

Comptes rendus  
hebdomadaires des séances  
de l'Académie des sciences /  
publiés... par MM. les  
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1835-1965.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUEZ ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment possible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter  
[reutilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:reutilisationcommerciale@bnf.fr).

bandes lumineuses se détachent sur un spectre continu, particulier à la comète. Celle-ci diffère donc, à ce point de vue, d'une nébuleuse, dont la lumière se concentre tout entière dans un petit nombre de lignes, qui sont par suite très-brillantes. En même temps, nous reconnaissions la double origine de la lumière de la comète, une lumière propre qui donne les bandes, et une autre portion empruntée au Soleil. Que la lumière réfléchie existe en quantité très-sensible dans la comète, c'est ce que prouve le fait, constaté par nous, que la lumière de cet astre est partiellement polarisée dans un plan passant par le Soleil. Cette polarisation est assez forte pour être démontrée à l'aide d'un simple prisme biréfringent. D'ailleurs elle ne peut être confondue avec la polarisation atmosphérique, si l'on a le soin, comme l'a indiqué depuis longtemps M. Praczmouzki, d'observer les deux images de la comète sur la partie commune des deux images du fond du ciel. »

**GÉOMÉTRIE. — *Remarques sur une Note de M. Darboux, relative à la surface des centres de courbure d'une surface algébrique; par M. E. CATALAN.***

« Je demande à l'Académie la permission de lui soumettre les remarques suivantes, qui me sont suggérées par la lecture du *Compte rendu* de l'avant-dernière séance. A peine ai-je besoin de déclarer que je ne suis animé d'aucun esprit de dénigrement à l'égard de M. Darboux; nul, plus que moi, ne reconnaît le mérite de ce jeune et déjà célèbre géomètre.

» I. La formule  $R = \frac{\rho^3 \rho_1}{abc}$  se trouve à la page 263 de mes *Mélanges mathématiques*.

» II. Les formules  $\lambda^2 = \frac{(a^2 - \rho^2)^3 (a^2 - \rho_1^2)}{a^2 (a^2 - b^2) (a^2 - c^2)}$ , etc., ne sont pas nouvelles: je les ai trouvées (ce qui n'était pas difficile) en 1868; M. Gilbert, mon savant confrère à l'Académie de Belgique, les a trouvées aussi, et il est probable qu'elles se sont présentées à tous les professeurs qui ont eu à traiter la question du *lieu des centres de courbure de l'ellipsoïde*.

» III. Il est bien vrai que l'équation  $R = B^2 - 4AC = 0$  ne présente *pas toujours* l'enveloppe des courbes (\*) représentées elles-mêmes par

$$(1) \quad A \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + B \left( \frac{dy}{dx} \right) + C = 0;$$

mais M. Darboux ne va-t-il pas un peu loin en affirmant que *c'est précisément*

---

(\*) A la page 1331 des *Comptes rendus*, on a imprimé par erreur: *des cercles*.

ment le contraire qui arrive, et que  $R = 0$  représente le lieu des points de rebroussement des courbes? Si, par exemple, on prend les hyperboles dont l'équation est

$$(2) \quad c^2 + (x + y)c + 1 - xy = 0,$$

on trouve

$$(3) \quad (2x^2 + 1) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + (x^2 + 2xy + y^2 + 2) \frac{dy}{dx} + 2y^2 + 1 = 0,$$

et, comme équation de l'enveloppe,

$$(4) \quad x^2 + 6xy + y^2 - 4 = 0.$$

Dans ce cas, la fonction  $R$  a pour valeur

$$(x - y)^2(x^2 + 6xy + y^2 - 4);$$

donc, si l'on fait abstraction du facteur  $(x - y)^2$ , sur lequel je reviendrai tout à l'heure,  $R = 0$  représente l'enveloppe des hyperboles données, et non le lieu des points de rebroussement de ces courbes, au moins je le suppose.

» IV. Ce n'est pas tout : à l'appui de sa thèse, M. Darboux fait observer qu'en général les équations

$$(5) \quad R = 0,$$

$$(6) \quad \frac{dR}{dx} - \frac{B}{2A} \frac{dR}{dy} = 0$$

ne peuvent être vérifiées simultanément. Dans l'exemple précédent, l'équation (6) est

$$(x^2 + 2xy + y^2 + 2)(y + 3x) - 2(2x^2 + 1)(x + 3y) = 0,$$

ou

$$(y - x)(y^2 + 6xy + x^2 - 4) = 0;$$

c'est-à-dire

$$(y - x)R = 0.$$

» On pourrait évidemment multiplier les vérifications de la règle ordinaire. Quels sont donc les cas d'exception à cette règle?

» V. Soit

$$(7) \quad c^2 + Pc + Q = 0,$$

$P$  et  $Q$  étant fonctions de  $x$  et de  $y$ . La solution singulière est

$$(8) \quad P^2 - 4Q = 0.$$

» D'un autre côté, si l'on élimine  $c$  entre la proposée (7) et sa différen-

tielle immédiate, on trouve une équation de la forme (1), dans laquelle

$$(9) \quad \begin{cases} A = \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2 - P \frac{dP}{dy} \frac{dQ}{dy} + Q \left(\frac{dP}{dy}\right)^2, \\ B = 2 \left(\frac{dQ}{dx} \frac{dQ}{dy} + Q \frac{dP}{dx} \frac{dP}{dy}\right) - P \left(\frac{dP}{dx} \frac{dQ}{dy} + \frac{dP}{dy} \frac{dQ}{dx}\right), \\ C = \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 - P \frac{dP}{dx} \frac{dQ}{dx} + Q \left(\frac{dP}{dx}\right)^2. \end{cases}$$

Il résulte, de ces valeurs,

$$(10) \quad R = B^2 - 4AC = (P^2 - 4Q) \left(\frac{dP}{dx} \frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy} \frac{dQ}{dx}\right)^2.$$

Par conséquent, l'équation  $R = 0$  se décompose en

$$(8) \quad P^2 - 4Q = 0,$$

qui représente l'enveloppe des courbes (7), et en

$$(11) \quad \left(\frac{dP}{dx} \frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy} \frac{dQ}{dx}\right)^2 = 0.$$

Celle-ci appartient au lieu des points où se touchent les courbes simultanément représentées par

$$P = \lambda$$

et par

$$Q = \mu,$$

$\lambda, \mu$  étant des constantes arbitraires.

» Dans l'exemple ci-dessus,

$$P = x + y, \quad Q = 1 - xy,$$

et l'équation (11) se réduit à

$$(12) \quad (x - y)^2 = 0.$$

Celle-ci, dont nous avons déjà parlé, représente donc le *lieu des points de contact d'un système de droites parallèles et d'hyperboles homothétiques*. En outre, cette équation (12) est une solution singulière de

$$A \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B \left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0,$$

ou

$$(2x^2 + 1) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x^2 + 2xy + y^2 + 2) \left(\frac{dy}{dx}\right) + 2y^2 + 1 = 0.$$

» VI. Soit encore l'équation intégrale

$$(13) \quad 4x^2 + 2(x - 3y) + c + x^2 = 0,$$

---

que j'ai prise pour exemple dans une *Note sur la Théorie des solutions singulières (Journal de l'École Polytechnique, XXXI<sup>e</sup> cahier)*. Il en résulte l'équation différentielle

$$(14) \quad 3x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 6y \frac{dy}{dx} + x + 2y = 0,$$

et, comme équation de l'enveloppe des paraboles (13),

$$(15) \quad (x - 3y)^2 = 4x^2.$$

Si l'on égale à zéro la fonction  $B^2 - 4AC$ , on a

$$3y^2 = x(x + 2y),$$

c'est-à-dire la relation (15). Ici l'on ne rencontre pas du tout l'exception que M. Darboux signale comme devant arriver si fréquemment.

» VII. Soient, pour abréger,

$$(16) \quad \frac{dP}{dx} = \alpha, \quad \frac{dP}{dy} = \beta, \quad \frac{dQ}{dx} = \alpha', \quad \frac{dQ}{dy} = \beta';$$

alors les formules (9) deviennent

$$\begin{aligned} A &= \beta'^2 - P\beta\beta' + Q\beta^2, \\ B &= 2(\alpha'\beta' + Q\alpha\beta) - P(\alpha\beta' + \alpha'\beta), \\ C &= \alpha'^2 - P\alpha\alpha' + Q\alpha^2; \end{aligned}$$

et la relation (10) se réduit à l'identité

$$B^2 - 4AC = (P^2 - 4Q)(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2,$$

que l'on rencontre dans la théorie des nombres. On a ainsi un rapprochement, peut-être bien inattendu, entre deux parties différentes de l'analyse.

» VIII. Puisque l'occasion s'en présente, je mentionnerai trois propositions sur *le lieu des centres de courbure de l'ellipsoïde*:

» 1<sup>o</sup> *Le long d'une même ligne de courbure de l'ellipsoïde, le rayon principal varie en raison inverse de la distance du centre au plan tangent;*

» 2<sup>o</sup> *La surface dont il s'agit est l'enveloppe des ellipsoïdes représentés par*

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2 - \lambda^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 - \lambda^2)^2} + \frac{c^2 z^2}{(c^2 - \lambda^2)^2} = 1;$$

» 3<sup>o</sup> *Chacun de ces ellipsoïdes touche l'enveloppe suivant une arête de rebroussement.* »