

Comptes rendus
hebdomadaires des séances
de l'Académie des sciences /
publiés... par MM. les
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1835-1965.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUEZ ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment possible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter
reutilisationcommerciale@bnf.fr.

» Jusqu'ici la lumière semblait être le seul agent capable de produire des effets de cet ordre à la température ordinaire : on connaît toute l'importance du rôle qu'elle joue dans la formation des principes végétaux. Aussi ai-je cru devoir examiner l'influence que la lumière pouvait exercer sur la synthèse de l'acide formique.

» J'ai pris trois tubes de verre d'une capacité de 60 centimètres cubes environ, j'y ai introduit 2 centimètres cubes d'une solution aqueuse renfermant le tiers de son poids de potasse, j'ai rempli les tubes d'oxyde de carbone et je les ai scellés à la lampe. L'un des tubes a été placé horizontalement et renfermé dans un tube de fer, au sein d'une obscurité absolue. Un autre a été placé horizontalement sur la table du laboratoire, exposé à la lumière diffuse. Enfin le dernier tube a été exposé à la lumière solaire pendant tout le mois de septembre de la présente année. Au bout d'un mois les trois tubes ont été ouverts sur le mercure et on a déterminé le volume du gaz absorbé.

» Dans le tube maintenu au sein d'une obscurité absolue, l'absorption a été trouvée égale à 13 centimètres cubes.

» Dans le tube exposé à la lumière diffuse, l'absorption était de 12 centimètres cubes.

» Dans le tube exposé à la lumière solaire, elle était moindre encore.

» Il résulte de ces faits que la lumière ne paraît pas exercer d'influence sur la synthèse de l'acide formique. Le mécanisme qui préside à cette synthèse est d'un ordre différent. Le moment ne me paraît pas venu de formuler les hypothèses à l'aide desquelles on peut essayer d'en rendre compte. Je me borne à signaler le fait : c'est, je crois, l'un des plus remarquables qui se présentent dans l'étude des combinaisons effectuées avec un travail négatif apparent. En ce qui touche ce genre de combinaisons, je demanderai la permission de renvoyer pour plus de développements à un ouvrage que je viens de publier (1) sur les méthodes de synthèse en Chimie organique. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Mémoire sur la transformation des séries, et sur quelques intégrales définies; par M. E. CATALAN. (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires, MM. Hermite, Serret.)

« Voici les résultats principaux contenus dans le Mémoire que j'ai

(1) *Leçons sur les méthodes générales de synthèse en Chimie organique, professées en 1864 au Collège de France*, p. 399 et suivantes ; chez Gauthier-Villars, 1864.

l'honneur de présenter à l'Académie :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{4}{3} + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2 - 1)^2 (4n^2 - 9)},$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \pm \frac{1}{2q+1} \mp \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}{(2q+3)(2q+5)\dots(2q+2p+3)},$$

$$I_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \pm \frac{1}{q} \mp \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}{2^{p+1}(q+1)(q+2)\dots(q+p+1)},$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} = 1 + \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)} = \dots,$$

$$\frac{\pi^2}{9} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{2^n(n+1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)},$$

$$\frac{d^2 I \Gamma(x)}{dx^2} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k)^3 \left(x + \frac{3k+3}{2} \right)}{2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+1) (1+x)^2 (2+x)^2 \dots (k+1+x)^2},$$

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (3n+2) \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \right]^3,$$

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{2^{n+1}} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)},$$

$$\begin{aligned} G &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} = \frac{19}{18} - 32 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2 (2n+1)^2 (2n+3)^2} \\ &= \frac{2909}{3150} - 768 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)^2 (2n+3)^2 (2n+5)^2 (2n+7)}, \end{aligned}$$

$$G = 1 - 20 \sum_{k=0}^{\infty} A_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} B_k,$$

en supposant

$$A_k = (-1)^k \frac{32^k (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k)^3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)(k+1)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (4k+5)^2}, \quad B_k = \frac{A_k}{(k+1)^2},$$

$$\begin{cases} G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \mp \frac{1}{(2p+1)^2} \pm R_p, \\ R_p = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=\infty} D_k - 4 \sum_{k=0}^{k=\infty} E_k + 2(2p+1) \sum_{k=0}^{k=\infty} F_k, \\ D_k = (-1)^k \frac{32^k (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k)^3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{(2p+1)(2p+3)^2 \dots (2p+4k+1)^2 (2p+4k+3)^2}, \\ E_k = \frac{(k+1)(2k+1)}{(2p+4k+3)(2p+4k+5)} D_k, \quad F_k = \frac{1}{2p+4k+5} E_k. \end{cases}$$

» La constante G a pour valeur, à moins d'une unité du quatorzième ordre,

$$0,915\,965\,594\,177\,21.$$

$$\frac{\pi}{\cos \frac{\pi z}{2}} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}{(1+z)(2+z)\dots(2p+1+z)} + \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}{(1-z)(2-z)\dots(2p+1-z)}.$$

» En désignant par B l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} l_2,$$

je trouve :

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2} dx = 2B + G, \quad \int_0^1 \frac{l\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+x^2} dx = B + G, \quad \int_0^1 \frac{\arctan x}{x(1+x)} dx = G - B,$$

$$\int_0^1 \frac{x \arctan x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} G - B, \quad \int_0^1 \frac{l(1+x^2)}{1+x^2} dx = 4B - G,$$

$$\int_0^1 \frac{1-x-x^2-3x^3}{x(1+x)(1+x^2)} \arctan x dx = 0, \quad \int_0^1 \frac{1-x^3}{x(1+x)(1+x^2)} \arctan x dx = \frac{1}{2} G,$$

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x(1+x^2)} dx = \int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4}-x \arctan x}{1-x^2} dx = B + \frac{1}{2} G,$$

$$\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4}-x \arctan x}{1-x} dx = G - B + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} l_2,$$

$$\int_0^1 \frac{l_2 - l(1+x)}{1-x} dx = (l_2)^2 - \frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4}-\arctan x}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} G,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} l \frac{1+x}{1-x} = G, \quad \int_0^1 \frac{l(1-x)}{1+x^2} dx = B - G,$$

$$\int_0^1 x^p dx l \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{\binom{p+1}{2}} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{p} \right), \text{ si } p \text{ est impair,}$$

$$= \frac{1}{p+1} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\binom{p}{2}} \right] + \frac{2}{p+1} l_2, \text{ si } p \text{ est pair. »}$$