Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

2°. M. **Belli** : « Pensées sur la consistance et la densité de la croûte solide terrestre ; troisième article : Applications aux éruptions volcaniques. »

3°. M. F. **Liharzik** : « Sur les lois de la croissance dans l'espèce humaine. »

(Renvoi à M. Cl. Bernard avec invitation d'en faire l'objet d'un Rapport verbal.)

4°. M. **Vaughan** : « Astronomie physique populaire, ou Exposition des phénomènes célestes les plus remarquables. »

Ce livre est renvoyé, comme l'avaient été déjà divers opuscules de l'auteur sur le même sujet, à l'examen de M. Delaunay, qui en fera, s'il y a lieu, l'objet d'un Rapport verbal.

MATHÉMATIQUES. — *Sur une application de la formule du binôme aux intégrales eulériennes; par* **M. E. Catalan.**

« I. Le coefficient de x^k, dans le produit des polynômes

$$1 + \frac{l}{1} x + \frac{l(l-1)}{1.2} x^2 + \ldots + x^l,$$

$$1 + \frac{l'}{1} x^{-1} + \frac{l'(l'-1)}{1.2} x^{-2} + \ldots + x^{-l'},$$

est, en représentant par $C_{l,k}$ le nombre des combinaisons de l lettres, prises k à k :

$$1 . C_{l,k} + \frac{l'}{1} C_{l,k+1} + \frac{l'(l'-1)}{1.2} C_{l,k+2} + \ldots.$$

D'un autre côté, ce coefficient est égal à celui de x^k, dans le développement de $(1+x)^{l+l'}.x^{-l'}$; donc

$$C_{l+l',l'+k} = 1 . C_{l,k} + \frac{l'}{1} C_{l,k+1} + \frac{l'(l'-1)}{1.2} C_{l,k+2} + \ldots. \tag{1}$$

» II. On a

$$C_{l,k+1} = \frac{l-k}{k+1} C_{l,k}, \quad C_{l,k+2} = \frac{(l-k)(l-k-1)}{(k+1)(k+2)} C_{l,k}, \ldots$$

De plus,

$$C_{l,k} = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(l-k+1)} = \frac{1}{(l-k)\int_0^1 \theta^k(1-\theta)^{l-k-1}\,d\theta} = \frac{1}{(l-k)\mathrm{B}(k+1,\, l-k)},$$

$$C_{l+l',\, l'+k} = \frac{1}{(l-k)\mathrm{B}(l'+k+1,\, l-k)}.$$

» Au moyen de ces valeurs, l'équation (1) devient

$$(2)\qquad \frac{\mathrm{B}(k+1,\, l-k)}{\mathrm{B}(l'+k+1,\, l-k)} = 1 + \frac{l'}{1}\,\frac{l-k}{k+1} + \frac{l'(l'-1)}{1.2}\,\frac{(l-k)(l-k-1)}{(k+1)(k+2)} + \ldots;$$

ou, en posant

$$k+1 = p,\quad l'+k+1 = q,\quad l-k = m:$$

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{B}(p,m)}{\mathrm{B}(q,m)} &= 1 - \frac{m}{1}\,\frac{p-q}{p} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{(p-q)(p-q+1)}{p(p+1)} \\ &\quad - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\frac{(p-q)(p-q+1)(p-q+2)}{p(p+1)(p+2)} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

» III. L'équation (2) a été obtenue en supposant l et l' et k entiers positifs. Par conséquent, la formule (A) paraît soumise à de nombreuses restrictions. Néanmoins elle est générale; c'est-à-dire qu'elle subsiste lorsque p, q, m étant des quantités positives quelconques, le second membre est un polynôme ou une série (*). Pour abréger, j'omets la démonstration.

» IV. — Feu M. Binet, dans son savant *Mémoire sur les intégrales définies eulériennes*, démontre une formule que l'on peut écrire ainsi :

$$(\mathrm{A}')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{B}(p,m)}{\mathrm{B}(q,m)} &= 1 - \frac{p-q}{1}\,\frac{m}{m+q} + \frac{(p-q)(p-q-1)}{1.2}\,\frac{m(m+1)}{(m+q)(m+q+1)} \\ &\quad - \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{1.2.3}\,\frac{m(m+1)(m+2)}{(m+q)(m+q+1)(m+q+2)} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

» Ces deux formules (A) (A'), évidemment différentes, ne sont cependant pas contradictoires, ainsi qu'on le reconnaît au moyen du théorème d'Euler, exprimé par l'équation

$$\frac{\mathrm{B}(p,m)}{\mathrm{B}(q,m)} = \frac{\mathrm{B}(p,\, m+q)}{\mathrm{B}(q,\, m+p)}.$$

» V. La formule (A) donne immédiatement l'intégrale eulérienne de pre-

(*) Cette série est toujours convergente.

mière espèce et son inverse, développées en séries convergentes. En effet, si l'on suppose q entier,

$$B(q, m) = \frac{1.2.3\ldots(q-1)}{m(m+1)\ldots(m+q-1)};$$

donc, en changeant m en q et q en m :

$$\text{(B)} \qquad B(p, q) = \frac{1.2.3\ldots(m-1)}{q(q+1)\ldots(q+m-1)}\left[1 - \frac{q}{1}\frac{p-m}{p} + \frac{q(q-1)}{1.2}\frac{(p-m)(p-m+1)}{p(p+1)} - \ldots\right];$$

m est un nombre entier arbitraire. Si, par exemple, $m = 1$:

$$\text{(C)} \qquad B(p, q) = \frac{p-1}{q}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{q}{1}\frac{1}{p} + \frac{q(q-1)}{1.2}\frac{1}{p+1} - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\frac{1}{p+2} + \ldots\right].$$

De même

$$\text{(D)} \qquad \frac{1}{B(p, q)} = \frac{p(p+1)\ldots(p+m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)}\left[1 - \frac{p}{1}\frac{m-q}{m} + \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{(m-q)(m-q+1)}{m(m+1)} - \ldots\right],$$

et

$$\text{(E)} \qquad \frac{1}{B(p, q)} = p\left[1 + \frac{p}{1}\frac{q-1}{1} + \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{(q-1)(q-2)}{1.2} + \ldots\right].$$

» VI. Le premier membre de la formule (A) égale $\frac{\Gamma(p)\Gamma(m+q)}{\Gamma(q)\Gamma(m+p)}$. Si l'on suppose $p = q + i$, i étant un nombre entier, ce premier membre se réduit à $\frac{q(q+1)(q+i-1)}{(m+q)(m+q+1)\ldots(m+q+i-1)}$. Conséquemment,

$$\text{(F)} \qquad \frac{q(q+1)\ldots(q+i-1)}{(m+q)(m+q+1)\ldots(m+q+i-1)} = 1 - \frac{m}{1}\frac{i}{q+i} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{i(i+1)}{(q+i)(q+i+1)} - \ldots.$$

Par exemple,

$$\text{(G)} \qquad \frac{q}{m+q} = 1 - \frac{m}{q+1} + \frac{(q+1)(q+2)}{m(m-1)} - \frac{m(m-1)(m-2)}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots \ (*),$$

quelles que soient les quantités positives m, q.

» VII. Parmi les applications de la formule (A), l'une des plus intéressantes me paraît être le développement de π ou de $\frac{1}{\pi}$, en séries convergentes.

(*) On sait que cette formule (G) est due à Stirling.

Pour obtenir une infinité d'expressions de la première transcendante, il suffit de supposer

$$q \text{ entier}, \quad p - q = i + \frac{1}{2}, \quad m + q = i' + \frac{1}{2},$$

i et i' étant des nombres entiers. On trouve, en effet,

$$(\mathrm{H}) \quad \begin{cases} \pi = \dfrac{1.2.3\ldots(q-1).1.2.3\ldots(i+i')}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2q+2i-1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2i'-1}{2}\right)} \\ \times\left[1 - \dfrac{m}{1}\dfrac{p-q}{p} + \dfrac{m(m-1)}{1.2}\dfrac{(p-q)(p-q-1)}{p(p+1)} - \ldots\right]. \end{cases}$$

Soient, par exemple,

$$q = 1, \quad i = 0, \quad i' = 1, \quad p = \frac{3}{2}, \quad m = \frac{1}{2};$$

on aura

$$(\mathrm{I}) \qquad \pi = 4\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2.4}\frac{1}{5} - \frac{1.3}{2.4.6}\frac{1}{7} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\frac{1}{9} - \ldots\right].$$

De même, en prenant

$$p \text{ entier}, \quad q - p = i + \frac{1}{2}, \quad m + p = i' + \frac{1}{2},$$

on obtient

$$(\mathrm{K}) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2p+2i-1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2i'-1}{2}\right)}{1.2.3\ldots(p-1).1.2.3\ldots(i+i')} \\ \times\left[1 - \dfrac{m}{1}\dfrac{p-q}{p} + \dfrac{m(m-1)}{1.2}\dfrac{(p-q)(p-q+1)}{p(p+1)} - \ldots\right]. \end{cases}$$

Soient

$$p = 1, \quad i = 0, \quad i' = 1, \quad q = \frac{3}{2}, \quad m = \frac{2}{2};$$

alors

$$(\mathrm{L}) \qquad \frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 + \ldots$$

» VIII. Cette dernière formule donne lieu à la proposition suivante, que l'on pourrait interpréter géométriquement : *La somme des carrés des termes du développement de* $\sqrt{2} = (1+1)^{\frac{1}{2}}$, *est égale à* $\frac{4}{\pi}$.

» IX. Plus généralement, puisque l'équation (A) est la traduction de l'équation (1), celle-ci subsiste en même temps que la première. Par conséquent : Soit k un nombre entier, positif ou nul ; soient $l > k$ et $l' > -1$: le coefficient x^k, dans le produit des deux séries

$$1 + \frac{l}{1}x + \frac{l(l-1)}{1.2}x^2 + \frac{l(l-1)(l-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

$$1 + \frac{l'}{1}x^{-1} + \frac{l'(l'-1)}{1.2}x^{-2} + \frac{l'(l'-1)(l'-2)}{1.2.3}x^{-3} + \ldots, \text{ (*)}$$

est égal à
$$\frac{\Gamma(l+l'+1)}{\Gamma(l'+k+1)\Gamma(l-k+1)}.$$

Par exemple,
$$1 + \frac{l}{1}\frac{l'}{1} + \frac{l(l-1)}{1.2}\frac{l'(l'-1)}{1.2} + \ldots = \frac{\Gamma(l+l'+1)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l'+1)}.\text{ (**)}$$

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Des dunes et de leurs effets; par* **M. MARCEL DE SERRES.** (Extrait.)

« Parmi les phénomènes physiques de l'époque actuelle, il en est peu de plus curieux que celui connu sous le nom de *dunes*. Bien différentes des alluvions qui entraînent dans les plaines des limons, sources fécondes de fertilité, les dunes, au contraire, frappent de mort les contrées qu'elles envahissent. Elles ne se bornent pas, comme on le suppose souvent, à élever auprès des côtes des monticules sablonneux qui, au premier aperçu, sembleraient devoir les protéger contre les irruptions des eaux des mers (***).

» Elles étendent leurs sables beaucoup plus loin et parfois à plusieurs kilomètres dans l'intérieur des terres. Elles les recouvrent de leurs masses mobiles qui y sont disséminées d'une manière presque uniforme et dont l'épaisseur n'est jamais très-considérable. Cette dernière circonstance contribue singulièrement à leur donner une grande étendue et rendre ce phénomène désastreux.

» Les sables des mers marchent avec une grande rapidité par suite de leur

---

(*) Comme une de ces séries est nécessairement divergente, il est bien entendu que l'expression : *coefficient de* x^k, *dans le produit*, signifie : *la somme des produits des coefficients des termes dans lesquels la somme des exposants est égale à* k.

(**) Laplace avait remarqué l'équation

$$1 + \left(\frac{l}{1}\right)^2 + \left(\frac{l(l-1)}{1.2}\right)^2 + \ldots = \frac{(\Gamma 2l+1)}{[\Gamma(l+1)]^2};$$

mais sa démonstration (rapportée par Lacroix) suppose *l entier positif*.

(***) La plus grande hauteur à laquelle parviennent des monticules ne dépasse guère 5 à 6 mètres. Cette élévation, loin d'être générale, est au contraire tout à fait exceptionnelle.