This page intentionally left blank.

LETTRES

À

QUELQUES MATHÉMATICIENS

PAR

Eugène CATALAN.

LETTRES

À

QUELQUES MATHÉMATICIENS

(Suite) (*).

XII

A M. de Freycinet, Sénateur, Ingénieur des Mines (**).

TRÈS HONORÉ CAMARADE,

Après vous avoir interrogé, je pense, à l'École polytechnique, je vous ai accompagné (en esprit) dans votre double carrière, politique et scientifique. J'ai applaudi à vos efforts pour défendre et régénérer notre chère patrie ; et j'ai lu, dans le temps, votre remarquable *Traité de Mécanique*. Aujourd'hui, je viens vous soumettre quelques observations sur la *Métaphysique du haut Calcul*, ouvrage dont j'ai fait l'acquisition ces jours-ci. Je n'ai pas besoin de vous dire que, sur les principes fondamentaux, je suis absolument d'accord avec vous : mes critiques (si critiques il y a) portent sur quelques détails de démonstration ou de rédaction.

Votre dévoué *très Ancien*.

Liège, 8 juin 1881 (***).

P. S. Pour plus de facilité, je suivrai l'ordre des pages.

(*) Voir *Mémoires de la Société des sciences, de Liège*, 2e série, t. XVII.

(**) Aujourd'hui, Ministre de la Guerre, etc.

(***) Dans sa réponse, fort aimable, M. de F. me disait à peu près ceci : « J'aurai égard à vos remarques, *si jamais je publie* une nouvelle édition de ma brochure. »

1. Page XI, dernière ligne : « *la mesure de l'aire* ».

Est-ce que l'*aire* n'est pas le *nombre* qui mesure la *surface?* En 1843, dans mes *Éléments de Géométrie*, j'ai défini (ce qu'on n'avait pas encore fait) : la *longueur* d'une ligne, l'*aire* d'une surface, le *volume* d'un corps.

2. Page XII : « *Leçons sur le calcul différentiel et intégral.* » L'*Abbé* ne commettrait pas cette petite faute de français.

3. Page 15, ligne 16 : « $y = (-a)^x$, a *désignant un nombre positif.* »

Est-ce qu'un nombre peut être *négatif?* D'après les premières notions, un nombre est le rapport de deux grandeurs ; donc il est *positif.* Du reste, il ne s'agit point, ici, d'un *théorème*, mais d'une simple *opinion.*

4. Page 21, ligne 16 : « *Il serait beaucoup mieux nommé* INDÉFINIMENT *petit.* »

Cette dénomination, souvent attribuée à Cauchy, était connue dès 1702, comme le prouve le titre suivant : *Essai d'une méthode pour trouver les touchantes des courbes mécaniques, sans supposer aucune grandeur indéfiniment petite, par M. de Tschirnhausen* (*).

5. Page 22, ligne 12 : « *Qu'est-ce que la longueur d'une ligne courbe?* »

Comme je l'ai déjà rappelé, cette définition, *nécessaire*, a été donnée, pour la première fois, dans mes *Éléments de Géométrie.* Cet ouvrage contient, aussi, la définition, également *nécessaire*, du rapport entre deux grandeurs incommensurables. Mais revenons à la démonstration qu'emploie M. de Freycinet :

« *On envisage la courbe comme la limite des polygones inscrits.* »

Ceci n'est pas clair. Veut-on dire que l'*aspect* du polygone diffère, de moins en moins, de l'*aspect* de la courbe? Alors, nous sommes d'accord. Si la phrase veut signifier autre chose, l'hono-

(*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, 1879, p. 341.

rable auteur commet un cercle vicieux; car il s'agit, toujours, de répondre à la question énoncée ci-dessus.

« *Pour justifier ce point de vue, il faut... prouver que la* » *différence entre la longueur inconnue de la courbe et la longueur* » *des périmètres inscrits...* »

Si, comme l'énoncé l'indique, vous ne savez pas, *a priori*, ce que vous entendez par *longueur d'une courbe*, il vous est *impossible de prouver que cette longueur diffère d'une longueur connue.* Legendre, dans ses *Éléments de Géométrie*, a tenté ce tour de force; mais il a échoué, et il devait échouer.

Jusqu'à preuve contraire, je prétends que la seule méthode efficace est celle dont j'ai déjà parlé...

6. Page 36, ligne 15 : « Il est facile de démontrer que... »

Pas si facile que le croyait Duhamel ! Témoin l'anecdote suivante :

En 1872, M. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain, présentait, à l'Académie de Belgique (dont il était Associé), un Mémoire intitulé : « *Sur l'existence de la dérivée, dans les fonctions continues.* » On lit, dans le préambule de ce remarquable travail :

« ... Non seulement M. Hankel admet parfaitement l'existence » de *fonctions continues qui n'ont point de dérivée*, mais il formule un *pricipe général,... qui permettrait d'en construire un* » *nombre indéfini.* Il donne même divers exemples de semblables » fonctions. »

M. Gilbert s'était proposé, en s'appuyant sur des principes dus à Ernest Lamarle, « de ne laisser aucun doute sur l'inanité de » ces conclusions (*). »

Nommé premier Commissaire, je rédigeai, *à grand'peine*, un long Rapport, dont voici un extrait :

« Si, malgré les éclaircissements qu'il m'a donnés par lettres, » *quelques-uns des arguments* de notre savant Confrère *n'ont pas* » *amené*, chez moi, *une conviction complète*, la raison en est due,

(*) Les conclusions de Hankel.

» sans doute, à la difficulté du sujet que nous discutions. »

Si je suis bien informé, M. Gilbert a reconnu, *postérieurement*, que *quelques-uns des arguments* dont il s'agit n'étaient pas *topiques*. Et la difficulté reste entière !

7. Page 42, ligne 7 : « mot qu'on peut considérer comme provenant... »

Leibniz n'a-t-il pas voulu désigner, par le mot *différentielle*, une différence très petite?

8. Page 44, ligne dernière : « Un des savants les plus distingués de l'époque, M. B. »

Il est possible que B. (un excellent homme, sans contredit) ait fait de bons élèves ; mais, à coup sûr, il n'était pas Géomètre. Quant à l'honnête Boucharlat, il n'en faudrait pas parler.

9. Page 46, ligne 10 : « *La fonction dérivée est non l'expression*
» *du rapport de ces accroissements pris à aucun état de petitesse,*
» *mais la limite vers laquelle tend ce rapport.* »

La pensée est juste, mais l'expression ne l'est pas. Qu'est-ce que des *accroissements pris à aucun état?* Peut-être manque-t-il des virgules.

10. Page 66, ligne 16 : « *Ainsi se trouve confirmée,* A POSTERIORI... » Voir la Remarque 6.

11. Page 66, dernière ligne : « *On donne souvent une démon-*
» *stration fort incomplète et même vicieuse...* ».

Dans mon *Cours d'Analyse* (page 115), après avoir montré que l'on a, généralement, $f'(x) = a$, j'ajoute :

« Cette équation fondamentale est en défaut dans un seul cas,
» celui où la tangente n'existe pas. » De cette manière, tout est sauvé!

12. Page 96, ligne 5 : « *Si l'on connaissait une fonction...* »

Cet énoncé est presque inintelligible. En outre, la longue démonstration, qui le suit, me paraît superflue.

13. Page 138, ligne 5 : « Deux quantités fixes... »

Cet autre énoncé, *très exact,* ne pourrait-il être ainsi abrégé :
« Deux quantités fixes, entre lesquelles on suppose une
» différence infiniment petite, sont égales? »

14. Page 142, *note.* Démonstration *beaucoup* trop longue. Trop de *que* et de *qui* (j'en compte vingt-deux!).

15. Page 164, ligne 3 en remontant : « *Je veux démontrer que cette aire est la limite.* »

Qu'appelez-vous *aire* d'une figure? Si vous ne définissez pas, vous ne prouverez rien. Voir la Remarque 5.

16. Page 165, ligne 14 : « *Il n'y aurait pas plus de difficulté
» à prouver qu'un arc de courbe est la limite des périmètres
» inscrits.* »

Probablement, l'honorable auteur a voulu dire :

« Il n'y aurait pas plus de difficulté à prouver que *la longueur
» d'un arc* de courbe est la limite des *périmètres des lignes
» brisées, convexes, inscrites* à cet arc. »

Précédemment, j'ai fait voir que, si l'on ne définit pas le mot *longueur,* la difficulté est insurmontable. Encore une fois, il ne s'agit pas d'un *théorème,* mais d'une *définition!*

17. Pages 208 et 209 : « *composantes tangentielle et normale* (*) » de la force accélératrice.

M. de Freycinet donne « *une démonstration beaucoup plus simple et plus rapide que celle qu'on obtient par la méthode ordinaire.* »

Connaît-il la mienne? (*Manuel des Candidats à l'École polytechnique,* t. II, p. 139.)

(*) Voir la *Remarque* 2.

XIII

A M. Delbœuf.

MON CHER CONFRÈRE,

Aussitôt qu'a paru votre *Démonstration du théorème de d'Alembert,* j'ai songé à vous communiquer ce que j'en pense.

Mais, pour exécuter ce dessein, il m'a fallu avoir, *sous les yeux,* le n° 126 de la *Revue scientifique.* C'est aujourd'hui, seulement, que j'ai pu me le procurer.

Ceci dit, j'entre en matière.

I.

Vous dites : « Le théorème de D'Alembert s'énonce comme suit :

« *Toute équation algébrique a un nombre de racines égal à*
» *celui qui exprime son degré.* »

Je crois que le véritable énoncé est celui-ci :

« *Toute équation algébrique,* $f(x) = 0$, *dont les coefficients*
» *ont la forme* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, *admet, au moins, une racine de*
» *cette même forme* (*). » Mais passons.

Vous dites encore :

« *Autant de racines que le* CHIFFRE *de son degré* »... « *On*
» *admet qu'il y a un carré* ÉGAL *à un cercle donné* »... « *Y a-t-il*
» *une* DROITE *égale à une circonférence* donnée? *Oui* ».

Comment un Grammairien, doublé d'un Mathématicien, peut-il employer ces expressions malsonnantes? Si encore vous étiez de l'Académie française, comme *** (**) !

(*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège,* p. 187. On suppose

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m.$$

(**) Dans un ouvrage tout récent, ***, célèbre et savant Géomètre, fait *personne* du masculin; il écrit « le chiffre $\frac{1}{500\,000}$ »; etc. Avant son élection, il n'aurait pas commis ces grosses fautes. Ce que c'est que l'influence du *milieu!*

II

Après ce *oui,* vous ajoutez : « *Une circonférence* est finie et *peut croître indéfiniment par infiniment petits.* »

Autrement dit :

« *La longueur de la circonférence est une fonction continue de* » *la longueur du rayon;* »

ou, en termes plus simples :

« *Il y a des circonférences de toutes les grandeurs.* »

Cette proposition suppose que l'on a défini, préalablement, la *longueur d'une ligne.* Faute d'avoir *donné* et *justifié* cette définition, l'illustre Legendre a traité, d'une façon *absolument mauvaise,* les théories du cercle et de la circonférence (*).

III

Arrivons à votre démonstration.

Vous dites :

« Quel que soit M et quel que soit b, il existe une valeur de a » qui satisfait à l'équation $a + b = M$.

» Quel que soit N et quel que soit a, il y a une valeur de b » qui satisfait à l'*équation* $ab = N$.

» Par conséquent, puisque, quel que soit b, il y a une valeur » satisfaisante de a, et que, quel que soit a, il y a une valeur » satisfaisante de b, *il s'ensuit* qu'il y a une valeur pour a et » une valeur pour b qui satisfont aux deux équations données. »

Il ne s'ensuit pas du tout.

Reprenons les équations

$$a + b = M, \qquad (1)$$

$$ab = N. \qquad (2)$$

(*) J'en pourrais citer d'autres; mais cette discussion serait hors de propos.

Si je comprends votre raisonnement, il se réduit à ceci :

En attribuant, à b, une *valeur convenable*, on tirera, de ces deux équations, deux valeurs de a, *égales entre elles*.

Pour savoir quelle est cette valeur *convenable* (*), éliminons a. Nous trouvons

$$N + b^2 = Mb,$$

ou

$$b^2 - Mb + N = 0. \tag{3}$$

Ainsi, b doit être racine de l'équation

$$x^2 - Mx + N = 0; \tag{4}$$

proposition *évidente*, mais qui *n'apprend rien* sur l'*existence* de cette racine.

IV

Pour l'équation

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

votre calcul revient à *poser* les équations auxiliaires :

$$a + b + c = -P, \qquad ab + bc + ca = Q, \qquad abc = -R.$$

Ayant fait cela, vous dites (ou peu s'en faut) :

« Si j'attribue, à c, une valeur *convenable*, je pourrai satisfaire » à ces trois conditions. » *A priori*, vous n'en savez rien. Afin de trouver cette valeur *convenable* (si elle existe), il faut éliminer a et b ; ce qui donne

$$c^3 + Pc^2 + Qc + R = 0.$$

Ainsi, c doit être racine de la proposée. Encore une fois, cette conclusion ne prouve pas l'existence de c.

(*) Il ne suffit pas, pour la découvrir, de faire varier b, de $-\infty$ à $+\infty$. Car la *droite*, représentée par l'équation (1), peut ne pas rencontrer l'*hyperbole* représentée par l'équation (2).

Exemple :

$$a + b = 2, \qquad ab = 2.$$

Dans le cas général, comme dans les cas particuliers considérés, vous avez oublié, me semble-t-il, cette proposition si connue : « *Les relations entre les coefficients et les racines ne* » *peuvent déterminer ces racines.* »

V

En résumé, ou je me trompe complètement, ou votre *démonstration* repose sur une *pétition de principe.*

VI

J'ai connu à Bruges, autrefois, un homme fort respectable, ancien Membre de la Cour de Cassation. Il avait quelques notions de mathématiques; et, comme il était un peu malicieux, il s'en servait pour taquiner les gens.

Par exemple, il demanda, à son menuisier, de lui exécuter, en sapin, une encognure, dont les deux petits côtés devaient avoir, je suppose, $0^m,3$ et $0^m,4$, et l'hypoténuse, $0^m,6$.

Le pauvre homme usa pas mal de planches, et ne résolut pas le problème.

Vous pouvez jouer le même tour à votre *marchand de moutons :* donnez-lui

$$M = 50^n, \qquad N = 800^{m.c.}$$

Votre bien affectionné et dévoué vieux Confrère

E. C.

Liège, 16 janvier 1889.

XIV

A M. Siacci, Sénateur, Membre de l'Académie de Turin, etc.

(Extrait.)

MONSIEUR,

Je commence, aujourd'hui seulement, la courte analyse, que vous m'avez demandée, des travaux de notre illustre ami (*). J'entre en matière.

Nouvelles Annales de Mathématiques.

1851. *Satisfaire, par des nombres rationnels, aux deux équations*

$$x^2 + y^2 - 1 = z^2, \qquad x^2 - y^2 - 1 = u^2.$$

Cette curieuse Note est, peut-être, le début mathématique de *M. Genocchi, avocat à Turin.*

1852. *Observations sur certains articles.*

1853. *Démonstration d'un théorème d'Euler : Tout nombre entier, qui n'est pas compris dans la formule* (**) $4mn - m - n$, *est nécessairement compris dans la formule* $x^2 + y^2 + y$. Déjà, l'auteur paraît être en possession des méthodes et des raisonnements propres à la *théorie des nombres.*

Sur les sommes des puissances semblables des racines d'une équation algébrique.

Note très importante. Pour résoudre la question, Genocchi emploie un beau théorème de Lagrange, *non cité* par Serret. Il donne, plus simplement que Serret, le développement du polynôme V_n (***). Comparaison avec des formules d'Euler, de

(*) *Angelo Genocchi.*

(**) Je crois qu'il aurait dû dire : *qui n'a pas la forme.*

(***) Polynôme dont il a été question récemment (*Calcul des probabilités*, p. 139, par *Joseph Bertrand*). Quel drôle de livre!

Lambert, de Waring. Démonstration de l'égalité suivante, due à Cauchy :

$$1 - \frac{k^2 - 1}{1.2.3.2^2}\,\frac{2}{1} + \frac{(k^2-1)(k^2-9)}{1.2.3.4.5.2^4}\,\frac{3.4}{1.2}$$

$$- \frac{(k^2-1)(k^2-9)(k^2-25)}{1.2\ldots7.2^6}\,\frac{4.5.6}{6.2.3} + \cdots = \frac{1}{k} \quad (k \text{ impair}).$$

L'*Avocat* était, déjà, très érudit, et très excellent algébriste.

Théorème sur les fonctions homogènes (de Sylvester et de Cayley).

1854. *Note sur une formule de M. Gauss.* Démonstration très remarquable, relative au nombre des solutions de $N = x^2 + y^2$. Je pense qu'elle est devenue classique. Genocchi cite diverses séries *elliptiques*, dues à lui-même ou à Cauchy.

Quelques propositions d'Arithmétique (d'après Euclide).

Remarques (critiques) *sur un théorème de M. Brioschi.*

1855. *Sur les ovales de Descartes.* Expression de s, plus simple que celle qui était connue. Genocchi se montre aussi *expert*, en intégrales elliptiques (ou ultra-elliptiques), qu'en théorie des nombres.

Démonstration d'un théorème de Serret, d'une formule de M. Roberts, et d'un théorème de Brioschi. Restitution de priorité en faveur de Gauss. On voit combien notre confrère était érudit.

Critique d'une Note de Housel. Il s'agit de *trouver une courbe égale à sa polaire.*

1858. *Extraction abrégée de la racine cubique.* Contrairement aux opinions de Serret, Bertrand, Amiot, ..., M. Genocchi prouve que, si l'on connaît $n - 1$ chiffres de la racine, on trouve, par une division, les n chiffres suivants.

1859. *Solution d'une question proposée par M. Roberts.* C'est le théorème de Masérès (*).

(*) Legendre paraît y être arrivé de son côté. (*Exercices*, t. III, p. 144.)

Seconde solution de la Question 437. Il s'agit de la formule

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.1}{2.4}\right)^1 + \left(\frac{1.2.3}{2.4.6}\right)^2 + \cdots$$

Genocchi prouve qu'elle est comprise dans une identité due à Gauss ; ce qui n'est pas étonnant.

1861. *Sur les extractions approchées des racines.* Polémique avec Peacock.

1867. *Démonstration d'un théorème de Newton, de deux théorèmes de Silvester, d'un théorème de Fourier*, etc. (Nombre des racines réelles.) On sait combien la règle de Newton est difficile à établir. Je crois me rappeler que, dans ces derniers temps, M. de Jonquières en a donné une démonstration.

Sur une règle de convergence des séries. Cette règle, très générale et très simple, est démontrée au moyen d'un *théorème de Nicole,* remis en lumière par M. Genocchi. On voit, une fois de plus, combien il était érudit. Je ne parle pas de ses autres mérites.

1869. *Sur la théorie des produits infinis* (*). Cette théorie ne me semble pas aussi *élémentaire* que le croyait l'illustre Auteur. Quoi qu'il en soit, les *nouveaux théorèmes* comprennent, comme cas particuliers, des théorèmes d'Abel, de Gauss et de Weierstrass.

Sur le passage des différences aux différentielles. Critique des démonstrations données dans les « Traités les plus recommandables de Calcul différentiel ».

1875. *Réclamation de priorité en faveur de Félix Chiò.* (Voir plus loin.)

Réclamation pour lui-même. (A propos d'une Note de Pepin.)

1883. *Démonstration d'un théorème de Fermat.* Le système des équations

$$2y^2 - 1 = x, \qquad 2z^2 - 1 = x^2$$

n'est vérifié, en nombres entiers, que par

$$x = 7, \qquad y = 2, \qquad z = 5.$$

(*) Ou plutôt, *indéfinis.*

Critique d'un essai de solution, par Pepin. Énoncés de théorèmes nouveaux.

Sur un théorème de Legendre.

Dans une lettre du 15 avril 1869, Genocchi me donne une démonstration, fort simple, de la formule approximative

$$F(c) = \mathfrak{L}\left(\frac{4}{b}\right) \text{ (*)}.$$

Bullettino du P. Boncompagni.

1871. En lisant cette Notice, je m'aperçois que je me suis rencontré, avec F. Chiò, dans la solution (exacte) d'un problème dont Th. Olivier avait donné une solution fausse (*Journal de Mathématiques*, t. III, 1838).

La Note de Liouville (*ibidem*, p. 337), ne pouvait pas faire soupçonner qu'il s'agit de cette fausse solution. J'ai négligé de faire insérer la mienne, pour ne pas désobliger Olivier, qui était un excellent homme (*Mélanges mathématiques*, t. I, p. 31). On sait que les *Recherches* de Chiò, *sur la série de Lagrange*, donnèrent lieu à une polémique assez vive, entre Genocchi et Menabrea, aujourd'hui Ambassadeur à Paris.

1873. *Réclamation en faveur de F. Chiò* (en italien). Dirigée, surtout, contre Maximilien Marie.

1877. *Observations sur la publication, par le P. Boncompagni, des lettres de Lagrange* (en italien). Autant que j'en puisse juger, ces observations sont fort importantes pour l'*histoire des Mathémathiques*, au XVIII^e siècle. Il y est question de *Foncenex*.

Annali di Matematica (Tortolini).

Tome I. *Sur une construction du théorème d'Abel* (en italien)

Tome II. *Sur l'équation* $x^{m+1} - x - k = 0$ (en italien).

(*) Suivant Jacobi, elle est due à Euler.

Des séries ordonnées suivant les inverses des factorielles (en italien). Analyse critique (je suppose) du célèbre Mémoire de Binet (*Sur les intégrales eulériennes*).

Tome III. *Sur la multiplication des formes quadratiques* (en italien).

Tome IV. *Sur la réduction des intégrales elliptiques* (en italien). Notre illustre ami, en suivant la trace laissée par Plana, simplifie le commencement du Traité de Legendre.

Sur la rectification et les propriétés des caustiques secondaires (en italien).

Sur l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$. Simplification du Mémoire de Lamé.

Tome VII. *Recherches sur des sommes de cubes* (en italien). L'illustre Auteur considère, d'abord, l'équation

$$x^3 + (x + z)^3 + (x + 2z)^3 = y^3.$$

Il prouve qu'elle est vérifié par $x = 720\,469$, $y = 11\,105\,855$. Ce Mémoire, très intéressant, a donné lieu à celui que j'ai publié dans les *Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei* (1867).

Comptes rendus.

1874. *Sur l'impossibilité de quelques égalités doubles.* (Voir le premier article des *N. A.*, 1851.) A propos de théorèmes énoncés par Pepin. La conclusion, *curieuse*, est celle-ci : « Il est impossible de satisfaire à l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$, par des valeurs de x, y, z qui seraient des racines d'une équation du troisième degré, à coefficients rationnels. »

1877. *Sur l'équation de Riccati* (Voir plus loin. Je n'ai pas le volume chez moi, et je n'ai pu l'avoir à l'Université.)

Académie de Belgique. — Bulletin.

1873. *Lettre à M. Quetelet, sur diverses questions mathématiques.*

1° *Réclamation au sujet d'un Rapport de M. De Tilly.*

2° *Remarques sur la Géométrie abstraite.* Le point de départ est le célèbre Mémoire qui porte le nom de de Daviet de Foncenex (voir plus loin). Il s'agit, principalement, de la *pseudo-sphère,* et du postulatum d'Euclide. Notre ami est en dissentiment avec Houël, De Tilly et d'autres Géomètres. Sur cette question de la pseudo-sphère (comme sur beaucoup d'autres questions), je suis absolument incompétent. Celle-ci me paraît *insoluble.*

Académie de Belgique. — Mémoires.

Note sur la théorie des résidus quadratiques (54 pages).

Ce beau Mémoire, modestement intitulé Note, me semble être l'œuvre *capitale* de Genocchi. Il contient, d'abord, la démonstration d'une *relation* (7), *entre trois nombres entiers,* relation véritablement extraordinaire, qui laisse bien loin les célèbres théorèmes de Gauss (démontrés par Le Besgue), et qui renferme des égalités trouvées par Schaar.

Notre illustre ami démontre ensuite une formule (4) d'où il conclut la *loi de réciprocité,* de Legendre, *étendue à deux nombres impairs quelconques, mais premiers entre eux.*

Remarque curieuse (p. 13) : la série

$$2\nu - 1 + \frac{2}{\pi}\left(\sin 2\pi\nu + \frac{1}{2}\sin 4\pi\nu + \frac{1}{3}\, 6\pi\nu + \cdots\right)$$

exprime toujours un nombre entier (ν est supposé rationnel).

Autre résultat bien remarquable : Si $n = 8k + 7$,

$$\sum \frac{1}{\sin \frac{2r\pi}{n}} = 0;$$

si $n = 8k + 3$,

$$\sum \frac{1}{\sin \frac{2r\pi}{n}} = \frac{-2(f-g)\sqrt{n}}{3}$$

(r, résidu de n, inférieur à n ; f, g, nombres entiers, *inconnus*).

Je ne puis, faute de temps, continuer cette sèche analyse. Il me semble qu'il faudrait, comme a dit Voltaire, écrire *admirable*, à la fin de chaque page.

Recherches sur un cas d'intégration sous forme finie (Turin, 1869, 66 pages, en italien). Sorte de commentaire et d'extension de plusieurs Mémoires de Liouville, sur l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = Py$.

Autre Mémoire portant le même titre (Turin, 1872).

Formation et intégration d'une équation différentielle (Turin, 1865, 37 pages, en italien).

Recherches sur la fonction $\Gamma(x)$ (Naples, 1883, 10 pages, en italien). L'illustre Géomètre trouve la formule, bien remarquable,

$$(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)\cdots = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)}.$$

Démonstration d'une formule de Leibniz et Lagrange (Turin, 1869, en italien).

Recherches sur une égalité double (Naples, 1881, 24 pages, en italien).

Sur un Mémoire de Daviet de Foncenex (Turin, 1877, 42 pages).

Ce travail, *philosophique, historique et mathématique*, est fort intéressant. Il semble prouver que la théorie du levier, telle que l'a exposée Foncenex (ou plutôt Lagrange), exige un postulatum (d'Archimède) correspondant au postulatum d'Euclide; et, chose plus extraordinaire, que la *Géométrie euclidienne*, la *Géométrie hyperbolique* et la *Géométrie elliptique*, découlent de l'équation

$$[f(x)]^2 = 2 + f(2x),$$

traitée par Foncenex (*).

A la page 19, on trouve une *définition* du plan, proposée, en 1870, par M. Helmholtz. Dès 1843, dans la première édition

(*) Poisson, dans son *Traité de Mécanique*, prend l'équation

$$\varphi(x)\varphi(z) = \varphi(x+z) + \varphi(x-z).$$

de mes *Éléments de Géométrie,* j'avais proposé ces deux-ci :

Un plan est une surface indéfinie, partout identique à elle-même ;

Une droite est l'intersection de deux plans.

Quant au *postulatum* d'Euclide, j'ai fait observer, il y a bien longtemps, qu'il y en a d'autres, sur lesquels on n'insiste pas. Par exemple, celui-ci :

Soient, dans un même plan, une droite AB *et deux points* C, D, *situés de part et d'autre de* AB. *Si l'on trace la droite* CD, *elle coupe* AB.

J'ai rappelé, ci-dessus, que ce curieux Mémoire de notre ami a été l'occasion d'une polémique un peu vive, entre lui et mon savant Confrère De Tilly. Peut-être le procès serait-il difficile à juger.

Permettez-moi, Monsieur, d'en rester là. J'espère que ces quelques notes, écrites au courant de la plume, pourront vous aider à rendre, à votre illustre Maître, la justice qui lui est due.

Votre bien dévoué vieux Collègue et Confrère,

E. C.

Liège, 27 mars 1889.

P. S. Si Genocchi avait eu la santé, il aurait pu, mieux que tout autre, rédiger une nouvelle *Théorie des Nombres* (*).

(*) Jusqu'à présent, *rien* n'est venu modifier cette appréciation (5 septembre 1892).

XV

A M. Le Paige.

(Extraits.)

Le Mémoire de Lucas (*), qui contient des parties intéressantes, ne me semble, cependant, point répondre à la juste réputation de l'Auteur. Voici pourquoi :

1° La démonstration du théorème de Wilson est compliquée; tandis que celle que l'on doit à Lagrange est absolument élémentaire.

2° M. Lucas démontre le théorème de Fermat au moyen du théorème de Wilson. Agir ainsi, c'est, proprement, *mettre la charrue devant les bœufs,* ou procéder du *composé* au *simple.*

3° Quant à la nouvelle démonstration de la *loi de réciprocité,* que l'Auteur croit être *plus simple que toutes celles qui ont été données jusqu'à présent,* si je ne me trompe, elle est moins simple que celle de l'illustre Genocchi, mon ami bien regretté. En effet, d'après celle-ci, la loi de réciprocité est une conséquence immédiate du Lemme de Gauss (**).

Puisque M. Lucas voulait établir que sa démonstration est plus simple que les autres, il aurait dû, semble-t-il, commencer par l'énumération de celles-ci ; savoir : les démonstrations de Gauss; celle de Cauchy; les deux ou trois démonstrations de Jacobi; celle de Liouville (***); les deux démonstrations de Schaar (IV); celle de Le Besgue; les deux ou trois démonstrations d'Eisenstein ; etc., etc.

(*) *Démonstration de la loi de réciprocité, par Édouard Lucas.*

(**) *Académie de Belgique, Savants étrangers,* t. XXV, p. 50. Voir, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. II, la démonstration du Lemme de Gauss, donnée par M. Mansion.

(***) *Journal de Mathématiques,* 1847, p. 95. Malheureusement, comme il est arrivé souvent, la Note de mon illustre Maître est une simple esquisse : l'auteur se réservait de revenir sur ce sujet. Que de beaux résultats, qu'il avait découverts, ont été perdus ainsi!

(IV) *Académie de Belgique,* t. XXIV et XXV.

4° Sur des points de détail, j'ai des opinions contraires à celles de M. Lucas et à celles de bien des Géomètres.

. . . .

Pour exprimer que A — B est un multiple de p, M. Lucas emploie la notation de Gauss :

$$A - B = 0 \pmod{p};$$

et il dit que A et B sont *congrus*. On sait ce que Legendre pensait de cette notation et de cette dénomination (*).

. . . .

E. C.

Liège, 14 mars 1890 (**).

XVI

A M. Hermite.

MON CHER MONSIEUR HERMITE,

Je suppose que vous êtes à Paris, ou que vous allez y rentrer. Donc, cette lettre vous parviendra, et vous trouvera en bonne santé, je l'espère.

I.

Au commencement de juillet, je vous ai écrit, relativement à un vieux théorème empirique :

« *Si* n *est un nombre entier, autre que zéro, la quantité*

$$6n^2 + 6n - 3$$

» *est la somme de trois carrés, entiers et positifs.* »

(*) *Mémoires de l'Institut,* 1823. « Ces dénominations *incongrues* », écrit Legendre.

(**) Par un motif bien simple, j'ai hésité à publier cette lettre (ou plutôt ce Rapport) : l'*Auteur n'est plus là pour se défendre.* Mais, comme elle contient des renseignements utiles, peut-être, à de jeunes Géomètres, je la livre à l'impression, en biffant quelques passages un peu vifs. Du reste, personne, plus que moi, ne déplore la fin prématurée d'un homme doué d'un remarquable esprit d'investigation, et qui, en *théorie des Nombres,* était une autorité.

Presque immédiatement, j'en ai conclu celui-ci, qui me semble mériter votre attention :

« *Le sextuple de tout nombre impair est la somme de trois*
» *carrés, entiers et positifs.* »

Ne pouvant me rendre au Congrès de Marseille, je me suis dit, avec le héros d'une vieille romance :

Et, si je ne suis pas là,
Mon bouquet, du moins, y sera.

Mon bouquet, c'étaient mes deux théorèmes (avec d'autres); mais les deux premiers, hélas! toujours à l'état empirique. Depuis mon retour ici, j'ai relu mes *Recherches sur quelques produits indéfinis*, et je les ai perfectionnées en certains points.

Par exemple, voici deux théorèmes (démontrés, cette fois), qui me paraissent remarquables. Le premier est dans les *Recherches*, mais sous une forme trop sommaire.

THÉORÈME. n *étant un nombre impair, on décompose* 2n, *par voie d'addition, en*

$$1 + (2n - 1), \qquad 3 + (2n - 3), \ldots \qquad (2n - 1) + 1;$$

et l'on fait la somme, S_{2n}, *des produits*

$$\int 1 \int (2n-1), \qquad \int 3 \int (2n-3), \ldots \qquad \int (2n-1) \int 1.$$

D'autre part, on prend tous les diviseurs impairs de n; *savoir*
$1, \ldots, \lambda, \ldots, n$;
et l'on fait la somme de leurs cubes :

$$1^3 + \ldots + \lambda^3 + \ldots + n^3 = \Sigma \lambda^3.$$

Cela posé, ces deux sommes sont égales (*).

(*) Si n est premier, la seconde somme égale $1 + n^3$: c'est à quoi se réduit la première.

II.

Soit, comme dans les *Recherches*, F (n, p) *le nombres des décompositions de* n, *en parties égales ou inégales*, non supérieures à p. Cette fonction F jouit de propriétés curieuses (voir *R.*, p. 47), parmi lesquelles la plus simple me paraît être celle-ci, que je viens de trouver :

La quantité

$$F(n-1,1)-F(n-3,2)+F(n-6,3)-F(n-10,4)+\ldots,$$

nulle, si n *n'est pas pentagonal, est* ± 1 *dans les autres cas* (*).

Je viens de passer en revue les *Fonctions numériques*, de Liouville ; mais je n'y ai rien trouvé qui ressemble à ces théorèmes.

Espérant qu'ils pourront vous intéresser, je...

Liège, 1er octobre 1891.

XVII

A M. Hermite.

(Extrait.)

Le dernier Mémoire (imprimé) de B., se termine par la formule de M. Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)}=e^{Ca}\prod_{1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{a}{m}\right)e^{-\frac{a}{m}}\right]. \qquad (1)$$

Je ne la connaissais pas, bien qu'elle se trouve dans votre *Cours de la Sorbonne*. Permettez-moi, pour deux motifs, de ne pas l'admirer :

1° Elle est absolument inapplicable ;

(*) On suppose $F(0, p) = 1$.

2° Elle résulte, tout de suite, de la formule de Gudermann, telle que vous l'écrivez :

$$\mathcal{L}\Gamma(a+1)=\sum_1^\infty\left[a\,\mathcal{L}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\mathcal{L}\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]. \tag{2}$$

J'observe, d'abord, que

$$a\,\mathcal{L}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\mathcal{L}\left(1+\frac{a}{n}\right)$$

est le terme général d'une *série convergente.*

En second lieu, on a, *en série convergente*,

$$-Ca=\sum_1^\infty\left[a\,\mathcal{L}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{a}{n}\right](^*). \tag{3}$$

Ceci posé, la série formée par les différences, terme à terme, des séries (2), (3), est *encore convergente.* Donc

$$-Ca+\mathcal{L}\Gamma(a+1)=\sum_1^\infty\left[\frac{a}{n}-\mathcal{L}\left(1+\frac{a}{n}\right)\right];$$

ou, ce qui est équivalent, la formule (1). Comment W. ne s'est-il pas aperçu de cette concordance ?

Le Mémoire de B. me procure bien d'autres surprises. A la page 61, à propos de la formule (171), il dit :

« La série $\sum_1^\infty \frac{1}{m(m^2-a^2)}$ est absolument convergente, quel que » soit le module de a. »

Et si a est un nombre *entier ?* Voilà donc une série dont un terme est infini, et qui, néanmoins, est convergente !

Il soutient que ce résultat (qui me semble absurde) est d'accord avec *vos principes.* Alors, *où allons-nous ?* A-t-on, en Analyse, mis le cœur à droite, comme faisait Sganarelle ?

J'aime à croire que B. se trompe.

Liège, 12 novembre 1891.

(*) D'après votre *Cours,* la petite transformation

$$\mathcal{L}n=\mathcal{L}\left(\frac{n}{n-1}\right)+\mathcal{L}\left(\frac{n-1}{n-2}\right)+\cdots+\mathcal{L}\left(\frac{2}{1}\right)+\mathcal{L}1,$$

que j'ai *trouvée* en 1856 (*Mélanges mathématiques*), l'aurait été, antérieurement, par Gauss. Tant mieux pour moi !

XVIII

A M. Peano (de Turin).

(Extraits.)

MONSIEUR ET SAVANT COLLÈGUE,

Je vous remercie de l'envoi des quatre dernières livraisons de votre *Rivista,* que je viens de recevoir...

La remarquable démonstration de Mourey a été simplifiée et complétée par Liouville, mon illustre Maître et ami bien regretté. J'ai reproduit, en partie, le texte de Liouville, dans le *Cours d'Analyse de l'Université de Liège* (2^{me} édit., p. 187). A-t-on fait mieux? Je l'ignore.

. . . .

Je reviens encore, cher Collègue, à l'article de Liouville (*Journal de Mathématiques,* 1839, p. 501). Après avoir rappelé la démonstration de Mourey, le savant Géomètre dit : « En voici » une autre, assez singulière et, je crois, peu connue. »

Cette démonstration singulière est due à Gauss. C'est votre serviteur qui, en 1838, à la prière de Liouville, avait traduit (librement) l'article de Gauss. En ce temps-là, je n'avais pas oublié le peu de latin qu'on demandait pour l'admission à l'École polytechnique. Heureux temps! La note qui suit C.Q.F.D. n'est pas du traducteur.

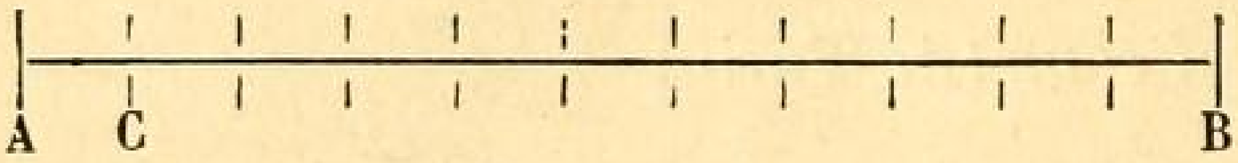
Encore un mot avant de terminer cette lettre, qui doit vous paraître longue. A la page 262, vous citez la phrase suivante, due à M. J. Tannery :

» Une fraction ne peut pas être regardée comme la réunion de » parties égales de l'unité. Ces mots *parties de l'unité* n'ont » plus de sens; une fraction est une (*) ensemble de deux » nombres entiers; etc. (**) »

(*) Lisez : un.

(**) D'après une obligeante communication de M. Neuberg, mon savant confrère, la phrase attribuée à M. Pannery n'est pas citée exactement (juillet 1892).

Je ne comprends pas du tout. Les mots : *parties égales de l'unité* ont un sens très clair, même pour les enfants. Si l'on



donne un compas à un enfant, et qu'on lui demande de partager AB en onze parties égales, il parviendra, par tâtonnements, à résoudre le problème, *à peu près*. Dès lors, il comprend que AC s'appelle *un onzième* de AB ; etc. Est-ce que M. T. ne met pas de la métaphysique quintessenciée là où le bon sens suffit ?

Il ne faut abuser de rien, même des *mauvaises* choses.

En vous réitérant, etc.

5 janvier 1892.

XIX

A M. Peano.

MONSIEUR,

Je crois être d'accord avec vous sur ce premier point : bien que les mots *droite, plan, cercle,* etc., aient un sens clair, même pour les enfants, on doit, dans tout ouvrage didactique, les définir [si l'on peut (*)]. Mais voici où commence le désaccord : Vous pensez, comme M. Tannery, que cette définition : *une fraction est l'ensemble de deux nombres entiers,* est plus satisfaisante que celle-ci : *une fraction est l'ensemble de parties égales de l'unité.* Je pense le contraire.

Revenant au premier point, j'ai si bien compris, il y a cinquante ans (pour le moins), la nécessité de définir, que, dans mes *Éléments de Géométrie* (1843), j'ai défini les mots : *longueur, aire, volume, rapport de deux grandeurs incommensurables,* etc. ; et que, dans mon petit *Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre,* dont la 11me édition vient de paraître, j'ai défini (et non *démontré*) les égalités

$$a \times -b = -ab, \qquad (a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd, \text{ etc.}$$

(*) Il y a exception pour *la droite.* Tout le monde en a l'idée, à laquelle les définitions essayées n'ajoutent rien.

J'ai cru devoir, également, changer la définition habituelle de $\sqrt{3}$, définition qui implique un cercle vicieux. Ces idées, combattues d'abord, ont été adoptées depuis, à ce point qu'on s'est avisé, un jour, de les attribuer à MM. Dedekind, Cantor, etc. Vous pouvez, relativement à cette question, consulter le beau discours de M. Mansion, placé en tète de mes *Mélanges mathématiques*.

Si vous pensez, Monsieur, que mes lettres puissent intéresser quelques lecteurs de la *Revista*, je vous en abandonne, bien volontiers, la propriété (*).

Encore un mot. Dans la première page de votre intéressante et instructive missive, vous dites : « le concept du nombre entier *positif* ».

Croyez-vous qu'il y ait des nombres *négatifs?* Pour moi, je ne le pense pas. Un nombre étant le rapport de deux grandeurs (sous-entendu : *de même espèce*) est essentiellement *positif.* On doit dire : quantité *négative,* et non : nombre *négatif.*

De même, à ce qu'il me semble, *les imaginaires ne sont pas des quantités ;* car *une imaginaire n'est ni plus grande ni plus petite qu'une autre.*

Je sais bien que mon opinion est combattue, même par d'illustres Géomètres ; mais je suis un peu têtu.

Je voudrais, Monsieur, *comprendre* l'italien comme vous *écrivez* le français. Malheureusement, comme le dirait Mansion, je suis un *autodidacte;* c'est-à-dire un volontaire de la Science et de la Littérature : le peu que je sais, je l'ai appris, pour ainsi dire, dans les rues de Paris.

Pardonnez-moi cette longue lettre, fort décousue, et croyez-moi, etc.

5 février 1892.

(*) Ceci répondait à une demande du savant Professeur.

XX

A M. Fouret (Examinateur, etc.).

(Extraits.)

Cher Confrère et Camarade,

Je vous remercie des diverses Notes que vous m'avez envoyées naguère, et à propos desquelles je vous ai adressé M. Alphonse D., jeune et brillant Mathématicien...

J'ai lu, avec un intérêt tout particulier, votre Note du 20 janvier, relative aux *limites des racines,* Note au sujet de laquelle je désire vous soumettre certaines remarques, $\pm$ critiques.

I. Vous dites : « Quant à la détermination d'une limite infé-
» rieure des racines d'une pareille équation $f(x) = 0$, on a cou-
» tume de la ramener à la recherche d'une limite supérieure
» des racines $f(-x) = 0$. Ce procédé indirect est défectueux. »

Votre critique est très juste ; mais elle s'évanouit, me semble-t-il, si l'on considère, séparément, les racines positives et les racines négatives de la proposée, et que l'on cherche, pour chaque espèce de racines, une limite *supérieure* et une limite *inférieure* (voir plus loin).

II. Vous dites : « Soit a un nombre positif ou négatif. » Vous savez, peut-être, que j'ai en horreur les nombres *négatifs,* auxquels je ne crois pas (*Mélanges mathématiques,* t. I, p. 1). A votre place, j'énoncerais ainsi le curieux théorème de votre p. 5 : « Toute quantité qui, substituée à x dans le polynôme $f(x)$, etc. » ; et je dirais :

» Soit a une quantité qui, substituée à x, dans $f(x)$, etc.
» Nous allons montrer que $f(x)$ ne peut s'annuler pour
» aucune valeur $a - h$ de $x (h > 0)$. »

Je sais bien que vous avez le droit de me répondre : « *Tous les goûts sont dans la nature.* »

. . . .

IV. Je reviens à ce qui termine mon paragraphe I. Soit, pour fixer les idées,

$$f(x) = 3x^5 + 7x^4 - 11x^3 + 8x^2 + 6x - 50 = 0. \qquad (1)$$

On a :

$$f'(x) = 15x^4 + 28x^3 - 33x^2 + 16x + 6,$$

$$\frac{f''(x)}{1 \, . \, 2} = 30x^3 + 42x^2 - 33x + 8;$$

après quoi la règle de Newton donne comme limite *supérieure*, $\lambda = 2$.

Si l'on change x en $\frac{1}{z}$, l'équation devient

$$50z^5 - 6z^4 - 8z^3 + 11z^2 - 7z - 3 = 0. \qquad (2)$$

Le nouveau polynôme reste positif pour $z \overline{>} 1$. Donc les racines *positives* de la proposée sont *comprises entre* 1 *et* 2.

Dans (1), changeons x en $-x$:

$$-3x^5 + 7x^4 + 11x^3 + 8x^2 - 6x - 50 = 0,$$

ou

$$3x^5 - 7x^4 - 11x^3 - 8x^2 + 6x + 50 = 0; \qquad (3)$$

puis :

$$15x^4 - 28x^3 - 33x^2 - 16x + 6,$$

$$30x^3 - 42x^2 - 33x - 8.$$

Ce dernier polynôme reste positif pour $x \overline{>} 3$. Le polynôme précédent est *négatif* pour $x = 3$; mais $x = 4$ donne un résultat *positif*. De même, le premier membre de l'équation (3) reste positif pour $x \overline{>} 4$. Conséquemment, dans la proposée (1), -4 est une limite *inférieure* des racines négatives.

Dans l'équation (3), changeons x en $\frac{1}{z}$: cette équation devient

$$50z^5 + 6z^4 - 8z^3 - 11z^2 - 7z + 3 = 0. \qquad (4)$$

Les dérivées successives, *simplifiées*, sont :

$$250z^4 + 24z^3 - 24z^2 - 22z - 7,$$

$$500z^3 + 36z^2 - 24z - 11,$$

$$500z^2 + 24z - 8.$$

Ces quatre polynômes restent positifs pour $z \gtreqless 1$. Ce *nombre* est donc une limite supérieure des racines de l'équation (4), et une limite *inférieure* des racines *positives* de l'équation (3). Par conséquent, les racines *négatives* de la proposée (1) sont comprises entre -4 et -1.

Vous voyez donc, cher Camarade, qu'il n'est pas inutile de considérer l'équation $f(-x) = 0$.

Le petit théorème suivant est-il connu?

Soit l'équation réciproque

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0.$$

Si 1 *est une limite supérieure des racines, cette équation n'a aucune racine positive.*

En effet, le nombre 1 est une limite *inférieure* des racines *positives*.

. . . .

Votre bien dévoué très Ancien.

14 avril 1892.

P. S. J'ai demandé, à mon jeune ami *Longchamps,* des renseignements sur sa règle et sur celle de *Laguerre*. Ne vous semble-t-il pas qu'elles se réduisent, au fond, à celle de *Bret?*

XXI

A M. G. de Longchamps, Professeur au Lycée Saint-Louis, etc.

MON CHER LONGCHAMPS,

Ta demande d'explications, dont je te remercie, me prouve que tu ne m'as pas lu : comme Jean, j'ai prêché dans le désert! Le théorème de Bachet (ou de Fermat), que tu cites, doit être entendu ainsi :

Tout nombre entier est un carré, ou la somme de deux carrés, ou la somme de trois carrés, ou la somme de quatre carrés.

Autrement dit : *Tout nombre entier est la somme de quatre carrés, positifs ou nuls.*

Mais, dans les *Mélanges mathématiques*, et dans d'autres publications (*), j'ai eu soin de considérer, seulement, des carrés *positifs*. Exemple (t. III, p. 211) :

Le triple de la somme de quatre carrés est toujours la somme de quatre carrés.

Ce *théorème* résulte de l'identité

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$
$$= (a + b - c)^2 + (a + d - b)^2 + (a + c - d)^2 + (b + c + d)^2,$$

dans laquelle on suppose

$$a \gtreqqless b \gtreqqless c \gtreqqless d;$$

et, par conséquent,

$$a + b > c, \qquad a + d > b, \qquad a + c > d.$$

Contrairement à ton opinion exprimée, ce théorème n'est donc pas compris dans celui de Bachet.

De même pour les autres propriétés, rapportées dans la Note de Marseille (**). Exemple :

Le triple de tout carré impair est la somme de trois carrés, ayant la forme $(6\mu \pm 1)^2$.

Je renonce à la démonstration du théorème énoncé : *Le sextuple de tout nombre impair est la somme de trois carrés.*

Jusqu'à nouvel ordre, il reste donc à l'état *empirique*. Tu peux le proposer à tes nombreux abonnés.

Salut affectueux.

Liège, 25 mai 1892.

(*) *Congrès de Marseille*, p. 7, deuxième Note.

(**) Dans cette Note (p. 8), on a imprimé *complet*, au lieu de *compris*.

XXII

A M. de Longchamps.

Je continue ma prédication.

L'identité d'Euler, citée à la page 3 de *ton Algèbre* (1883), devient, pour $a' = 0$, $b' = c' = d' = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \\ = (b + c + d)^2 + (a - c + d)^2 + (a + b - d)^2 + (a - b + c)^2. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Donc, conformément au théorème de Bachet-Fermat :

Le triple de la somme de quatre carrés est une somme de quatre carrés, ou une somme de trois carrés, ou une somme de deux carrés (*).

Par exemple,

$$3(1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2) = 9^2 + 3^2.$$

Mais si, dans l'identité (1), on suppose

$$a \geqq b \geqq c \geqq d,$$

aucun des trinômes

$$a - c + d, \qquad a + b - d, \qquad a - b + c$$

n'est nul. Donc, dans ce cas, le triple dont il s'agit est *la somme de quatre carrés.*

Exemple :

$$3(4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2) = 6^2 + 3^2 + 6^2 + 3^2.$$

Remarque. d peut être nul. Ainsi, en résumé : *Le triple de la somme de quatre carrés, ou de la somme de trois carrés, est toujours la somme de quatre carrés.*

(*) A cause du facteur 3, ce triple ne peut être un carré.

Parmi les théorèmes rappelés dans la Note, as-tu remarqué celui-ci :

Toute puissance, entière et positive, d'une somme de trois carrés, est la somme de trois carrés?

Autrefois, j'ai eu quelque peine à le démontrer.

Liège, 30 mai 1892.

XXIII

A M. Siacci.

Mon savant Confrère,

En 1889, j'ai eu l'honneur de vous adresser une longue lettre, que vous avez bien voulu faire insérer aux *Mémoires de Turin* (*).

Dans cette lettre, relative à Genocchi, notre ami regretté, je signalais, en particulier (p. 476), la formule *bien remarquable*

$$(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)\cdots=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)}. \qquad \text{(A)}$$

Aujourd'hui, en y regardant de plus près, elle me semble *inadmissible*.

Pour essayer de justifier ma *nouvelle* opinion, je remplace le second membre par

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{\pi}}{x\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi x}{2}}}=\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}}{x\sqrt{\pi}}.$$

Prenons la célèbre formule d'Euler :

$$\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{\pi x}{2}\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{6^2}\right)\cdots$$

(*) Voir ci-dessus, page 14.

La relation (A) devient donc

$$(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)\cdots=\sqrt{\pi}\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{6^2}\right)\cdots;$$

ou

$$\sqrt{\pi}=\frac{1-x}{1-\frac{x}{2}}\,\frac{1-\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{4}}\,\frac{1-\frac{x}{5}}{1-\frac{x}{6}}\cdots \tag{B}$$

Or, cette égalité est *impossible*; car, dans le second membre, les facteurs

$$\frac{1-x}{1-\frac{x}{2}},\quad \frac{1-\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{4}},\quad \frac{1-\frac{x}{5}}{1-\frac{x}{6}},$$

sont *tous inférieurs à l'unité.*

Je n'ai pas sous les yeux le Mémoire de Genocchi (Naples, 1883). D'ailleurs, j'ai, peut-être, mal copié l'égalité (A) (*). Quoi qu'il en soit, ces courtes remarques n'enlèveront rien à la renommée de votre illustre Maître et ami.

Agréez, je vous prie, l'assurance...

Votre vieux et dévoué Confrère.

Liège, 12 septembre 1892.

(*) C'est ce qui a eu lieu Le dernier facteur, dans le second membre de (A), est $\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)$. (Note ajoutée pendant l'impression.)

XXIV

A M. Hermite.

(Extrait.)

. . . .

Je crains de vous ennuyer; et cependant je crois devoir répondre à un passage de votre dernière lettre, si affectueuse. C'est celui qui est précédé des mots : « *on me fait remarquer* ». Ce même passage contient la démonstration du théorème suivant: « *Toute surface fait partie d'un système triple orthogonal* »; démonstration et théorème que j'ai donnés en 1863 (*) et, plus explicitement, en 1868 (**). Dans une Note du Bulletin, je disais :

« Récemment, on est allé plus loin dans cette voie *restrictive;* » et un jeune Géomètre, déjà célèbre, suppose qu'*une surface* » *quelconque ne peut faire partie d'un système triple orthogo-* » *nal* (***). Quand il a énoncé cette proposition, M. Darboux » ignorait, probablement, l'existence du Mémoire dans lequel » j'ai établi, implicitement, le théorème contraire, etc. »

Est-ce clair? D. a changé d'opinion (IV). Mais ce changement est dû au théorème de C : D. aurait dû citer C.

Je vais bien vous étonner. Liouville a passé à côté des *surfaces parallèles,* sans les voir. En effet, dans sa célèbre *Note sur deux lettres de Thompson* (1847), notre illustre Maître écrit (p. 282) : « représentez-vous les lignes de courbure de cette surface (voyez

(*) *Académie de Belgique,* Mémoires couronnés, t. XXXII, p. 16.

(**) *Bulletin de l'Académie,* t. XXVI, p. 180.

(***) *Annales de l'École normale,* t. II, p. 59.

(IV) Voir les *Annales de l'École normale,* 1878.

le passage) (*) ». Il renvoie au Mémoire de Serret; mais, de *surfaces parallèles*, pas un mot! J'ai donc fort bien fait, en 1868, d'ajouter ce mot. Ce n'était pas difficile; mais il fallait y penser. Assez sur ce sujet.

. . . .

Liège, 24 décembre 1892.

(*) Le voici (il s'agit de la transformation par rayons vecteurs *réciproques*) :

« Une surface appartenant à l'une des deux figures étant donnée, repré-
» sentez-vous les lignes de courbure de cette surface, et les deux séries de
» surfaces développables, orthogonales entre elles et à la surface donnée, qui
» sont formées par les normales successives. Dans la seconde figure, les
» séries de surfaces correspondantes resteront orthogonales entre elles et à
» la transformée de la surface donnée; par suite, en vertu du beau théorème
» de M. Ch. Dupin, elles traceront encore sur cette transformée des lignes de
» courbure. Ces lignes de courbure résulteront ainsi des lignes de courbure
» de la surface donnée, et seront immédiatement connues si les autres le
» sont. Il sera aisé d'appliquer ce théorème aux surfaces du second degré,
» comme aussi aux systèmes triples de surfaces orthogonales, que M. Serret
» a indiqués dans une Note récente, etc. ». (Note ajoutée pendant l'impression.)