Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques [...]

Note sur une Équation aux différences finies;

Par E. CATALAN.

M. *Lamé* a démontré que l'équation

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \ldots + P_4P_{n-2} + P_3P_{n-1} + P_n, \quad (1)$$

se ramène à l'équation linéaire très simple,

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n. \qquad (2)$$

Admettant donc la concordance de ces deux formules, je vais chercher à en déduire quelques conséquences.

I.

L'intégrale de l'équation (2) est

$$P_{n+1} = \frac{6}{3}\cdot\frac{10}{4}\cdot\frac{14}{5}\ \ldots\ \frac{4n-6}{n} P_3;$$

et comme, dans la question de géométrie qui conduit à ces deux équations, on a $P_3 = 1$, nous prendrons simplement

$$P_{n+1} = \frac{2.6.10.14\ldots(4n-6)}{2.3.4.5\ldots n}. \qquad (3)$$

Le numérateur

$$2.6.10.14\ldots(4n-6) = 2^{n-1}.1.3.5.7\ldots(2n-3)$$
$$= \frac{2^{n-1}.1.2.3.4.5\ldots(2n-2)}{2.4.6.8\ldots(2n-2)} = \frac{1.2.3.4\ldots(2n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Donc

$$P_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}{2.3.4\ldots n}. \qquad (4)$$

Si l'on désigne généralement par $C_{m,p}$ le nombre des combinaisons de m lettres, prises p à p; et si l'on change n en $n+1$, on aura

$$P_{n+2} = \frac{1}{n+1} C_{2n,n}, \tag{5}$$

ou bien

$$P_{n+2} = C_{2n,n} - C_{2n,n-1}. \tag{6}$$

II.

Les équations (1) et (5) donnent ce théorème sur les combinaisons :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{n+1} C_{2n,n} = \frac{1}{n} C_{2n-2,n-1} + \frac{1}{n-1} C_{2n-4,n-2} \times \frac{1}{2} C_{2,1} \\ + \frac{1}{n-2} C_{2n-6,n-3} \times \frac{1}{3} C_{4,2} + \ldots + \frac{1}{n} C_{2n-2,n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

III.

On sait que le $(n+1)^e$ nombre figuré de l'ordre $n+1$, a pour expression, $C_{2n,n}$: si donc, dans la table des nombres figurés, on prend ceux qui occupent la diagonale; savoir :

$$1, \quad 2, \quad 6, \quad 20, \quad 70, \quad 252, \quad 924\ldots;$$

qu'on les divise respectivement par

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7\ldots;$$

on obtiendra une nouvelle suite de nombres,

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 14, \quad 42, \quad 132\ldots, \tag{A}$$

lesquels jouiront de cette propriété :

Un terme quelconque de la suite (A) *est égal à la somme des produits que l'on obtient en écrivant au-dessous d'elle-même, et dans un ordre inverse, la série des termes précédents, et en multipliant les termes correspondants des deux séries.*

Par exemple,

$$132 = 1.42 + 1.14 + 2.5 + 5.2 + 14.1 + 42.1.$$

Les nombres qui composent cette suite, sont à commencer du second, les valeurs de P_3, P_4, ...

IV.

En mettant pour les quantités C, leurs valeurs dans l'équation (7), il vient

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2n}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdots\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2n-2}{1}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{2n-4}{1}\cdot\frac{2n-5}{2}\cdots\frac{n-1}{n-2}$$
$$\times\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}+\frac{1}{n-2}\cdot\frac{2n-6}{1}\cdots\frac{n-2}{n-3}\times\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{2n-2}{1}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}.$$

Et en multipliant les deux membres par $1.2.3\ldots n$:

$$\overline{2n}.\overline{2n-1}\ldots\overline{n+2}=\overline{2n-2}.\overline{2n-3}\ldots\overline{n}+\frac{n}{1}\overline{2n-4}\ldots\overline{n-1}\,.1+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\overline{2n-6}$$
$$\ldots\overline{n-2}\times 4+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}.\overline{2n-8}\ldots\overline{n-3}\times 6.5+\ldots+\overline{2n-2}\ldots n. \quad (8)$$

Dans ce développement, le terme qui en a i avant lui, a pour expression,

$$T_i=\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-i+1}{i}(2n-2i-2)(2n-2i-3)\ldots(n-i)\times 2i(2i-1)\ldots(i+2). \quad (9)$$

Cette quantité peut s'exprimer à l'aide des fonctions Γ, dont la définition est, comme on sait,

$$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1);$$

on a effectivement

$$T_i=\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-i+1}{i}\,\frac{\Gamma(2n-2i-1)}{\Gamma(n-i)}\cdot\frac{\Gamma(2i+1)}{\Gamma(i+2)};$$

ou

$$T_i=\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-i+1}{i}\,\frac{1}{(2n-2i-1)(2i+1)(i+1)}\,\frac{\Gamma(2n-2i)}{\Gamma(n-i)}\cdot\frac{\Gamma(2i+2)}{\Gamma(i+1)}.$$

A l'aide de la relation

$$\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)}=\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

découverte par *Legendre*, nous transformerons les deux rapports

$$\frac{\Gamma(2n-2i)}{\Gamma(n-i)}, \quad \frac{\Gamma(2i+2)}{\Gamma(i+1)},$$

en

$$\frac{2^{2n-2i-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(n-i+\frac{1}{2}\right), \quad \frac{2^{2i+1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(i+\frac{3}{2}\right);$$

alors le terme général devient

$$T_i = \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-i+1}{i}\,\frac{1}{(2n-2i-1)(2i+1)(i+1)}\cdot\frac{2^{2n}}{\pi}\,\Gamma\left(n-i+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i+\frac{3}{2}\right);$$

ou enfin

$$T_i = \frac{n(n-1)\ldots.(n-i+1)}{1.2.3\ldots.i(i+1)}\cdot\frac{2^{2n-2}}{\pi}\,\Gamma\left(n-i-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right). \qquad (10)$$

Nous pouvons remplacer le produit des deux fonctions Γ par une intégrale eulérienne de première espèce, au moyen de la relation,

$$\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 \theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1}\,d\theta;$$

et nous aurons

$$T_i = \frac{n(n-1)\ldots.(n-i+1)}{1.2.3\ldots.(i+1)}\cdot\frac{2^{2n-2}}{\pi}\,\Gamma(n).\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}\,d\theta. \qquad (11)$$

De même, si nous substituons au facteur

$$\frac{n(n-1)\ldots.(n-i+1)}{1.2.3\ldots.(i+1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i+2)\Gamma(n-i+1)},$$

la quantité

$$\Gamma(n+1) : \Gamma(n+3)\int_0^1 \theta^{i+1}(1-\theta)^{n-i}\,d\theta;$$

nous obtiendrons finalement

$$T_i = \frac{2^{2n-2}}{\pi}\cdot\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)}\,\frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}\,d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1}\,d\theta}, \qquad (12)$$

Au moyen de cette valeur de T_i, l'équation (8) devient

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n-2}}{\pi}\,\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)}\sum_{0}^{n-1}\frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}\,d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1}\,d\theta},$$

ou

$$\frac{n+2}{2^{2n-2}}\,\pi = \int_0^1 \theta^{n-1}(1-\theta)^n d\theta \sum_{0}^{n-1}\frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}\,d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1}\,d\theta}, \qquad (13)$$

V.

Le terme général de notre développement peut se mettre sous une forme différente de (12). Nous pouvons écrire

$$T_i = \frac{2^{2n-2}}{\pi}\,\Gamma(n+1)\,\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)}\,\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+2)}.$$

Or

$$\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)} = \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta,$$

et

$$\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+2)} = \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(i+2)} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta,$$

donc

$$T_i = \frac{2^{2n}}{\pi^2}\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta. \qquad (14)$$

Les valeurs (12) et (14) devant être identiques, on aura

$$\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}\,d\theta = \frac{4}{\pi}\,n(n+1)(n+2)\int_0^1 \theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1}\,d\theta$$
$$\times \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta. \qquad (15)$$

Si l'on suppose $i = 1$, il vient

$$\pi = 4n\,(n+1)(n+2)\int_0^1 \theta^{n-1}(1-\theta)^2\, d\theta \times \int_0^1 \theta^{\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (16)$$

D'ailleurs, ces deux dernières relations se vérifient immédiatement.

En mettant pour T_i sa nouvelle expression dans (8), cette équation devient

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n}}{\pi^2}\Gamma(n+1)\sum_0^{n-1}\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\, d\theta.$$

Et à cause de

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)} = 2\,\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right);$$

puis de

$$\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \theta^{n-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\, d\theta;$$

nous aurons enfin

$$2\pi\int_0^1 \theta^{n-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = \sum_0^{n-1}\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (17)$$

VI.

L'équation précédente exprime une propriété des fonctions Γ. Pour la mettre en évidence, remplaçons π par $2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$; puis chaque intégrale définie par sa valeur; il viendra

$$4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)} = \sum_0^{n-1}\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n-i+1)}\cdot\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(i+2)};$$

ou, en changeant n en $n-1$ et i en $i-1$:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)}\cdot\frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{4}\cdot\sum_1^{n-1}\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)}\cdot\frac{\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)}. \quad (18)$$

Ainsi, en posant

$$\frac{\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} = A_i,$$

on a

$$A_1 . A_n = \frac{1}{4}\sum_i^{n-1} A_{n-i}A_i. \qquad (19)$$

Cette équation peut se mettre sous une forme plus simple. Pour cela, remarquons d'abord qu'en posant $i=0$, la fonction A_i devient $\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}$. Or, $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$, et $\Gamma(1)=1$. Si donc, après avoir chassé le dénominateur de l'équation précédente, nous ajoutons $2A_0A_n$ aux deux membres, nous obtiendrons

$$4A_1A_n - 4\sqrt{\pi} . A_n = \sum_0^n A_{n-i}A_i.$$

ou simplement, à cause de $A_1 = \sqrt{\pi}$:

$$\sum_0^n A_{n-i}A_i = 0 \qquad (20)$$

Autrement dit, l'équation aux différences finies

$$P_0P_n + P_1P_{n-1} + P_2P_{n-2} + \ldots + P_{n-1}P_1 + P_nP_0 = 0,$$

est satisfaite par $P_n = \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}$, pourvu que l'on prenne $P_0 = -2\sqrt{\pi}$, $P_1 = \sqrt{\pi}$.

Il est d'ailleurs évident que cette équation n'a lieu qu'à partir de $n=2$.

Il suit aussi, de ce qui précède, que l'intégrale générale de l'équation

$$4P_1P_n = P_1P_{n-1} + P_2P_{n-2} + \ldots + P_{n-1}P_1, \qquad (21)$$

est

$$P_n = \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{P_1}{\sqrt{\pi}}. \qquad (22)$$

VII.

Je terminerai cette note par la solution d'un problème qui a une liaison remarquable avec la question de Géométrie, traitée par M. *Lamé*.

PROBLÈME. *De combien de manières peut-on effectuer le produit de* n *facteurs différents.*

Désignons par Z_{n+1} ce nombre.

Supposons les n facteurs écrits dans l'ordre alphabétique,

$$abc\ldots.ghkl\ldots.qrs;$$

décomposons ce produit en deux groupes, l'un composé de i facteurs $abc\ldots gh$, l'autre composé des $n-i$ facteurs restants; désignons en outre par X_{n+1} le nombre de manières dont il est possible d'effectuer le produit ci-dessus, sans changer l'ordre des lettres : il est clair que l'un des éléments de cette somme sera $X_{i+1}X_{n-i+1}$. Et comme i peut varier depuis 1 jusqu'à $n-1$, nous aurons sans aucune *omission* ni *répétition* :

$$X_{n+1} = \sum_{0}^{n-1} X_{i+1}.X_{n-i+1}. \qquad (23)$$

On doit supposer $X_2 = 1$; d'ailleurs X_3 est aussi égal à 1 : il s'ensuit que l'équation (23) a la même intégrale que l'équation (1); savoir

$$X_{n+1} = P_{n+1}. \qquad (24)$$

Nous avons supposé que les n facteurs étaient disposés en ordre alphabétique : comme ils peuvent être pris dans un ordre quelconque, la quantité X_{n+1} doit être multipliée par le nombre des permutations de n lettres; donc

$$Z_{n+1} = P_{n+1}.\Gamma(n+1),$$

ou

$$Z_{n+1} = n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2). \qquad (25)$$

Si, dans l'équation (23), nous mettons au lieu des X leurs valeurs en Z, nous trouverons après avoir multiplié tous les termes par $\Gamma(n+1)$:

$$Z_{n+1} = \frac{n}{1} Z_2 Z_n + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2} Z_3 Z_{n-1} + \ldots + \frac{n}{1} Z_n Z_2, \qquad (26)$$

et comme la formule (25) donne

$$Z_{n+1} = (4n - 6) Z_n. \qquad (27)$$

Il s'ensuit que ces deux dernières équations rentrent l'une dans l'autre. Ce résultat, auquel il serait peut-être difficile d'arriver directement, est assez remarquable.

L'équation (26) devient, en mettant pour Z_{n+1} sa valeur $\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)}$:

$$\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{n}{1}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)} \cdot \frac{\Gamma(2n-3)}{\Gamma(n-1)} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} \cdot \frac{\Gamma(2n-5)}{\Gamma(n-2)} + \ldots + \frac{n}{1}\frac{\Gamma(2n-3)}{\Gamma(n-1)}.$$

A cause de

$$\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{(2n-2)\,\Gamma(2n-2)}{(n-1)\,\Gamma(n-1)} = 2\frac{\Gamma(2n-2)}{\Gamma(n-1)} = \frac{2^{2n-2}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right),$$

cette dernière équation se transforme facilement en

$$\left.\begin{aligned} 4\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{n}{1}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\tfrac{3}{2}\right) + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\tfrac{5}{2}\right) \\ + \ldots + \frac{n}{1}\Gamma\left(n-\tfrac{3}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Celle-ci peut encore s'écrire

$$\left.\begin{aligned} 4n\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{n-\frac{1}{2}}d\theta = \frac{n+1}{1}\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{n-\frac{3}{2}}d\theta + \frac{n+1}{1}\frac{n}{2}\int_0^1 \theta^{-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{n-\frac{1}{2}}d\theta \\ + \ldots + \frac{n+1}{1}\int_0^1 \theta^{n-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Les équations (28) ou (29) expriment une propriété des fonctions Γ, analogue à celle qui a été donnée plus haut.