This page intentionally left blank.

LETTRES

A

QUELQUES MATHÉMATICIENS

PAR

E. CATALAN.

LETTRES

A

QUELQUES MATHÉMATICIENS.

I

A M. Hermite.

Merci de votre bonne lettre, si affectueuse et si encourageante. Je me permets de vous signaler, dans le tome III (*), la proposition suivante, *horriblement* simple, mais *peut-être* nouvelle :

Soit

$$(1 - x)^{-p} = S_n + R_n,$$

p *étant un nombre entier. Le reste* $R_n =$ *la fonction proposée, multipliée par un polynôme entier,* facile à former.

A l'instant, je trouve cette autre relation :

$$\left[\frac{d^p \dfrac{1}{x(1+x)^{p+1}}}{dx^p}\right]_{x=1} = \frac{1}{2}(-1)^p \Gamma(p+1),$$

qui me semble curieuse. Je me demande si, en admettant les différentielles à indices quelconques, de notre Maître Liouville, elle serait générale (**). Mais je n'ai pas le temps de chercher la solution de ce problème.

Salut *très* affectueux de votre *très* vieux Professeur.

Liège, 8 octobre 1888.

(*) *Mélanges mathématiques,* p. 251.

(**) *Nouvelles Notes d'Algèbre et d'Analyse,* p. 43.

II

A M. G. de Longchamps, Professeur au Lycée Charlemagne.

MON CHER LONGCHAMPS,

Je reçois ta lettre, dont je te remercie.

Avant que le Mémoire me revienne, je vais te dire l'impression qu'il m'a laissée, quand je l'ai rapidement parcouru.

Au fond, tes *nouvelles fonctions* sont des *séries*. J'accorde qu'elles sont convergentes. Sont-elles *nouvelles*, sont-elles plus simples que celles dont on a fait usage jusqu'à présent?

Là est la question.

Par exemple (si j'ai bonne mémoire), tu fais d'assez longs calculs pour développer, en série, la fonction

$$y = \int_0^2 e^{x^2} dx.$$

Or,

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1.2} + \frac{x^6}{1.2.3} + \cdots$$

Donc

$$y = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.2.5} + \frac{x^7}{1.2.3.7} + \cdots$$

Ta série est-elle *plus simple* que celle-ci? J'en doute.

Ce n'est pas tout.

Tu crois qu'avec les *isobares* (*), tu intègres, *dans tous les cas, l'équation de Riccati*. Cette annonce m'avait, autrefois, fait dresser l'oreille, comme si j'étais un vieux cheval de trompette. A la lecture, je n'ai pas été converti. Ton intégrale, me semble-t-il, est un développement en série, $\pm$ conforme à ceux que l'on connaît, développements employés, en particulier, par Liouville, et reproduits dans le *Cours d'Analyse* de Duhamel. Insistons un peu sur ce point.

(*) Je ne chicane pas sur les mots nouveaux ; mais celui-ci, très conforme à l'étymologie, me semble un peu *barbare*. J'aimerais mieux...

Liouville transforme ainsi l'équation de Riccati :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(A + \frac{B}{x^2}\right) y. \tag{1}$$

Soit, s'il est possible,

$$y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \cdots; \tag{2}$$

et, par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} &a\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} + b\beta(\beta - 1)x^{\beta-2} + c\gamma(\gamma - 1)x^{\gamma-2} + \cdots \\ &\qquad = \left(A + \frac{B}{x^2}\right)(ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \cdots), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

puis le calcul bien connu. Fais-tu autre chose? Surtout fais-tu *plus?* Je ne le crois pas; mais je désire me tromper (*). Du reste, De Tilly et Mansion sont d'excellents juges, très compétents, et très bien disposés pour toi. De leur part, tu n'as pas à redouter, comme de ***, un parti pris. A propos de ***, qui donc jugera son...? Quel drôle de livre!

Ton vieux Collègue et ami.

Liège, 10 mars 1889.

III

A. M. Hermite.

Mon cher Monsieur Hermite,

En publiant, au commencement de l'année dernière, les *Nouvelles propriétés des fonctions* X_n, je croyais bien ne plus m'occuper de ce sujet.

Mais l'on revient toujours
A ses premiers amours!

(*) *Je m'étais trompé :* M. de Longchamps remplace, par une série unique, le quotient de deux séries.

Au commencement de cette semaine, en étudiant votre savant *Cours de la Sorbonne* (ce que je n'avais pas encore fait : je me le reproche), je suis tombé sur la célèbre formule de Gauss :

$$\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1} = 2\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{X_{n-1}X_n} \qquad (1) \qquad (x > 1)$$

Elle m'a fait songer à un rapprochement signalé en 1879, par suite de la comparaison avec cette autre formule :

$$\mathcal{L}\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}X_{n-1}X_n, \qquad (2) \qquad (x < 1),$$

que je crois avoir trouvée dans ce temps-là. Mais ce rapprochement n'était que *typographique,* pour ainsi dire. On peut faire mieux.

En effet, soit, pour plus de clarté, $X_n = f_n(x)$. Dans la formule de Gauss, changeons x en $\frac{1}{z}$; nous aurons :

$$\mathcal{L}\frac{1+z}{1-z} = 2\sum_1^{\infty}\frac{1}{nf_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)f_n\left(\frac{1}{z}\right)} \qquad (1') \qquad (z < 1).$$

Donc, *par ma formule* (?) :

$$\sum_1^{\infty}\frac{1}{nf_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)f_n\left(\frac{1}{z}\right)} = \sum_1^{\infty}\frac{1}{n}f_{n-1}(z)f_n(z); \qquad (A) \qquad (z < 1),$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\sum_1^{\infty}\frac{1}{nf_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)f_n\left(\frac{1}{z}\right)} = \sum_1^{\infty}\frac{1}{n}X_{n-1}X_n \qquad (A') \qquad (x < 1).$$

Si je ne me fais illusion, cette égalité (A′) est curieuse, et *doit avoir* des conséquences nombreuses.

Remplaçant X_1, X_2, X_3, ... par leurs valeurs connues, on trouve, comme développement du premier membre :

$$x + \frac{2}{2}\frac{x^3}{3-x^2} + \frac{4}{3}\frac{x^5}{(3-x^2)(5-x^2)} + \frac{16}{4}\frac{x^7}{(5-3x^2)(35-30x^2+3x^4)} + \cdots;$$

et, comme développement du second,

$$x + \frac{1}{4}x(3x^2 - 1) + \frac{1}{12}(3x^2 - 1)(5x^2 - 3x)$$
$$+ \frac{1}{84}(5x^3 - 3x)(35x^4 - 30x^2 + 3) + \cdots$$

De là résulte :

$$1 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{12}, \quad \frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{1}{12}(5 + 9) + \frac{1}{66}(25 - 90) - \cdots;$$

puis les sommes d'une infinité de séries, assez compliquées.

Je me borne, mon cher et illustre Collègue, à cette simple indication. Si vous pensez que le sujet mérite d'être creusé, envoyez-moi, par carte postale, ce seul mot : *Continuez.*

Salut affectueux.

Liège, 8 novembre 1889.

IV

A M. Hermite.

MON CHER MONSIEUR HERMITE,

Voyez, encore une fois, *comme les beaux esprits se rencontrent !* Il y a deux jours, j'ai reçu, de M. Miller, les derniers numéros de l'*Educational Times.* Naturellement, mon attention s'est portée sur votre nom, et sur la Question 9832. Maintenant, écoutez le reste.

La série

$$x + x^2 + 2x^3 + \cdots + \frac{(n+2)(n+3)\,..\,2n}{2.3\ldots n}x^{n+1} + \cdots$$

est, comme l'a remarqué Binet, le développement de

$$y = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\ (^*).$$

A la page 62, j'ai donné la formule

$$(\mathrm{T}_2x + \mathrm{T}_3x^2 + \mathrm{T}_4x^3 + \cdot\cdot)^k = x^k + \frac{k}{1}x^{k+1} + \frac{k(k+3)}{1.2}x^{k+2} + \cdots,$$

ou

$$(1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \cdots)^k = 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k(k+3)}{1.2}x^2 + \cdots$$

Le premier membre égale $\left(\frac{y}{x}\right)^k$.

Mais, à cause de

$$y = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2},$$

on a

$$1 - y = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2},$$

puis

$$y(1-y) = x.$$

Donc

$$\left(\frac{y}{x}\right)^k = (1-y)^{-k},$$

puis

$$(1-y)^{-k} = 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k(k+3)}{1.2}x^2 + \cdots;$$

ce qui est votre formule.

Salut affectueux.

Liège, 31 mars 1890.

(*) *Mélanges mathématiques*, t. II, p. 65.

V

A M. Hermite.

CHER MONSIEUR HERMITE,

Trois jours passés à Bruxelles m'ont empêché, jusqu'à présent, de répondre à votre lettre du 4 avril.

Et d'abord, je ne vous ai jamais, au grand jamais, *supposé* l'intention de m'adresser un reproche quelconque : bien au contraire ! Donc, laissons de côté ce petit point.

Je crois vous avoir mandé que, dans le Mémoire présenté, samedi, à l'Académie de Belgique, j'ai indiqué certaines propriétés dont jouissent vos polynômes T_n, ou, après un changement de lettres, vos intégrales.

$$J_n = \int_{-1}^{+1} \frac{X_n - A_n}{x - a} 2x,$$

(j'appelle A_n ce que devient X_n par le changement de x en a).

Je vous remercie de m'avoir fait connaître la belle formule

$$\sum_0^\infty \alpha_n J_n = \frac{2}{\sqrt{1 - 2a\alpha + \alpha^2}} = \mathfrak{L}\frac{\alpha - a + \sqrt{1 - 2a\alpha + \alpha^2}}{1 - a}. \qquad \text{(A)}$$

En la comparant à la formule (79) de mon *deuxième Mémoire* (p. 26) (*), j'arrive à un résultat qui m'étonne un peu.

Pour rendre plus facile la comparaison, je change, dans (A), α en z, a en x :

$$\sum_0^\infty z^n J_n = \frac{2}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \mathfrak{L}\frac{z - x + \sqrt{1 - 2xz + z^2}}{1 - x}. \qquad \text{(A')}$$

(*) $$\mathfrak{L}\frac{z - x + \sqrt{1 - 2zx + z^2}}{1 - x} = \sum_0^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad \text{(B)}$$

Mais, J_n était une fonction de a; donc, dans (A′), on doit prendre

$$J_n = \int_{-1}^{+1} \frac{X_n - T_n}{x - t} dt,$$

afin que le *nouveau* J_n ne diffère, de l'*ancien*, que par le changement indiqué. Si je ne me trompe, le *nouveau* J_n est donc votre polynôme P_n. Ceci admis, (A′) devient

$$\sum_0^\infty P_n z^n = \frac{2}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \mathcal{L} \frac{z - x + \sqrt{1 - 2zx + z^2}}{1 - x}; \quad (A'')$$

ou, d'après (B) :

$$\frac{1}{2}\sqrt{1 - 2xz + z^2} \sum_0^\infty P_n z^n = \sum_0^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1}. \quad (C)$$

Prenons les dérivées des deux membres, par rapport à z :

$$\frac{1}{2}\sqrt{1 - 2xz + z^2} \sum_0^\infty n P_n z^{n-1} + \frac{1}{2} \frac{z - x}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \sum_0^\infty P_n z^n = \sum_0^\infty X_n z^n;$$

ou, par l'*équation de définition* :

$$(1 - 2xz + z^2) \sum_0^\infty n P_n z^n + (z - x) \sum_0^\infty P_n z^n = 2.$$

Ainsi

$$\sum_0^\infty \left[n - (2n + 1)zx + (n + 1)z^2\right] P_n z^{n-1} = 2;$$

ou enfin, parce que $P_0 = 0$:

$$\sum_0^\infty \left[n - (2n + 1)zx + (n + 1)z^2\right] P_n z^{n-1} = 2 \quad (D)$$

Voilà ce qui m'étonne. Ai-je commis des fautes, ou vous ai-je mal compris ? L'avenir nous l'apprendra.

Agréez, je vous prie, avec mes remerciements, l'assurance des sentiments affectueux de

Votre bien dévoué *très Ancien.*

Liège, 16 avril 1890.

P. S. La formule (D) est *exacte;* elle s'accorde avec la relation entre P_{n+1}, P_n, P_{n-1} (*).

VI

A M. Allix, Capitaine du Génie (à Gap).

MON JEUNE CAMARADE,

Merci de votre aimable et intéressante lettre du 11. Si je n'y ai pas répondu immédiatement, c'est parce que, en ce moment, une bronchite me tient : je suis *agrémenté* d'un ......, sans compter d'autres mauvaises choses.

Vous me dites que ma *définition des incommensurables* soulève, chez vous, beaucoup d'objections (du moins, tel est le sens de vos paroles). Lorsque, vers 1836 ou 1837, je donnai cette définition, je ne me flattai point d'avoir, du premier coup, atteint la perfection. J'avais ouvert la voie : c'était assez pour commencer. Puis, je n'ai jamais écrit pour les *abstracteurs de quintescence;* car, comme dit Leibniz (?) : « Il n'y a pas moyen de contenter ceux qui demandent le pourquoi du pourquoi. » Comme je l'ai narré à Brisse, quand j'étais sur les bancs, on ne jurait que par *Bourdon :* « $\sqrt{7}$ est le nombre qui, *multiplié* par lui-même, reproduit 7. »

Il n'avait oublié qu'un point :
C'était d'éclairer sa lanterne.

(*) Cette relation est

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0.$$

Pour la Géométrie, c'était encore pis. Legendre, dans sa mauvaise Géométrie (renouvelée d'Euclide), dit, en termes presque aussi solennels que barbares : « Je dis qu'on aura *surface* $\text{CA} = \frac{1}{2}\,\text{CA} \times \mathit{circ}\,\text{CA}$ (*) ». Puis il ajoute :

« Car si $\frac{1}{2}\,\text{CA} \times \mathit{circ}\,\text{CA}$ n'est pas l'aire du cercle dont CA est
» le rayon, cette quantité sera la mesure d'un cercle plus grand
» ou plus petit. » Pourquoi ? Il a oublié de le dire.

En d'autres termes, l'illustre Auteur de la *Théorie des fonctions elliptiques* admet qu'il y a des cercles de toutes les grandeurs ; ou encore, que, *l'aire du cercle est une fonction continue du rayon.*

Si l'on admet cela, que reste-t-il à faire ? Rien, ou très peu de chose.

Ce qui m'a toujours mis de mauvaise humeur, quand j'étudiais la *Géométrie* de Legendre, c'est l'espèce de mauvaise foi de l'Auteur. En effet, avec ses démonstrations bizarres (qui ne démontrent pas), il a l'air de dire, au malheureux lecteur : « Voyez comme je suis rigoureux ! » Et il ne l'est pas plus que Bezout, lequel avait, du moins, le mérite de la clarté.

Je pourrais continuer cette critique : le sujet est presque inépuisable. Pour abréger, je vous citerai seulement le fameux *Lemme préliminaire sur les surfaces* (p. 242).

Que signifie l'expression : « *Une surface convexe est moindre que* » ?

Quoi qu'il en soit, dans mes *Éléments de Géométrie* (1843), j'ai défini la *longueur d'une ligne*, l'*aire d'une surface*, le *volume d'un corps*. Il faut croire que mes définitions n'étaient pas mauvaises, car elles ont été adoptées par mes *successeurs*, en particulier par MM. Y et Z, ..., qui, dans leur grosse *Géométrie*, se sont emparés (ou parés) de toutes mes idées, sans jamais me citer.

Ici, j'ouvre une petite parenthèse.

Dans mon volume de 1843, je disais (p. 135) :

« En employant des rectangles, ..., et en employant des poly-

(*) Cet énoncé, et tous ceux du même genre, faisaient dire à Lacroix (d'après ce qu'on m'a rapporté) : « Il y a donc un ange qui lui a *soufflé* son théorème ! »

» gones, ... arrivera-t-on à la même limite? Et même, en conser-
» vant le second procédé, toutes ces séries conduiront-elles à la
» même limite? La réponse est affirmative; mais la démonstra-
» tion de l'identité des résultats ne paraît pas être du ressort des
» Éléments (*). Nous admettrons donc cette identité. »

Vous voyez que ceci est de la *bonne foi scientifique*. Il paraît, d'après Y et Z, que *** a complété, en ce point, ma théorie. J'en suis bien aise.

Si le Docteur me permet de sortir aujourd'hui, je mettrai à la Poste les Mémoires que vous m'avez demandés. Je désire que vous puissiez avoir la patience de les lire, et la bonne fortune d'y ajouter quelque chose.

Que mettriez-vous à la place du mot *indéfini?* Il s'agit d'une chose qui ne finit pas. Je crains que vous en disiez autant de ma lettre. Donc, je termine brusquement.

Votre bien dévoué très Ancien.

Liège, 17 mai 1890.

VII

A. M. Casorati (**) (à Pavie).

MONSIEUR,

Je quittais Liège, quand j'ai reçu le beau Mémoire que vous m'avez fait l'honneur et le plaisir de m'offrir. Cette circonstance de déplacement vous explique le retard de ma réponse.

J'ai lu votre Mémoire avec le plus vif intérêt, et j'ai admiré la manière simple et élégante dont vous établissez votre jolie formule :

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right).$$

(*) Allusion aux Lemmes sur les infiniment petits.

(**) Cette lettre n'est point parvenue à destination. Le savant Professeur est mort avant d'avoir pu en prendre connaissance. Ces détails m'ont été communiqués par Mlle Eugénie Casorati, fille de mon regretté Collègue.

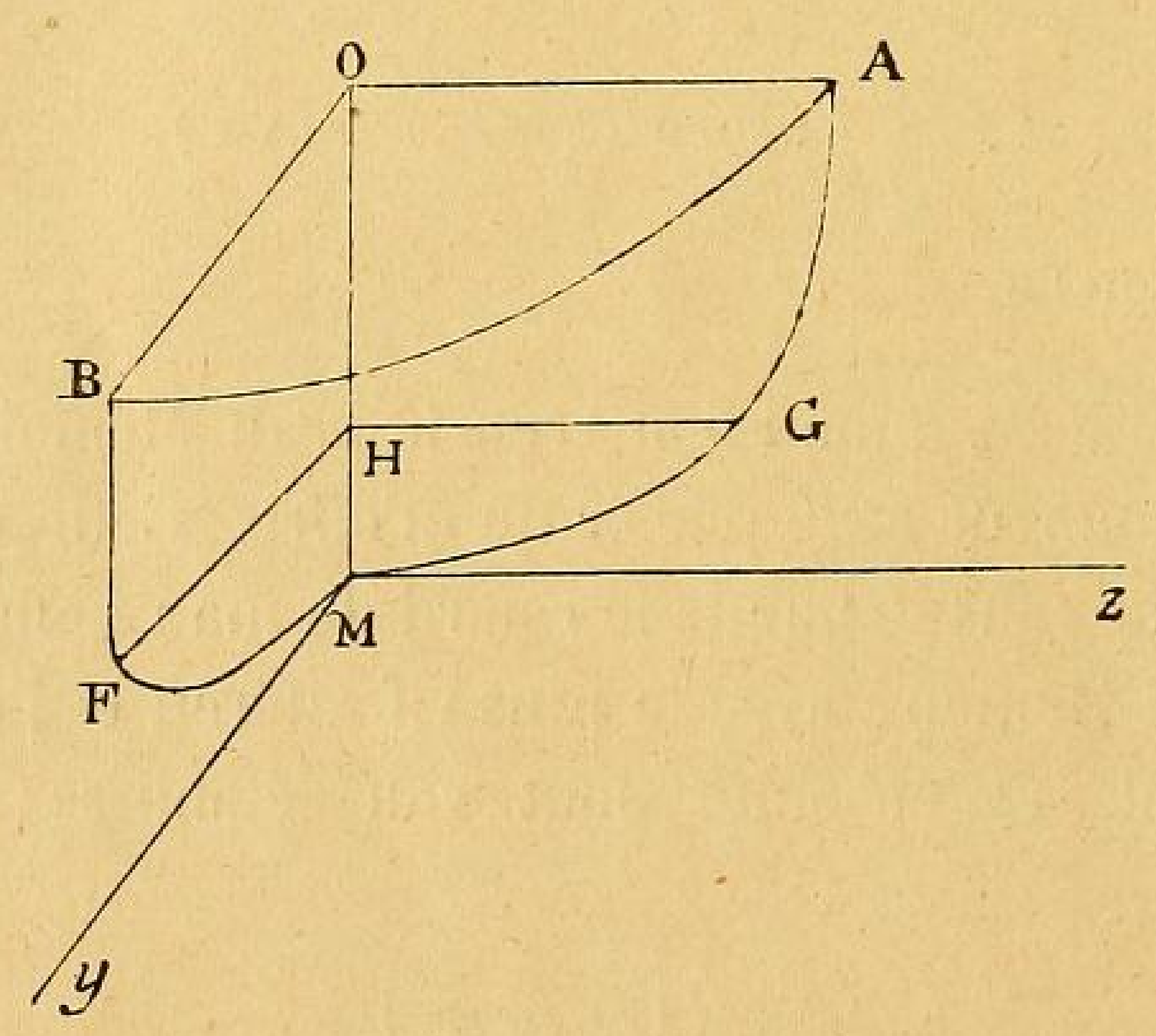
Atteint-elle le but que vous vous étiez proposé? Est-elle d'accord avec l'*idée commune?* Il me paraît que non. Voici l'un des motifs de mes doutes.

R_1 étant supposé positif, C ne change pas quand on y remplace R_2 par $-R_2$. En particulier, si l'on considère le *caténoïde,* dans lequel $R_2 = -R_1$, puis la sphère dont le rayon serait R_1, on a, pour ces deux surfaces, en deux points correspondants, $C = \frac{1}{R_1^2}$. Ainsi, *le caténoïde et la sphère auraient même courbure.* Cette conclusion est-elle d'accord avec « *l'idée commune* »? Je vous le demande.

Autrefois, je me suis occupé de cette question de la *courbure des surfaces,* question sur laquelle je n'ai rien publié. Depuis la lecture de votre Mémoire, mes *vieilles idées* sont revenues; et voici la solution (provisoire) qui en découle.

Coupons un ellipsoïde AMB (*), par un plan GHF, parallèle au plan tangent en M.

Soient λ la distance de ces plans, et E l'aire de la calotte *ellipsoïdique.* D'autre part, considérons la sphère qui aurait O pour centre, et $OM = c$ pour rayon. Soit S l'aire de la calotte *sphérique,*



correspondant à la calotte *ellipsoïdique.* Il me semble qu'on pourrait prendre, comme valeur de la courbure en M, la *limite* de $\frac{E}{S}$, répondant à $\lambda = 0$. Il est vrai que l'expression de E

(*) Ce sera l'ellipsoïde osculateur, si la surface donnée est convexe.

contient des intégrales elliptiques (*). Mais si l'on développe cette expression suivant les puissances de λ, et qu'ensuite on fasse $\lambda = 0$ $\left(\text{dans } \frac{E}{S}\right)$, *il est possible* que le résultat soit simple. N'ayant ici aucun livre, je ne puis effectuer ce calcul. Je me contente de vous en indiquer le principe, me proposant d'y revenir, *peut-être.* (Je suis dans mon 77ième *printemps.*)

Agréez, Monsieur, etc.

Spa, 17 juin 1890.

VIII

A M. Azzarelli (à Rome).

MONSIEUR,

Le dernier numéro des *Atti,* que j'ai reçu hier, contient une Note sur la *courbe formée par les projections d'un point sur les tangentes à un cercle,* Note au sujet de laquelle je désire vous soumettre quelques remarques.

La courbe dont il s'agit est la *podaire du cercle :* dans un cas particulier, elle se réduit au *Limaçon de Pascal.* Cette courbe, *archi-connue,* même par les Aspirants à nos Écoles (de France), ne mérite pas, me semble-t-il, d'être traitée dans un Recueil académique. L'Auteur de la Note y déploie un bien inutile luxe de calcul ; et, véritablement, *il a pris une massue pour écraser une mouche!* (proverbe français). Vous allez en juger, si ce n'est déjà chose faite.

C étant le point donné, soit MP une tangente au cercle AB. Si l'on fait :

$$CO = b, \qquad OB = a, \qquad CP = u;$$

et que l'on mène OD parallèle à MP, on a

$$u = a + b \cos \omega, \tag{1}$$

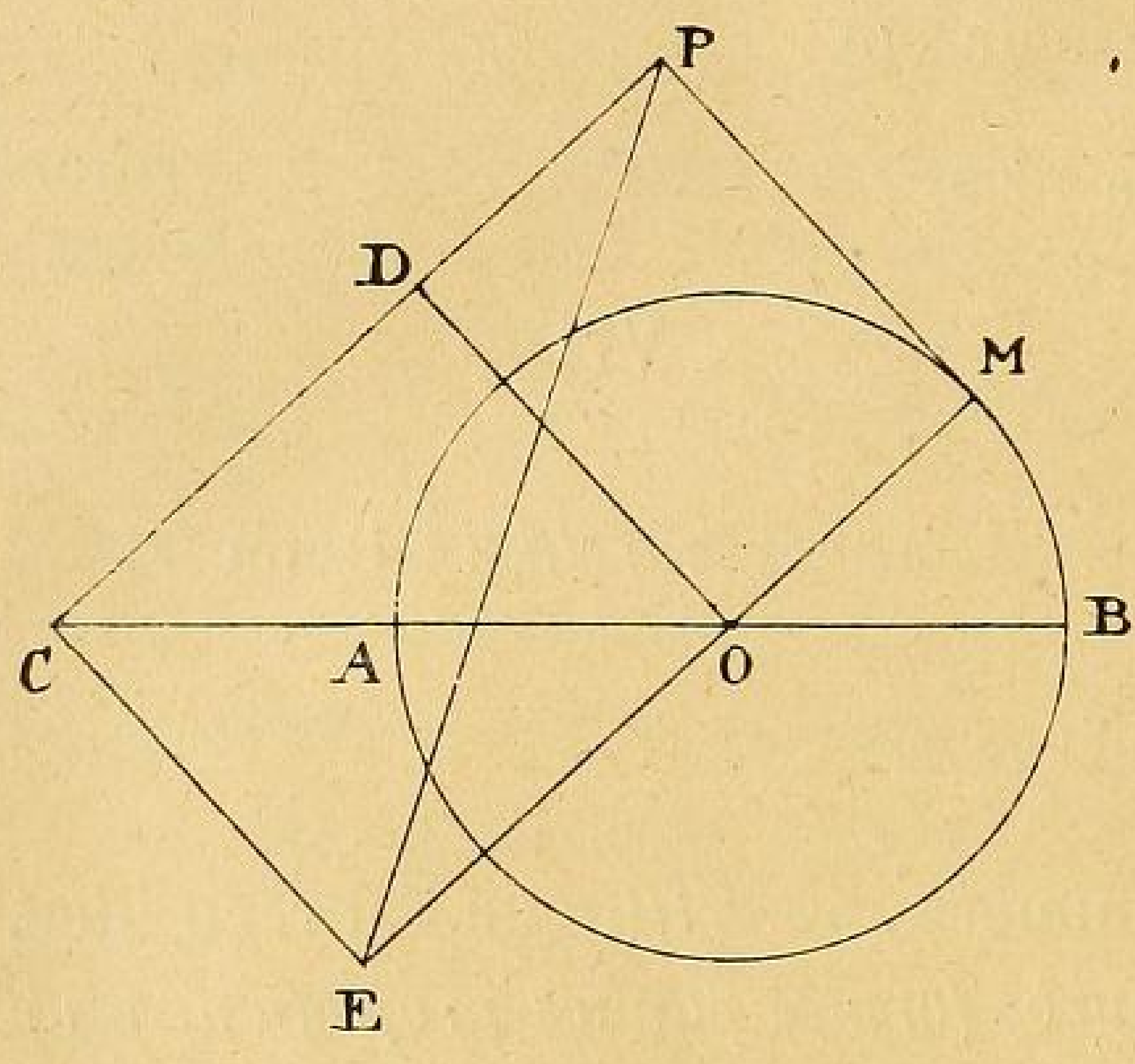
(*) Voir, dans le *Journal de Liouville,* mon Mémoire sur *l'aire de l'ellipsoïde,* etc.

équation de la podaire. On en conclut :

$$u' = -b \sin \omega, \tag{2}$$

$$u'' = -b \cos \omega \tag{3}$$

Si l'on achève le rectangle MPCE, la diagonale PE est la normale, en P, à la podaire (*).



La formule

$$ds^2 = du^2 + u^2 d\omega^2$$

devient

$$ds^2 = (a^2 + 2ab \cos \omega + b^2)\, d\omega^2;$$

puis, si l'on fait $\omega = 2\theta$:

$$ds^2 = 4\,(a^2 + b^2 + 2ab - 4ab \sin^2 \theta)\, d\theta^2. \tag{4}$$

Il résulte, de celle-ci :

$$s = 2\,(a + b) \int^{\theta} d\theta \sqrt{1 - \frac{4ab}{(q + b)^2} \sin^2 \theta}. \tag{5}$$

Donc *l'arc* BP, *de la podaire, est équivalent à l'arc d'une ellipse facile à construire;* etc.

Je pense qu'en voilà assez...

Je suis, Monsieur, votre dévoué vieux Confrère.

Spa, 26 juillet 1890.

(*) Propriété connue, presque évidente. Le lieu du point E est la circonférence décrite sur CO comme diamètre.

IX

A M. Tallqvist (à Helsingfors).

Comment, Monsieur, vous avez déjà publié une demi-douzaine de Mémoires, sur un sujet *très difficile,* et vous n'avez que *vingt ans!*

> Vos pareils, à deux fois, ne se font pas connaître,
> Et, pour leurs coups d'essais, *font de grands* coups de maître,

comme dirait Corneille (ou à peu près). Permettez à un vieux Mathématicien, qui s'est occupé, il y a *quarante-six ans,* des *surfaces-minima;* permettez-lui, dis-je, non seulement de vous témoigner toute sa sympathie, mais encore la surprise de trouver tant de talent chez un tout jeune homme! Abel, votre illustre *quasi*-compatriote, avait plus de vingt ans quand il a commencé à devenir célèbre. Puissiez-vous, plus heureux que lui, poursuivre une longue carrière, si brillamment inaugurée!

J'ai lu, avec un vif plaisir, votre *détermination expérimentale...*, et j'en ai écrit déjà à un Confrère, M. Van der Mensbrugge, gendre et continuateur de Plateau. Je ne puis lire vos autres Mémoires, faute de connaître les langues dans lesquelles ils sont écrits.

Il me semble que vous ne citez pas le travail, bien remarquable, de *Ribaucour,* sur les *élassoïdes* (c'est le nom qu'il a imaginé ; il est plus court que *surface-minima.* De plus, celui-ci est moitié français, moitié latin : il est *hybride*).

Ne connaissez-vous pas le Mémoire de Ribaucour, ou le Rapport que j'ai fait sur ce Mémoire? L'Auteur a obtenu, en 1880 ou 1881, le prix proposé par l'Académie de Belgique. Je regrette de ne pouvoir vous envoyer aucun de ces deux opuscules.

Je croyais la dénomination de *caténoïde* due à Bour, profond Géomètre, mort très jeune, et que j'ai beaucoup connu.

A propos des *élassoïdes,* voici une autre hypothèse que j'ai exposée, jadis, à l'Université de Liège : « *Tout élassoïde peut* *être engendré, de deux manières, par des courbes égales.* » Cette hypothèse est-elle fondée? Est-ce que M. Lie, dont je ne connais pas les ouvrages (à cause de la langue), n'a pas démontré quelque chose de ce genre?

Je termine cette lettre, déjà trop longue. A la fin des vacances, je me ferai traduire ceux de vos Mémoires qui ne sont pas en français. J'ai la persuasion qu'ils ne modifieront pas la bonne opinion que j'ai conçue de vous.

Agréez,......

Liège, 6 septembre 1890.

X

A M. l'Abbé Gelin (à Huy).

Mon cher Collègue,

Votre formule *supposée* :

$$\left.\begin{aligned} &1\,(+\,a)\,(1+ab)\,(1+ab^2)\dots(1+ab^{n-1}) \\ &= 1 + a\,\frac{1-b^n}{1-b} + a^2\,\frac{(1-b^n)(b-b^n)}{(1-b)(1-b^2)} + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

est fort intéressante (elle m'a donné de la tablature et des insomnies). Mais elle n'est pas *nouvelle*. En septembre 1843, Cauchy a *démontré* celle-ci, qui ne diffère pas de la vôtre :

$$\left.\begin{aligned} &(+x)(1+tx)\dots(1+t^{n-1}x) = 1 + \frac{1-t^n}{1-t}\,x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})}{(1-t)(1-t^2)}\,tx^2 + \cdots \\ &\qquad + \frac{(1-t^n)}{1-t}\,t^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\,x^{n-1} + t^{\frac{n(n-1)}{2}}\,x^n. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(*Comptes rendus*, p. 560.)

Le grand Géomètre n'écrit pas le terme général du second membre : il est clair que ce terme est

$$T_p = \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})\dots(1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2)\dots(1-t_p)}\,t^{\frac{p(p-1)}{2}}\,x_p. \qquad (3)$$

Ainsi :

$$(1 + x)(1 + tx)\dots(1 + t^{n-1}x) = 1 + \sum_{p=1}^{p=n} T_p \tag{4}$$

Remarques. — 1° D'après la forme du premier membre de l'égalité (2), T_p *est un polynôme entier, à coefficients entiers.*

2° Conséquemment, la fraction contenue dans T_p est réductible à un semblable polynôme; ou, ce qui est équivalent (avec un changement de lettres) :

$$\frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})\dots(1-x^{k+p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^p)} = \textit{entier}.$$

3° Ce théorème, qui me paraît fort remarquable, n'est pas nouveau non plus : il est énoncé et démontré dans l'*Algèbre* de Bertrand (1re édition). Il en résulte ces deux-ci :

Parmi les racines de l'équation

$$(x^n-1)(x^{n+1}-1)\dots(x^{n+p-1}-1) = 0$$

se trouvent toutes celles de l'équation

$$(x-1)(x^2-1)\dots(x^p-1) = 0;$$

Si N *est un nombre entier, la fraction*

$$\frac{(N^n-1)(N^{n+1}-1)\dots(N^{n+p-1}-1)}{(N-1)(N^2-1)\dots(N^p-1)}$$

est réductible à un nombre entier.

4° Si l'on suppose $x = 1$, $n = \infty$, et qu'on remplace t par q ($q < 1$), l'égalité (2) devient

$$\left.\begin{aligned} &2(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\dots \\ &= 1 + \frac{1}{1-q} + \frac{q}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

laquelle est due, je crois, à Jacobi.

5° Posons, comme Jacobi et Legendre :

$$\left.\begin{aligned}\beta &= (1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots\\ \beta' &= (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots\end{aligned}\right\}(^*). \qquad (6)$$

On sait que

$$\beta\beta' = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots (^{**}) \quad (7)$$

L'égalité (5) est la même chose que

$$2\beta\beta' = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots \quad (8)$$

Celle-ci paraît différer de la précédente. Cependant, elle en est une conséquence.

En effet, la soustraction donne

$$\beta\beta' = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \cdots \quad (7)$$

Permettez-moi d'en rester là.

Liège, 5 juin 1891.

XI

A M. l'Abbé Gelin.

I

La formule de Cauchy (*C. R.*, sept. 1843) se trouve, au moins en germe, dans l'*Introduction à l'Analyse* d'Euler. Seulement, le grand Helvétien y considère le produit indéfini

$$Z = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\ldots$$

(*) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 1.

(**) *Ibid.*, p. 51.

Il obtient, très simplement (comme toujours) :

$$Z=1+\frac{x}{1-x}z+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\cdots$$

C'est ce que vous aviez cherché. Ainsi que je vous le mandais dans ma lettre du 5 juin, si l'on suppose $z=1$, $x=q<1$, on a cette formule de Jacobi (?) :

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots=1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}+\cdots$$

II

Je reprends la formule de Cauchy :

$$(1+x)(1+tx)\ldots(1+t^{n-1}x)=1+\sum_{p=1}^{p=n}\mathrm{T}_p, \qquad (1)$$

dans laquelle

$$\mathrm{T}_p=\frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})\ldots(1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^p)}t^{\frac{p(p-1)}{2}}x^p. \qquad (2)$$

Évidemment, T_p *est la somme des produits*, p *à* p, *des* n *quantités*

$$x,\quad tx,\quad t^2x,\quad \ldots,\quad t^{n-1}x.$$

Soient, par exemple,

$$n=5,\quad p=2.$$

On a

$$\mathrm{T}^2=\frac{(1-t^5)(1-t^4)}{(1-t)(1-t^2)}tx^2;$$

et aussi :

$$\mathrm{T}_2=x^2\left[t+t^2+t^3+t^4+t^3+t^4+t^5+t^5+t^6+c^7\right]$$

$$=x^2\left[t+t^2+2t^3+2t^4+2t^5+t^6+t^6+t^3\right].$$

Conséquemment,

$$\frac{(1-t^3)(1-t^4)}{(1-t)(1-t^2)} = 1 + t + 2t^2 + 2t^3 + 2t^4 + t^5 + t^6,$$

ou

$$(1 + t + t^2 + t^3 + t^4)(1 + t^2) = 1 + t + 2t^2 + 2t^3 + 2t^4 + t^5 + t^6;$$

ce qui est exact.

III

Les questions précédentes m'ont conduit (ou ramené) à ces deux problèmes :

1° *On prend* p *termes, dans la suite* 1, 2, 3, . ., n. *On fait la somme de ces* p *nombres. A quoi est égale la somme* $S_{n,p}$ *de toutes les sommes partielles?*

2° *Trouver les sommes* $X_{n,p}$ *des produits,* p *à* p, *des* n *premiers nombres entiers?*

J'obtiens :

1° $$S_{n,p} = C_{p+1,2} \times C_{n+1,p+1};$$

2° $$X_{n,3} = C_{n+1,4} \times C_{n+1,2}.$$

Cette seconde formule est d'autant plus remarquable qu'elle est, pour ainsi dire, *isolée :* les expressions de $X_{n,2}$ et de $X_{n,4}$ sont beaucoup plus compliquées.

Remarques. — 1° *Si* n *est premier, supérieur à* 4, $X_{n,3}$ est divisible par n^2.

2° *Si* n + 1 *est premier,* $X_{n,3}$ *est divisible* par $(n+1)^2$.

3° Il y a une relation entre les deux problèmes.

Votre dévoué vieux Collègue,

E. C.

Liège, 17 juin 1891.