel se meut sur une surface, l'une des équations de sa trajectoire est, en employant les notations ordinaires,

$$pd.v\frac{dy}{ds} = qd.v\frac{dx}{ds}. \tag{3}$$

Si cette trajectoire doit être la courbe donnée, les quantités v, $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ sont des fonctions de z, déduites des équations (1), et les quantités p et q sont ce que deviennent les dérivées $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, tirées de l'équation (2), quand on remplace, dans ces valeurs, x et y par $f(z)$ et $f_1(z)$.

Or l'équation (2) donne

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{f'(z) + [y - f_1(z)]\frac{d\varphi}{dz} - f_1'(z)\varphi(y, z)},$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{[y - f_1(z)]\frac{d\varphi}{dz} + \varphi(y, z)}{f'(z) + [y - f_1(z)]\frac{d\varphi}{dz} - f_1'(z)\varphi(y, z)};$$

donc, pour les points de la courbe (1),

$$p = \frac{1}{f'(z) - f_1'(z)\varphi[f_1(z), z]}, \quad q = -\frac{\varphi[f_1(z), z]}{f'(z) - f_1'(z)\varphi[f_1(z), z]}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation (3) donneront

$$(4) \qquad \varphi[f_1(z), z] = \mathrm{F}(z),$$

$\mathrm{F}(z)$ étant une fonction connue.

La question proposée se réduit donc actuellement à la détermination d'une fonction $\varphi(y, z)$, qui satisfasse à la condition (4).

Il est évident qu'une pareille fonction sera donnée par la formule

$$\varphi(y, z) = \mathrm{F}(z) + [y - f_1(z)]\,\psi(y, z),$$

ψ étant une fonction arbitraire. Par suite, l'équation de la surface cherchée sera

$$(5) \qquad x - f(z) = [y - f_1(z)]\,\mathrm{F}(z) + [y - f_1(z)]^2\,\psi(y, z).$$

Dans les applications, il sera souvent commode de mettre les équations de la trajectoire sous une forme autre que celle des équations (1). C'est ce que l'on reconnaît sur l'exemple suivant.

Supposons que la courbe proposée soit une hélice. Si on la représente par

$$x = \mathrm{R}\cos k\frac{z}{\mathrm{R}}, \quad y = \mathrm{R}\sin k\frac{z}{\mathrm{R}},$$

l'équation de la surface se présente sous une forme compliquée. Mais remplaçons ces deux équations par

$$x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2 = 0, \quad z - \frac{\mathrm{R}}{k}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{y}{x} = 0.$$

nous pourrons supposer que l'équation de la surface est

$$z - \frac{R}{k} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} = (x^2+y^2-R^2)\,\varphi(x,y).$$

On déduit, de cette équation,

$$p = -\frac{1}{k} \sin k \frac{z}{R} + 2R \cos k \frac{z}{R}\, \varphi_1,$$

$$q = \frac{1}{k} \cos k \frac{z}{R} + 2R \sin k \frac{z}{R}\, \varphi_1,$$

en posant, pour abréger,

$$\varphi\left(R \cos k \frac{z}{R},\ R \sin k \frac{z}{R}\right) = \varphi_1.$$

Supposons que les coordonnées de la position initiale du point matériel soient

$$x = R, \quad y = 0, \quad \text{d'où} \quad z = 0.$$

Nous aurons, à un instant quelconque,

$$v = \sqrt{2gz}.$$

De plus,

$$dx = -k \sin k \frac{z}{R} \cdot dz, \quad dy = k \cos k \frac{z}{R} \cdot dz, \quad \text{etc.}$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (3) devient

$$\left[-\frac{1}{k} \sin k \frac{z}{R} + 2R \cos k \frac{z}{R} \cdot \varphi_1\right] d\left(\sqrt{z} \cos k \frac{z}{R}\right)$$
$$+ \left[\frac{1}{k} \cos k \frac{z}{R} + 2R \sin k \frac{z}{R} \cdot \varphi_1\right] d\left(\sqrt{z} \sin k \frac{z}{R}\right) = 0;$$

ou, en réduisant,

$$\varphi_1 = -\frac{z}{R^2}.$$

L'équation de la surface cherchée sera donc

$$z = \frac{R^3}{k} \frac{\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}}{x^2+y^2} + \frac{R^2(x^2+y^2-R^2)^2}{x^2+y^2}\, \psi(x^2+y^2-R^2)$$

Si nous supposons $\psi = 0$, l'équation se réduit à

$$z = \frac{R^3}{k} \frac{\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}}{x^2 + y^2},$$

ou, en posant $x = u \cos \omega$, $y = u \sin \omega$,

$$(A) \qquad z = \frac{R^2 \omega}{k u^2}.$$

La surface représentée par cette équation (A) est remarquable. En effet : 1° les sections faites par des cylindres de révolution autour de l'axe des z sont des hélices; 2° les sections faites par des plans passant suivant cet axe sont des courbes hyperboliques, asymptotes à l'axe des z et à la trace du plan sécant sur le plan des xy; 3° les sections horizontales sont des spirales; 4° les lignes de plus grande pente sont représentées par $u = Ce^{-\omega^2}$, etc.

Il y a plus : si un point matériel est posé sur cette surface, en un point quelconque de l'axe des x, la trajectoire de ce point sera une hélice. C'est ce que l'on reconnaît aisément en prouvant que toutes les hélices de la surface vérifient l'équation (3), si $v = \sqrt{2gz}$.