

Journal de mathématiques
pures et appliquées : ou
recueil mensuel de mémoires
sur les diverses parties des
mathématiques [...]

Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques / publié par Joseph Liouville. 1838.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUEZ ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

Note sur une Équation aux différences finies ;

PAR E. CATALAN.

M. Lamé a démontré que l'équation

$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \dots + P_4P_{n-3} + P_3P_{n-1} + P_n,$ (1)
se ramène à l'équation linéaire très simple,

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n. \quad (2)$$

Admettant donc la concordance de ces deux formules, je vais chercher à en déduire quelques conséquences.

I.

L'intégrale de l'équation (2) est

$$P_{n+1} = \frac{6}{3} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{14}{5} \dots \frac{4n-6}{n} P_3;$$

et comme, dans la question de géométrie qui conduit à ces deux équations, on a $P_3 = 1$, nous prendrons simplement

$$P_{n+1} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \dots (4n-6)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots n}. \quad (3)$$

Le numérateur

$$\begin{aligned} 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \dots (4n-6) &= 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3) \\ &= \frac{2^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n-2)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}. \end{aligned}$$

Donc

$$P_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (2n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}. \quad (4)$$

Si l'on désigne généralement par $C_{m,p}$ le nombre des combinaisons de m lettres, prises p à p ; et si l'on change n en $n + 1$, on aura

$$P_{n+1} = \frac{1}{n+1} C_{2n,n}, \quad (5)$$

ou bien

$$P_{n+1} = C_{2n,n} - C_{2n,n-1}. \quad (6)$$

II.

Les équations (1) et (5) donnent ce théorème sur les combinaisons :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n+1} C_{2n,n} &= \frac{1}{n} C_{2n-2,n-1} + \frac{1}{n-1} C_{2n-4,n-2} \times \frac{1}{2} C_{2,1} \\ &+ \frac{1}{n-2} C_{2n-6,n-3} \times \frac{1}{3} C_{4,2} + \dots + \frac{1}{n} C_{2n-2,n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

III.

On sait que le $(n + 1)^e$ nombre figuré de l'ordre $n + 1$, a pour expression, $C_{2n,n}$: si donc, dans la table des nombres figurés, on prend ceux qui occupent la diagonale; savoir :

$$1, 2, 6, 20, 70, 252, 924 \dots;$$

qu'on les divise respectivement par

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots;$$

on obtiendra une nouvelle suite de nombres,

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132 \dots, \quad (A)$$

lesquels jouiront de cette propriété :

Un terme quelconque de la suite (A) est égal à la somme des produits que l'on obtient en écrivant au-dessous d'elle-même, et dans un ordre inverse, la série des termes précédents, et en multipliant les termes correspondants des deux séries.

Par exemple,

$$132 = 1 \cdot 42 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 42 \cdot 1.$$

Les nombres qui composent cette suite, sont à commencer du second, les valeurs de P_3, P_4, \dots

IV.

En mettant pour les quantités C , leurs valeurs dans l'équation (7), il vient

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{2n}{1} \cdot \frac{2n-1}{2} \dots \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n-2}{1} \cdot \frac{2n-3}{2} \dots \frac{n}{n-1} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{2n-4}{1} \cdot \frac{2n-5}{2} \dots \frac{n-1}{n-2} \\ \times \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} + \frac{1}{n-2} \cdot \frac{2n-6}{1} \dots \frac{n-2}{n-3} \times \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{2n-2}{1} \cdot \frac{2n-3}{2} \dots \frac{n}{n-1}.$$

Et en multipliant les deux membres par $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$:

$$\overline{n \cdot 2n-1 \dots n+2} = \overline{2n-2 \cdot 2n-3 \dots n} + \frac{n}{1} \overline{2n-4 \dots n-1 \cdot 1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \overline{2n-6} \\ \dots \overline{n-2} \times 4 + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} \overline{2n-8 \dots n-3} \times 6 \cdot 5 + \dots + \overline{2n-2 \dots n}. \quad (8)$$

Dans ce développement, le terme qui en a i avant lui, a pour expression,

$$T_i = \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-i+1}{i} (2n-2i-2)(2n-2i-3) \dots (n-i) \times 2i(2i-1) \dots (i+2). \quad (9)$$

Cette quantité peut s'exprimer à l'aide des fonctions Γ , dont la définition est, comme on sait,

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1);$$

on a effectivement

$$T_i = \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-i+1}{i} \frac{\Gamma(2n-2i-1)}{\Gamma(n-i)} \cdot \frac{\Gamma(2i+1)}{\Gamma(i+2)};$$

ou

$$T_i = \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-i+1}{i} \frac{1}{(2n-2i-1)(2i+1)(i+1)} \frac{\Gamma(2n-2i)}{\Gamma(n-i)} \cdot \frac{\Gamma(2i+2)}{\Gamma(i+1)}.$$

A l'aide de la relation

$$\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

découverte par *Legendre*, nous transformerons les deux rapports

$$\frac{\Gamma(2n - 2i)}{\Gamma(n - i)}, \quad \frac{\Gamma(2i + 2)}{\Gamma(i + 1)},$$

en

$$\frac{2^{2n-2i-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n - i + \frac{1}{2}\right), \quad \frac{2^{2i+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(i + \frac{3}{2}\right);$$

alors le terme général devient

$$T_i = \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-i+1}{i} \frac{1}{(2n-2i-1)(2i+1)(i+1)} \cdot \frac{2^{2n}}{\pi} \Gamma\left(n-i+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(i+\frac{3}{2}\right);$$

ou enfin

$$T_i = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2.3\dots i(i+1)} \cdot \frac{2^{2n-2}}{\pi} \Gamma\left(n-i-\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right). \quad (10)$$

Nous pouvons remplacer le produit des deux fonctions Γ par une intégrale eulérienne de première espèce, au moyen de la relation,

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 \theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1} d\theta;$$

et nous aurons

$$T_i = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2.3\dots(i+1)} \cdot \frac{2^{2n-2}}{\pi} \Gamma(n) \cdot \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta. \quad (11)$$

De même, si nous substituons au facteur

$$\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2.3\dots(i+1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i+2)\Gamma(n-i+1)},$$

la quantité

$$\Gamma(n+1) : \Gamma(n+3) \int_0^1 \theta^{i+1}(1-\theta)^{n-i} d\theta;$$

nous obtiendrons finalement

$$T_i = \frac{2^{2n-2}}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)} \frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1} d\theta}, \quad (12)$$

Au moyen de cette valeur de T_i , l'équation (8) devient

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n-1}}{\pi} \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)} \sum_0^{n-1} \frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i} (1-\theta)^{i+1} d\theta},$$

ou

$$\frac{n+2}{2^{2n-1}} \pi = \int_0^1 \theta^{n-1} (1-\theta)^n d\theta \sum_0^{n-1} \frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i} (1-\theta)^{i+1} d\theta}, \quad (13)$$

V.

Le terme général de notre développement peut se mettre sous une forme différente de (12). Nous pouvons écrire

$$T_i = \frac{2^{2n-2}}{\pi} \Gamma(n+1) \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2}) \Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1) \Gamma(i+2)}.$$

Or

$$\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)} = \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

et

$$\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+2)} = \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(i+2)} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

donc

$$T_i = \frac{2^{2n}}{\pi^2} \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (14)$$

Les valeurs (12) et (14) devant être identiques, on aura

$$\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta = \frac{4}{\pi} n(n+1)(n+2) \int_0^1 \theta^{n-1} (1-\theta)^{i+1} d\theta \\ \times \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (15)$$

Si l'on suppose $i = 1$, il vient

$$\pi = 4n(n+1)(n+2) \int_0^1 \theta^{n-1} (1-\theta)^2 d\theta \times \int_0^1 \theta^1 (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (16)$$

D'ailleurs, ces deux dernières relations se vérifient immédiatement.

En mettant pour Γ , sa nouvelle expression dans (8), cette équation devient

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n}}{\pi^2} \Gamma(n+1) \sum_0^{n-1} \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Et à cause de

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)} = 2 \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right);$$

puis de

$$\frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n+2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \theta^{n-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta;$$

nous aurons enfin

$$2\pi \int_0^1 \theta^{n-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = \sum_0^{n-1} \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (17)$$

VI.

L'équation précédente exprime une propriété des fonctions Γ . Pour la mettre en évidence, remplaçons π par $2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$; puis chaque intégrale définie par sa valeur; il viendra

$$4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)} = \sum_0^{n-1} \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(i+2)};$$

ou, en changeant n en $n-1$ et i en $i-1$:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} \cdot \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{4} \cdot \sum_1^{n-1} \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)}. \quad (18)$$

Ainsi, en posant

$$\frac{\Gamma(i - \frac{1}{2})}{\Gamma(i + 1)} = A_i,$$

on a

$$A_1 \cdot A_n = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} A_{n-i} A_i. \quad (19)$$

Cette équation peut se mettre sous une forme plus simple. Pour cela, remarquons d'abord qu'en posant $i = 0$, la fonction A_i devient $\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}$. Or, $\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$, et $\Gamma(1) = 1$. Si donc, après avoir chassé le dénominateur de l'équation précédente, nous ajoutons $2A_0 A_n$ aux deux membres, nous obtiendrons

$$4A_1 A_n - 4\sqrt{\pi} \cdot A_n = \sum_{i=0}^n A_{n-i} A_i.$$

ou simplement, à cause de $A_1 = \sqrt{\pi}$:

$$\sum_{i=0}^n A_{n-i} A_i = 0 \quad (20)$$

Autrement dit, l'équation aux différences finies

$$P_n P_n + P_1 P_{n-1} + P_2 P_{n-2} + \dots + P_{n-1} P_1 + P_n P_0 = 0,$$

est satisfaite par $P_n = \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)}$, pourvu que l'on prenne $P_0 = -2\sqrt{\pi}$, $P_1 = \sqrt{\pi}$.

Il est d'ailleurs évident que cette équation n'a lieu qu'à partir de $n = 2$.

Il suit aussi, de ce qui précède, que l'intégrale générale de l'équation

$$4P_1 P_n = P_1 P_{n-1} + P_2 P_{n-2} + \dots + P_{n-1} P_1, \quad (21)$$

est

$$P_n = \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)} \cdot \frac{P_1}{\sqrt{\pi}}. \quad (22)$$

VII.

Je terminerai cette note par la solution d'un problème qui a une liaison remarquable avec la question de Géométrie, traitée par M. Lamé.

PROBLÈME. *De combien de manières peut-on effectuer le produit de n facteurs différents.*

Désignons par Z_{n+1} ce nombre.

Supposons les n facteurs écrits dans l'ordre alphabétique,

$$abc\dots ghkl\dots qrs;$$

décomposons ce produit en deux groupes, l'un composé de i facteurs $abc\dots gh$, l'autre composé des $n - i$ facteurs restants; désignons en outre par X_{n+1} le nombre de manières dont il est possible d'effectuer le produit ci-dessus, sans changer l'ordre des lettres : il est clair que l'un des éléments de cette somme sera $X_{i+1}X_{n-i+1}$. Et comme i peut varier depuis 1 jusqu'à $n - 1$, nous aurons sans aucune omission ni répétition :

$$X_{n+1} = \sum_0^{n-1} X_{i+1} \cdot X_{n-i+1}. \quad (23)$$

On doit supposer $X_2 = 1$; d'ailleurs X_3 est aussi égal à 1 : il s'ensuit que l'équation (23) a la même intégrale que l'équation (1); savoir

$$X_{n+1} = P_{n+1}. \quad (24)$$

Nous avons supposé que les n facteurs étaient disposés en ordre alphabétique : comme ils peuvent être pris dans un ordre quelconque, la quantité X_{n+1} doit être multipliée par le nombre des permutations de n lettres; donc

$$Z_{n+1} = P_{n+1} \cdot \Gamma(n + 1),$$

ou

$$Z_{n+1} = n(n + 1)(n + 2)\dots(2n - 2). \quad (25)$$

Si, dans l'équation (23), nous mettons au lieu des X leurs valeurs en Z , nous trouverons après avoir multiplié tous les termes par $\Gamma(n + 1)$:

$$Z_{n+1} = \frac{n}{1} Z_1 Z_n + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} Z_2 Z_{n-1} + \dots + \frac{n}{1} Z_n Z_1, \quad (26)$$

et comme la formule (25) donne

$$Z_{n+1} = (4n - 6) Z_n. \quad (27)$$

Il s'ensuit que ces deux dernières équations rentrent l'une dans l'autre. Ce résultat, auquel il serait peut-être difficile d'arriver directement, est assez remarquable.

L'équation (26) devient, en mettant pour Z_{n+1} sa valeur $\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)}$:

$$\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{n}{1} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)} \cdot \frac{\Gamma(2n-3)}{\Gamma(n-1)} + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} \cdot \frac{\Gamma(2n-5)}{\Gamma(n-2)} + \dots + \frac{n}{1} \frac{\Gamma(2n-3)}{\Gamma(n-1)}.$$

A cause de

$$\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{(2n-2) \Gamma(2n-2)}{(n-1) \Gamma(n-1)} = 2 \frac{\Gamma(2n-2)}{\Gamma(n-1)} = \frac{2^{2n-2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right),$$

cette dernière équation se transforme facilement en

$$\left. \begin{aligned} 4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) &= \frac{n}{1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{5}{2}\right) \\ &+ \dots + \frac{n}{1} \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Celle-ci peut encore s'écrire

$$\left. \begin{aligned} 4n \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{1}{2}} d\theta &= \frac{n+1}{1} \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{3}{2}} d\theta + \frac{n+1}{1} \frac{n}{2} \int_0^1 \theta^{-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{1}{2}} d\theta \\ &+ \dots + \frac{n+1}{1} \int_0^1 \theta^{n-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Les équations (28) ou (29) expriment une propriété des fonctions Γ , analogue à celle qui a été donnée plus haut.