

Journal de mathématiques
pures et appliquées : ou
recueil mensuel de mémoires
sur les diverses parties des
mathématiques [...]

Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques / publié par Joseph Liouville. 1841.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

PROBLÈME

DE CALCUL INTÉGRAL,

PAR E. CATALAN.

Un cône du second degré à base elliptique étant donné, on le coupe par une sphère concentrique, et l'on demande de calculer la portion de la surface sphérique interceptée.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2,$$

l'équation du cône; et soit

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

l'équation de la sphère.

En représentant par A l'aire cherchée, on a

$$A = \iint \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Les limites de l'intégration seront données par la projection, sur le plan des xy , de la courbe d'intersection des deux surfaces. Or cette projection a pour équation

$$x^2 \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) + y^2 \left(1 + \frac{1}{b^2} \right) = 1,$$

ou

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = 1.$$

Maintenant je pose

$$\alpha x = \rho \cos \omega, \quad \beta y = \rho \sin \omega, \quad \text{d'où} \quad dx dy = \frac{1}{\alpha \beta} \rho d\rho d\omega;$$

il en résultera

$$A = \frac{4}{\alpha \beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{\rho d\rho d\omega}{\sqrt{1 - \rho^2 \left(\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2} \right)}}.$$

Intégrant par rapport à ρ , l'on a

$$\begin{aligned} \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2 \left(\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2} \right)}} \\ = - \frac{1}{\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2}} \sqrt{1 - \rho^2 \left(\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2} \right)} + C, \end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 = \frac{1}{\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2}} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2} \right)} \right].$$

Donc

$$A = \frac{4}{\alpha \beta} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega \sqrt{1 - \left(\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2} \right)}}{\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2}} \right].$$

Pour obtenir la première intégrale, je prends $\tan \omega = u$, d'où

$$\cos^2 \omega = \frac{1}{1 + u^2}, \quad \sin^2 \omega = \frac{u^2}{1 + u^2}, \quad d\omega = \frac{du}{1 + u^2};$$

ce qui donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2}} = \int_0^{\infty} \frac{du}{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{u^2}{\beta^2}} = \frac{1}{2} \pi \alpha \beta.$$

La seconde intégrale ne peut s'obtenir sous forme finie que dans le cas où $\alpha = \beta$, c'est-à-dire lorsque le cône est de révolution.

On a, pour ce cas particulier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}}}{\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\pi}{2} \alpha \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Donc, en mettant pour α sa valeur,

$$A = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} - \frac{1}{a} \right) = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \right);$$

ce que l'on peut trouver par des considérations géométriques.

Dans le cas général, je pose $\tan \omega = p \tan \theta$, d'où

$$\sin^2 \omega = \frac{p^2 \tan^2 \theta}{1 + p^2 \tan^2 \theta}, \quad \cos^2 \omega = \frac{1}{1 + p^2 \tan^2 \theta}, \quad d\omega = \frac{p}{1 + p^2 \tan^2 \theta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta},$$

et

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2} \right)} &= \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{p^2 \tan^2 \theta}{\beta^2}}{1 + p^2 \tan^2 \theta}} \\ &= \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) + p^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) \tan^2 \theta}{1 + p^2 \tan^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Ce radical se simplifiera si l'on prend

$$p^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) = 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Alors la formule à intégrer devient

$$\begin{aligned} & \frac{p \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}}}{1 + p^2 \tan^2 \theta} \times \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \times \frac{1 + p^2 \tan^2 \theta}{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{p^2 \tan^2 \theta}{\beta^2}} \times \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 \tan^2 \theta}} \\ &= p \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \frac{d\theta}{\frac{\cos^2 \theta}{\alpha^2} + \frac{p^2 \sin^2 \theta}{\beta^2}} \times \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta}} \\ &= p \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \frac{d\theta}{\frac{1}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{p^2}{\beta^2}\right) \sin^2 \theta} \times \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - p^2) \sin^2 \theta}}. \end{aligned}$$

On a

$$p = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\alpha^2}}{1 - \frac{1}{\beta^2}}} = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2 - 1}} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{b^2}}{1 + \frac{1}{a^2}}} = \sqrt{\frac{1 + b^2}{1 + a^2}};$$

comme on peut supposer $a > b$, p sera < 1 . Donc

$$1 - p^2 = \frac{a^2 - b^2}{1 + a^2}$$

sera une quantité positive < 1 , que l'on peut représenter par c^2 .

Enfin, la quantité

$$1 - \frac{\alpha^2 p^2}{\beta^2} = 1 - \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2 - 1} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

est pareillement positive, et moindre que l'unité : appelons-la n . Nous aurons, à la place de la seconde intégrale,

$$\frac{1}{a^2} \sqrt{1 + b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{a^2} \sqrt{1 + b^2} \Pi_1(c, n).$$

Cette fonction elliptique complète de troisième espèce peut s'exprimer par des fonctions de première et de seconde. Pour opérer la transformation, j'emploie une formule donnée par Legendre (*Exer-*

cices, tome I, page 141) :

$$\frac{c'^2 \sin \theta' \cos \theta'}{\sqrt{1 - c'^2 \sin^2 \theta'}} [\Pi_1(n, c) - F_1(c)] = \frac{\pi}{2} + F_1(c) F(c', \theta') \\ - E_1(c) F(c', \theta') - F_1(c) E(c', \theta').$$

Dans cette formule

$$c'^2 = 1 - c^2 = \frac{1 + b^2}{1 + a^2},$$

et

$$\sin^2 \theta' = \frac{1 - n}{c'^2} = \frac{b^2}{a^2} \frac{1 + a^2}{1 + b^2}.$$

Elle devient donc

$$\Pi_1(n, c) = F_1(c) + \frac{a\sqrt{1 + a^2}}{b} \left(\frac{\pi}{2} + \text{etc.} \right).$$

Notre intégrale est par suite

$$\frac{1}{a^2} \sqrt{1 + b^2} F_1(c) + \frac{\sqrt{1 + a^2} \sqrt{1 + b^2}}{ab} \left[\frac{\pi}{2} + F_1(c) F(c', \theta') - \text{etc.} \right].$$

Réunissant les deux résultats, on a

$$A = 2\pi - \frac{4b}{a\sqrt{1 + a^2}} F_1(c) - 4 \left[\frac{\pi}{2} + F_1(c) F(c', \theta') - E_1(c) F(c', \theta') - F_1(c) E(c', \theta') \right] \\ = 4 \left[E_1(c) F(c', \theta') + F_1(c) E(c', \theta') - F_1(c) F(c', \theta') - \frac{b}{a\sqrt{1 + a^2}} F_1(c) \right].$$

Remarque. On sait que la courbe d'intersection d'un cône à base elliptique et d'une sphère concentrique, est une *ellipse sphérique*. Il résulte donc des calculs précédents, que l'aire de l'ellipse sphérique s'exprime par une fonction elliptique de troisième espèce jointe à une quantité algébrique.

Le lecteur pourra consulter, relativement aux propriétés de l'ellipse sphérique, plusieurs Mémoires de *Fuss*, de *M. Chasles*, de *M. Gudermann*, etc.