

Comptes rendus  
hebdomadaires des séances  
de l'Académie des sciences /  
publiés... par MM. les  
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1835-1965.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [reutilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:reutilisationcommerciale@bnf.fr).

2°. **M. BELLI** : « Pensées sur la consistance et la densité de la croûte solide terrestre ; troisième article : Applications aux éruptions volcaniques. »

3°. **M. F. LIHARZIK** : « Sur les lois de la croissance dans l'espèce humaine. »

( Renvoi à M. Cl. Bernard avec invitation d'en faire l'objet d'un Rapport verbal.)

4°. **M. VAUGHAN** : « Astronomie physique populaire, ou Exposition des phénomènes célestes les plus remarquables. »

Ce livre est renvoyé, comme l'avaient été déjà divers opuscules de l'auteur sur le même sujet, à l'examen de M. Delaunay, qui en fera, s'il y a lieu, l'objet d'un Rapport verbal.

MATHÉMATIQUES. — *Sur une application de la formule du binôme aux intégrales eulériennes*; par **M. E. CATALAN**.

« I. Le coefficient de  $x^k$ , dans le produit des polynômes

$$1 + \frac{l}{1}x + \frac{l(l-1)}{1.2}x^2 + \dots + x^l,$$

$$1 + \frac{l'}{1}x^{-1} + \frac{l'(l'-1)}{1.2}x^{-2} + \dots + x^{-l'},$$

est, en représentant par  $C_{l,k}$  le nombre des combinaisons de  $l$  lettres, prises  $k$  à  $k$  :

$$1 \cdot C_{l,k} + \frac{l'}{1}C_{l,k+1} + \frac{l'(l'-1)}{1.2}C_{l,k+2} + \dots$$

D'un autre côté, ce coefficient est égal à celui de  $x^k$ , dans le développement de  $(1+x)^{l+l'} \cdot x^{-l'}$ ; donc

$$(1) \quad C_{l+l',l+k} = 1 \cdot C_{l,k} + \frac{l'}{1}C_{l,k+1} + \frac{l'(l'-1)}{1.2}C_{l,k+2} + \dots$$

» II. On a

$$C_{l,k+1} = \frac{l-k}{k+1} C_{l,k}, \quad C_{l,k+2} = \frac{(l-k)(l-k-1)}{(k+1)(k+2)} C_{l,k}, \dots$$

De plus,

$$C_{l,k} = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(l-k+1)} = \frac{1}{(l-k) \int_0^1 \theta^k (1-\theta)^{l-k-1} d\theta} = \frac{1}{(l-k)B(k+1, l-k)}$$

$$C_{l+l', l+k} = \frac{1}{(l-k)B(l'+k+1, l-k)}$$

» Au moyen de ces valeurs, l'équation (1) devient

$$(2) \quad \frac{B(k+1, l-k)}{B(l'+k+1, l-k)} = 1 + \frac{l' l-k}{1 \cdot k+1} + \frac{l'(l'-1)(l-k)(l-k-1)}{1 \cdot 2 \cdot (k+1)(k+2)} + \dots;$$

ou, en posant

$$k+1 = p, \quad l'+k+1 = q, \quad l-k = m:$$

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{B(p, m)}{B(q, m)} &= 1 - \frac{m p - q}{1 \cdot p} + \frac{m(m-1)(p-q)(p-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot p(p+1)} \\ &\quad - \frac{m(m-1)(m-2)(p-q)(p-q+1)(p-q+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot p(p+1)(p+2)} + \dots \end{aligned} \right.$$

» III. L'équation (2) a été obtenue en supposant  $l$  et  $l'$  et  $k$  entiers positifs. Par conséquent, la formule (A) paraît soumise à de nombreuses restrictions. Néanmoins elle est générale; c'est-à-dire qu'elle subsiste lorsque  $p, q, m$  étant des quantités positives quelconques, le second membre est un polynôme ou une série (\*). Pour abrégé, j'ometts la démonstration.

» IV. — Feu M. Binet, dans son savant *Mémoire sur les intégrales définies eulériennes*, démontre une formule que l'on peut écrire ainsi :

$$(A') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{B(p, m)}{B(q, m)} &= 1 - \frac{p-q}{1} \frac{m}{m+q} + \frac{(p-q)(p-q-1)}{1 \cdot 2} \frac{m(m+1)}{(m+q)(m+q+1)} \\ &\quad - \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{m(m+1)(m+2)}{(m+q)(m+q+1)(m+q+2)} + \dots \end{aligned} \right.$$

» Ces deux formules (A) (A'), évidemment différentes, ne sont cependant pas contradictoires, ainsi qu'on le reconnaît au moyen du théorème d'Euler, exprimé par l'équation

$$\frac{B(p, m)}{B(q, m)} = \frac{B(p, m+q)}{B(q, m+p)}$$

» V. La formule (A) donne immédiatement l'intégrale eulérienne de pre-

(\*) Cette série est toujours convergente.

mière espèce et son inverse, développées en séries convergentes. En effet, si l'on suppose  $q$  entier,

$$B(q, m) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (q-1)}{m(m+1) \dots (m+q-1)};$$

donc, en changeant  $m$  en  $q$  et  $q$  en  $m$  :

$$(B) \quad B(p, q) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)}{q(q+1) \dots (q+m-1)} \left[ 1 - \frac{q}{1} \frac{p-m}{p} + \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} \frac{(p-m)(p-m+1)}{p(p+1)} - \dots \right];$$

$m$  est un nombre entier arbitraire. Si, par exemple,  $m = 1$  :

$$(C) \quad B(p, q) = \frac{p-1}{q} \left[ \frac{1}{p-1} - \frac{q}{1} \frac{1}{p} + \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{p+1} - \frac{q(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{p+2} + \dots \right].$$

De même

$$(D) \quad \frac{1}{B(p, q)} = \frac{p(p+1) \dots (p+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} \left[ 1 - \frac{p}{1} \frac{m-q}{m} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \frac{(m-q)(m-q+1)}{m(m+1)} - \dots \right],$$

et

$$(E) \quad \frac{1}{B(p, q)} = p \left[ 1 + \frac{p}{1} \frac{q-1}{1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \frac{(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2} + \dots \right].$$

» VI. Le premier membre de la formule (A) égale  $\frac{\Gamma(p) \Gamma(m+q)}{\Gamma(q) \Gamma(m+p)}$ . Si l'on suppose  $p = q + i$ ,  $i$  étant un nombre entier, ce premier membre se réduit à  $\frac{q(q+1)(q+i-1)}{(m+q)(m+q+1) \dots (m+q+i-1)}$ . Conséquemment,

$$(F) \quad \frac{q(q+1) \dots (q+i-1)}{(m+q)(m+q+1) \dots (m+q+i-1)} = 1 - \frac{m}{1} \frac{i}{q+i} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{i(i+1)}{(q+i)(q+i+1)} - \dots$$

Par exemple,

$$(G) \quad \frac{q}{m+q} = 1 - \frac{m}{q+1} + \frac{(q+1)(q+2)}{m(m-1)} - \frac{m(m-1)(m-2)}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots \quad (*),$$

quelles que soient les quantités positives  $m, q$ .

» VII. Parmi les applications de la formule (A), l'une des plus intéressantes me paraît être le développement de  $\pi$  ou de  $\frac{1}{\pi}$ , en séries convergentes.

(\*) On sait que cette formule (G) est due à Stirling.

Pour obtenir une infinité d'expressions de la première transcendante, il suffit de supposer

$$q \text{ entier, } p - q = i + \frac{1}{2}, \quad m + q = i' + \frac{1}{2},$$

$i$  et  $i'$  étant des nombres entiers. On trouve, en effet,

$$(H) \quad \left\{ \begin{aligned} \pi &= \frac{1.2.3\dots(q-1).1.2.3\dots(i+i')}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{2q+2i-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{2i'-1}{2}\right)} \\ &\times \left[ 1 - \frac{m}{1} \frac{p-q}{p} + \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{(p-q)(p-q-1)}{p(p+1)} - \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Soient, par exemple,

$$q = 1, \quad i = 0, \quad i' = 1, \quad p = \frac{3}{2}, \quad m = \frac{1}{2};$$

on aura

$$(I) \quad \pi = 4 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{3} - \frac{1}{2.4} \frac{1}{5} - \frac{1.3}{2.4.6} \frac{1}{7} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \frac{1}{9} - \dots \right].$$

De même, en prenant

$$p \text{ entier, } q - p = i + \frac{1}{2}, \quad m + p = i' + \frac{1}{2},$$

on obtient

$$(K) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\pi} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{2p+2i-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{2i'-1}{2}\right)}{1.2.3\dots(p-1).1.2.3\dots(i+i')} \\ &\times \left[ 1 - \frac{m}{1} \frac{p-q}{p} + \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{(p-q)(p-q+1)}{p(p+1)} - \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Soient

$$p = 1, \quad i = 0, \quad i' = 1, \quad q = \frac{3}{2}, \quad m = \frac{2}{2};$$

alors

$$(L) \quad \frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 + \dots$$

» VIII. Cette dernière formule donne lieu à la proposition suivante, que l'on pourrait interpréter géométriquement : *La somme des carrés des termes du développement de  $\sqrt{2} = (1+i)^{\frac{1}{2}}$ , est égale à  $\frac{4}{\pi}$ .*

» IX. Plus généralement, puisque l'équation (A) est la traduction de l'équation (1), celle-ci subsiste en même temps que la première. Par consé-

quent : Soit  $k$  un nombre entier, positif ou nul ; soient  $l > k$  et  $l' > -1$  : le coefficient  $x^k$ , dans le produit des deux séries

$$1 + \frac{l}{1} x + \frac{l(l-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{l(l-1)(l-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots,$$

$$1 + \frac{l'}{1} x^{-1} + \frac{l'(l'-1)}{1 \cdot 2} x^{-2} + \frac{l'(l'-1)(l'-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{-3} + \dots, (*)$$

est égal à

$$\frac{\Gamma(l+l'+1)}{\Gamma(l'+k+1)\Gamma(l-k+1)}.$$

Par exemple,  $1 + \frac{l \cdot l'}{1 \cdot 1} + \frac{l(l-1) \cdot l'(l'-1)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} + \dots = \frac{\Gamma(l+l'+1)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l'+1)}. (**)$

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Des dunes et de leurs effets*; par M. MARCEL DE SERRES.  
(Extrait.)

« Parmi les phénomènes physiques de l'époque actuelle, il en est peu de plus curieux que celui connu sous le nom de *dunes*. Bien différentes des alluvions qui entraînent dans les plaines des limons, sources fécondes de fertilité, les dunes, au contraire, frappent de mort les contrées qu'elles envahissent. Elles ne se bornent pas, comme on le suppose souvent, à élever auprès des côtes des monticules sablonneux qui, au premier aperçu, sembleraient devoir les protéger contre les irruptions des eaux des mers (\*\*\*) .

» Elles étendent leurs sables beaucoup plus loin et parfois à plusieurs kilomètres dans l'intérieur des terres. Elles les recouvrent de leurs masses mobiles qui y sont disséminées d'une manière presque uniforme et dont l'épaisseur n'est jamais très-considérable. Cette dernière circonstance contribue singulièrement à leur donner une grande étendue et rendre ce phénomène désastreux.

» Les sables des mers marchent avec une grande rapidité par suite de leur

(\*) Comme une de ces séries est nécessairement divergente, il est bien entendu que l'expression : *coefficient de  $x^k$ , dans le produit*, signifie : *la somme des produits des coefficients des termes dans lesquels la somme des exposants est égale à  $k$ .*

(\*\*) Laplace avait remarqué l'équation

$$1 + \left(\frac{l}{1}\right)^2 + \left(\frac{l(l-1)}{1 \cdot 2}\right)^2 + \dots = \frac{(\Gamma 2l + 1)}{[\Gamma(l+1)]^2};$$

mais sa démonstration ( rapportée par Lacroix ) suppose  $l$  entier positif.

(\*\*\*) La plus grande hauteur à laquelle parviennent des monticules ne dépasse guère 5 à 6 mètres. Cette élévation, loin d'être générale, est au contraire tout à fait exceptionnelle.