

Comptes rendus
hebdomadaires des séances
de l'Académie des sciences /
publiés... par MM. les
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1835-1965.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

échelle diatonique requièrent dans le corps du tuyau des longueurs et dans la bouche des largeurs (*) qui soient représentées par les nombres $1; \frac{8}{9}; \frac{4}{5}; \frac{3}{4}; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{8}{15}; \frac{1}{2}$; comme on l'a exprimé dans la loi des cordes.

Nature de l'organe vocal de l'homme.

» L'organe vocal de l'homme n'est qu'un instrument à vent, dans lequel se trouvent les moyens les plus parfaits, parce que la hauteur et la largeur de la bouche vocale ou larynx sont parfaitement appropriées, non-seulement à tous les tons musicaux, dans les limites de la voix humaine, mais encore aux demi-tons, aux quarts de tons, aux harmoniques et enfin aux dégradations du son. L'analyse la plus exacte de l'acoustique était ici nécessaire; la partie anatomique avait été fournie à la science de la manière la plus parfaite par MM. Longet et Müller.

» La patrie des Savart, des Cagniard de Latour, des Despretz et de tant d'autres savants éminents qui se sont aussi rendus célèbres dans l'acoustique, ne manquera pas, je l'espère, de féconder mes études par des applications utiles, des perfectionnements et des découvertes nouvelles. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Note sur la théorie des équations;*
par M. E. CATALAN.

» LEMME I. *La moyenne arithmétique entre plusieurs quantités positives est plus grande que la moyenne géométrique entre ces mêmes quantités (**).*

» LEMME II. *Si l'on représente par S_p la somme des produits p à p de m quantités quelconques $a, b, c, \dots, k, l$, par $C_{m,p}$ le nombre des combinaisons p à p de m lettres, et par P le produit des $C_{m,p}$ parties dont se compose S_p , on aura*

$$P = (S_m)^{C_{m-1,p-1}}.$$

» *Démonstration.* Il est d'abord évident que P a la forme

$$(abc, \dots, kl)^\mu = (S_m)^\mu.$$

Or, parmi les produits dont la somme est S_p , le nombre de ceux qui renferment le facteur a est $C_{m-1,p-1}$. Donc $\mu = C_{m-1,p-1}$.

(*) ... Richiedono lunghezze nel corpo della canna e larghezze nella bocca...

(**) En s'appuyant sur cette propriété bien connue, M. Faa de Bruno a trouvé un *nouvel indice de l'existence des racines imaginaires*, compris parmi ceux qui résultent du théorème II (Journal de Liouville, tome XV).

» THÉOREME I. Si l'équation

$$(1) \quad x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \dots + (-1)^p A_p x^{m-p} + \dots + (-1)^m A_m = 0$$

a toutes ses racines positives, les quantités $A_1, A_2, \dots, A_m$ vérifient les inégalités

$$(2) \quad \begin{cases} A_1 > m \sqrt[m]{A_m}, & A_2 > \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \sqrt[m]{(A_m)^2}, \dots, \\ A_p > C_{m,p} \sqrt[m]{(A_m)^p}, \dots, & A_{m-1} > m \sqrt[m]{(A_m)^{m-1}}. \end{cases}$$

» Démonstration. La moyenne arithmétique entre les $C_{m,p}$ produits dont se compose A_p est $\frac{A_p}{C_{m,p}}$. La moyenne géométrique entre ces mêmes produits

est, d'après le lemme II, égale à $\sqrt[m]{(A_m)^{C_{m-1,p-1}}}$. D'ailleurs $C_{m,p} = \frac{m}{p} C_{m-1,p-1}$.

Donc, d'après le lemme I,

$$\frac{A_p}{C_{m,p}} > \sqrt[m]{(A_m)^p}.$$

» COROLLAIRE. Si une équation de la forme (1) n'a pas de racines négatives (*), et qu'une au moins des inégalités (2) ne soit pas vérifiée, cette équation a des racines imaginaires.

» Par exemple, l'équation

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 8x + 2 = 0$$

a des racines imaginaires, parce que l'on a

$$6 < 6 \sqrt[4]{2^2}.$$

» LEMME III. Pour former l'équation aux carrés des racines d'une équation donnée

$$(3) \quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \dots + A_m = 0,$$

il suffit d'égaliser à zéro le produit des deux polynômes

$$\begin{aligned} & x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_m, \\ & x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots \pm A_m, \end{aligned}$$

et de remplacer, dans ce dernier produit, x^2 par y .

(*) Pour qu'une équation $f(x) = 0$ n'ait pas de racines négatives, il suffit que $f(-x)$ ne présente aucune variation. Il est toujours facile de satisfaire à cette condition, en augmentant toutes les racines de la proposée, d'une quantité λ convenablement choisie.

» **THÉORÈME II.** *Si l'équation (3) a toutes ses racines réelles, les coefficients $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ vérifient les inégalités*

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} -(2A_2 - A_1^2) > m \sqrt[m]{(A_m)^2}, \\ + (2A_4 - 2A_1A_3 + A_2^2) > \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \sqrt[m]{(A_m)^4}, \\ -(2A_6 - 2A_1A_5 + 2A_2A_4 - A_3^2) > \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sqrt[m]{(A_m)^6}, \\ \dots \end{array} \right.$$

» *Démonstration.* D'après le lemme III, l'équation aux carrés des racines étant

$$(5) \quad y^m - B_1 y^{m-1} + B_2 y^{m-2} - B_3 y^{m-3} + \dots \pm B_m = 0,$$

on a

$$B_1 = -(2A_2 - A_1^2), \quad B_2 = +(2A_4 - 2A_1A_3 + A_2^2), \dots, B_m = A_m^2.$$

» D'un autre côté, la proposée (3) n'ayant pas de racines imaginaires, la transformée (5) doit avoir toutes ses racines positives. On peut donc y appliquer les inégalités (4).

» **COROLLAIRE.** — *Si une, au moins, des inégalités (4) n'est pas vérifiée, l'équation proposée a des racines imaginaires.*

» *Remarque.* — L'application du dernier corollaire pourra déceler l'existence de racines imaginaires dans des cas où le théorème I serait insuffisant. Soit, par exemple, l'équation

$$x^5 - 7x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0.$$

On a

$$7 > 5, \quad 13 > 10, \quad 12 > 10, \quad 6 > 5;$$

en sorte que l'on ne peut encore rien conclure. Mais si l'on multiplie le premier membre par

$$x^5 + 7x^4 + 13x^3 + 12x^2 + 6x + 1,$$

on forme l'équation

$$y^5 - 23y^4 + 13y^3 - 2y^2 + 12y - 1 = 0,$$

qui donne

$$2 < 10.$$

La proposée a donc des racines imaginaires. »

MÉTÉOROLOGIE. — *Étoiles filantes de la nuit du 12 au 13 novembre.*
(Extrait d'une Note de M. COULVIER-GRAVIER.)

« En prenant le nombre horaire moyen d'étoiles filantes à minuit de quatre en quatre observations, depuis le 28 octobre dernier, on trouve les nombres suivants :

	Nombre d'étoiles.
Du 30 au 31 octobre.....	8,3
Du 3 au 4 novembre.....	9,0
Du 9 au 10 novembre.....	9,1
Du 12 au 13 novembre.....	11,5

» Ces nombres suffisent pour faire voir, comme nous l'avons déjà fait remarquer depuis 1849, que nous sommes encore bien loin des grandes apparitions de 1799 et 1833, dont le retour a été prédit par Olbers pour 1867. »

MÉTÉOROLOGIE. — *Météore lumineux observé près de Neuilly (Seine), le 13 septembre 1858.* (Extrait d'une Lettre de M. DE LA TRAMBLAIS.)

« J'ai lu hier seulement dans le *Moniteur universel* du 3 de ce mois que dans la soirée du 13 septembre dernier, un bolide fort remarquable a été observé entre Rennes et Saint-Malo par M. de la Haye, et à Bernières, près Vire, par M. Lecouturier. Ce même soir, 13 septembre, je descendais l'avenue de la Porte-Maillot à Neuilly, lorsque mon attention fut soudainement attirée par le vif éclat d'un météore traversant rapidement le ciel sur ma gauche, dans la direction du sud-ouest au nord-ouest, et suivant une ligne oblique à 20 ou 25 degrés au-dessus de Vénus et un peu abaissée vers l'horizon. A cet instant, la nuit n'était pas encore close; Vénus et Arcturus étant seules visibles dans cette partie du ciel, il ne me fut pas possible de rattacher à d'autres étoiles la trajectoire du bolide. Il était à ma montre 6^h 48^m et j'avais l'heure du chemin de fer à la gare Saint-Lazare, ou à très-peu près celle de la Bourse de Paris.

» La durée du parcours du météore fut d'environ six ou sept secondes,