

Journal de mathématiques  
pures et appliquées : ou  
recueil mensuel de mémoires  
sur les diverses parties des  
mathématiques [...]

Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques / publié par Joseph Liouville. 1840.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUEZ ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment possible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter  
[reutilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:reutilisationcommerciale@bnf.fr).

## NOTE SUR L'INTÉGRALE

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax dx}{(1+x^2)^n};$$

PAR E. CATALAN.

1. M. Poisson a fait voir [\*] qu'en représentant par  $y_n$  cette intégrale définie, laquelle doit être une fonction de la variable positive  $a$ , sa valeur dépend de l'équation linéaire d'ordre  $2n$ :

$$y_n - \frac{n}{1} \cdot \frac{d^2 y_n}{da^2} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{d^4 y_n}{da^4} - \dots \pm \frac{d^{2n} y_n}{da^{2n}} = 0, \quad (1)$$

que l'on trouve facilement.

Cette équation est satisfaite par  $y = e^{mx}$ ,  $m$  représentant une racine quelconque de

$$1 - \frac{n}{1} m^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} m^4 - \dots \pm m^{2n} = 0,$$

ou

$$(1 - m^2)^n = 0. \quad (2)$$

Parmi les  $2n$  racines de l'équation (2), il y en a  $n$  égales à  $+1$ , et  $n$  égales à  $-1$ . D'ailleurs, l'intégrale proposée ne peut croître indéfiniment avec  $a$ : on conclut de là que la valeur de  $y_n$  relative au problème dont il s'agit, sera de cette forme :

$$y_n = e^{-a} \left[ A_0 + \frac{A_1}{1} a + \frac{A_2}{1 \cdot 2} a^2 + \dots + \frac{A_{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} a^{n-1} \right]. \quad (3)$$

Il faut actuellement déterminer les constantes.

[\*] *Journal de l'École Polytechnique*, XVI<sup>e</sup> cahier.

**2.** Pour cela, je désigne par  $P$  le polynôme qui multiplie  $e^{-x}$ , et je différencie  $n - 1$  fois; ce qui donne généralement

$$\frac{d^i y_n}{d\alpha^i} = (-1)^i e^{-x} \left( P - \frac{i}{1} \cdot \frac{dP}{d\alpha} + \frac{i}{1} \cdot \frac{i-1}{2} \cdot \frac{d^2 P}{d\alpha^2} - \dots \pm \frac{d^i P}{d\alpha^i} \right). \quad (4)$$

Faisant  $\alpha = 0$  [\*] dans les équations (3) et (4), j'obtiens

$$(y_n) = A_0, \quad \text{et} \quad \left( \frac{d^i y_n}{d\alpha^i} \right) = (-1)^i \left( A_0 - \frac{i}{1} A_1 + \frac{i}{1} \cdot \frac{i-1}{2} A_2 - \dots \pm A_{n-1} \right); \quad (5)$$

$(y_n)$  et  $\left( \frac{d^i y_n}{d\alpha^i} \right)$  représentent les valeurs que prennent les fonctions  $y_n$ ,  $\frac{d^i y_n}{d\alpha^i}$ , quand on suppose  $\alpha = 0$ .

La nature des équations (5) permet de les résoudre très facilement; et l'on trouve

$$A_i = (y_n) + \frac{i}{1} \cdot \left( \frac{dy_n}{d\alpha} \right) + \frac{i}{1} \cdot \frac{i-1}{2} \cdot \left( \frac{d^2 y_n}{d\alpha^2} \right) + \dots + \left( \frac{d^i y_n}{d\alpha^i} \right). \quad (6)$$

**3.** J'observe actuellement que

$$\left. \begin{aligned} y_n &= \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \cdot dx}{(1+x^2)^n}, & \text{d'où} & \quad (y_n) = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \\ \frac{dy_n}{d\alpha} &= - \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \cdot x dx}{(1+x^2)^n}, \dots \dots \dots & \left( \frac{dy_n}{d\alpha} \right) &= 0, \\ \frac{d^2 y_n}{d\alpha^2} &= - \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \cdot x^2 dx}{(1+x^2)^n}, \dots \dots \dots & \left( \frac{d^2 y_n}{d\alpha^2} \right) &= - \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}, \\ \frac{d^3 y_n}{d\alpha^3} &= \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \cdot x^3 dx}{(1+x^2)^n}, \dots \dots \dots & \left( \frac{d^3 y_n}{d\alpha^3} \right) &= 0, \\ \frac{d^4 y_n}{d\alpha^4} &= \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \cdot x^4 dx}{(1+x^2)^n}, \dots \dots \dots & \left( \frac{d^4 y_n}{d\alpha^4} \right) &= \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{(1+x^2)^n}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Pour évaluer ces différentes intégrales définies, indépendantes de  $\alpha$ , je prends celle-ci,  $\int_0^\infty \frac{x^m dx}{(1+x^2)^n}$ , dans laquelle  $m \leq n-1$ .

[\*] Les  $2n-2$  premières dérivées de  $y_n$ , prises par rapport à  $\alpha$ , sont des fonctions continues de cette variable, du moins entre les limites 0 et  $\infty$ ; il n'en serait pas de même des dérivées suivantes; mais cette circonstance est indifférente ici, puisque nous prenons  $i < 2$ .

En posant

$$x^3 = \frac{\theta}{1-\theta},$$

elle se transforme en

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \theta^{\frac{m-1}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{m+3}{2}} d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(n)};$$

et la formule (6) devient

$$A_i = \frac{1}{2\Gamma(n)} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) - \frac{i}{1} \cdot \frac{i-1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) + \frac{i}{1} \cdot \frac{i-1}{2} \cdot \frac{i-2}{3} \cdot \frac{i-3}{4} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{5}{2}\right) - \dots \right]. \quad (8)$$

Le dernier terme, dans la parenthèse, est

$$\pm \Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{i+1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \pm \Gamma\left(\frac{i}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{i}{2}\right),$$

selon que  $i$  est pair ou impair.

4. Cette valeur de  $A_i$  peut s'écrire autrement.

En posant  $\theta = \sin^2 \phi$ ,  $1-\theta = \cos^2 \phi$ ,

l'intégrale

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \theta^{\frac{m-1}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{m+3}{2}} d\theta$$

se transforme en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \phi \cdot \cos^{2n-m-3} \phi \cdot d\phi.$$

Par suite,

$$A_i = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \cos^{2n-3} \phi - \frac{i}{1} \cdot \frac{i-1}{2} \sin^2 \phi \cdot \cos^{2n-4} \phi + \frac{i}{1} \cdot \frac{i-1}{2} \cdot \frac{i-2}{3} \cdot \frac{i-3}{4} \sin^4 \phi \cdot \cos^{2n-6} \phi - \dots \right] d\phi. \quad (9)$$

Il est visible que la quantité entre parenthèses est la partie réelle du dé-

veloppement de  $\cos^{2n-i-2}\phi(\cos\phi + \sqrt{-1}\sin\phi)^i$ ; d'où, par le théorème de Moivre,

$$A_i = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-2}\phi \cdot \cos i\phi \cdot d\phi. \quad (10)$$

On a identiquement  $\cos i\phi = \cos\phi \cdot \cos(i-1)\phi - \sin\phi \cdot \sin(i-1)\phi$ ; l'intégrale qui précède se trouve ainsi transformée en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-1}\phi \cdot \cos(i-1)\phi \cdot d\phi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-2}\phi \cdot \sin\phi \cdot \sin(i-1)\phi \cdot d\phi;$$

ou, en intégrant par parties et observant que le terme

$$\frac{1}{2n-i-1} \cos^{2n-i-1}\phi \cdot \sin(i-1)\phi$$

disparaît aux deux limites :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-2}\phi \cdot \cos i\phi \cdot d\phi = 2 \frac{n-i}{2n-i-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-1}\phi \cdot \cos(i-1)\phi \cdot d\phi. \quad (11)$$

A l'aide de cette formule de réduction, la valeur (10) se transforme d'abord en cette autre :

$$A_i = \frac{2^i}{\Gamma(n)} \cdot \frac{n-i}{2n-i-1} \cdot \frac{n-i+1}{2n-i} \cdots \frac{n-1}{2n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\phi \cdot d\phi. \quad (12)$$

Enfin, cette dernière intégrale étant égale à

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right),$$

on obtient, après quelques simplifications,

$$A_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i-1} \pi \frac{\Gamma(2n-i-1)}{\Gamma(n) \Gamma(n-i)}. \quad (13)$$

La comparaison de cette valeur avec (8) fournit cette formule de sommation, qu'il serait peut-être difficile de trouver autrement :

$$\left. \begin{aligned} & \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \frac{i}{1} \cdot \frac{i-1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \\ & + \frac{i}{1} \cdot \frac{i-1}{2} \cdot \frac{i-2}{3} \cdot \frac{i-3}{4} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}\right) - \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i-2} \pi \frac{\Gamma(2n-i-1)}{\Gamma(n-i)}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

On observera, dans l'application de cette formule, que  $i$  et  $n$  sont des nombres entiers positifs, et que l'on doit avoir  $i < n$ .

5. Revenant à l'intégrale proposée, je mets dans la formule (3) les valeurs (14), et j'obtiens

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax dx}{(1+x^2)^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \frac{\pi e^{-a}}{[\Gamma(n)]^2} \left[ \Gamma(2n-1) + \frac{n-1}{1} (2a) \Gamma(2n-2) \right. \\ \left. + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} (2a)^2 \Gamma(2n-3) + \dots + (2a)^{n-1} \Gamma(n) \right]. \quad (15)$$

Si, dans cette formule (15), on remplace les  $\Gamma$  par les intégrales eu-lériennes équivalentes, elle pourra s'écrire ainsi :

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax dx}{(1+x^2)^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \frac{\pi e^{-a}}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty e^{-y} y^{n-1} dy (y+2a)^{n-1},$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty e^{-(a+2z)} z^{n-1} dz (z+a)^{n-1}; \quad (16)$$

ou enfin

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^{2n-1}}{[\Gamma(n)]^2} \int_1^\infty e^{-az} (z^2 - 1)^{n-1} dz. \quad (17)$$

Les formules (16) et (17) permettent d'obtenir, assez facilement, les valeurs des intégrales définies

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax x^{2i} dx}{(1+x^2)^n}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin ax x^{2i+1} dx}{(1+x^2)^n};$$

je n'écris pas ces valeurs, parce qu'elles sont un peu compliquées.

---

(Février 1840.)