Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques [...]

NOTE SUR L'INTÉGRALE

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \, dx}{(1+x^2)^n};$$

PAR E. CATALAN.

1. M. Poisson a fait voir [*] qu'en représentant par y_n cette intégrale définie, laquelle doit être une fonction de la variable positive α, sa valeur dépend de l'équation linéaire d'ordre $2n$:

$$y_n - \frac{n}{1}\cdot\frac{d^2y_n}{d\alpha^2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{d^4y_n}{d\alpha^4} - \ldots\ldots \pm \frac{d^{2n}y_n}{d\alpha^{2n}} = 0, \quad (1)$$

que l'on trouve facilement.

Cette équation est satisfaite par $y = e^{m\alpha}$, m représentant une racine quelconque de

$$1 - \frac{n}{1}m^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}m^4 - \ldots \pm m^{2n} = 0,$$

ou

$$(1-m^2)^n = 0. \quad (2)$$

Parmi les $2n$ racines de l'équation (2), il y en a n égales à $+1$, et n égales à -1. D'ailleurs, l'intégrale proposée ne peut croître indéfiniment avec α : on conclut de là que la valeur de y_n relative au problème dont il s'agit, sera de cette forme :

$$y_n = e^{-\alpha}\left[A_0 + \frac{A_1}{1}\alpha + \frac{A_2}{1.2}\alpha^2 + \ldots + \frac{A_{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\alpha^{n-1}\right]. \quad (3)$$

Il faut actuellement déterminer les constantes.

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XVI^e cahier.

2. Pour cela, je désigne par P le polynome qui multiplie $e^{-\alpha}$, et je différencie $n-1$ fois; ce qui donne généralement

$$\frac{d^i y_n}{d\alpha^i} = (-1)^i e^{-\alpha}\left(P - \frac{i}{1}\cdot\frac{dP}{d\alpha} + \frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\cdot\frac{d^2P}{d\alpha^2} - \ldots \pm \frac{d^iP}{d\alpha^i}\right). \quad (4)$$

Faisant $\alpha = 0$ [*] dans les équations (3) et (4), j'obtiens

$$(y_n) = A_0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^i y_n}{d\alpha^i}\right) = (-1)^i\left(A_0 - \frac{i}{1}A_1 + \frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}A_2 - \ldots \pm A_{n-1}\right); \quad (5)$$

(y_n) et $\left(\frac{d^i y_n}{d\alpha^i}\right)$ représentent les valeurs que prennent les fonctions y_n, $\frac{d^i y_n}{d\alpha^i}$, quand on suppose $\alpha = 0$.

La nature des équations (5) permet de les résoudre très facilement; et l'on trouve

$$A_i = (y_n) + \frac{i}{1}\cdot\left(\frac{dy_n}{d\alpha}\right) + \frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\cdot\left(\frac{d^2y_n}{d\alpha^2}\right) + \ldots + \left(\frac{d^iy_n}{d\alpha^i}\right). \quad (6)$$

3. J'observe actuellement que

$$\left.\begin{array}{lll}
y_n = \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\,.\,dx}{(1+x^2)^n}, & \text{d'où} & (y_n) = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \\
\frac{dy_n}{d\alpha} = -\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\,.\,xdx}{(1+x^2)^n}, & \ldots\ldots\ldots & \left(\frac{dy_n}{d\alpha}\right) = 0, \\
\frac{d^2y_n}{d\alpha^2} = -\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\,.\,x^2dx}{(1+x^2)^n}, & \ldots\ldots & \left(\frac{d^2y_n}{d\alpha^2}\right) = -\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x^2)^n}, \\
\frac{d^3y_n}{d\alpha^3} = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\,.\,x^3dx}{(1+x^2)^n}, & \ldots\ldots & \left(\frac{d^3y_n}{d\alpha^3}\right) = 0, \\
\frac{d^4y_n}{d\alpha^4} = \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\,.\,x^4dx}{(1+x^2)^n}, & \ldots\ldots & \left(\frac{d^4y_n}{d\alpha^4}\right) = \int_0^\infty \frac{x^4dx}{(1+x^2)^n}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} (7)$$

Pour évaluer ces différentes intégrales définies, indépendantes de α, je prends celle-ci, $\int_0^\infty \frac{x^m dx}{(1+x^2)^n}$, dans laquelle $m \leqq n-1$.

---

[*] Les $2n-2$ premières dérivées de y_n, prises par rapport à α, sont des fonctions continues de cette variable, du moins entre les limites 0 et ∞; il n'en serait pas de même des dérivées suivantes; mais cette circonstance est indifférente ici, puisque nous prenons $i < 2$.

En posant
$$x^2 = \frac{\theta}{1-\theta},$$

elle se transforme en

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \theta^{\frac{m-1}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{m+3}{2}} d\theta = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(n)};$$

et la formule (6) devient

$$\mathrm{A}_i = \frac{1}{2\Gamma(n)}\left[\begin{array}{l}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)-\frac{i}{1}.\frac{i-1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\ +\frac{i}{1}.\frac{i-1}{2}.\frac{i-2}{3}.\frac{i-3}{4}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}\right)-\ldots\end{array}\right]. \quad (8)$$

Le dernier terme, dans la parenthèse, est

$$\pm\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{i+1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \pm\Gamma\left(\frac{i}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{i}{2}\right),$$

selon que i est pair ou impair.

4. Cette valeur de A_i peut s'écrire autrement.

En posant
$$\theta = \sin^2\varphi, \quad 1-\theta = \cos^2\varphi,$$

l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \theta^{\frac{m-1}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{m+3}{2}} d\theta$$

se transforme en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m\varphi.\cos^{2n-m-2}\varphi.d\varphi.$$

Par suite,

$$\mathrm{A}_i = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\begin{array}{l}\cos^{2n-2}\varphi-\frac{i}{1}.\frac{i-1}{2}\sin^2\varphi.\cos^{2n-4}\varphi\\ +\frac{i}{1}.\frac{i-1}{2}.\frac{i-2}{3}.\frac{i-3}{4}\sin^4\varphi.\cos^{2n-6}\varphi-\ldots\end{array}\right]d\varphi. \quad (9)$$

Il est visible que la quantité entre parenthèses est la partie réelle du développement de $\cos^{2n-i-2}\varphi(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^i$; d'où, par le théorème de Moivre,

$$A_i = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-2}\varphi.\cos i\varphi.d\varphi. \qquad (10)$$

On a identiquement $\cos i\varphi = \cos\varphi.\cos(i-1)\varphi - \sin\varphi.\sin(i-1)\varphi$; l'intégrale qui précède se trouve ainsi transformée en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-1}\varphi.\cos(i-1)\varphi.d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-2}\varphi.\sin\varphi.\sin(i-1)\varphi.d\varphi;$$

ou, en intégrant par parties et observant que le terme

$$\frac{1}{2n-i-1}\cos^{2n-i-1}\varphi.\sin(i-1)\varphi$$

disparaît aux deux limites :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-2}\varphi.\cos i\varphi.d\varphi = 2\,\frac{n-i}{2n-i-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-1}\varphi.\cos(i-1)\varphi.d\varphi. \quad (11)$$

A l'aide de cette formule de réduction, la valeur (10) se transforme d'abord en cette autre :

$$A_i = \frac{2^i}{\Gamma(n)}.\frac{n-i}{2n-i-1}.\frac{n-i+1}{2n-i}\cdots\frac{n-1}{2n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\varphi.d\varphi. \qquad (12)$$

Enfin, cette dernière intégrale étant égale à

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right),$$

on obtient, après quelques simplifications,

$$A_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i-1}\pi\,\frac{\Gamma(2n-i-1)}{\Gamma(n)\Gamma(n-i)}. \qquad (13)$$

La comparaison de cette valeur avec (8) fournit cette formule de sommation, qu'il serait peut-être difficile de trouver autrement :

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)-\frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\ +\frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\cdot\frac{i-2}{3}\cdot\frac{i-3}{4}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}\right)-\ldots=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i-2}\pi\frac{\Gamma(2n-i-1)}{\Gamma(n-i)}.\end{array}\right\}\quad (14)$$

On observera, dans l'application de cette formule, que i et n sont des nombres entiers positifs, et que l'on doit avoir $i < n$.

5. Revenant à l'intégrale proposée, je mets dans la formule (3) les valeurs (14), et j'obtiens

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax.dx}{(1+x^2)^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\frac{\pi e^{-a}}{[\Gamma(n)]^2}\left[\begin{array}{l}\Gamma(2n-1)+\frac{n-1}{1}(2a)\Gamma(2n-2)\\ +\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}(2a)^2\Gamma(2n-3)+\ldots+(2a)^{n-1}\Gamma(n)\end{array}\right].\quad (15)$$

Si, dans cette formule (15), on remplace les Γ par les intégrales eulériennes équivalentes, elle pourra s'écrire ainsi :

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax.dx}{(1+x^2)^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\frac{\pi e^{-a}}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty e^{-y}\,y^{n-1}\,dy(y+2a)^{n-1},$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax.dx}{(1+x^2)^n}=\frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty e^{-(a+2z)}\,z^{n-1}\,dz(z+a)^{n-1};\qquad (16)$$

ou enfin

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax.dx}{(1+x^2)^n}=\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^{2n-1}}{[\Gamma(n)]^2}\int_1^\infty e^{-az}(z^2-1)^{n-1}\,dz.\qquad (17)$$

Les formules (16) et (17) permettent d'obtenir, assez facilement, les valeurs des intégrales définies

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax.x^{2i}dx}{(1+x^2)^n},\quad \int_0^\infty \frac{\sin ax.x^{2i+1}dx}{(1+x^2)^n};$$

je n'écris pas ces valeurs, parce qu'elles sont un peu compliquées.

(Février 1840.)