

Journal de mathématiques  
pures et appliquées : ou  
recueil mensuel de mémoires  
sur les diverses parties des  
mathématiques [...]

Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques / publié par Joseph Liouville. 1842.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUEZ ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment possible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter  
[reutilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:reutilisationcommerciale@bnf.fr).

# JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

---

## NOTE SUR LA SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES; PAR E. CATALAN.

---

### I.

*Si l'on donne aux entiers  $m$  et  $n$  toutes les valeurs possibles, différentes de l'unité, on aura*

$$(1) \quad \sum \frac{1}{m^n - 1} = 1;$$

*pourvu que dans cette somme, on ne compte qu'une seule fois une même fraction résultant de deux ou plusieurs systèmes de valeurs attribuées à  $m$  et  $n$  [\*].*

Ce théorème curieux est dû à Goldbach. Dans les *Commentaires de Pétersbourg*, pour l'année 1737, Euler le démontre à l'aide de la série divergente  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ . On peut éviter l'emploi de cette série, et établir la démonstration d'une manière plus rigoureuse, comme il suit.

[\*] Par exemple, la fraction

$$\frac{1}{4095} = \frac{1}{2^{12} - 1} = \frac{1}{4^6 - 1} = \frac{1}{8^4 - 1} = \frac{1}{16^3 - 1} = \frac{1}{64^2 - 1}$$

ne doit être comptée qu'une seule fois dans la somme.

Tome VII. — JANVIER 1842.

Représentons par  $p$  un quelconque des nombres  $4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, \dots$ ; nous aurons à démontrer l'équation

$$(2) \quad \sum \frac{1}{p-1} = 1.$$

Soit  $r$  la plus petite racine de  $p$ ; soit  $n$  l'indice de cette racine [<\*]. Le théorème énoncé reviendra à celui-ci :

$$(3) \quad \sum \frac{1}{r^n-1} = 1.$$

En faisant  $n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ , nous aurons

$$\sum \frac{1}{r^n-1} = \sum \frac{1}{r^2-1} + \sum \frac{1}{r^3-1} + \sum \frac{1}{r^4-1} + \dots$$

Or,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{1}{r^2-1} = \sum \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \dots \right), \\ \sum \frac{1}{r^3-1} = \sum \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^9} + \dots \right), \\ \sum \frac{1}{r^4-1} = \sum \left( \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^8} + \frac{1}{r^{12}} + \dots \right), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Ajoutant les termes placés dans une même colonne verticale, j'obtiens

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{1}{r^n-1} = \sum \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \dots \right) \\ \quad + \sum \left( \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^8} + \dots \right) \\ \quad + \sum \left( \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^9} + \frac{1}{r^{12}} + \dots \right) \\ \quad + \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

ou bien, en sommant chaque progression,

$$(6) \quad \sum \frac{1}{r^n-1} = \sum \frac{1}{r(r-1)} + \sum \frac{1}{r^2(r^2-1)} + \sum \frac{1}{r^3(r^3-1)} + \dots$$

---

[\*] Dans tout le cours de cette Note, nous continuerons à représenter par  $p$  un *nombre-puissance*, par  $r$  un nombre *non-puissance*, et par  $m$  ou  $n$  des nombres entiers quelconques, différents de l'unité.

Les termes qui entrent dans une quelconque de ces sommes sont essentiellement différents de ceux qui entrent dans toutes les autres, puisque  $r$  n'est pas une puissance; donc on reproduira tous ces termes si l'on prend la seule quantité  $\frac{1}{m(m-1)}$ , et qu'on attribue à  $m$  toutes les valeurs entières possibles, différentes de l'unité. Par suite,

$$(7) \quad \sum \frac{1}{r^{n-1}} = \sum \frac{1}{m(m-1)}.$$

Mais on a, par une formule connue, qu'il est aisé de démontrer,

$$\sum \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = 1;$$

donc enfin

$$\sum \frac{1}{p-1} = 1.$$

## II.

Reprendons l'équation (5),

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{r^{n-1}} &= \sum \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \dots \right) \\ &+ \sum \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^9} + \dots \right) \\ &+ \sum \left( \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^8} + \frac{1}{r^{12}} + \dots \right) \\ &+ \dots \dots \dots ; \end{aligned}$$

et groupons les termes semblables; nous aurons

$$(8) \quad \sum \frac{1}{r^{n-1}} = \sum \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{2}{r^4} + \frac{1}{r^5} + \frac{3}{r^6} + \frac{1}{r^7} + \frac{3}{r^8} + \dots \right).$$

Il est facile de voir que le numérateur de chaque fraction est égal au nombre des diviseurs de l'exposant correspondant, autres que l'unité.

Ainsi, en appelant  $i$  le nombre des diviseurs de  $n$ ,

$$(9) \quad \sum \frac{i-1}{r^n} = 1.$$

## III.

L'équation (5) peut encore se mettre sous la forme

$$(10) \quad \sum \frac{1}{r^n - 1} = \sum \frac{1}{m^2} + \sum \frac{1}{m^3} + \sum \frac{1}{m^4} + \sum \frac{1}{m^5} + \dots$$

On sait que la somme des puissances —  $n$  des nombres naturels, différents de l'unité, est toujours une quantité transcendante. L'équation précédente montre que si l'on fait varier  $n$  de 2 à l'infini, et qu'on ajoute toutes ces sommes, on obtient pour résultat l'unité. Cette remarque avait, je crois, été faite.

## IV.

PROBLÈME. *On demande de déterminer  $\sum \frac{n-1}{r^n - 1}$ .*

En faisant successivement  $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ , nous aurons d'abord

$$(11) \quad \sum \frac{n-1}{r^n - 1} = \sum \frac{1}{r^2 - 1} + \sum \frac{2}{r^3 - 1} + \sum \frac{3}{r^4 - 1} + \dots;$$

ensuite

$$\sum \frac{1}{r^2 - 1} = \sum \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \dots \right),$$

$$\sum \frac{2}{r^3 - 1} = \sum \left( \frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^6} + \frac{2}{r^9} + \dots \right),$$

$$\sum \frac{3}{r^4 - 1} = \sum \left( \frac{3}{r^4} + \frac{3}{r^8} + \frac{3}{r^{12}} + \dots \right),$$

.....

Donc, en ajoutant les termes placés verticalement,

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{n-1}{r^n - 1} = \sum \left( \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3} + \frac{3}{r^4} + \dots \right) \\ \quad + \sum \left( \frac{1}{r^4} + \frac{2}{r^6} + \frac{3}{r^8} + \dots \right) \\ \quad + \sum \left( \frac{1}{r^6} + \frac{2}{r^9} + \frac{3}{r^{12}} + \dots \right) \\ \quad + \dots \end{array} \right.$$

Ici, comme dans le § 1, on peut réduire toutes ces sommes à une seule, et écrire

$$(13) \quad \sum \frac{n-1}{r^n-1} = \sum \left( \frac{1}{m^2} + \frac{2}{m^3} + \frac{3}{m^4} + \frac{4}{m^5} + \dots \right).$$

Posons

$$S = \frac{1}{m^2} + \frac{2}{m^3} + \frac{3}{m^4} + \dots;$$

nous aurons, en multipliant par  $\frac{1}{m}$  et retranchant :

$$S \left( 1 - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} + \dots = \frac{1}{m(m-1)}.$$

Cette équation donne

$$S = \frac{1}{(m-1)^2}.$$

Par suite,

$$\sum \frac{n-1}{r^n-1} = \sum \frac{1}{(m-1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

La somme des carrés des inverses des nombres naturels est égale à  $\frac{\pi^2}{6}$ ; donc aussi

$$(14) \quad \sum \frac{n-1}{r^n-1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

## V.

PROBLÈME. *On demande de déterminer  $\sum \frac{1}{r^{2n}-1}$ .*

Un raisonnement identique avec celui du § 1 conduit à

$$(15) \quad \sum \frac{1}{r^{2n}-1} = \sum \frac{1}{m^2(m^2-1)}.$$

Or,

$$\frac{1}{m^2(m^2-1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1} \right) - \frac{1}{m^2};$$

donc

$$\sum \frac{1}{r^{2n}-1} = \frac{1}{2} \sum \left( \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1} \right) - \sum \frac{1}{m^2}.$$

Mais

$$\sum \left( \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2};$$

$$\sum \frac{1}{m^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

Par la substitution de ces valeurs, l'équation (15) devient

$$(16) \quad \sum \frac{1}{r^{2n}-1} = \frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \text{environ } 0,105066.$$

Ce résultat se trouve démontré d'une autre manière dans le Mémoire d'Euler.

Remarquons, en passant, l'équation

$$(17) \quad \sum \frac{1}{m^2-1} = \frac{3}{4}.$$

## VI.

PROBLÈME. *Déterminer*  $\sum \frac{n-1}{r^{2n}-1}$ .

Le problème du § IV donne, par le changement de  $m$  en  $m^2$ :

$$(18) \quad \sum \frac{n-1}{r^{2n}-1} = \sum \frac{1}{(m^2-1)^2}.$$

On a

$$\frac{1}{(m^2-1)^2} = \frac{1}{4(m+1)^2} + \frac{1}{4(m-1)^2} - \frac{1}{2(m^2-1)};$$

donc

$$\begin{aligned} \sum \frac{n-1}{r^{2n}-1} &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots \right) - \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{8}, \end{aligned}$$

ou

$$(19) \quad \sum \frac{n-1}{r^{2n}-1} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{11}{16} = \text{environ } 0,134967.$$

Si, au double du premier membre, nous ajoutons  $\sum \frac{1}{r^{2n}-1}$ , nous

obtiendrons, par l'équation (16),

$$(20) \quad \sum \frac{2n-1}{r^{2n}-1} = \frac{3}{8}.$$

Ainsi,

$$\frac{3}{15} + \frac{5}{63} + \frac{3}{80} + \frac{7}{255} + \frac{3}{624} + \frac{5}{728} + \dots = \frac{3}{8}.$$

Nous avons trouvé, plus haut,

$$\sum \frac{n-1}{r^n-1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En combinant cette équation avec l'équation (20), nous obtiendrons

$$\sum \left( \frac{1}{r^2-1} + \frac{2}{r^3-1} + \frac{3}{r^4-1} + \dots \right) - 2 \sum \left( \frac{3}{r^4-1} + \frac{5}{r^6-1} + \frac{7}{r^8-1} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{4},$$

ou

$$(21) \quad \sum \left( \frac{1}{r^2-1} + \frac{2}{r^3-1} - \frac{3}{r^4-1} + \frac{4}{r^5-1} - \frac{5}{r^6-1} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{4}.$$

Dans la parenthèse, tous les termes, à partir du second, sont alternativement positifs et négatifs. Pour obtenir une formule plus symétrique, retranchons les deux membres de  $2 \sum \frac{1}{r^2-1}$ , il viendra

$$\sum \left( \frac{1}{r^2-1} - \frac{2}{r^3-1} + \frac{3}{r^4-1} - \frac{4}{r^5-1} + \dots \right) = 2 \sum \frac{1}{r^2-1} + \frac{3}{4} - \frac{\pi^2}{6}.$$

On a évidemment

$$\sum \frac{1}{r^2-1} = \sum \frac{1}{m^2-1} - \sum \frac{1}{p^2-1};$$

ou, par la formule (17),

$$\sum \frac{1}{r^2-1} = \frac{3}{4} - \sum \frac{1}{p^2-1}.$$

Mais,  $p$  étant une puissance, son carré est égal à une puissance de

degré pair, d'un nombre *non-puissance*; donc

$$\sum \frac{1}{p^2-1} = \sum \frac{1}{r^{2n}-1}.$$

Ainsi, d'une part,

$$(22) \quad \sum \frac{1}{r^2-1} = \frac{\pi^2}{6} - 1,$$

à cause de la formule (16); et ensuite

$$(23) \quad \sum \left( \frac{1}{r^2-1} - \frac{2}{r^3-1} + \frac{3}{r^4-1} - \frac{4}{r^5-1} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} \\ = \text{environ } 0,394934.$$

Enfin, de  $\frac{1}{r^{2n}-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^n-1} - \frac{1}{r^n+1} \right)$  on déduit, par les équations (1) et (16),

$$(24) \quad \sum \frac{1}{r^n+1} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2} = \text{environ } 0,739868.$$

## VII.

Le théorème de Goldbach consiste, comme nous avons vu, en ce que  $\sum \frac{1}{r^n-1} = 1$ . Essayons d'évaluer  $\sum \frac{1}{m^n-1}$ , chaque fraction étant prise autant de fois qu'elle se présente.

Observons que  $\frac{1}{p^{N-1}}$  peut se mettre sous la forme  $\frac{1}{r^n-1}$ ,  $n$  étant un multiple de  $N$ . Donc si  $r$  et  $n$  sont des nombres déterminés, il y aura, dans notre série, autant de fractions équivalentes à  $\frac{1}{r^n-1}$  que  $n$  admet de diviseurs différents de 1. Nous aurons donc

$$(25) \quad \sum \frac{1}{m^n-1} = \sum \frac{i-1}{r^n-1},$$

$i$  étant le nombre des diviseurs de  $n$ .

Comme nous ne pouvons exprimer sous forme finie la somme qui se trouve dans le second membre, il est important d'obtenir une quantité plus grande que cette somme. Or, on a toujours  $i < n$ ; donc

$$\sum \frac{i-1}{r^n-1} < \sum \frac{n-1}{r^n-1}.$$

Cette dernière somme a été trouvée égale à  $\frac{\pi^2}{6}$ ; donc

$$(26) \quad \sum \frac{i-1}{r^n-1} < 1,644934\dots$$

Ainsi la somme des fractions de la forme  $\frac{1}{m^n-1}$  étant 1 quand on ne compte qu'une fois chacune d'elles, n'est pas augmentée de 0,645 par le fait de la reproduction de ces fractions. Nous trouverons, dans le paragraphe suivant, une limite supérieure plus approchée. On peut, du reste, transformer la série des fractions de manière à la rendre beaucoup plus convergente. En effet, l'identité

$$\frac{1}{r^n-1} - \frac{1}{r^n} = \frac{1}{(r^n-1)r^n}$$

donne

$$\sum \frac{i-1}{r^n-1} = \sum \frac{i-1}{r^n} + \sum \frac{i-1}{(r^n-1)r^n};$$

c'est-à-dire, à cause de la formule (9),

$$(27) \quad \sum \frac{i-1}{r^n-1} = 1 + \sum \frac{i-1}{(r^n-1)r^n}.$$

Nous aurons ainsi

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{1}{m^n-1} = 1 + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{2}{15 \cdot 16} + \\ \quad + \frac{1}{24 \cdot 25} + \frac{1}{26 \cdot 27} + \frac{1}{31 \cdot 32} + \frac{1}{35 \cdot 36} + \dots \end{array} \right.$$

### VIII.

PROBLÈME. *Calculer*  $\sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n}$ .

De  $\frac{1}{(r^n-1)r^n} = \frac{1}{r^n-1} - \frac{1}{r^n}$  on conclut

$$\sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n} = \sum \frac{n-1}{r^n-1} - \sum \frac{n-1}{r^n}.$$

Nous avons trouvé, (14),  $\sum \frac{n-1}{r^n-1} = \frac{\pi^2}{6}$ . En outre, si l'on remplace  $m$

par  $r$  dans la valeur de  $S$  du § IV, on aura

$$\sum \frac{n-1}{r^n} = \sum \left( \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3} + \frac{3}{r^4} + \dots \right) = \sum \frac{1}{(r-1)^2};$$

donc

$$(29) \quad \sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n} = \frac{\pi^2}{6} - \sum \frac{1}{(r-1)^2}.$$

Ainsi la sommation proposée est ramenée à la recherche de  $\sum \frac{1}{(r-1)^2}$ .  
Nous pouvons encore simplifier la formule (29); car on a évidemment

$$\sum \frac{1}{(r-1)^2} = \sum \frac{1}{(m-1)^2} - \sum \frac{1}{(p-1)^2};$$

d'où, à cause de  $\sum \frac{1}{(m-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ,

$$(30) \quad \sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n} = \sum \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Il résulte de cette dernière formule, que les deux séries

$$\begin{aligned} \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{2}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{3}{15 \cdot 16} + \frac{1}{24 \cdot 25} + \frac{2}{26 \cdot 27} \\ + \frac{4}{31 \cdot 32} + \frac{1}{35 \cdot 36} + \frac{1}{48 \cdot 49} + \frac{5}{63 \cdot 64} + \dots, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{24}\right)^2 + \left(\frac{1}{26}\right)^2 \\ + \left(\frac{1}{31}\right)^2 + \left(\frac{1}{35}\right)^2 + \left(\frac{1}{48}\right)^2 + \left(\frac{1}{63}\right)^2 + \dots, \end{aligned}$$

ont la même limite.

En réduisant en décimales les douze premiers termes de chaque série, on trouve, pour la première somme,

$$0,15643\dots,$$

et pour la seconde

$$0,15714\dots$$

Le second résultat est plus grand que le premier, parce que les dénominateurs des secondes fractions sont moindres que ceux des frac-

tions correspondantes ; mais plus tard, les nombres de diviseurs devenant de plus en plus considérables, les termes de la première série seront, en partie, plus grands que ceux qui leur correspondent dans la seconde, ce qui établira la compensation.

Revenons actuellement à l'équation (27). Comme  $i$  est nécessairement moindre que  $n$ , on a

$$\sum \frac{i-1}{(r^n-1)r^n} < \sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n};$$

donc

$$\sum \frac{i-1}{r^n-1} < 1 + \sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n};$$

et en mettant pour cette dernière somme la valeur ci-dessus,

$$(31) \quad \sum \frac{i-1}{r^n-1} < 1,15714\dots$$

On voit donc que la somme des fractions  $\frac{1}{m^n-1}$  est moindre que 1,15714. Ainsi que nous l'avons annoncé, cette limite supérieure est plus basse que celle qui a été donnée ci-dessus (26).

Les treize premiers termes de la série (28), étant réduits en décimales, donnent

$$(32) \quad \sum \frac{1}{m^n-1} > 1,11947\dots$$

Je crois pouvoir affirmer que cette valeur est approchée à moins de 0,01. Par conséquent,

$$(33) \quad \sum \frac{1}{m^n-1} = \text{environ } 1,12.$$

## IX.

Parmi les théorèmes contenus dans le Mémoire d'Euler, nous remarquerons encore celui-ci :

*a étant un nombre pair quelconque, et n un entier plus grand que l'unité; la somme des fractions de la forme  $\frac{1}{a^n-1}$  est égale au loga-*

rithme népérien de 2, si l'on ne compte qu'une seule fois chaque fraction qui se reproduit.

Euler démontre ce théorème, aussi bien que le premier, en employant la série  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

Pour déterminer  $\sum \frac{1}{a^{n-1}}$ , cherchons  $\sum \frac{1}{b^{n-1}}$ ,  $b$  étant un nombre impair quelconque, différent de 1.

En appliquant encore la méthode de démonstration du premier paragraphe, nous trouverons

$$\sum \frac{1}{b^{n-1}} = \sum \frac{1}{b(b-1)} = \sum \left( \frac{1}{b-1} - \frac{1}{b} \right);$$

donc

$$(34) \quad \sum \frac{1}{b^{n-1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

Mais on a, d'une part,

$$l(1+1) = l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots;$$

et d'autre part,

$$\sum \frac{1}{a^{n-1}} + \sum \frac{1}{b^{n-1}} = \sum \frac{1}{r^{n-1}} = 1;$$

d'où, en substituant,

$$(35) \quad \sum \frac{1}{a^{n-1}} = l \cdot 2.$$

Les équations (14), (19), (22), (23), (24), (30), (33) expriment des théorèmes assez curieux. Ceux du § VIII exigeraient, pour être plus précis, que l'on pût trouver  $\sum \frac{1}{(p-1)^2}$  sous forme finie. J'ignore si cette question a été résolue.

