Mémoires de la Société royale des sciences de Liège.
Liège [etc.],La Société.
http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/39398

2e sér.:t.15 (1888): http://www.biodiversitylibrary.org/item/87767

Article/Chapter Title: Mélanges mathématiques (Tome troisième)
Author(s): Eugène Catalan
Page(s): Text, Text, Text, Page 4, Page 5, Page 6, Page 7, Page 8, Page 9, Page 10, Page 11, Page 12, Page 13, Page 14, Page 15, Page 16, Page 17, Page 18, Page 19, Page 20, Page 21, Page 22, Page 23, Page 24, Page 25, Page 26, Page 27, Page 28, Page 29, Page 30, Page 31, Page 32, Page 33, Page 34, Page 35, Page 36, Page 37, Page 38, Page 39, Page 40, Page 41, Page 42, Page 43, Page 44, Page 45, Page 46, Page 47, Page 48, Page 49, Page 50, Page 51, Page 52, Page 53, Page 54, Page 55, Page 56, Page 57, Page 58, Page 59, Page 60, Page 61, Page 62, Page 63, Page 64, Page 65, Page 66, Page 67, Page 68, Page 69, Page 70, Page 71, Page 72, Page 73, Page 74, Page 75, Page 76, Page 77, Page 78, Page 79, Page 80, Page 81, Page 82, Page 83, Page 84, Page 85, Page 86, Page 87, Page 88, Page 89, Page 90, Page 91, Page 92, Page 93, Page 94, Page 95, Page 96, Page 97, Page 98, Page 99, Page 100, Page 101, Page 102, Page 103, Page 104, Page 105, Page 106, Page 107, Page 108, Page 109, Page 110, Page 111, Page 112, Page 113, Page 114, Page 115, Page 116, Page 117, Page 118, Page 119, Page 120, Page 121, Page 122, Page 123, Page 124, Page 125, Page 126, Page 127, Page 128, Page 129, Page 130, Page 131, Page 132, Page 133, Page 134, Page 135, Page 136, Page 137, Page 138, Page 139, Page 140, Page 141, Page 142, Page 143, Page 144, Page 145, Page 146, Page 147, Page 148, Page 149, Page 150, Page 151, Page 152, Page 153, Page 154, Page 155, Page 156, Page 157, Page 158, Page 159, Page 160, Page 161, Page 162, Page 163, Page 164, Page 165, Page 166, Page 167, Page 168, Page 169, Page 170, Page 171, Page 172, Page 173, Page 174, Page 175, Page 176, Page 177, Page 178, Page 179, Page 180, Page 181, Page 182, Page 183,

This page intentionally left blank.

MÉLANGES

MATHÉMATIQUES

PAR

Eugène-Charles CATALAN,

Ancien élève de l'École polytechnique, Professeur émérite à l'Université de Liège;
Associé de l'Académie de Belgique, de l'Académie des sciences de Toulouse
et de la Société des sciences de Lille;
Correspondant des Académies de St-Pétersbourg, de Turin, des *Nuovi Lincei;*
Membre de la Société des sciences de Liège,
de la Société mathématique de France et de la Société philomathique de Paris;
Correspondant de la Société mathématique d'Amsterdam,
de l'Institut national génevois, de la Société havraise d'études diverses
et de la Société d'agriculture de la Marne.

« Ceci est mon testament. »

TOME TROISIÈME.

MÉLANGES

MATHÉMATIQUES.

CCXVI. — Section droite du cylindre circonscrit à un ellipsoïde.

(*Avril* 1884.)

I. $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

étant l'équation de l'ellipsoïde; soient f, g, h, les cosinus directifs de l'axe OL du cylindre. L'équation de cette surface est, comme on sait,

$$P^2-mQ=0, \tag{2}$$

en posant :

$$\left.\begin{aligned} &P=\frac{fx}{a^2}+\frac{gy}{b^2}+\frac{hz}{c^2}, \quad Q=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1, \\ &m=\frac{f^2}{a^2}+\frac{g^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

D'un autre côté, le plan de la section droite est représenté par

$$fx+gy+hz=0. \tag{4}$$

Par conséquent, les carrés des demi-axes de cette courbe sont le maximum et le minimum de

$$u^2=x^2+y^2+z^2, \tag{5}$$

les variables x, y, z satisfaisant aux conditions (2) et (4).

La règle ordinaire donne

$$xdx + ydy + zdz = 0, \tag{6}$$

$$fdx + gdy + hdz = 0, \tag{7}$$

$$\frac{Pf - mx}{a^2}dx + \frac{Pg - my}{b^2}dy + \frac{Ph - mz}{c^2}dz = 0. \tag{8}$$

Par la méthode de Bezout, on déduit, des trois dernières équations :

$$\left.\begin{aligned} x + \lambda f + \mu \frac{Pf - mx}{a^2} &= 0, \\ y + \lambda g + \mu \frac{Pg - my}{b^2} &= 0, \\ z + \lambda h + \mu \frac{Ph - mz}{c^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Si maintenant on multiplie par x, y, z, et qu'on ajoute les produits, on obtient, à cause des relations (3), (4) :

$$u^2 + \mu\left[P^2 - m(Q + 1)\right] = 0;$$

ou, par l'équation (2) :

$$\mu m = u^2. \tag{10}$$

De même, en multipliant par f, g, h :

$$\lambda + \mu\left[Pm - mP\right] = 0,$$

ou

$$\lambda = 0. \tag{11}$$

Ainsi, les équations (9) peuvent être remplacées par :

$$(u^2 - a^2)x = P\mu f, \quad (u^2 - b^2)y = P\mu g, \quad (u^2 - c^2)z = P\mu h. \tag{12}$$

Il résulte, de celle-ci, l'équation demandée :

$$\frac{f^2}{u^2 - a^2} + \frac{g^2}{u^2 - b^2} + \frac{h^2}{u^2 - c^2} = 0. \tag{13}$$

II. *Suite.* — Menons, par le centre de l'ellipsoïde, un plan perpendiculaire à la droite dont les cosinus directifs seraient f', g', h'. Les carrés des demi-axes de la section vérifient l'égalité

$$\frac{a^2 f'^2}{u'^2 - a^2} + \frac{b^2 g'^2}{u'^2 - b^3} + \frac{c^2 h'^2}{u'^2 - c^2} = 0, \tag{14}$$

due à *Sedley Taylor* (*).

Ces deux équations auront les mêmes racines, si

$$\frac{f}{af'} = \frac{g}{bg'} = \frac{h}{ch'}. \tag{15}$$

On conclut, de ces proportions :

$$\frac{f'}{\frac{f}{a}} = \frac{g'}{\frac{g}{b}} = \frac{h'}{\frac{h}{c}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{f^2}{a^2} + \frac{g^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2}}}. \tag{16}$$

La droite OL', dont les cosinus directifs sont f', g', h', est donc déterminée ; et, en conséquence :

III. Théorèmes. — 1° *Toute section d'un ellipsoïde, par un plan diamétral, est égale à la section droite d'un certain cylindre, circonscrit à l'ellipsoïde.*

2° Réciproquement : *Tout ellipsoïde, inscrit à un cylindre, admet une section diamétrale égale à la section droite du cylindre.*

3° *Si deux ellipsoïdes, concentriques, sont inscrits à un même cylindre, une section diamétrale de l'un est égale à une section diamétrale de l'autre.*

4° Réciproquement : *Si deux ellipsoïdes concentriques n'admettent pas de sections diamétrales égales, ils ne sont pas inscriptibles à un même cylindre.*

IV. *Remarque.* — Soient A', B', C' les projections, sur OL',

(*) *Cours d'Analyse*, p. 461 ; *Nouvelles Annales*, t. XX, p. 113 ; etc.

des sommets A, B, C de l'ellipsoïde (*). Le point M, dont les coordonnées sont

$$x = OA' = af', \quad y = OB' = bg', \quad z = OC' = ch',$$

appartient à cette surface (**). De plus, il appartient à la droite OL.

Donc *ce point* M *est celui où la droite* OL *perce l'ellipsoïde* (***).

Si M' est le point d'intersection de OL' avec la surface, nous dirons que M, M' sont deux *points correspondants.* Il existe, entre ces deux points, une relation simple.

V. Théorème. — *Le centre* O *est également distant du point* M' *et du plan tangent en* M.

Prenons, avec les formules (16), les équations

$$x = uf, \quad y = ug, \quad z = uh; \tag{17}$$

$$x' = u'f', \quad y' = u'g', \quad z' = u'h'; \tag{18}$$

puis la formule connue :

$$\frac{1}{\Delta^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4},$$

ou

$$\frac{1}{\Delta^2} = u^2\left(\frac{f^2}{a^4} + \frac{g^2}{b^4} + \frac{h^2}{c^4}\right). \tag{19}$$

Il est visible que

$$u^2 = \frac{1}{\dfrac{f^2}{a^2} + \dfrac{g^2}{b^2} + \dfrac{h^2}{c^2}}, \quad u'^2 = \frac{1}{\dfrac{f'^2}{a^2} + \dfrac{g'^2}{b^2} + \dfrac{h'^2}{c^2}}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) A cause de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1.$$

(***) Nous prenons, dans la figure, la partie située au-dessus du plan xOy.

Donc

$$\Delta^2 = \frac{\dfrac{f^2}{a^2} + \dfrac{g^2}{b^2} + \dfrac{h^2}{c^2}}{\dfrac{f^2}{a^4} + \dfrac{g^2}{b^4} + \dfrac{h^2}{c^4}};$$

ou, enfin, par les proportions (15) :

$$\Delta^2 = \frac{f'^2 + g'^2 + h'^2}{\dfrac{f'^2}{a^2} + \dfrac{g'^2}{b^2} + \dfrac{h'^2}{c^2}} = u^2. \qquad (20)$$

C. Q. F. D.

VI. *Cylindre de révolution.* — Si la section diamétrale de l'ellipsoïde est *circulaire,* la section droite du cylindre circonscrit l'est également : celui-ci est un *cylindre de révolution.* Par la théorie connue (*), on trouve :

$$f = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \quad g = 0, \quad h = \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - c^2}}; \qquad (21)$$

puis, au moyen des formules (16) :

$$f' = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \quad g' = 0, \quad h' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \cdot \qquad (22)$$

Par conséquent :

A un ellipsoïde donné, on peut toujours circonscrire un cylindre de révolution (**);

ou, en d'autres termes :

Étant donné un ellipsoïde éclairé par des rayons parallèles, on peut toujours le placer de manière que son ombre, sur un plan perpendiculaire aux rayons, soit un cercle.

(*) Voir, par exemple, l'*Analyse appliquée,* de Leroy (p. 165).

(**) Plus exactement, *deux cylindres.*

VII. *Remarque.* — Quand un cylindre de révolution est circonscrit à l'ellipsoïde, il est circonscrit à la sphère concentrique à celui-ci, et dont le rayon serait b. L'ellipse suivant laquelle le cylindre touche l'ellipsoïde est, relativement à cette surface, une *ligne de courbure constante*; et, en outre, une variété de la courbe appelée *polhodie* (*).

CCXVII. — Sur deux théorèmes de M. Laguerre (**).

(*Août* 1884.)

I. Premier théorème. — *On peut construire trois cercles osculateurs d'une parabole, qui touchent une tangente à cette courbe : cette tangente, et les tangentes aux points d'osculation, touchent un même cercle.*

I. Rapportons la courbe à la tangente Cx et à la normale CA (***).

L'équation sera

$$(y - ax)^2 - 2by = 0 \text{ (}^{\text{IV}}\text{)}. \tag{1}$$

Il en résulte :

$$(y - ax)(y' - a) - by' = 0, \tag{2}$$

$$(y' - a)^2 + (y - ax - b)y'' = 0. \tag{3}$$

Le cercle osculateur en M, qui touche Cx, est représenté par

$$y^2 - 2\rho y + (x - \alpha)^2 = 0; \tag{4}$$

d'où

$$(y - \rho)y' + x - \alpha = 0, \quad (y - \rho)y'' + y'^2 + 1 = 0. \tag{5}$$

(*) *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces*, p. 34.

(**) Savant Géomètre, plein d'originalité, dont on déplore la perte récente. Je l'ai eu pour élève, au Lycée Saint-Louis, en 1851. (Nov. 1886.)

(***) Le lecteur est prié de faire la figure.

(IV) a est le coefficient angulaire des diamètres; $2b$ = *corde* CA.

Des équations (2), (3), on tire

$$y - ax = \frac{by'}{y' - a} = b - \frac{(y' - a)^2}{y''}.$$

Ainsi

$$(y' - a)^3 + aby'' = 0, \quad y'' = -\frac{(y' - a)^3}{ab}. \tag{6}$$

La première valeur de $y - ax$, substituée dans l'équation (1), donne

$$by'^2 - 2y(y' - a)^2 = 0;$$

puis

$$y = \frac{1}{2}\frac{by'^2}{(y' - a)^2}. \tag{7}$$

L'élimination de $x - \alpha$ et de ρ, entre les équations (4), (5), conduit à

$$y^2 + 2\frac{1 + y'^2}{y''}y - \frac{(1 + y'^2)^2 y'^2}{y''^2} = 0. \tag{8}$$

Donc, par substitution des valeurs (6), (7) :

$$y'^2(y' - a)^2 - 4a(1 + y'^2)(y' - a) - 4a^2(1 + y'^2)^2 = 0;$$

ou, après suppression du facteur y' (*) :

$$y'(y' - a)^2 - 4a(1 + y'^2)(1 + ay') = 0. \tag{9}$$

On simplifie cette équation en posant

$$\frac{y' - a}{1 + ay'} = t \text{ (**)},$$

puis $t - a = s$. On trouve ainsi ;

$$s^3 - 3a^2 s - 2a(2 + a^2) = 0. \tag{10}$$

(*) $y' = 0$ répond à la tangente Cx.

(**) t est la tangente de l'angle que fait MT, tangente à la parabole, avec les diamètres.

Cette équation a *une seule racine réelle*; donc, des trois cercles considérés, *deux sont imaginaires* (*).

II. Second théorème (**). — *Les projections* MP, M'P' *de deux normales* MN, M'N' *à une ellipse, sur la corde* MM', *sont égales entre elles* (***).

Nous supprimons la démonstration, très facile (IV); mais nous énoncerons les propriétés suivantes, conséquences du théorème :

1° *Dans l'ellipse, la projection d'une normale* MN, *sur le demi-diamètre* OM, *a pour expression* $\frac{b^2}{a'}$; a' *désignant ce demi-diamètre;*

2° *Dans l'ellipse, deux cordes parallèles sont entre elles comme les projections, sur ces droites, des intervalles compris entre les pieds des normales correspondantes.*

(*) Nous ne poussons pas plus loin cet *exercice de calcul.* Dans la démonstration donnée par M. Brisse, on lit :

« l'équation

$$y^3 + \frac{3}{4}p^2y + \frac{p^3}{4m} = 0$$

» *dont les racines sont imaginaires.* Il y a donc trois cercles *osculateurs* » *imaginaires d'une parabole,* qui touchent une tangente à cette courbe ». (*N. A.*, 1884, p. 390).

Étonné d'une pareille conclusion, deux fois énoncée, j'écrivis à l'Auteur : « relisez donc la page 390 ». M. B. se contenta de me répondre à peu près ceci : « *je n'écris pas pour les savants ; j'écris pour les élèves* ». Ultérieurement, la correction a été faite.

(**) Cité et démontré par *un ancien Élève de Mathématiques spéciales.* (*N. A.*, même tome, pp. 453 et 458). Tout le monde sait que ce pseudonyme désigne un savant Professeur à l'École polytechnique. En 1848, alors qu'il suivait mon cours, au Lycée Charlemagne, il se fût dit : Élève de Mathématiques *supérieures. En ce temps là,* on avait renoncé à la ridicule dénomination de *Mathématiques spéciales,* si justement critiquée par Gergonne.

(***) Le lecteur est prié de faire la figure. (Les points N, N' appartiennent au grand axe.)

(IV) Par l'emploi des coordonnées, elle est *plus courte* que celle que nous venons de mentionner.

CCXVIII. — Remarques sur un théorème de Fermat.

(*Juin* 1884.)

I. Ce théorème, l'un des plus importants de la théorie des Nombres, a été démontré (de la même manière) par Lagrange et Legendre (*). Habituellement, on l'énonce ainsi :

Tout diviseur d'une somme de deux carrés, premiers entre eux, est également une somme de deux carrés, premiers entre eux (**).

Mais ces grands Géomètres, et leurs successeurs, ont négligé de faire observer que *le diviseur* dont il s'agit *peut être la somme de deux carrés fractionnaires* (***).

Par exemple,

$$9^2 + 2^2 = 5 \times 17, \qquad \text{et} \qquad 17 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}\right)^2.$$

II. De la double identité *classique :*

$$(a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (a\alpha \pm b\beta)^2 + (a\beta \mp b\alpha)^2, \tag{1}$$

on conclut

$$(a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2)^2 = (a\alpha^2 \pm 2b\alpha\beta - a\beta^2)^2 + (b\alpha^2 \mp 2a\alpha\beta - b\beta^2)^2,$$

ou

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{a\alpha^2 \pm 2b\alpha\beta - a\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2 + \left(\frac{b\alpha^2 \mp 2a\alpha\beta - b\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2, \tag{2}$$

En général, les fractions entre parenthèses ne sont pas réductibles à des nombres entiers (IV). Conséquemment :

(*) *OEuvres de Lagrange* (publiées par Serret), t. III, p. 211 ; *Théorie des Nombres,* de Legendre, t. I, p. 203.

(**) Legendre dit, à l'endroit cité : « *tout diviseur de la formule* $t^2 + u^2$... » Je ne pense pas que $t^2 + u^2$ soit *une formule.*

(***) Très probablement, l'omission a été volontaire; la décomposition en deux carrés entiers étant seule efficace.

(IV) α, β sont des entiers *arbitraires,* positifs ou négatifs.

La somme des carrés de deux nombres entiers est décomposable, d'une infinité de manières, en deux carrés fractionnaires.

En particulier :

Tout nombre premier, de la forme $4\mu + 1$, *est, d'une infinité de manières, égal à la somme de deux carrés fractionnaires.*

Par exemple,

$$5 = 2^2 + 1 = \left(\frac{11}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{22}{13}\right)^2 + \left(\frac{19}{13}\right)^2 = \left(\frac{2}{13}\right)^2 + \left(\frac{29}{13}\right)^2$$

$$= \left(\frac{38}{17}\right)^2 + \left(\frac{1}{17}\right)^2 = \left(\frac{22}{17}\right)^2 + \left(\frac{31}{17}\right)^2; \quad \text{etc.}$$

III. A, B étant deux nombres entiers, premiers entre eux; soient a, b deux nombres entiers, premiers entre eux, et tels, que $a^2 + b^2$ divise $A^2 + B^2$. D'après le théorème de Fermat, *la fraction*

$$\frac{A^2 + B^2}{a^2 + b^2},$$

doit être réductible à la forme $a'^2 + b'^2$; a', b' *étant deux nombres entiers, premiers entre eux.* Or, si l'on applique l'identité (1), on trouve

$$a' = \frac{Aa \pm Bb}{a^2 + b^2}, \quad b' = \frac{Ab \mp Ba}{a^2 + b^2};$$

et, par conséquent :

$$\frac{A^2 + B^2}{a^2 + b^2} = \left(\frac{Aa \pm Bb}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{Ab \mp Ba}{a^2 + b^2}\right)^2 (*). \quad (3)$$

Ainsi, où l'on devrait rencontrer *deux carrés entiers,* on trouve *deux carrés fractionnaires.*

(*) J'ignore s'il existe quelque formule qui donne, sous *forme entière,* la valeur du premier membre.

IV. D'après la *Note* CXCVI, *si*

$$N = (a^2 + c^2)^2 f^2 - 2\left[(a^2 + b^2 + c^2)c^2 - a^2b^2\right] fg + (b^2 + c^2)^2 g^2, \quad (4)$$

on a

$$\left.\begin{array}{l}(a^2 + c^2)^2 N = \left\{\left[(a^2 + b^2 + c^2)c^2 - a^2b^2\right]g - (a^2 + c^2)^2 f\right\}^2 \\ \qquad + 4a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)g^2\end{array}\right\} \quad (5)$$

Supposons que $a^2 + b^2 + c^2$ soit un carré m^2. Alors

$$(a^2 + c^2)^2 N = \left\{(m^2c^2 - a^2b^2)g - (a^2 + c^2)f\right\}^2 + 4a^2b^2c^2m^2g^2$$

est une somme de deux carrés. Donc, en vertu du théorème, N *est,* pareillement, *une somme de deux carrés entiers* (*). Mais l'application de la formule (3) donne deux *carrés fractionnaires* (**).

Soient, par exemple,

$$a^2 = 4, \quad b^2 = 4, \quad c^2 = 1, \quad m^2 = 9, \quad f = 2, \quad g = 3;$$

d'où

$$25\,N = 71^2 + 72^2;$$

puis

$$N = \left(\frac{68}{25}\right)^2 + \left(\frac{501}{25}\right)^2.$$

D'autre part, au moyen de la formule (4) :

$$N = 409 = 20^2 + 3^2 \text{ (**)}.$$

V. La formule (4) étant écrite ainsi :

$$N = \left[(a^2 + c^2)f - (b^2 + c^2)g\right]^2 + 4a^2c^2fg, \quad (6)$$

on voit que N *est une somme de deux carrés, si* fg *est un carré* (***).

(*) Au moins si les deux parties du second membre sont premières entre elles.

(**) Cette sorte de paradoxe a été l'occasion de la présente Note.

(***) Complément à la *Note* CXCVI.

CCXIX. — Sur une formule attribuée à M. Hermite.

(*Août* 1884.)

I. Dans le *Bulletin de Darboux* (*), on lit, à propos d'une Note de *M. Stieljes* :

« En faisant usage de la relation suivante :

$$q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \cdots = (1 + 2q + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)$$
$$\times \left[\frac{9}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} + \cdots \right],$$

» qui lui a été communiquée par M. Hermite, l'auteur.... »

Corrigeant la faute typographique, et changeant q en $-q$, on trouve

$$\frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \cdots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots} = \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{q^5}{(1-q^5)^2} + \cdots \quad \text{(A)}$$

Il semblerait donc, d'après M. Stieljes, que cette formule est due à M. Hermite. Or, il n'en est rien (**).

II. *Remarques.* — D'après Jacobi (***), l'égalité (A) peut être remplacée par celle-ci :

$$\frac{q - 4q^4 + 9q^9 - \cdots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots} = \frac{q}{1-q^2} + 2\frac{q^2}{1-q^4} + 3\frac{q^3}{1-q^6} + \cdots; \quad \text{(B)}$$

laquelle est plus simple (IV).

(*) Juillet 1884, p. 105.

(**) Voir, par exemple, mes *Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries* (pp. 57, 58 ; 1883). Voir aussi les *Recherches sur quelques produits indéfinis* (p. 92).

(***) *Recherches...*, p. 93.

(IV) On peut voir, dans les *Notes sur la théorie...*, les propriétés qui en résultent.

CCXX. — Courbes ayant même longueur qu'une ellipse donnée.

(*Janvier* 1885.)

I. Soit une ellipse E, tracée sur un cylindre vertical, et représentée par les équations

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad \frac{z}{y} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{1}$$

Soit, en second lieu, une courbe C, à double courbure, ayant pour équations

$$x'^2 + y'^2 = R'^2, \quad x'y' = az'. \tag{2}$$

On peut disposer du rayon R′ et du paramètre *a*, de manière que, dans les développements des deux cylindres projetants, la transformée E′ de E, et la transformée C′ de C, soient égales. S'il en est ainsi, un arc quelconque de C, et l'arc correspondant de E, auront même longueur.

On satisfait aux équations (1), en prenant

$$x = R\cos\omega, \quad y = R\sin\omega, \quad z = R\operatorname{tg}\alpha\sin\omega. \tag{3}$$

De même :

$$x' = R'\cos\omega', \quad y' = R'\sin\omega', \quad z' = \frac{R'^2}{a}\sin\omega'\cos\omega'. \tag{4}$$

La condition d'égalité, entre les *transformées* E′, C′, donne les relations :

$$R\omega = R'\omega', \quad z = z'; \tag{5}$$

lesquelles sont vérifiées par

$$\omega' = \frac{1}{2}\omega, \quad R' = 2R, \quad a = 2R\cot\alpha.$$

Les équations de la courbe C sont donc :

$$x' = 2R\cos\frac{\omega}{2}, \quad y' = 2R\sin\frac{\omega}{2}, \quad z' = R\operatorname{tg}\alpha\sin\omega. \tag{6}$$

II. *Vérification.* — On a :

$$dx = -\mathrm{R}\sin\omega d\omega,\quad dy = \mathrm{R}\cos\omega d\omega,\quad dz = \mathrm{R}\,\mathrm{tg}\alpha\cos\omega d\omega;$$

$$dx' = -\mathrm{R}\sin\frac{\omega}{2}d\omega,\quad dy' = \mathrm{R}\cos\frac{\omega}{2}d\omega,\quad dz' = dz.$$

Par conséquent, s et s' étant les arcs correspondants :

$$ds^2 = \mathrm{R}^2(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\omega)\,d\omega^2 = \frac{\mathrm{R}^2}{\cos^2\alpha}(1 - \sin^2\alpha\sin^2\omega)\,d\omega^2,$$

$$ds'^2 = ds^2;$$

puis

$$s' = s = \frac{\mathrm{R}}{\cos\alpha}\int_0^{\omega} d\omega\sqrt{1 - \sin^2\alpha\sin^2\omega}. \tag{7}$$

III. ***Remarque.*** — Le *module* de l'intégrale elliptique est le sinus de l'angle formé par le plan de l'ellipse avec le plan de la *section droite.*

Addition. — (*Novembre* 1884.)

IV. Au lieu des équations (6), prenons, plus généralement :

$$x' = \mathrm{R}n\cos\frac{\omega}{n},\quad y' = \mathrm{R}n\sin\frac{\omega}{n}, \tag{8}$$

$$z' = \mathrm{R}\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\omega. \tag{9}$$

Il en résulte

$$x'^2 + y'^2 = n^2\mathrm{R}^2; \tag{10}$$

puis, par la formule de Moivre,

$$\left(x' + y'\sqrt{-1}\right)^n - \left(x' - y'\sqrt{-1}\right)^n = 2n^n\mathrm{R}^{n-1}z'\sqrt{-1}\cot\alpha. \tag{11}$$

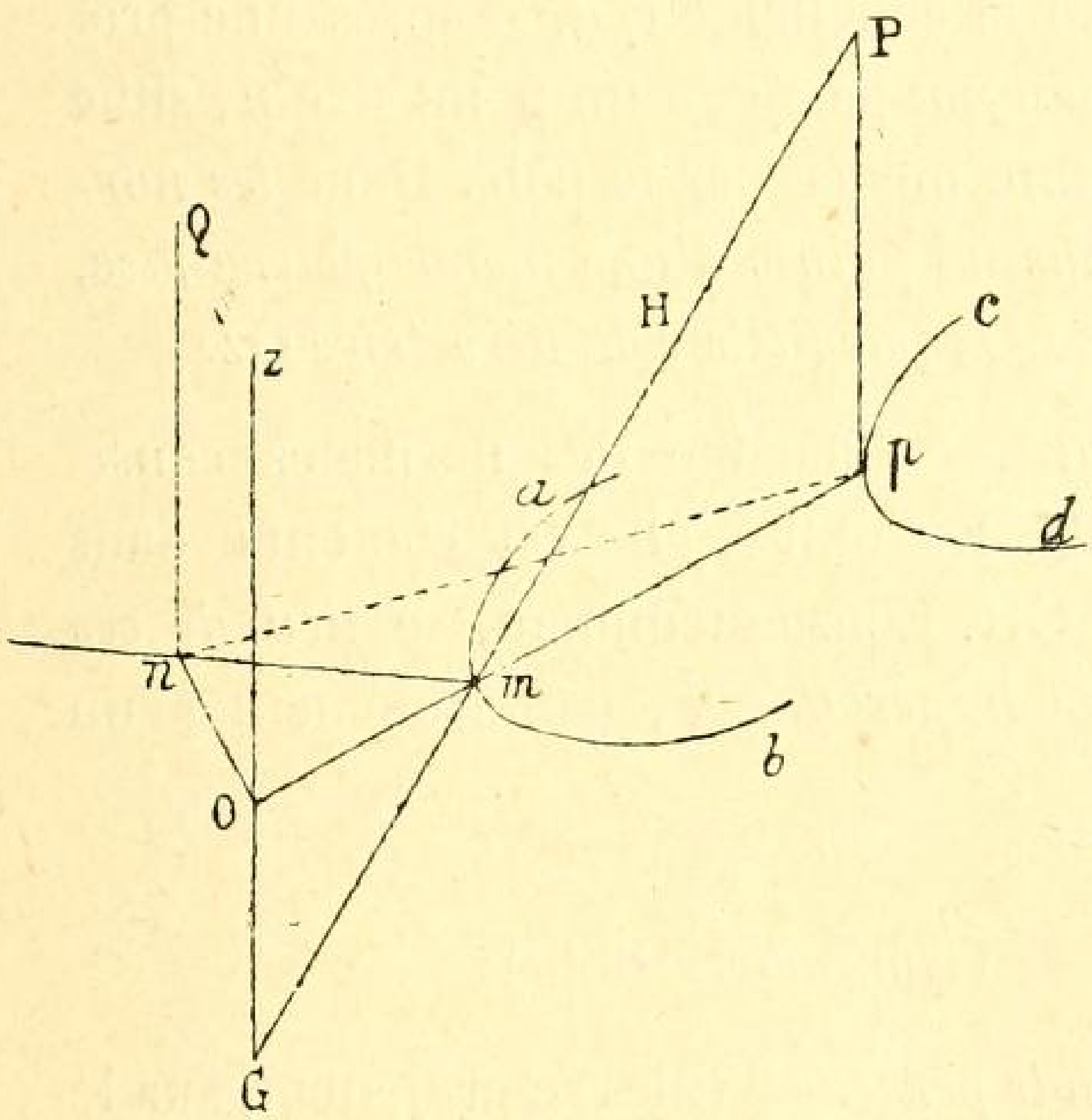
Ainsi, la courbe C, intersection d'un cylindre de révolution avec une certaine surface algébrique S, a même longueur que l'ellipse E.

V. *Remarque.* -- La surface S, représentée par l'équation (11), est *rencontrée, en un seul point, par toute parallèle à l'axe* Oz'. De plus, si l'on adopte, comme coordonnées, z' et ω, elle est déterminée par l'équation (9). Cette surface est donc un *conoïde droit,* dont une génératrice quelconque a pour équations :

$$\frac{y'}{x'}=\operatorname{tg}\frac{\omega}{n},\quad z'=\mathrm{R}\operatorname{tg}\alpha\sin\omega \text{ (*)}. \tag{12}$$

CCXXI. — Sur une classe de surfaces gauches.

(*Novembre* 1886.)



I. *Génération.* — Soient une courbe *amb*, située dans un plan horizontal (**), et une directrice verticale GOz. Si une droite GmH s'appuie sur ces deux directrices, en faisant, avec la seconde, un angle constant (***), cette droite mobile engendre une *surface gauche* Σ (IV).

II. *Ligne de striction.* — C'est la directrice rectiligne (V).

III. *Courbes de niveau.* — Soit p la projection horizontale

(*) Ces résultats, peu importants peut-être, sont beaucoup plus simples que ceux qui ont été trouvés, par Legendre et Serret, relativement à l'intégrale elliptique de première espèce.

(**) Pour fixer les idées.

(***) Nous le supposons égal à 45°, afin d'obtenir des résultats simples.

(IV) *Toute surface réglée, qui admet une directrice rectiligne, est gauche.* (*Traité élémentaire de Géométrie descriptive,* 1864, seconde partie, p. 72).

(V) *Recherches sur les surfaces gauches,* p. 22.

d'un point P de Σ. A cause de l'hypothèse sur l'angle zGP, les triangles GOm, Ppm, évidemment semblables, sont isoscèles : $mp =$ Pp. Pour une *ligne de niveau*, l'ordonnée Pp est constante; donc $mp = z =$ *const.* Autrement dit : *toutes les lignes de niveau, de la surface* Σ, *se projettent, sur le plan de l'une d'elles, suivant des conchoïdes de celle-ci, relativement au pôle* O (*).

IV. *Équation de la surface.* — Si la directrice *amb* est représentée par $u = af(\omega)$, il est clair que l'équation de Σ est

$$u = af(\omega) + z. \tag{1}$$

V. *Normale.* — La normale à Σ, au point P, étant normale à la ligne de niveau qui passe en P, se projette, horizontalement, suivant la normale, en p, à la conchoïde *cpd*. D'après une propriété connue, cette normale pn passe en un point fixe n, situé sur la perpendiculaire à Omp, menée par le pôle. Donc *les normales à la surface* Σ, *en tous les points d'une même génératrice, rencontrent une droite fixe* nQ, *parallèle à la directrice* Oz.

VI. *Paraboloïde normal.* — Chacune des normales considérées rencontre GH et nQ. En outre, elle est contenue dans un plan perpendiculaire à GH. Conséquemment, le *lieu de ces droites est un paraboloïde hyperbolique*, conformément à un théorème connu.

Addition. — (*Novembre* 1886.)

VII. *Lignes de plus grande pente.* — Elles se projettent, sur le plan horizontal, suivant les trajectoires orthogonales de la directrice *amb* et de ses conchoïdes. D'après la formule (1), dans laquelle z doit être considéré comme un paramètre, l'équation différentielle des conchoïdes est

$$u' = af'(\omega).$$

(*) Quand la directrice *amb* est *rectiligne*, la surface, nommée *hyperboloïde conchoïdal*, est fort intéressante. Le modèle en a été construit par *Bardin* et par M. *Muret*. De plus, au mois de juin 1870, M. *Welsch*, alors *élève à l'École polytechnique*, a publié, sur cette même surface, une étude et une *épure* fort bien faites. J'ignore ce qu'est devenu ce jeune Géomètre.

Une simple considération géométrique, combinée avec le théorème rappelé dans le paragraphe V, donne

$$u\frac{d\omega}{du} = -a\frac{f'(\omega)}{u};$$

ou, par la séparation des variables,

$$a\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{k}\right) = \int_0^{\omega}\frac{d\omega}{f'(\omega)}, \tag{2}$$

k étant la constante arbitraire. Telle est l'équation qui était demandée.

VIII. *Application.* — Dans le cas de l'*hyperboloïde conchoïdal*, l'équation (1) est

$$u = \frac{a}{\sin\omega} + z \text{ (*)};$$

et l'équation (2) :

$$a\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{k}\right) = -\int_0^{\omega}\frac{\sin^2\omega d\omega}{\cos\omega},$$

ou

$$a\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{k}\right) = \sin\omega - \mathcal{L}.\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right). \tag{3}$$

On voit que la constante k est le rayon vecteur répondant à $\omega = 0$.

IX. *Remarques.* — 1° D'après l'équation (2), *le problème des trajectoires orthogonales d'une série de conchoïdes est toujours résoluble* (**).

2° Si, dans l'équation (2), on pose :

$$u = \frac{a^2}{v}, \quad k = \frac{a^2}{l}, \quad \int_0^{\omega}\frac{d\omega}{f'(\omega)} = \mathrm{F}(\omega), \tag{4}$$

elle devient

$$v = a\mathrm{F}(\omega) + l; \tag{5}$$

(*) Nous prenons l'axe polaire parallèle à la directrice, afin que l'intégrale (2) s'annule avec ω.

(**) En ce sens qu'il est *ramené aux quadratures*.

et celle-ci, de même forme que la proposée (1), représente une nouvelle série de conchoïdes. Conséquemment : *les réciproques* R, R′, R″, ... (ou les inverses) (*) *des trajectoires orthogonales* T, T′, T″, ... *d'une série de conchoïdes* C, C′, C″, ..., *forment une nouvelle série de conchoïdes.*

3° Ce n'est pas tout. Comme les réciproques de deux courbes orthogonales sont orthogonales (**), si nous prenons les réciproques D, D′, D″, ..., des conchoïdes C, C′, C″, ..., ces lignes D, D′, D″, ..., constitueront, avec R, R′, R″, ..., un *système orthogonal.* Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Soient des conchoïdes* C, C′ C″, ..., *leurs réciproques* D, D′, D″, ..., *et les trajectoires orthogonales* T, T′, T″, ... *de* D, D′, D″, ... *Les réciproques* R, R′, R″, ..., *de* T, T′, T″, ..., *sont des conchoïdes, orthogonales aux réciproques* D, D′, D″.

X. *Application.* — Si les courbes C sont les *limaçons de Pascal,* représentés par

$$u = a \sin \omega + z,$$

auquel cas les réciproques D ont pour équation :

$$u = \frac{a^2}{a \sin \omega + z} \quad (^{***});$$

alors les trajectoires orthogonales T et leurs réciproques R sont déterminées par les formules :

$$a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{k}\right) = \mathcal{L} . \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$v = a\mathcal{L} . \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + l \quad (^{\text{IV}}).$$

(*) La relation $uv = a^2$ est celle qui définit deux lignes réciproques.

(**) Propriété connue.

(***) Évidemment, ces réciproques sont des coniques dont l'un des foyers est au pôle.

(IV) Si l'on suppose $l = 0$, on peut écrire ainsi la dernière équation :

$$\text{séc}\ \omega = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{v}{a}} + e^{-\frac{v}{a}}\right).$$

Les conchoïdes R sont donc des *spirales-chaînettes* (?).

CCXXII. — Sur la fonction numérique $\varphi(n)$ (*).

(*Août* 1882.)

I. Problème. — *Δ étant un diviseur quelconque du nombre entier* N, *évaluer* $\sum \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}$.

Soit, pour fixer les idées, $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Les valeurs de Δ sont :

$$1, a, a^2, \dots, a^\alpha, \quad b, b^2, \dots, b^\beta, \quad c, c^2, \dots, c^\gamma, \quad ab, a^2b, \dots, \quad N;$$

et les valeurs de $\varphi(\Delta)$:

$$1;\ a-1,\ a(a-1), \dots,\ a^{\alpha-1}(a-1),\quad b-1,\ b(b-1), \dots,\ b^{\beta-1}(b-1),$$
$$c-1,\ c(c-1), \dots,\ c^{\gamma-1}(c-1);$$
$$(a-1)(b-1),\ a(a-1)(b-1), \dots,\ b^{\beta-1}c^{\gamma-1}(b-1)(c-1);$$
$$a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}(a-1)(b-1)(c-1).$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta} = 1 &+ \frac{a-1}{a} + \frac{a-1}{a} + \dots + \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{b-1}{b} + \dots + \frac{b-1}{b}\\ &+ \frac{c-1}{c} + \frac{c-1}{c} + \dots + \frac{c-1}{c} + \frac{(a-1)(b-1)}{ab} + \dots\\ &+ \frac{(a-1)(b-1)}{ab} + \dots + \frac{(a-1)(b-1)}{ab} + \dots\\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &+ \frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc}.\end{aligned}$$

Dans le second membre, il y a α fois la fraction $\frac{a-1}{a}$, β fois la fraction $\frac{b-1}{b}$, γ fois la fraction $\frac{c-1}{c}$, $\alpha\beta$ fois la fraction $\frac{(a-1)(b-1)}{ab}$; etc. Ainsi l'égalité se réduit à

$$\begin{aligned}\sum\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta} = 1 &+ \frac{\alpha(a-1)}{a} + \frac{\beta(b-1)}{b} + \frac{\gamma(c-1)}{c} + \frac{\alpha\beta(a-1)(b-1)}{ab} + \dots\\ &+ \frac{\alpha\beta\gamma(a-1)(b-1)(c-1)}{abc};\end{aligned} \tag{1}$$

(*) Au sujet de cette fonction, déterminée par Euler, on peut consulter le *Journal de Liouville*, t. IV, p. 7.

puis enfin, à

$$\sum \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta} = \left[1 + \frac{\alpha(a-1)}{a}\right]\left[1 + \frac{\beta(b-1)}{b}\right]\left[1 + \frac{\gamma(c-1)}{c}\right].$$

La formule cherchée est donc

$$\sum \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta} = \left[1 + \frac{\alpha(a-1)}{a}\right]\left[1 + \frac{\beta(b-1)}{b}\right]\left[1 + \frac{\gamma(c-1)}{c}\right]\cdots \quad \text{(A)}$$

II. *Remarque.* — Cette formule, peu élégante, se simplifie quand $N = a^a b^b c^c d^d$.. Dans ce cas.

$$\sum \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta} = abcd.. \quad \text{(B)}$$

Addition. — (*Janvier* 1887.)

III. Problème. — *Évaluer* $\sum \frac{\Delta}{\varphi(\Delta)}$.

De l'égalité (A), on conclut, sans nouveau calcul :

$$\sum \frac{\Delta}{\varphi(\Delta)} = \left[1 + \alpha\frac{a}{a-1}\right]\left[1 + \beta\frac{b}{b-1}\right]\left[1 + \gamma\frac{c}{c-1}\right]\cdots; \quad \text{(C)}$$

et, si

$$\alpha = a - 1, \quad \beta = b - 1, \quad \gamma = c - 1, \ldots :$$

$$\sum \frac{\Delta}{\varphi(\Delta)} = (1 + a)(1 + b)(1 + c)\ldots \quad \text{(D)}$$

IV. Théorème. — *Si* N = abcd ..., *on a*

$$\sum \frac{1}{\varphi(\Delta)} = \frac{N}{\varphi(N)}. \quad \text{(E)}$$

En effet, le premier membre est

$$1 + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \cdots + \frac{1}{(a-1)(b-1)} + \frac{1}{(b-1)(c-1)} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)} + \cdots,$$

ou

$$\left(1+\frac{1}{a-1}\right)\left(1+\frac{1}{b-1}\right)\left(1+\frac{1}{c-1}\right)\cdots=\frac{a}{a-1}\cdot\frac{b}{b-1}\cdot\frac{c}{c-1}\cdots,$$

c'est-à-dire $\frac{\mathrm{N}}{\varphi(\mathrm{N})}\cdot$

V. *Remarque.* — Dans le cas général, on trouve ce résultat compliqué :

$$\sum\frac{\Delta}{\varphi(\Delta)}=\left[1+\frac{a^{\alpha}-1}{(a-1)^2a^{\alpha-1}}\right]\left[1+\frac{b^{\beta}-1}{(b-1)^2b^{\beta-1}}\right]\left[1+\frac{c^{\gamma}-1}{(c-1)^2c^{\gamma-1}}\right]\cdots \quad \text{(F)}$$

CCXXIII. — Équivalences de séries.

(*Septembre* 1882.)

I. Théorème. — x *étant égal ou supérieur à l'unité, les séries*

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+\cdots,$$

$$\frac{2}{2x+1}+\frac{2}{3(3x+1)^3}+\frac{2}{5(2x+1)^5}+\cdots,$$

ont même limite.

En effet, la première est le développement de

$$\mathcal{L}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\mathcal{L}\left(\frac{x}{x+1}\right);$$

et la seconde, celui de

$$\mathcal{L}\,\frac{1+\dfrac{1}{2x+1}}{1-\dfrac{1}{2x+1}}=\mathcal{L}\,\frac{x}{x+1}\cdot$$

II. Si, après avoir multiplié par dx, on intègre à partir de $x = 1$, l'on a donc

$$\mathcal{L}.x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2.3x^2} + \frac{1}{3.4x^3} - \frac{1}{4.5x^4} + \cdots$$

$$= \mathcal{L}(2x+1) - \left[\frac{1}{2.3(2x+1)^2} + \frac{1}{4.5(2x+1)^4} + \frac{1}{6.7(2x+1)^6} + \cdots\right] + C.$$

Pour $x = +\infty$, cette égalité se réduit à

$$0 = \mathcal{L}.2 + C.$$

Ainsi,

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}\frac{2x+1}{2x} &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2.3x^2} + \frac{1}{3.4x^3} - \frac{1}{4.5x^4} + \cdots \\ &+ \frac{1}{2.3(2x+1)^2} + \frac{1}{4.5(2x+1)^4} + \frac{1}{6.7(2x+1)^6} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

III. Le développement du premier membre est

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{2(2x)^2} + \frac{1}{3(2x)^3} - \frac{1}{4(2x)^4} + \cdots$$

Ainsi encore, au moyen d'une réduction visible :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2.3(2x+1)^2} + \frac{1}{4.5(2x+1)^4} + \frac{1}{6.7(2x+1)^6} + \cdots \\ &= \frac{1}{2.3.4}\frac{1}{x^2} - \frac{4}{3.4.8}\frac{1}{x^3} + \frac{11}{4.5.16}\frac{1}{x^4} - \frac{26}{5.6.32}\frac{1}{x^5} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Addition. — (*Janvier* 1887.)

IV. Dans l'égalité (2), changeons x en $\frac{1}{x}$; elle devient, après suppression du facteur x^2 :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2.3(2+x)^2} + \frac{x^2}{4.5(2+x)^4} + \frac{x^4}{6.7(2+x)^6} + \cdots \\ &= \frac{1}{2.3.4} - \frac{4x}{3.4.8} + \frac{11x^2}{4.5.16} - \frac{26x^3}{5.6.32} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Évidemment, la première série est convergente pour *toute valeur positive* de x; mais la seconde est divergente dès que x surpasse 1 (*). Ainsi, l'égalité (3), vraie quand x est compris entre *zéro* et *un* (inclusivement), devient *absurde* pour $x > 1$.

Ce n'est pas tout. Si l'on désigne par S le premier membre, un calcul facile donne, en vertu de ce qui précède,

$$S = \frac{1}{x^2}\left\{ \mathcal{L}\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \left(\frac{1}{x} + 1\right) \mathcal{L}(1 + x) + 1 \right\}. \qquad (4)$$

Par exemple, si $x = 2$:

$$S = \frac{1}{4}\left\{ \mathcal{L}\, 2 - \frac{3}{2}\mathcal{L}\, 3 + 1 \right\} = 0{,}011\,307\ldots$$

En effet, la somme des trois premiers termes de la série est

$$\frac{1}{96} + \frac{1}{1260} + \frac{1}{10\,752} = 0{,}010\,417 + 0{,}000\,792 + 0{,}000\,093 = 0{,}011\,302.$$

Quant au second membre de l'égalité (3), il devient, pour $x = 2$:

$$\frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4} + \frac{11}{4.5.4} - \frac{26}{5.6.4} + \cdots;$$

et cette série est divergente.

V. D'après tout cela, on est conduit à la proposition suivante : *Supposons que, pour les valeurs de* x *comprises entre zéro et un* (**), *on ait :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (A)$$

Soit $z = \varphi(x)$; *et, par suite,*

$$f(x) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \qquad (B)$$

(*) Le terme général est

$$u_n = \frac{2^{n+1} - n - 2}{(n+1)(n+2)\,2^{n+1}}\, x^{n-1}.$$

(**) Afin de fixer les idées.

Si la fonction φ *a été convenablement choisie, il peut arriver que la seconde série reste convergente* (*), *pour des valeurs de* x *supérieures à l'unité; et alors l'égalité*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots, \tag{C}$$

vraie pour x *compris entre* 0 *et* 1, *devient absurde pour* x > 1.

CCXXIV. — Quelques intégrales définies (**).

(*Septembre* 1886.)

I. Soient :

$$A = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^{2\pi x} - 1}(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})^2, \tag{1}$$

$$B = \int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x}x\,dx}{e^{2\pi x} - 1}, \tag{2}$$

$$C = \int_0^\infty \frac{e^{-2\alpha x}x\,dx}{e^{2\pi x} - 1}, \tag{3}$$

$$D = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^{2\pi x} - 1} \;(***). \tag{4}$$

Il est clair que $A = B + C - 2D$. D'ailleurs, par la formule de Plana (iv),

$$D = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{24}.$$

Donc

$$A = B + C - \frac{1}{12}. \tag{5}$$

(*) Bien entendu, on la suppose convergente quand x est compris entre 0 et 1.

(**) Complément des *Notes* LIII, XCIII, CXXXVIII et CXCII. Dans celle-ci, au lieu de tdt, on a imprimé $t4$ [formule (A)].

(***) On doit avoir $\alpha^2 < \pi^2$, sans quoi ces intégrales ne seraient pas, toutes, *finies*.

(iv) *Note* XXXIII (t. I, p. 95).

II. L'intégrale B, développée en série, devient

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \int_0^\infty e^{2\alpha x} x dx \, e^{-2k\pi x} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \int_0^\infty e^{-2(k\pi-\alpha)x} x dx.$$

Soit

$$2(k\pi - \alpha)x = t,$$

d'où

$$x dx = \frac{t dt}{4(k\pi - \alpha)^2}.$$

On a donc

$$B = \frac{1}{4} \sum_1^\infty \frac{1}{(k\pi - \alpha)^2} \int_0^\infty e^{-t} t dt,$$

ou

$$B = \frac{1}{4} \sum_1^\infty \frac{1}{(k\pi - \alpha)^2}; \tag{6}$$

puis, par le changement de α en $-\alpha$,

$$C = \frac{1}{4} \sum_1^\infty \frac{1}{(k\pi + \alpha)^2}. \tag{7}$$

III. Si l'on fait $\alpha = a\pi (a < 1)$, l'égalité (5) devient

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1} (e^{a\pi x} - e^{-a\pi x})^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left[\sum_1^\infty \frac{1}{(k-a)^2} + \sum_1^\infty \frac{1}{(k+a)^2} \right] - \frac{1}{12}. \tag{A}$$

Il resterait à évaluer les deux sommes :

$$\frac{1}{(1-a)^2} + \frac{1}{(2-a)^2} + \frac{1}{(3-a)^2} + \cdots,$$

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(2+a)^2} + \frac{1}{(3+a)^2} + \cdots \text{ (*)}.$$

IV. Si $a = \frac{1}{2}$, la première série devient

$$\frac{4}{1^2} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{2};$$

(*) Dans l'état actuel de l'Analyse, ce problème n'est peut-être pas résoluble. Voir la *Note* CXCII.

la seconde :

$$\frac{4}{3^2}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{2}-4.$$

Par conséquent :

$$B=\int_0^\infty \frac{xdx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}=\frac{1}{8}, \tag{B}$$

$$C=\int_0^\infty \frac{xdx}{e^{2\pi x}-1}e^{-\pi x}=\frac{1}{8}-\frac{1}{\pi^2}, \tag{C}$$

$$A=\int_0^\infty \frac{xdx}{e^{2\pi x}-1}\left(e^{\frac{\pi}{2}x}-e^{-\frac{\pi}{2}x}\right)^2=\frac{1}{6}-\frac{1}{\pi^2}\,(^*). \tag{D}$$

Addition. — (*Novembre* 1886.)

V. ***Relation entre deux intégrales.*** — On sait que

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}-\cdots=\frac{1}{2a}+2\int_0^\infty \frac{xdx}{(a^2+x^2)(e^{\pi x}-e^{-\pi x})}\,(^{**}). \tag{8}$$

D'un autre côté, dans les ***Recherches sur la constante*** **G**, nous avons démontré la formule

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}-\cdots=2\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2(a-1)x}\left[e^{2x}+1\right]}. \tag{9}$$

Par conséquent,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2(a-1)x}\left[e^{2x}+1\right]}-\int_0^\infty \frac{xdx}{(a^2+x^2)(e^{\pi x}-e^{-\pi x})}=\frac{1}{4a}. \tag{E}$$

(*) Dans les *Tables* de M. Bierens de Haan, je n'ai trouvé aucune de ces trois intégrales. Cependant, il n'est pas probable qu'elles soient *nouvelles*. La première résulte, si l'on veut, du développement de $\frac{1}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}$.

(**) Tome II, page 327.

VI. *Remarques.* — 1° Si $a = 1$, cette égalité se réduit à celle-ci, dont la vérification est facile :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x}+1} - \int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x^2)(e^{\pi x}-e^{-\pi x})} = \frac{1}{4}.$$

En effet, les valeurs de ces intégrales sont, respectivement : $\frac{1}{2}\mathcal{L}2$, $\frac{1}{2}\mathcal{L}2 - \frac{1}{4}$ (*).

2° De même, lorsque $a = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}} - 4\int_0^\infty \frac{xdx}{(1+4x^2)(e^{\pi x}-e^{-\pi x})} = \frac{1}{2}.$$

La première intégrale a pour valeur $\frac{\pi}{4}$ (**). Par conséquent,

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{(1+4x^2)(e^{\pi x}-e^{-\pi x})} = \frac{1}{16}(\pi - 2). \qquad (10)$$

Cette formule est comprise dans celle d'Abel (***).

(*) *Bierens de Haan,* T. 38 et 138.

(**) *Bierens,* T. 38.

(***) *Note* CXCII. — Si l'on part de l'égalité (E), des intégrations ou des dérivations, relatives au paramètre a, feront découvrir d'autres intégrales définies.

CCXXV. — Relations entre deux théorèmes empiriques.

(Octobre 1884.)

I. 1° Théorème de Goldbach. — *Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers* (*).

2° Postulatum de M. Bertrand. — *Quel que soit un nombre* n, *supérieur à* 6, *il existe toujours un nombre premier, au moins, compris entre* n — 2 *et* $\frac{n}{2}$ (**);

ou, *à plus forte raison :*

Entre n *et* 2n, *il existe, au moins, un nombre premier.*

II. Le théorème de Goldbach consiste en ce que

$$2n = p + q,$$

p et q étant premiers, impairs (***). De ces deux nombres, inférieurs à $2n$, l'un est égal ou inférieur à n. Ainsi :

Entre n *et* 2n, *il existe, au moins, un nombre premier.*

C'est le *postulatum* de M. Bertrand.

(*) Suivant M. *Eneström*, le théorème *empirique* de Goldbach est mentionné, pour la première fois, dans une lettre d'Euler à Goldbach (*Mathesis*, juin 1886, p. 133). M. *Desboves* a complété, ainsi qu'il suit, l'énoncé primitif :

Tout nombre pair, excepté 2, *est la somme de deux nombres premiers, au moins de deux manières.*

(*Nouvelles Annales*, 1855, p. 293.)

(**) *Journal de l'École polytechnique*, 30e cahier, p. 129. Ce célèbre *postulatum* a été démontré par M. Tchebychef (*Journal de Liouville*, t. XVIII, p. 381).

(***) Je suppose $n > 2$.

III. D'après le *postulatum*, on a :

$$b - 1 < p < 2(b - 1),$$
$$b + 1 < q < 2(b + 1);$$

p, q, étant *premiers, impairs*. De là résulte

$$2b < p + q < 4b.$$

Ainsi, entre $2b$ et $4b$, *il existe au moins un nombre pair*, 2n, *égal à la somme de deux nombres premiers.*

IV. Soit λ un nombre premier, moindre que a. De

$$\lambda = \lambda < 2\lambda,$$
$$a - \lambda \mathrel{\overline{\overline{<}}} q < 2a - 2\lambda \text{ (*)},$$

on conclut

$$a \mathrel{\overline{\overline{<}}} \lambda + q < 2a.$$

Par conséquent : 1, 3, 5, ... π *étant les nombres premiers, impairs, qui ne dépassent point un nombre donné*, a, *il existe, entre* a *et* 2a, *des nombres pairs ayant les formes*

$$1 + q, \quad 3 + q, \quad 5 + q, \ldots, \quad \pi + q;$$

q *étant un nombre premier, impair, qui peut varier* (**).

Soit, par exemple, $a = 15$. Les nombres premiers, inférieurs à 15, sont 1, 3, 5, 7, 11, 13. On a :

$$24 = 1 + 23, \quad 26 = 3 + 23, \quad 22 = 5 + 17,$$
$$26 = 7 + 19, \quad 30 = 11 + 19.$$

(*) *Postulatum* de Bertrand.

(**) Si je ne me trompe, cette proposition est un *acheminement* au théorème de Goldbach.

CCXXVI. — Sur une formule de Jacobi (*).

(*Janvier* 1885.)

I. *Transformation.* — Cette formule, aussi remarquable que facile à démontrer, est

$$\left.\begin{aligned}&(1+qz)(1+q^3z)(1+q^5z)(1+q^7z)\ldots\\ &=1+\frac{q}{1-q^2}z+\frac{q}{(1-q^2)(1-q^4)}z^2+\frac{q}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}z^3+\ldots\ (^{**}).\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{A})$$

Soit Q la valeur commune des deux membres. On a

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Q}=\mathcal{L}(1+qz)+\mathcal{L}(1+q^3z)+\mathcal{L}(1+q^5z)+\ldots$$

Développant chaque logarithme, on trouve, au lieu de cette égalité :

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Q}=\frac{q}{1-q^2}z-\frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^4}z^2+\frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}z^3+\cdots \qquad (1)$$

Par suite,

$$\frac{1}{\mathrm{Q}}\frac{d\mathrm{Q}}{dz}=\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^2}{1-q^4}z+\frac{q^3}{1-q^6}z^2-\cdots,$$

ou

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{1-q^2}+2\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}z+3\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}z^2+\cdots\\ &=\left[1+\frac{q}{1-q^2}z+\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}z^2+\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}z^3+\cdots\right]\\ &\times\left[\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^2}{1-q^4}z+\frac{q^3}{1-q^6}z^2-\cdots\right].\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{B})$$

(*) La plupart des résultats suivants ont été communiqués à M. Hermite, à l'époque indiquée.

(**) *Fundamenta nova...*, p. 180.

II. *Remarque.* — Cette égalité donne lieu aux réductions suivantes :

$$\frac{q}{1-q^2}\cdot\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^2}{1-q^4}=2\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)},$$

$$\frac{q}{1-q^2}\cdot\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}-\frac{q^2}{1-q^4}\cdot\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^6}=3\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)},$$

$$\frac{q}{1-q^2}\cdot\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}-\frac{q^2}{1-q^4}\cdot\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^3}{1-q^6}\cdot\frac{q}{1-q^2}$$
$$-\frac{q^4}{1-q^8}=4\frac{q^{16}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)},$$

etc.

III. *Suite.* — Lorsque $z=\pm 1$, la relation générale (B) produit ces deux-ci :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{1-q^2}+2\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+3\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\cdots\\&=\left[1+\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\cdots\right]\\&\times\left[\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}-\cdots\right],\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{1-q^2}-2\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+3\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}-\cdots\\&=\left[1-\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}-\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\cdots\right]\\&\times\left[\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots\right].\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Dans l'égalité (2), le premier facteur est la transcendante β (*).

Donc, dans l'égalité (3), le premier facteur est la transcendante α (**).

(*) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 52; *Notes sur la théorie des fractions continues...*, p. 61.

(**) *Recherches...*, p. 1.

En conséquence :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{1-q^2}+2\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+3\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\cdots\\&\qquad=\beta\left[\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}-\cdots\right],\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{C})$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{1-q^2}-2\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+3\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}-\cdots\\&\qquad=\alpha\left[\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots\right].\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{D})$$

IV. *Autres relations.* — Lorsque $z=1$, le produit représenté par Q devient β; lorsque $z=-1$, ce produit devient α (*). Donc, en vertu de l'égalité (1) :

$$\mathcal{L}(\beta)=\frac{q}{1-q^2}-\frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}-\cdots,\qquad(\mathrm{E})$$

$$-\mathcal{L}(\alpha)=\frac{q}{1-q^2}+\frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots\qquad(\mathrm{F})$$

La différence des premiers membres est

$$\mathcal{L}(\alpha\beta)=-\mathcal{L}(\beta')\ (^{**});$$

leur somme est

$$\mathcal{L}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\mathcal{L}\left(k'^{-\frac{1}{4}}\right)\ (^{***})$$

Par suite :

$$\mathcal{L}(\beta')=\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{1}{2}\frac{q^4}{1-q^8}+\frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^{12}}+\cdots,\qquad(\mathrm{G})$$

$$-\mathcal{L}(k')=8\left[\frac{q}{1-q^2}+\frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}+\frac{1}{5}\frac{q^5}{1-q^{10}}+\cdots\right]\ (^{\mathrm{IV}}).\qquad(\mathrm{H})$$

(*) *Note* CLX.

(**) *Ibid.*

(***) En effet,

$$\frac{\beta}{\alpha}=(kk')^{-\frac{1}{\ }}\quad k^{-\frac{1}{12}}k'^{\frac{1}{6}}.$$

(*Loc. cit.*).

(IV) *Fundamenta*..., p. 103.

V. *Remarque.* — On a (*)

$$\mathfrak{L}(\beta') = \mathfrak{L}(1+q^2) + \mathfrak{L}(1+q^4) + \mathfrak{L}(1+q^6) + \cdots;$$

puis, par le développement de chaque logarithme :

$$\mathfrak{L}(\beta') = \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{1}{2}\frac{q^4}{1-q^4} + \frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^6} - \cdots \qquad \text{(G')}$$

La comparaison des égalités (G), (G′) donne cette *identité*, probablement connue :

$$\frac{q^2}{1-q^4} + \frac{1}{2}\frac{q^4}{1-q^8} + \frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^{12}} + \cdots = \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{1}{2}\frac{q^4}{1-q^4} + \frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^6} - \cdots \qquad (4)$$

VI. *Autre identité.* — On sait que

$$\left.\begin{aligned} &1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots \\ &= \beta\left[1 + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^{12}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots\right] \text{ (**)}. \end{aligned}\right\} \text{(C')}$$

Donc, si l'on élimine β entre les égalités (C), (C′), et que l'on pose, pour abréger :

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{q}{1-q} + 2\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + 3\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots, \\ B &= \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^3}{1-q^6} - \cdots, \\ A' &= 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots, \\ B' &= 1 + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^{12}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots; \end{aligned}\right\} (5)$$

on a

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}. \qquad \text{(K)}$$

(*) *Note* CLX.

(**) *Recherches..*, p. 52, note.

VII. *Suite.* — La *vérification* de cette identité (K) semble difficile : à plus forte raison le serait-il d'effectuer les développements des deux membres. Mais on peut commencer par la réduire. A cet effet, j'observe que :

$$A = B\left[1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \cdots\right], \tag{2}$$

$$A' = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots = \beta\beta' \ (^*),$$

$$B' = (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots = \beta' \ (^{**}).$$

Ainsi déjà, par la suppression du facteur B :

$$\left[1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \cdots\right] = \beta;$$

formule connue (***).

Ce n'est pas tout. Dans la relation (K), la valeur commune des deux membres est

$$\frac{B}{B'} = \frac{1}{\beta'}\left[\frac{q}{1-q^2} - \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^3}{1-q^6} - \cdots\right]. \tag{6}$$

Dans la série, changeons q en $-q$: elle devient

$$-\left[\frac{q}{1-q^2} + \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^3}{1-q^6} + \cdots\right].$$

c'est-à-dire :

$$-\left[\frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \cdots\right] \ (^{\text{IV}}).$$

Il est visible que le développement de cette nouvelle série est

$$\sum_1^\infty N_i(n) q^n;$$

(*) *Recherches...*, pp. 48 et 1.

(**) *Ibid.*, p. 1.

(***) *Ibid.*, p. 52.

(IV) *Notes sur la théorie des fractions continues...*, p. 15.

$N_i(n)$ représentant *le nombre des diviseurs impairs de* n (*).
L'égalité (6) se transforme donc en

$$\frac{B}{B'} = \frac{1}{\beta'} \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} N_i(n) q^n;$$

puis, à cause de

$$\frac{1}{\beta'} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \varphi_i(n) q^{2n} \text{ (**)}:$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \varphi_i(n) q^{2n} \times \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} N_i(n) q^n. \qquad \text{(L)}$$

Ainsi, la fonction très complexe, $\frac{A}{A'}$, est, assez facilement, développable suivant les puissances de q.

VIII. *Remarques.* — 1° D'après ce qui précède, l'égalité (C) peut être écrite ainsi :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{q}{1-q^2} + 2\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + 3\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots \\ &\quad = \sum_0^{\infty} \varphi_i(n) q^n \times \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} N_i(n) q^n. \end{aligned}\right\} \text{(M)}$$

2° La combinaison des égalités (L), (M) donne cette autre identité, peut-être nouvelle :

$$\sum_0^{\infty} \varphi_i(n) q^n = \sum_0^{\infty} (-1)^n \varphi_i(n) q^{2n} \times \sum_0^{\infty} \varphi(n) q^n. \qquad \text{(N)}$$

IX. *Équations caractéristiques.* — Si l'on pose

$$\varphi(q) = \sum_0^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}}, \qquad (7)$$

(*) $N_i(n)$ est aussi le *nombre des diviseurs du plus grand diviseur impair de* n.

(**) *Recherches...*, p. 5. $\varphi_i(n)$ *est le nombre des décompositions de* n *en parties impaires, inégales.*

et que l'on représente par $f(q)$ la *somme de la série de Lambert :*

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^4}{1-q^4}+\cdots,$$

on a

$$\varphi(q)=f(q)-f(q^2)\ (^*). \tag{8}$$

La série

$$\psi(q)=\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}-\cdots, \tag{9}$$

peut, également, être rattachée à la transcendante $f(q)$.

En effet, il est visible que

$$\psi(q)=\varphi(q)-2\varphi(q^2);$$

ou, à cause de l'égalité (8) :

$$\psi(q)=f(q)-3f(q^2)+2f(q^4). \tag{10}$$

Ainsi, comme nous venons de le dire, la transcendante $f(q)$ étant connue, l'autre le sera aussi. Mais l'on peut aller plus loin. La série de Lambert, ordonnée suivant les puissances de q, est, comme on sait,

$$q+2q^2+2q^3+3q^4+\cdots+\mathrm{N}(n)\,q^n+\cdots; \tag{11}$$

$\mathrm{N}(n)$ représentant le *nombre des diviseurs de* n. Conséquemment,

$$\psi(q)=\sum_1^\infty \mathrm{N}(n)\left[q^n-3q^{2n}+2q^{4n}\right]; \tag{12}$$

puis, si l'on suppose

$$\psi(q)=\sum_1^\infty \mathrm{C}_n q^n: \tag{13}$$

$$\mathrm{C}_n=\mathrm{N}(n)-3\mathrm{N}\left(\frac{n}{2}\right)+2\mathrm{N}\left(\frac{n}{4}\right)\ (^{**}). \tag{14}$$

(*) *Notes sur la théorie...*, p. 14.

(**) Chacun des symboles $\mathrm{N}\left(\frac{n}{2}\right)$, $\mathrm{N}\left(\frac{n}{4}\right)$ doit être remplacé par zéro, *quand la fraction correspondante n'égale pas un nombre entier.*

Addition. — (*Novembre* 1886.)

X. On a aussi :

$$f(q) - f(-q) = \left(\frac{q}{1-q} + \frac{q}{1+q}\right) + \left(\frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^3}{1+q^3}\right) + \cdots$$

$$= 2\left[\frac{q}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} + \cdots\right],$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\left[f(q) - f(-q)\right] = \psi(q). \tag{16}$$

La comparaison avec la formule (10) donne la relation :

$$f(q) + f(-q) - 4f(q^2) + 2f(q^4) = 0, \tag{17}$$

qui caractérise la série de Lambert (*).

XI. Soit, comme précédemment,

$$f(q) = \sum_1^\infty \mathrm{N}(n) q^n. \tag{18}$$

L'égalité (17) devient

$$\sum_1^\infty \mathrm{N}(n)\left[q^n + (-q)^n - 4q^{2n} + 2q^{4n}\right] = 0.$$

Dans le premier membre, le coefficient de q^{2n}, lequel doit être nul, a pour expression :

$$2\mathrm{N}(4n) - 4\mathrm{N}(2n) + 2\mathrm{N}(n).$$

Nous trouvons donc ce petit théorème :

Le nombre des diviseurs de 2n *égale la demi-somme du nombre des diviseurs de* n *et du nombre des diviseurs de* 4n (**).

(*) La sommation de cette série est ainsi ramenée au problème suivant: *Quelle est la fonction* f *qui satisfait à la condition* (17)?

(**) Évident, mais non signalé, je pense, dans les Traités d'Arithmétique. On peut le généraliser ainsi :

Soit p *un nombre premier. Le nombre des diviseurs de* pn *égale la demi-*

XII. On peut remplacer l'équation (17) par une autre, plus simple, et contenant la fonction φ. En effet, de l'égalité

$$\varphi(q) = f(q) - f(q^2), \tag{9}$$

on déduit :

$$\varphi(-q) = f(-q) - f(q^2),$$
$$\varphi(q^2) = f(q^2) \quad - f(q^4);$$

puis

$$\varphi(q) + \varphi(-q) - 2\varphi(q^2) = f(q) + f(-q) - 4f(q^2) + 2f(q^4);$$

ou

$$\varphi(q) + \varphi(-q) = 2\varphi(q^2) \ (^*). \tag{19}$$

Autre addition. — (*Février* 1887.)

XIII. L'identité

$$\frac{q^2}{1-q^4} + \frac{1}{2}\frac{q^4}{1-q^8} + \frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^{12}} + \cdots = \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{1}{2}\frac{q^4}{1-q^4} + \frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^6} - \cdots \tag{4}$$

peut être généralisée ainsi :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x}{1-x^2} + a\frac{x^2}{1-x^4} + b\frac{x^3}{1-x^6} + c\frac{x^4}{1-x^8} + d\frac{x^5}{1-x^{10}} \\
&\qquad + e\frac{x^6}{1-x^{12}} + f\frac{x^7}{1-x^{14}} + g\frac{x^8}{1-x^{16}} + \cdots \\
&= \frac{x}{1-x} + (a-1)\frac{x^2}{1-x^2} + b\frac{x^3}{1-x^3} + (c-a)\frac{x^4}{1-x^4} + d\frac{x^5}{1-x^5} \\
&\qquad + (e-b)\frac{x^6}{1-x^6} + f\frac{x^7}{1-x^7} + (g-c)\frac{x^8}{1-x^8} + \cdots
\end{aligned}\right\} \text{(P)}$$

somme du nombre des diviseurs de n *et du nombre des diviseurs de* p^2n.

Par exemple :

$$N(24) = 8, \quad N(120) = 16, \quad N(600) = 24; \quad \text{et} \quad 16 = \tfrac{1}{2}(8 + 24).$$

(*) Cette égalité résulte, immédiatement, de la *définition* (8).

Par exemple,

$$\frac{x}{1-x^2} + 2\frac{x^2}{1-x^4} + 3\frac{x^3}{1-x^6} + 4\frac{x^4}{1-x^8} + 5\frac{x^5}{1-x^{10}} + 6\frac{x^6}{1-x^{12}}$$
$$+ 7\frac{x^7}{1-x^{14}} + 8\frac{x^8}{1-x^{16}} + 9\frac{x^9}{1-x^{18}} + 10\frac{x^{10}}{1-x^{20}} + \cdots$$
$$= \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + 3\frac{x^3}{1-x^3} + 2\frac{x^4}{1-x^4} + 5\frac{x^5}{1-x^5} + 3\frac{x^6}{1-x^6}$$
$$+ 7\frac{x^7}{1-x^7} + 4\frac{x^8}{1-x^8} + 9\frac{x^9}{1-x^9} + 5\frac{x^{10}}{1-x^{10}} + \cdots (*).$$

CCXXVII. — Sur les nombres combinatoires (**).

(*Décembre* 1886.)

I. *Développement de* $(x + a)^{n-2}$. — Dans ma démonstration du théorème de Staudt et Clausen, on trouve le lemme suivant : n *étant un nombre premier, supérieur à* k,

$$C_{n-2,k-1} = \mathfrak{M}n \mp k, \tag{1}$$

selon que k *est pair ou impair* (***).

Si l'on change k en $k - 1$, on a donc

$$C_{n-2,k-2} = \mathfrak{M}n \pm (k-1);$$

(*) De cette égalité, on conclut la propriété suivante, qu'il est facile de vérifier et de *généraliser :*

Soit A *la somme des diviseurs d'un nombre entier* N, *donnant des quotients impairs.*

Soit B *la somme des diviseurs donnant des quotients pairs.*

Soit, enfin, C *la somme des diviseurs de* N, *impairs.*

On a

$$A = B + C.$$

(**) Complément à la *Note* CLXXX.

(***) *Note* LXXVI.

et, par conséquent,

$$C_{n-2,k-1} + C_{n-2,k-2} = \mathfrak{M}n \mp 1 \ (^*). \qquad (2)$$

Ainsi, *dans le développement de* $(x + a)^{n-2}$ (n premier), *la somme de deux coefficients consécutifs est un multiple de* n, *diminué ou augmenté de l'unité.*

En outre, d'après l'égalité (2) :

La somme des deux premiers coefficients $= \mathfrak{M}n - 1$;

La somme des quatre premiers coefficients $= \mathfrak{M}n - 2$;

La somme des six premiers coefficients $= \mathfrak{M}n - 3$;

. . . .

La somme de tous les coefficients, ou $2^{n-2} = \mathfrak{M}n - \frac{n-1}{2}$ (**).

Enfin, à cause de

$$C_{n-2,k} = \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-k-1)}{1.2.3\ldots k}:$$

Dans le développement de $(x + a)^{n-2}$ (n premier) :

$$1 = \mathfrak{M}n + 1, \quad \frac{n-2}{1} = \mathfrak{M}n - 2, \quad \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} = \mathfrak{M}n + 3, \ldots$$

II. *Remarque.* — *Si* n — 2 *et* n *sont premiers,* on a, simultanément :

$$C_{n-2,k-1} + C_{n-2,k-2} = \mathfrak{M}n \mp 1,$$
$$C_{n-2,k-1} + C_{n-2,k-2} = \mathfrak{M}(n-2);$$

et, par suite, plusieurs solutions de l'équation indéterminée

$$nx - (n-2)y = \pm 1. \qquad (3)$$

(*) — 1 si k est *pair.*

(**) Cette dernière égalité équivaut à

$$2^{n-1} = \mathfrak{M}(n) + 1;$$

conformément au théorème de Fermat.

Par exemple, pour satisfaire à

$$13x - 11y = \pm 1,$$

on peut prendre :

$$y = \frac{1}{11}[C_{11,2} + C_{11,1}] = 6, \quad y = \frac{1}{11}[C_{11,3} + C_{11,2}] = 20,$$

$$y = \frac{1}{11}[C_{11,4} + C_{11,3}] = 45, \quad y = \frac{1}{11}[C_{11,5} + C_{11,4}] = 72,$$

$$y = \frac{1}{11}[C_{11,6} + C_{11,5}] = 84.$$

Les valeurs correspondantes de x sont :

$$5,\ 17,\ 38,\ 61,\ 71.$$

En effet :

$$13.5 - 11.6 = -1, \quad 13.17 - 11.20 = +1, \quad 13.38 - 11.45 = -1,$$

$$13.61 - 11.72 = +1, \quad 13.71 - 11.84 = -1.$$

III. *Développement de* $(\mathrm{x} + \mathrm{a})^{\mathrm{n}-1}$. — Le premier membre de la relation (2) est réductible à $C_{n-1,k-1}$ (*). Par conséquent :

Dans le développement de $(\mathrm{x} + \mathrm{a})^{\mathrm{n}-1}$ (n premier), *chaque coefficient est un multiple de* n, *augmenté ou diminué de l'unité.*

De là résulte que l'équation (3) (**) admet, comme solution :

$$x = \frac{1}{n}[C_{n-1,k-1} \pm 1], \quad y = \frac{1}{n-2} C_{n-1,k-1}. \tag{4}$$

(*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 43.

(**) Cette équation (3) est vérifiée, selon le signe du second membre, par

$$x = \pm\frac{1}{2}(n-3), \quad y = \pm\frac{1}{2}(n-1).$$

Addition. — (*Février* 1887.)

V. *Propriétés arithmétiques et algébriques.* — De la relation

$$C_{p+q,q} \pm C_{n-p-1,q} = \mathfrak{M}n \text{ (*)},$$

on conclut aisément

$$C_{n-p-1,q} \mp C_{n-q-1,p} = \mathfrak{M}n \text{ (**)},$$

ou

$$C_{n-p-1,\, n-p-q-1} \pm C_{n-q-1,\, n-p-q-1} = \mathfrak{M}n;$$

et, à plus forte raison,

$$\begin{aligned} &(n-p-1)(n-p-2)\dots(q+1) \\ &\mp (n-q-1)(n-q-2)\dots(p+1) = \mathfrak{M}n. \end{aligned} \tag{6}$$

Soient :

$$p+1=a, \quad q+1=b, \quad n=a+b+c;$$

de manière que

$$a(a+1)\dots(a+c) \pm b(b+1)\dots(b+c) = \mathfrak{M}(a+b+c);$$

ou, en appelant $\varphi(a, b, c)$ le quotient, par $a+b+c$, du premier membre,

$$a(a+1)\dots(a+c) \pm b(b+1)\dots(b+c) = (a+b+c)\varphi(a,b,c) \text{ (***)}. \tag{A}$$

Cette égalité, obtenue en supposant que a, b, c sont des nombres entiers, dont la somme est un nombre premier, semble prouver, seulement, que $\varphi(a, b, c)$ est un nombre entier. Mais elle est bien plus générale.

En effet a, b, *étant des quantités quelconques*, remplaçons a, dans le premier membre, par $-(b+c)$. Il devient

$$(-1)^{c+1}(b+c)(b+c-1)\dots b \mp b(b+1)\dots(b+c);$$

(*) *Note* LXXVI (t. I, p. 324). Le signe —, si q est *pair*.

(**) Le signe — 1, si p et q sont *de même parité*.

(***) D'après les hypothèses précédentes, a et b sont de *même parité* quand c est *impair*, et de *parités contraires*, quand c est *pair*.

ou, selon que c est *pair* ou *impair*,

$$\pm b(b+1)\ldots(b+c) \mp b(b+1)\ldots(b+c) = 0.$$

Ainsi, le premier membre de l'égalité (A) est *algébriquement divisible* par $a+b+c$. Donc, comme on l'a vu, il est *arithmétiquement divisible* par $a+b+c$, quand les lettres a et b sont remplacées par des nombres entiers.

En résumé :

1° *Le polynôme*

$$a(a+1)\ldots(a+c) \pm b(b+1)\ldots(b+c) \text{ (*)},$$

est divisible, algébriquement, par a + b + c.

2° *Si* a, b *sont des nombres entiers, le nombre entier*

$$a(a+1)\ldots(a+c) \pm b(b+1)\ldots(b+c),$$

est divisible par a + b + c.

3° Soit $\varphi(a, b, c)$ le quotient : *pour toutes valeurs entières de* a, b, *on a*

$$(a+b+c)\varphi(a,b,c) = \mathfrak{M}(1.2.3\ldots\overline{c+1}) \text{ (**)}.$$

4° En outre, *si* a + b + c *est un nombre premier,*

$$\varphi(a,b,c) = \mathfrak{M}(1.2.3\ldots\overline{c+1}).$$

VI. *Application.* — Soient

$$a = 6, \quad b = 2, \quad c = 5;$$

d'où résulte

$$a+b+c = 13.$$

On trouve

$$\varphi(a,b,c) = \frac{1}{13}(6.7.8.9.10.11 - 2.3.4.5.6.7) = 25200;$$

puis

$$25200 = \mathfrak{M}(1.2.3.4.5.6).$$

(*) Le signe +, si c est *pair*.

(**) En effet, dans l'égalité (6), le premier membre est divisible par $1.2.3\ldots(n-p-q-1)$, c'est-à-dire, par $1.2.3\ldots(c+1)$.

CCXXVIII. — Application d'un théorème de Binet.

(*Septembre* 1885.)

I. Dans le Mémoire intitulé : *Sur quelques intégrales définies* (*), j'ai démontré que si l'on fait, suivant la notation de Gauss :

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\alpha', x) = 1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\alpha+\alpha'}x + \frac{\alpha'\alpha+1)}{1 . 2}\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+\alpha')(\alpha+\alpha'+1)}x^2 + \cdots, \quad (1)$$

on a

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\alpha', x) = \frac{\Gamma(\alpha+\alpha')}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')}\int_0^1 \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\alpha'-1}}{(1-\theta x)^{\beta}}d\theta; \quad (2)$$

relation due à Binet.

Soient

$$\beta = 1, \quad \alpha' = \frac{3}{2}.$$

La série (1) devient

$$\left.\begin{aligned} y = 1 &+ \frac{2\alpha}{2\alpha+3}x + \frac{2\alpha(2\alpha+2)}{(2\alpha+3)(2\alpha+5)}x^2 \\ &+ \frac{2\alpha(2\alpha+2)(2\alpha+4)}{(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}x^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Donc, par le théorème de Binet,

$$y = \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\int_0^1 \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}{1-\theta x}d\theta. \quad (4)$$

II. Soit A l'intégrale. Il est clair que

$$A = \frac{1}{x^{\alpha-1}}\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}{1-\theta x}d\theta - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\int_0^1 \frac{(\theta x)^{\alpha-1}-1}{\theta x - 1}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta;$$

(*) *Académie de Belgique,* octobre 1885.

et, si $\alpha - 1$ est un *nombre entier :*

$$x^{\alpha-1}\mathrm{A} = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}{1-\theta x}\,d\theta - \int_0^1 [x^{\alpha-2}\theta^{\alpha-2} + \cdots + x\theta + 1](1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta. \tag{5}$$

Le second terme égale

$$-\left[\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}x^{\alpha-2} + \frac{\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}x^{\alpha-3} + \cdots + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}x + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\right]\Gamma\left(\frac{3}{2}\right).$$

Quant au premier, si l'on fait

$$\theta = 1 - \frac{x}{1-x}t^2,$$

il se transforme en

$$2\int_0^{\sqrt{\frac{x}{1-x}}} \frac{\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{3}{2}}t^2dt}{(1-x)(1+t^2)} = \frac{2}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,[t - \operatorname{arc\,tg} t]_0^{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$$

$$= \frac{2}{x}\left[1 - \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\operatorname{arc\,sin} x\right].$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A} = {} & \frac{2}{x^\alpha}\left[1 - \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\operatorname{arc\,sin} x\right] \\ & - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\left\{\frac{2.4\ldots\overline{2\alpha-4}}{5.7\ldots\overline{2\alpha-1}}x^{\alpha-2} + \frac{2.4\ldots\overline{2\alpha-6}}{5.7\ldots\overline{2\alpha-3}}x^{\alpha-3} + \cdots + \frac{2}{5}x + 1\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

III. Si $x = 1$, cette formule se réduit à

$$\mathrm{A} = 2 - \left\{\frac{2\,.\,4\,\ldots\,\overline{2\alpha-4}}{5\,.\,7\,\ldots\,\overline{2\alpha-1}} + \frac{2\,.\,4\,\ldots\,\overline{2\alpha-6}}{5\,.\,7\,\ldots\,\overline{2\alpha-3}} + \cdots + \frac{2}{5} + 1\right\}. \tag{7}$$

D'ailleurs, par les relations (4) et (2) :

$$y = \mathrm{A}\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}. \tag{8}$$

Donc

$$y=1+\frac{2\alpha}{2\alpha+3}+\frac{2\alpha(2\alpha+2)}{(2\alpha+3)(2\alpha+5)}+\frac{2\alpha(2\alpha+2)(2\alpha+4)}{(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}+\dots \quad (9)$$

Ainsi : 1° *La série* (2) *reste convergente pour* x = 1 (*); 2° *la limite de la série* (9) *est commensurable.*

Addition. — (*Avril* 1887.)

IV. Lorsque $x = 1$, la série (1) se réduit à

$$1+\frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\alpha+\alpha'}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+\alpha')(\alpha+\alpha'+1)}+\dots$$

La condition de convergence est, on le reconnaît facilement,

$$\beta < \alpha'.$$

Quand elle est remplie, on a, comme expression de la somme :

$$s=\frac{\Gamma(\alpha+\alpha')}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')}\int_0^1 \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\alpha'-\beta-1}d\theta;$$

c'est-à-dire :

$$s=\frac{\Gamma(\alpha+\alpha')\Gamma(\alpha'-\beta)}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\alpha+\alpha'-\beta)}. \quad (10)$$

Conséquemment, *si* α, α', β *sont des nombres entiers, la somme* s *est commensurable* (**).

Par exemple, après suppression du premier terme,

$$2.\frac{3}{7}+3.\frac{3.4}{7.8}+4.\frac{3.4.5}{7.8.9}+\dots=4.$$

(*) Pour démontrer directement cette proposition, il suffit d'appliquer le *théorème* XIV du *Traité élémentaire des séries* (avril 1887).

(**) On suppose $\beta < \alpha'$.

CCXXIX. — Une récréation arithmétique (*).

(*Mai* 1885.)

I. p, q *étant des nombres premiers; soient :* δ *un diviseur de* q — p (**), a *un nombre entier donné, inférieur à* p.

Si l'on considère la progression

$$a, \quad a + \delta, \quad a + 2\delta, \quad a + 3\delta, \ldots, \tag{1}$$

qu'on divise par p *les* p *premiers termes, et que l'on prenne les résidus positifs correspondants, ils formeront une suite*

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \ldots\ldots, \quad a_n, \ldots \text{ (***)}. \tag{A}$$

De même, le diviseur q *donnera lieu à une suite*

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \ldots\ldots, \quad b_n, \ldots \tag{B}$$

Cela posé, si, dans (B), *on supprime les termes égaux ou supérieurs à* p, *on retombera sur la suite* (A).

II. *Exemple :*

$$p = 13, \quad q = 23. \quad \delta = 5, \quad a = 2.$$

La progression est

2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, 62, 67, 72, ...

Divisant par 13, on trouve les résidus

$$2, 7, 12, 4, 9, 1, 6, 11, 3, 8, 0, 5, 10, 2, 7, \ldots \tag{A'}$$

Divisant par 23, on obtient la suite

$$\left.\begin{array}{l} 2, 7, 12, \overset{+}{17}, \overset{+}{22}, 4, 9, \overset{+}{14}, \overset{+}{19}, 1, 6, 11, \overset{+}{16}, \overset{+}{21}, \\ 3, 8, \overset{+}{13}, \overset{+}{18}, 0, 5, 10, \ldots \end{array}\right\} \tag{B'}$$

(*) Tirée, en partie, du *Bulletin de l'Académie*. Elle a été suggérée par l'un de ces jeux de cartes appelés *patiences*.

(**) On suppose $q > p$.

(***) $a_1 = a$.

Celle-ci contient les termes de la suite (A′), rangés comme ils le sont dans (A′).

III. *Démonstration* — Les termes généraux des suites (A), (B) sont donnés par les formules

$$a + (n - 1)\delta = px + a_n, \quad a + (n' - 1)\delta = qx' + b_{n'}. \qquad (2)$$

Si l'on suppose $x' = x$, $b_{n'} = a_n$, il en résulte

$$(n' - n)\delta = (q - p)x;$$

puis, à cause de

$$q - p = \mathfrak{M}(\delta) = l\delta:$$

$$n' = n + lx,$$

ou

$$a + (n' - 1)\delta = a + (n - 1)\delta + (q - p)x. \qquad (3)$$

Ainsi, *les termes de la progression* (1), *déterminés par cette formule, ont leurs résidus par* q : 1° *inférieurs à* p ; 2° *égaux aux termes de la suite* (A) ; 3° *rangés dans le même ordre que ceux-ci.*

IV. *Remarque.* — Dans la progression

2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, 62, 67, 72, 77, 82, 87, 92, 97, 102, 107, 112,

les valeurs de x sont

0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8.

A cause de $q - p = 10$, les termes *efficaces* sont donc :

2, 7, 12, 27, 32, 47, 52, 57, 72, 77, 92, 97, 102, 117, 122, 127, 142, 147, 162, 167, 172, 187, 192.

En effet, si l'on divise ceux-ci par 23, on trouve les résidus

2, 7, 12, 4, 9, 1, 6, 11, 3, 8, 0, 5, 10, 2, 7, ...

V. *Généralisation.* — *Les* p *résidus formant une suite telle que* (A) *se reproduiront, sans altération d'ordre, dans toutes les suites, analogues à* (B), *répondant aux diviseurs premiers compris dans la formule*

$$q = p + \mathfrak{M}(\delta).$$

Exemple :

$$p = 7, \quad \delta = 6, \quad a = 2.$$

$$2,\ 1,\ 0,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3.$$

$$q = 13 :\ 2,\ \overset{+}{8},\ 1,\ \overset{+}{7},\ 0,\ 6,\ \overset{+}{12},\ 5,\ \overset{+}{11},\ 4,\ \overset{+}{10},\ 3,\ \overset{+}{9}.$$

$$q = 19 :\ 2,\ \overset{+}{8},\ \overset{+}{14},\ 1,\ \overset{+}{7},\ \overset{+}{13},\ 0,\ 6,\ \overset{+}{12},\ \overset{+}{18},\ 5,\ \overset{+}{11},\ \overset{+}{17},\ 4,\ \overset{+}{10},\ \overset{+}{16},\ 3,\ \overset{+}{9}\ \overset{+}{15}.$$

$$q = 31 :\ 2,\ \overset{+}{8},\ \overset{+}{14},\ \overset{+}{26},\ \overset{+}{26},\ 1,\ \overset{+}{7},\ \overset{+}{13},\ \overset{+}{19},\ \overset{+}{25},\ 0,\ 6,\ \overset{+}{12},\ \overset{+}{18},\ \overset{+}{24},\ \overset{+}{30},\ 5,\ \overset{+}{11},\ \overset{+}{17},\ \overset{+}{23},\ \overset{+}{29},\ 4,\ \overset{+}{16},\ \overset{+}{16},\ \overset{+}{22},\ \overset{+}{28},\ 3,\ \overset{+}{9},\ \overset{+}{15},\ \overset{+}{21},\ \overset{+}{27}.$$

Addition. — (*Avril* 1887.)

IV. Dans la démonstration ci-dessus (I), rien n'exprime que les nombres p, q *sont premiers*. Cette condition est donc superflue. En outre, a et δ doivent être supposés *premiers entre eux*, sans quoi la progression (1) serait réductible à une progression plus simple (*).

Nous pouvons donc transformer ainsi l'énoncé primitif :

Soit une progression

$$a, \quad a + \delta, \quad a + 2\delta, \quad a + 3\delta, \ldots,$$

dans laquelle a *et* δ *sont premiers entre eux. Soient* p, q *deux nombres premiers entre eux, et tels que* $q - p = \mathfrak{M}(\delta)$. *Si l'on divise, par* p, *les* p *premiers termes de la progression, on formera une suite de* p *résidus :*

$$a_1\ (^{**}), \quad a_2, \ldots\ldots, \quad a_p. \tag{A}$$

De même, le diviseur q *donnera les* q *résidus :*

$$b_1\ (^{***}), \quad b_2, \ldots\ldots, \quad b_q. \tag{B}$$

Cela posé, si l'on supprime, dans (B), *les termes égaux ou supérieurs à* p, *on retombera sur la suite* (A) (IV).

(*) Après suppression du plus grand commun diviseur entre a et δ.

(**) Afin que $a_1 = a$, on prendra $p > a$.

(***) $b_1 = a_1 = a$.

(IV) Les termes de (B), *barrés*, ou *surmontés d'une croix*, sont au nombre de $q - p$.

CCXXX. — Sur la polhodie.

(*Février* 1885.)

I. Dans les *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces,* j'ai donné (p. 39) les équations

$$x^2+y^2+z^2-\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^4}x^2=v^2-\frac{(v^2-b^2)(v^2-c^2)}{v^2}, \quad (1)$$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}{b^4}y^2=v^2-\frac{(v^2-c^2)(v^2-a^2)}{v^2}, \quad (2)$$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{c^4}z^2=v^2-\frac{(v^2-a^2)(v^2-b^2)}{v^2} \quad (3)$$

de trois surfaces de révolution, contenant la *polhodie* (ligne de courbure constante). *Ces surfaces de révolution sont,* respectivement, *semblables.*

Par exemple, les équations (1) représentent des *ellipsoïdes semblables,* parce que *les coefficients de* x^2, y^2, z^2 *sont indépendants du paramètre* v.

II. La même propriété subsiste pour les projections de la polhodie, sur les plans principaux. En effet, la combinaison des équations (1), (2) donne

$$\frac{a^2-c^2}{a^4}x^2+\frac{b^2-c^2}{b^4}y^2=1-\frac{c^2}{v^4}; \quad (4)$$

etc.

CCXXXI. — Extrait d'une lettre adressée à M. Miller,
Rédacteur de l'*Éducational Times*.

(*Octobre* 1885.)

I. « M. Neuberg m'a communiqué la curieuse identité due à » M. *Edwards* (*Question* 6113) (*), ainsi que les solutions » données par MM. *Symons* et *Terry*. A ce propos, permettez-» moi de faire la remarque suivante :

» Dans les *Comptes rendus* (t. LIV), et plus tard dans les *Mélanges mathématiques* (**), j'ai donné les formules

$$\pm S_{2k+1} = \cdots, \qquad \pm S_{2k} = \cdots,$$

» relatives aux sommes des puissances $2k+1$ ou $2k$ des » racines de

$$x^3 + px + q = 0.$$

» Au moyen de ces formules, on peut former autant d'identités » que l'on voudra, analogues à celle dont il s'agit. Il suffit, pour » cela, d'éliminer p et q entre trois de mes formules. Par » exemple :

$$25(x^3+y^3+z^3)(x^7+y^7+z^7) = 21(x^5+y^5+z^5)^2,$$

$$5^5.7^3(x^5+y^5+z^5)^2(x^7+y^7+z^7)^2(x^{11}+y^{11}+z^{11})$$
$$= 11\left[5^7(x^7+y^7+z^7)^5 + 7^5(x^5+y^5+z^5)^7\right];$$

» si

$$x+y+z=0. \text{ »}$$

(*) *Si*

$$x+y+z=0,$$

on a

$$50(x^7+y^7+z^7)^2 = 49(x^4+y^4+z^4)(x^5+y^5+z^5)^2.$$

(**) *Note* XLVIII.

Addition. — (*Octobre* 1885.)

II. Lorsque k égale 2 ou 3, les formules citées (*) donnent :

$$S_4 = 2p^2, \quad S_5 = 5pq, \quad S_7 = -7p^2q; \tag{1}$$

équations d'où résultent les systèmes suivants :

$$p = \sqrt{\frac{1}{2}S_4}, \quad q = \frac{2S_5}{S_4};$$

$$p = -\frac{5}{7}\frac{S_7}{S_5}, \quad q = -\frac{7}{25}\frac{S_5^2}{S_7};$$

$$p = \sqrt{\frac{1}{2}S_4}, \quad q = -\frac{2S_7}{7S_4} \quad (^{**}).$$

Au moyen du deuxième, la relation générale

$$S_n + pS_{n-2} + qS_{-3} = 0 \quad (^{***}), \tag{2}$$

devient

$$175\,S_5S_7S_n - 125\,S_7^2S_{n-2} - 49\,S_5^3S_{n-3} = 0. \tag{A}$$

III. *Remarques.* — 1° Cette égalité devient *identique,* si les quantités x, y, z vérifient la condition

$$x + y + z = 0.$$

Ainsi, quels que soient x, y, on a, *identiquement :*

$$\left.\begin{aligned} &175\left[(x+y)^5 - x^5 - y^5\right]\left[(x+y)^7 - x^7 - y^7\right]\left[(x+y)^n - x^n - y^n\right] \\ &= 125\left[(x+y)^7 - x^7 - y^7\right]^2\left[(x+y)^{n-2} - x^{n-2} - y^{n-2}\right] \\ &+ \ 49\left[(x+y)^5 - x^5 - y^5\right]^3\left[(x+y)^{n-3} - x^{n-3} - y^{n-3}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

2° L'identité (B) ne diffère, qu'en apparence, de celle qui

(*) Tome I, page 186.

(**) Si l'on égale les deux expressions de p, on a l'identité trouvée par M. Edwards.

(***) *Note* XLVIII.

résulte de l'égalité (2), quand on y substitue les valeurs connues :

$$p = -(x^2 + xy + y^2), \quad q = xy(x + y).$$

Cette seconde forme de (B) est donc

$$S_n = (x^2 + xy + y^2) S_{n-2} + xy(x + y) S_{n-3}. \tag{C}$$

Autre addition. — (Mai 1887.)

IV. La première des équations (1) donne une infinité de solutions de ce problème :

Trouver une somme de trois bi-carrés égale au double d'un carré.

Il en résulte, en effet, que, pour satisfaire à l'équation indéterminée

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2u^2, \tag{3}$$

il suffit de prendre

$$z = x + y, \quad u = x^2 + xy + y^2. \tag{4}$$

V. *Remarques.* — 1° Si, aux deux membres de l'équation (B), on ajoute

$$2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2),$$

on obtient cette autre équation indéterminée :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2[u^2 + (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2]. \tag{5}$$

D'après ce qui précède, elle est vérifiée par les valeurs (4).

2° Dans une Note insérée aux *Nouvelles Annales* (1874), j'ai donné ou rappelé diverses *identités*, parmi lesquelles je citerai seulement celles-ci :

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (b^2 + c^2)^2 + (ab + ac)^2 + (ab - ac)^2 + (a^2)^2, \tag{D}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (c^2 + a^2)^2 + (bc + ab)^2 + (bc - ab)^2 + (b^2)^2. \tag{E}$$

Il en résulte ce théorème, qui n'a peut-être point été remarqué :

Si un nombre N *est la somme de trois carrés, dont deux, au moins, soient inégaux,* N^2 *est la somme de quatre carrés* (*).

CCXXXII. — Sur une propriété numérique.

(*Novembre* 1885.)

I. Problème. — *La somme des diviseurs de* 16 *est* 31 ; *la somme des diviseurs de* 25 *est, pareillement,* 31. *Y a-t-il d'autres couples de nombres jouissant de la même propriété ?*

Très probablement, le problème, pris dans toute sa généralité, est fort difficile. Je me borne à considérer ce cas particulier :

Soit $p = 2^n + 1$, p *étant premier. Pour quelles valeurs de* n *la somme des diviseurs de* p^2 *est-elle égale à la somme des diviseurs de* 4^n ?

La premiere somme est

$$p^2 + p + 1 = (2^n + 1)^2 + 2^n + 2.$$

La seconde est

$$2^{2n} + 2^{2n-1} + 2^{2n-2} + \dots + 1 = 2^{2n+1} - 1.$$

On a donc l'équation

$$2^{2n} + 2^{n+1} + 2^n + 3 = 2^{2n+1} - 1,$$

ou

$$2^{2n-1} - 2^{2n-2} - 2^{n-1} - 2^{n-2} - 1 = 0.$$

(*) Comme

$$(1 + 1 + 1)^2 = 2^2 + 2^2 + 1,$$

il est clair que

$$(a^2 + a^2 + a^2)^2$$

n'est pas toujours la somme de quatre carrés. Cependant :

$$3.3^2 = 27 = 3^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2,$$
$$3.5^2 = 75 = 3^2 + 4^2 + 7^2 + 1^2,$$
$$3.7^2 = 147 = 12^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2,$$

. . . .

Si n surpasse 2, l'équation est impossible; car tous les termes, excepté le dernier, seraient divisibles par 2. Mais

$$2^3 - 2^2 - 2 - 1 - 1 = 0.$$

Donc *la seule solution* est $p = 3$, $n = 2$.

CCXXXIII. — Trajectoires orthogonales de polhodies.

(*Janvier* 1885.)

I. Une *polhodie* (*), tracée sur un ellipsoïde donné, est déterminée par les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{v^2}; \tag{1}$$

v représentant la *distance du centre au plan tangent* (**).

Il en résulte, par la différenciation,

$$\frac{dx}{\frac{b^2 - c^2}{b^4c^4}\,yz} = \frac{dy}{\frac{c^2 - a^2}{c^4a^4}\,zx} = \frac{dz}{\frac{a^2 - b^2}{a^4b^4}\,xy}.$$

La condition d'*orthogonalité* :

$$dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z = 0, \tag{2}$$

devient donc, si l'on remet d au lieu de δ :

$$\sum \frac{b^2 - c^2}{b^4c^4}\,yz\,dx = 0;$$

ou, plus simplement,

$$\sum a^4(b^2 - c^2)\frac{dx}{x} = 0. \tag{3}$$

Telle est l'équation différentielle des trajectoires.

(*) Ligne de courbure constante : le mot *courbure* se rapporte à la surface (*Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces*).

(**) *Loc cit.*

II. Soient, pour abréger :

$$a^4(b^2-c^2)=g,\quad b^4(c^2-a^2)=h,\quad c^4(a^2-b^2)=k; \tag{4}$$

et, par conséquent,

$$g\frac{dx}{x}+h\frac{dy}{y}+k\frac{dz}{z}=0; \tag{5}$$

puis

$$g\,\mathcal{L}\frac{x}{M}+h\,\mathcal{L}\frac{y}{M}+k\,\mathcal{L}\frac{z}{M}=0; \tag{6}$$

M étant la constante arbitraire.

D'après Bouquet et Serret (*), les surfaces Σ, représentées par cette équation (6), appartiennent à un *système triplement orthogonal.* Essayons de le déterminer.

III. En employant la méthode et les notations rappelées dans la *Note* CXXXV, on a, par l'équation (5) :

$$P=\frac{g}{x},\quad Q=\frac{h}{y},\quad R=\frac{k}{z};$$

$$\frac{xdx}{g}=\frac{ydy}{h}=\frac{zdz}{k};$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{h}-\frac{z^2}{k}\right),\quad \beta=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{g}-\frac{z^2}{k}\right);$$

$$\frac{df}{dx}=0,\quad \frac{df}{dy}=\frac{y}{h},\quad \frac{df}{dz}=-\frac{z}{k};$$

$$\frac{df_1}{dx}=\frac{x}{g},\quad \frac{df_1}{dy}=0,\quad \frac{df_1}{dz}=-\frac{z}{k};$$

$$A=\frac{\alpha}{h},\quad B=0,\quad C=\frac{\beta}{g};$$

$$\lambda=\frac{h+k}{hk^2},\quad \mu=\frac{1}{k^2},\quad \nu=\frac{g+k}{gk^2};$$

$$B\nu-C\mu=-\frac{\beta}{k^2g},\quad A\mu-B\lambda=\frac{\alpha}{hk^2},$$

$$C\lambda-A\nu=\frac{(h+k)\beta-(g+k)\alpha}{ghk^2}.$$

(*) *Journal de Liouville*, t. XI et XII.

L'équation différentielle cherchée est donc

$$g\alpha d\beta^2 + \left[(h + k)\beta - (g + k)\alpha\right]d\alpha d\beta - h\beta d\alpha^2 = 0 \ (^*). \qquad (7)$$

Les surfaces Σ_1, Σ_2 (en nombre infini), définies par cette équation, constituent, avec les surfaces Σ, un système orthogonal triple (**).

IV. *Remarque.* — Les surfaces Σ sont orthogonales à chacun des ellipsoïdes représentés par les équations (1). En effet, il est visible, à cause des valeurs (4), que l'on a

$$\sum \frac{g}{x} \cdot \frac{x}{a^2} = 0, \quad \sum \frac{g}{x} \cdot \frac{x}{a^4} = 0.$$

Addition. — (*Avril* 1887.)

V. Remplaçons les équations (1), (2) par celles-ci :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \mathrm{G}, \qquad (8)$$

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \mathrm{H}; \qquad (9)$$

G, H étant des paramètres variables. L'équation (8) représente une infinité d'ellipsoïdes homothétiques; et il en est de même pour l'équation (9). D'ailleurs, les identités :

$$\frac{g}{a^2} + \frac{h}{b^2} + \frac{k}{c^2} = 0, \quad \frac{g}{a^4} + \frac{h}{b^4} + \frac{k}{c^4} = 0,$$

sont indépendantes de G et de H. Donc *les surfaces* Σ, *représentées par l'équation*

$$a^4(b^2 - c^2) \mathcal{L} \frac{x}{\mathrm{M}} + b^4(c^2 - a^2) \mathcal{L} \frac{y}{\mathrm{M}} + c^4(a^2 - b^2) \mathcal{L} \frac{z}{\mathrm{M}} = 0,$$

sont orthogonales aux deux séries d'ellipsoïdes.

(*) Elle ne diffère, de celle qu'a donnée Serret (*Journal de Liouville*, t. XII, p. 246), que par un simple *changement de lettres.* N'est-ce point là un argument en faveur de ma méthode ?

(**) On peut consulter, relativement à l'intégration de l'équation (7), le beau Mémoire de Serret.

VI. Plus généralement : *Soient deux séries de surfaces* S, Σ, *représentées par*

$$f(x, y, z) = \mathrm{G}, \qquad \varphi(x, y, z) = \mathrm{H}.$$

Si une surface S_1, *appartenant à la première série, est orthogonale à une surface* Σ_1, *appartenant à la seconde série; toutes les surfaces* S *sont orthogonales à toutes les surfaces* Σ (*).

CCXXXIV. — Deux intégrales définies.

(*Décembre* 1866.)

I. De la formule

$$\int_0^\infty \frac{e^{p\alpha} - e^{-p\alpha}}{e^{q\alpha} - 1}\, d\alpha = \frac{1}{p} - \frac{\pi}{q} \cot \frac{p\pi}{q} \; (^{**}),$$

on déduit :

$$\int_0^\infty \frac{e^{4\alpha x} - e^{-4\alpha x}}{e^{2\pi\alpha} - 1}\, d\alpha = \frac{1}{4x} - \frac{1}{2} \cot 2x,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - 1}\, d\alpha = \frac{1}{2x} - \cot 2x;$$

puis

$$\int_0^\infty \left[2\frac{e^{4\alpha x} - e^{-4\alpha x}}{e^{2\pi\alpha} - 1} - \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - 1} \right] d\alpha = 0,$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} - e^{2\alpha x}}{e^{2\pi\alpha} - 1} \left[2(e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}) - (e^{\pi\alpha} + 1) \right] d\alpha = 0,$$

ou encore :

$$\int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{2\pi\alpha} - 1} \left[2(e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}) - 1 \right] d\alpha = \int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}\, d\alpha.$$

(*) A-t-on signalé, quelque part, cette propriété *évidente?*

(**) *Bierens de Haan*, T. 27.

D'après une formule due à Poisson, le second membre égale $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Conséquemment,

$$\operatorname{tg} x = 2\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}\left[2(e^{4\alpha x}-e^{-4\alpha x})-(e^{2\alpha x}-e^{-2\alpha x})\right]. \quad \text{(A)}$$

II. Il résulte de cette égalité, au moyen de l'intégration relativement à x :

$$-\ell.\cos x = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha(e^{2\pi\alpha}-1)}\left[e^{4\alpha x}+e^{-4\alpha x}-(e^{2\alpha x}+e^{-2\alpha x})\right],$$

ou

$$-\ell.\cos x = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha(e^{2\pi\alpha}-1)}\left[(e^{2\alpha x}-e^{-2\alpha x})^2-(e^{\alpha x}-e^{-\alpha x})^2\right],$$

ou enfin

$$-\ell.\cos x = \int_0^\infty \frac{(e^{\alpha x}-e^{-\alpha x})^2}{\alpha(e^{2\pi\alpha}-1)}\left[e^{2\alpha x}+1+e^{-2\alpha x}\right]d\alpha. \quad \text{(B)}$$

CCXXXV. — Sur les développées gauches.

(*Février* 1885.)

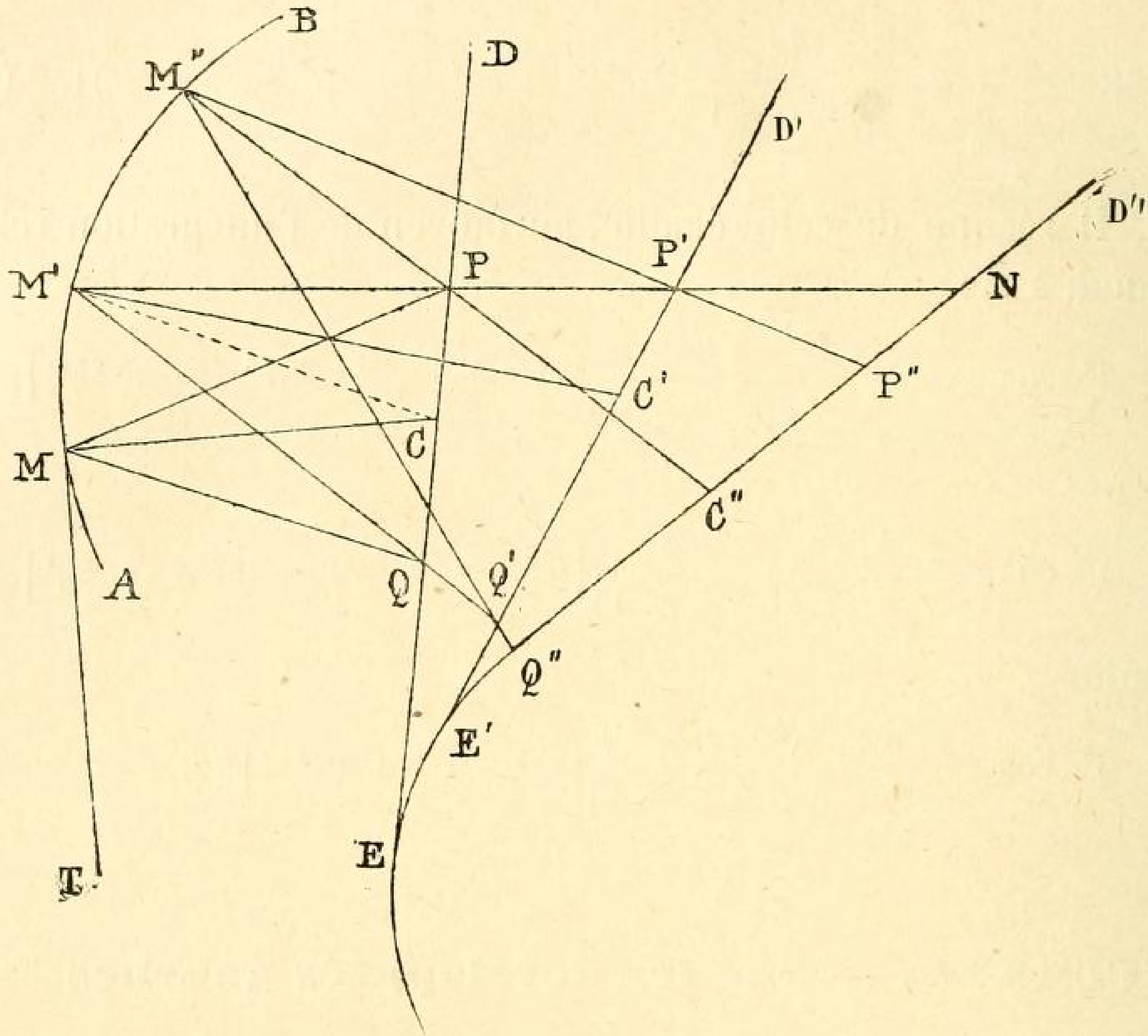
I. AB étant une ligne à double courbure, soient C, C′, C″, ..., les centres des cercles osculateurs, relatifs aux points M, M′, M″, ..., de cette ligne. Soient DE, D′E′, D″E″, ..., les droites polaires correspondantes. Le lieu de ces droites est une développable Δ, enveloppe des plans normaux à BA (*).

Soit pris arbitrairement, sur CD, le point P. Menons M′P, et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre, en P′, avec D′E′, etc. (*).

(*) Voir, par exemple, notre *Théorie analytique des lignes à double courbure*.

(**) Construction donnée par Monge. (*Application de l'Analyse à la Géométrie*, édition de Liouville, p. 396). L'illustre Auteur, pour désigner l'élément d'une surface développable, dit : une *hèdre*. Je ne connais pas d'autre exemple de l'emploi de ce mot.

Le lieu des points P, P′, P″, ..., est une *développée* de AB. De plus, cette courbe est une *ligne géodésique* de Δ.



En effet (*),

$$MPE = M'PE = 2^d - NPE \ (^{**});$$

PN étant le prolongement de M′P.

II. Le lieu des droites MP, M′P′, M″P″, ... est une développable Σ_1, dont AB *est une ligne de courbure* (***), et dont PP′P″... est l'*arête de rebroussement*.

Remplaçons P par Q, et recommençons la même construction. Il en résulte une nouvelle développable Σ_2, dont AB est une ligne de courbure, et dont QQ′Q″ ... est l'arête de rebroussement. Soit MT la tangente, en M, à la ligne AB.

(*) Démonstration de Monge.

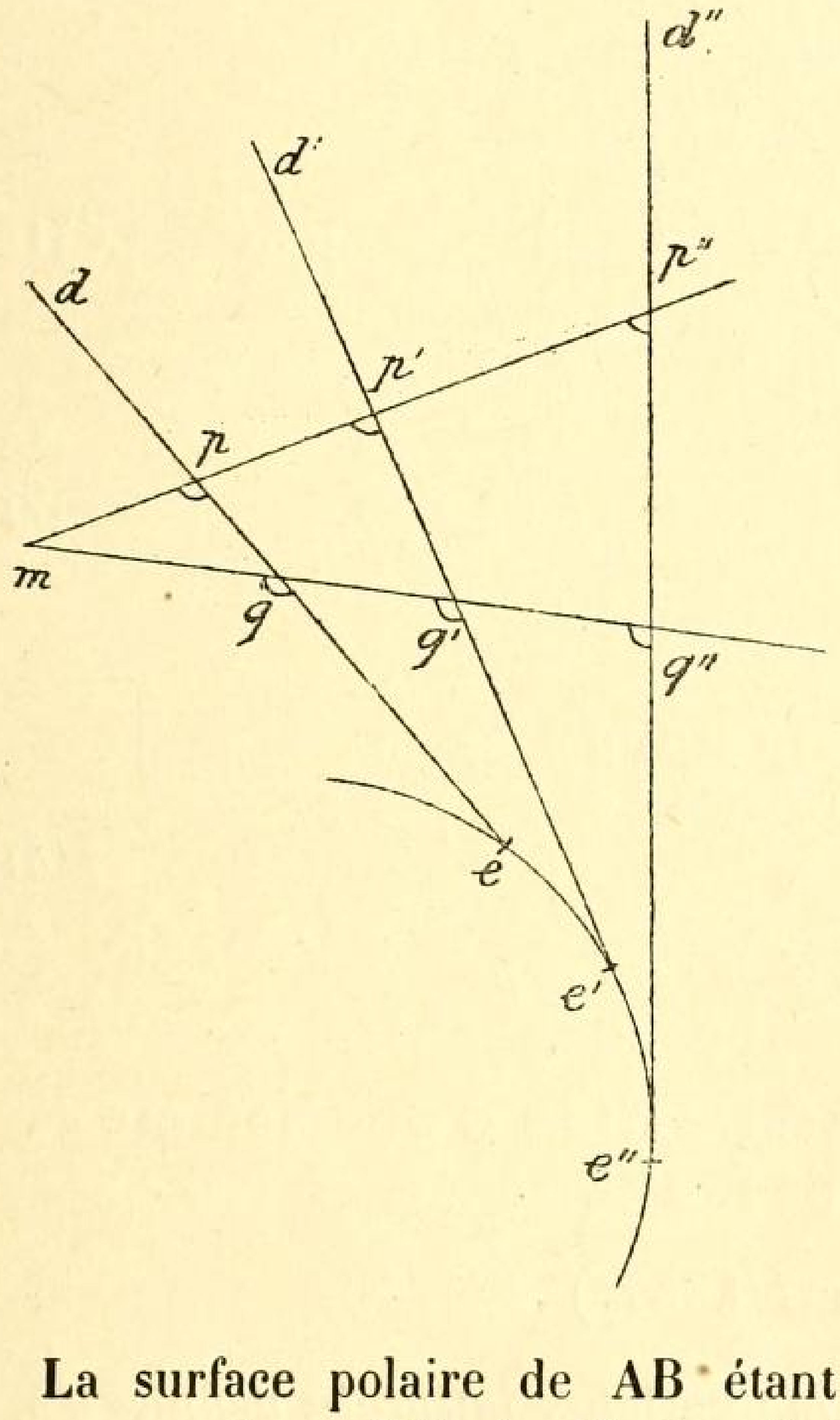
(**) Parce que les triangles *rectangles* PCM, PCM′ sont égaux.

(***) Parce que AMM′... B est une trajectoire orthogonale des génératrices de Σ_1.

Le plan PMT est tangent à Σ_1, et le plan QMT est tangent à Σ_2. De plus, l'angle de ces deux plans est mesuré par PMQ ; car les droites PM, QM sont projetées, sur le plan CMT, suivant le *rayon* MC.

Or, lorsque deux surfaces Σ_1, Σ_2 ont une même ligne de courbure, *elles se coupent*, le long de cette ligne, *sous un angle constant.* Donc

$$\mathrm{PMQ} = const. = \mathrm{P'M'Q'} = \mathrm{P''M''Q''}.$$



En résumé :

AB *étant une ligne à double courbure; soient* GH, KL *deux de ses développées. Si, d'un point* M, *pris arbitrairement sur* AB, *on mène, aux deux autres courbes, les tangentes* MR, MS; *l'angle* RMS *est constant.*

Addition. — (*Avril* 1887.)

III. Le dernier théorème, qui est probablement connu, résulte, immédiatement, de la considération suivante :

La surface polaire de AB étant développée dans le plan tangent suivant DE, la développée PP′P″ ... se transforme en une droite $pp'p''$ ..., prolongement de MP. De même, la développée QQ′Q″ ... se transforme en une droite $qq'q''$ ..., prolongement de MQ. Or, dans la figure plane ci-contre, on a :

$$m = \mathrm{M} = q - p = q' - p' = q'' - p'' = \cdots$$

CCXXXVI. — Sur la formule : $B(p, 1 - p) = \dfrac{\pi}{\sin q\pi}$.

(*Juillet* 1885.)

I. Le premier membre égale

$$\int_0^1 \theta^{p-1}(1-\theta)^{-p}d\theta;$$

ou, par le développement en série :

$$\frac{1}{p} + \frac{p}{1}\frac{1}{p+1} + \frac{p(p+1)}{1.2}\frac{1}{p+2} + \cdots$$

Donc

$$\frac{\pi}{\sin p\pi} = \frac{1}{p} + \frac{p}{1}\frac{1}{p+1} + \frac{p(p+1)}{1.2}\frac{1}{p+2} + \cdots \tag{1}$$

II. La formule ordinaire est

$$\frac{\pi}{\sin p\pi} = \frac{1}{p} + 2p\left[\frac{1}{1-p^2} - \frac{1}{4-p^2} + \frac{1}{9-p^2} - \cdots\right]. \tag{2}$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{p+1} + \frac{p+1}{2}\frac{1}{p+2} + \frac{(p+1)(p+2)}{2.3}\frac{1}{p+3} + \cdots \\ &= 2\left\{\frac{1}{1-p^2} - \frac{1}{4-p^2} + \frac{1}{9-p^2} - \cdots\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

CCXXXVII. — Transformation d'une somme en produit.

(*Avril* 1887.)

I. Le Mémoire intitulé : *Sur quelques intégrales définies* (*), contient la formule, très générale,

$$\left.\begin{aligned} &\sum C_{n,p} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+p)\Gamma(\gamma-\alpha+q)\Gamma(\gamma-\beta+q)}{\Gamma(\gamma+q)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)}, \end{aligned}\right\} \tag{U}$$

(*) *Académie de Belgique*, octobre 1885.

dans laquelle

$$p + q = n.$$

Posons :

$$\alpha = a + c, \qquad \beta = b + c, \qquad \gamma = a + b + c.$$

La relation (U) devient

$$\left.\begin{aligned} &\sum \mathrm{C}_{n,p} \frac{\Gamma(a+q)\Gamma(b+q)\Gamma(c+p)}{\Gamma(a+b+c+q)} \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(a+c+n)\Gamma(b+c+n)}{\Gamma(a+c)\Gamma(b+c)\Gamma(a+b+c+n)}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

II. On a :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Gamma(a+q)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\ldots(a+q-1), \\ &\frac{\Gamma(b+q)}{\Gamma(b)} = b(b+1)\ldots(b+q+1), \\ &\frac{\Gamma(c+p)}{\Gamma(c)} = c(c+1)\ldots(c+p-1), \\ &\frac{\Gamma(a+b+c+q)}{\Gamma(a+b+c+n)} = \frac{1}{(a+b+c+q)(a+b+c+q+1)\ldots(a+b+c+n-1)}, \\ &\frac{\Gamma(a+c+n)}{\Gamma(a+c)} = (a+c)(a+c+1)\ldots(a+c+n-1), \\ &\frac{\Gamma(b+c+n)}{\Gamma(b+c)} = (b+c)(b+c+1)\ldots(b+c+n-1) \; (^*). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(*) D'après la première de ces formules, le produit

$$a(a+1)\ldots(a+q-1)$$

doit être remplacé par 1, lorsque $q = 0$. D'après la quatrième, le produit

$$(a+b+c+q)(a+b+c+q+1)\ldots(a+b+c+n-1),$$

doit être remplacé par 1, lorsque $q = n$. Etc.

Donc l'égalité (1) se réduit à

$$\left.\begin{aligned} &\sum C_{n,p}\, a(a+1)\ldots(a+q-1)\times b(b+1)\ldots(b+q-1)\\ &\quad\times c(c+1)\ldots(c+p-1)\\ &\quad\times(a+b+c+q)(a+b+c+q+1)\ldots(a+b+c+n-1)\\ &\quad=(a+c)(a+c+1)\ldots(a+c+n-1)\\ &\quad\times(b+c)(b+c+1)\ldots(b+c+n-1). \end{aligned}\right\}\quad(A)$$

Cette relation permet, on le voit, de *transformer, en produits fort simples, une infinité de sommes* (*). Mais on peut la considérer d'un autre point de vue.

III. Changeons c en z, et appelons $F(a, b, z)$ le premier membre. Nous aurons ce résultat curieux :

Les racines de l'équation

$$F(a, b, z) = 0,$$

sont

$$\begin{aligned} &-a, \quad -(a+1), \quad -(a+2), \ldots, \quad -(a+n-1),\\ &-b, \quad -(b+1), \quad -(b+2), \ldots, \quad -(b+n-1). \end{aligned}$$

De plus, si $a = b$, *ces racines sont égales deux à deux; et* $F(a, b, z)$ *est un carré.*

IV. Lorsque $n = 2$,

$$\begin{aligned} &F(a, b, z) =\\ &a(a+1)b(b+1) + 2abz(a+b+1+z)\\ &+ z(z+1)(a+b+z)(a+b+1+z). \end{aligned}$$

Lorsque $n = 3$,

$$\begin{aligned} &F(a, b, z) =\\ &a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2) + 3a(a+1)b(b+1)z(a+b+2+z)\\ &+ 3abz(z+1)(a+b+1+z)(a+b+2+z)\\ &+ z(z+1)(z+2)(a+b+z)(a+b+1+z)(a+b+2+z). \end{aligned}$$

Etc.

(*) Le lecteur pourra supposer

$$a = 1, \quad a = b, \quad a + b + c = 1, \text{ etc.}$$

V. Afin de mettre en évidence le nombre entier n, désignons par $F_n(a, b, z)$ ce que nous avons appelé $F(a, b, z)$.

D'après la relation (A) :

$$\frac{F_{n+1}(a, b, z)}{F_n(a, b, z)} = (a + n + z)(b + n + z). \tag{3}$$

Ainsi, *le polynôme* $F_{n+1}(a, b, z)$ *est divisible par le polynôme* $F_n(a, b, z)$.

VI. Si a, b, z sont remplacés par des *nombres entiers, la fraction* (3) *est réductible à un nombre entier.*

Soient, par exemple,

$$a = 1, \quad b = 2, \quad n = 2, \quad z = 1.$$

Le dénominateur est

$$1.2.2.3 + 4.5 + 2.4.5 = 72;$$

le numérateur est

$$2.3.2.3.4 + 3.2.2.3.6 + 3.2.2.5.6 + 2.3.4.5.6 = 1\,440.$$

On doit trouver

$$\frac{1\,440}{72} = 4.5.$$

C'est ce qui a lieu.

VII. *Interprétation géométrique.* — Changeons a en x, b en y ; de manière que $F_n(a, b, z)$ devienne $F_n(x, y, z)$. A cause de (A) : *l'équation* $F_n(x, y, z) = 0$ *représente* $2n$ *plans, respectivement parallèles à ceux qui sont représentés par*

$$x + z = 0, \quad y + z = 0.$$

VIII. *Cas particulier remarquable.* — Dans (A), supposons

$a = b = c = 1$. Une réduction évidente donne cette autre relation :

$$\left.\begin{array}{l}(1.2.3\ldots n)^2 + n(n+2)(1.2.3\ldots\overline{n-1})^2\\ + (n-1)n(n+1)(n+2).(1.2.3\ldots\overline{n-2})^2\\ + (n-2)(n-1)n.n(n+1)(n+2)(1.2.3..\overline{n-3})^2\\ + \cdots 1.2.3\ldots n.3.4\ldots\overline{n+2}\\ \qquad = (1.2.3.4\ldots\overline{n+1})^2.\end{array}\right\}\quad (B)$$

Ainsi le premier membre, très complexe, égale un carré fort simple (*).

Soit, par exemple, $n = 5$. On trouve

$$\begin{array}{l}(1.2.3.4.5)^2 + 5.7(1.2.3.4)^2 + 4.5.6.7(1.2.3)^2\\ + 3.4.5.5.6.7(1.2)^2 + 2.3.4.5.4.5\ 6.7\\ + 1.2.3.4.5.3.4.5.6.7 = (2.3.4.5.6)^2,\end{array}$$

ou

$$120^2 + 35.24^2 + 840.6^2 + 12\,600.2^2 + 120.840 + 120.2\,520 = 720^2;$$

ce qui est exact.

CCXXXVIII. — Représentation des intégrales elliptiques.

(*Mars* 1885.)

I. *Intégrale de première espèce.* — Considérons la surface dont l'équation est

$$(a^2 + z^2)x^2 + (b^2 + z^2)y^2 = a^2b^2. \qquad (1)$$

(*) La démonstration directe, de l'égalité (B), n'offre aucune difficulté. Elle résulte de cette remarque :

$$(1.2.3.4\ldots\overline{n+1})^2 - (1.2.3\ldots n)^2 = (1.2.3\ldots n)^2 n(n+2).$$

La formule connue

$$v = \pi \int_0^z AB dz, \tag{2}$$

donne :

$$v = \pi a^2 b^2 \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}}, \tag{3}$$

$$V = \lim v = \pi a^2 b^2 \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}}. \tag{4}$$

Prenant

$$z = b \operatorname{tg} \varphi, \tag{5}$$

on transforme ainsi la différentielle :

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{d\varphi}{a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Par suite,

$$v = \pi a b^2 F(e, \varphi), \qquad V = \pi a b^2 F_1(e). \tag{6}$$

Donc, *si un corps est limité par la surface* (1), *par le plan* xy *et par un plan parallèle à celui-ci, le volume de ce corps est représenté, à un facteur près, par l'intégrale de première espèce.*

II. *Intégrale de deuxième espèce.* — Le problème est un peu moins simple. Après quelques tâtonnements, j'ai été conduit à l'équation

$$\frac{(b^2 + z^2)^2}{f^6} x^2 + \frac{1}{g^2} \frac{b^2 + z^2}{a^2 + z^2} y^2 = 1 \text{ (*)}. \tag{7}$$

Il en résulte :

$$A = \frac{f^3}{b^2 + z^2}, \qquad B = g\sqrt{\frac{a^2 + z^2}{b^2 + z^2}};$$

puis, par la formule (2),

$$v = \pi f^3 g \int_0^z \frac{dz}{b^2 + z^2} \sqrt{\frac{a^2 + z^2}{b^2 + z^2}}. \tag{8}$$

(*) Les *lignes de niveau* de la nouvelle surface sont, comme celles de la première, des ellipses.

La transformation (5) donne ensuite :

$$v = \pi \frac{f^2 ga}{b^2} \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = \pi \frac{f^3 ga}{b^2} \mathrm{E}(e, \varphi), \tag{9}$$

$$\mathrm{V} = lim\, v = \pi \frac{f^3 ga}{b^2} \mathrm{E}_1(e). \tag{10}$$

III. *Remarques.* — 1° Si l'on prend $f = b$, $g = a$, on a, plus simplement :

$$v = \pi a^2 b \mathrm{E}(e, \varphi). \tag{11}$$

2° Soit

$$s = a \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

la longueur d'un arc de l'ellipse dont les demi-axes sont a, b; cet arc étant compté à partir d'une extrémité du petit axe. Il est clair que

$$v = \pi abs. \tag{12}$$

CCXXXIX. — Une intégration.

(*Septembre* 1863.)

I. Soit l'équation du deuxième ordre

$$xyy'' + axy'^2 + byy' = 0. \tag{1}$$

J'emploie la transformation connue :

$$y' = \frac{y}{u}. \tag{2}$$

Il en résulte

$$y'' = \frac{uy' - yu'}{u^2} = \frac{y(1 - u')}{u^2};$$

puis, au lieu de la proposée :

$$u' - \frac{b}{x} u = a + 1. \tag{3}$$

Cette équation, comparée à

$$u' + Pu = Q,$$

suppose

$$P = -\frac{b}{x}, \quad Q = a + 1.$$

Par conséquent, après une réduction évidente,

$$u = cx^b + \frac{a+1}{1+b} x \ (^*); \tag{4}$$

puis :

$$\frac{y'}{y} = \frac{1-b}{(1-b)cx^b + (a+1)x}, \tag{5}$$

$$\mathcal{L} \frac{y}{m} = (1-b) \int \frac{dx}{(1-b)cx^b + (a+1)x}. \tag{6}$$

II. Dans une infinité de cas, l'intégrale peut être obtenue sous forme finie. Soient, par exemple,

$$a = 1, \quad b = 2.$$

Le second membre devient

$$\int \frac{dx}{(cx-2)x} = \frac{1}{2} \int \frac{c\,dx}{cx-2} - \frac{1}{2} \mathcal{L} x = \frac{1}{2} \mathcal{L} \frac{cx-2}{x}.$$

Donc

$$y^2 = m^2 \left(c - \frac{2}{x}\right);$$

ou, ce qui est équivalent,

$$y^2 = A + \frac{B}{x}. \tag{7}$$

III. Si $b = 1$, les formules (4), (6) sont illusoires. Mais alors l'intégrale de l'équation (3) est

$$u = x\left[c + (a+1)\mathcal{L} x\right];$$

(*) Comme vérification, on peut multiplier les deux membres par x^{-b}. Si l'on prend ensuite les dérivées, on retrouve l'équation (3).

en sorte que

$$\mathcal{L}\frac{y}{m} = \int \frac{dx}{x\left[c + (a+1)\mathcal{L}x\right]};$$

et, sauf le cas de $a = -1$, il est impossible d'intégrer.

IV. La méthode précédente est applicable à

$$x^p yy'' + ax^q y'^2 + ayy' = 0. \tag{8}$$

On en déduit l'équation linéaire

$$u' - \frac{b}{x^p}u = ax^{q-p} + 1, \tag{9}$$

puis

$$u = e^{\frac{b}{p-1}x^{1-p}}\left[c + \int (ax^{q-p} + 1)e^{-\frac{b}{p-1}x^{1-p}}\,dx\right]. \tag{10}$$

CCXL. — Théorème de Géométrie élémentaire.

(*Août* 1885) (*).

On doit, à Newton, le théorème suivant :

Si, sur les côtés AC, BC *d'un triangle* ACB, *on prend* AD = BE, *et que l'on fasse varier ces distances égales ; le point* M, *milieu de la droite* DE, *décrit une ligne droite* (**).

En voici un autre, que l'on peut regarder comme *corrélatif* du premier :

Sur les côtés AC, BC *d'un triangle* ABC, *on prend* AD = BE. *Si, la base* AB *restant fixe, le sommet* C *décrit une circonférence passant par les extrémités de cette base; le point* M, *milieu de la droite* DE, *décrit une circonférence ayant pour centre le milieu de* AB (***).

(*) Complément à la *Note* CXVII.

(**) *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6e édition, p. 127.

(***) La démonstration résulte, immédiatement, du Lemme rappelé dans la *Note* CXVII.

CCXLI. — Problème d'Analyse indéterminée.

(*Juin* 1878.)

I Soit l'équation

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + u^3. \tag{1}$$

Si l'on isole u^3, le premier membre devient

$$3[x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 2xyz],$$

ou

$$3[(y + z)x^2 + (y + z)^2x + (y + z)yz],$$

ou enfin

$$3(y + z)(z + x)(x + y).$$

Ainsi, la proposée est réduite à

$$3(y + z)(z + x)(x + y) = u^3 \text{ (*)}. \tag{2}$$

II. Posons $u = 3v$, puis décomposons $9v$ en trois facteurs a, b, c; de manière que

$$abc = 9v^3. \tag{3}$$

Alors :

$$x = p - a, \quad y = p - b, \quad z = p - c; \tag{4}$$

p désignant, suivant l'usage, la demi-somme des nombres a, b, c (**).

Addition. — (*Mai* 1887.)

III. On sait que, n étant *impair*,

$$(x + y + z)^n - (x^n + y^n + z^n) = \mathrm{P}(y + z)(z + x)(x + y) \text{ (***)}.$$

(*) C'est uniquement à cause de l'*identité*

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(y + z)(z + x)(x + y),$$

que je mentionne ce Problème.

(**) Si ces nombres ne sont pas tous *pairs*, un seul doit l'être.

(***) *Note* XLVII.

Donc, en particulier,

$$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=A(y+z)(z+x)(x+y);$$

A étant une *constante* (*).

Si l'on suppose

$$x=y=z=1,$$

on trouve

$$A=3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

CCXLII. — Une propriété des progressions arithmétiques (**).

Il suffit de l'énoncer :

Soit une progression arithmétique, composée de n *termes.*

Si, de n *fois la somme de leurs carrés, on retranche le carré de leur somme, le reste est constant* (*).

Exemple :

$$5(3^2+7^2+11^2+15^2+19^2)-(3+7+11+15+19)^2=800$$
$$=5(7^2+11^2+15^2+19^2+23^2)-(7+11+15+19+23)^2$$
$$=5(11^2+15^2+19^2+23^2+27^2)-(11+15+19+23+27)^2.$$

(*) Parce que l'équation est homogène.

(**) Complément au Mémoire intitulé : *Sur un développement de l'intégrale elliptique de première espèce...* (p. 24).

(***) C'est-à-dire, indépendant du premier terme.

CCXLIII. — Application du Théorème de Lancret (*).

(*Septembre* 1873.)

I. Ce théorème est exprimé par l'équation

$$\frac{1}{L^2}=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\rho^2},\tag{1}$$

dans laquelle

$$\frac{1}{L^2}=\frac{\sum(a'b''-b'a'')^2}{(a'^2+b'^2+c'^2)^2},\quad \frac{1}{R}=\frac{\sum(ab'-ba')c''}{a'^2+b'^2+c'^2},$$

$$\frac{1}{\rho^2}=a'^2+b'^2+c'^2\ (^{**}).$$

Il en résulte l'égalité

$$\sum(a'b''-b'a'')^2=(a'^2+b'^2+c'^2)^3+\left[\sum(ab'-ba')c''\right]^2.\tag{A}$$

qui devient *identique* si les quantités a, a', a'', b, b', ..., satisfont aux conditions connues :

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2=1,\quad aa'+bb'+cc'=0,\\ aa''+bb''+cc''=-(a'^2+b'^2+c'^2)\end{array}\right\}\tag{2}$$

Cette relation (A) permet de *trouver, d'une infinité de manières, une somme de trois carrés égale à la somme d'un cube et d'un carré.*

II. *Exemple.* — On satisfait aux conditions (2) en prenant :

$$a=\frac{9}{25},\quad b=\frac{12}{25},\quad c=\frac{20}{25};\quad a'=\frac{24}{25},\quad b'=\frac{7}{25},\quad c'=-\frac{15}{25};$$

$$a''=\frac{14}{25},\quad b''=-\frac{48}{25},\quad c''=-\frac{20}{25}.$$

(*) Omise dans la *Théorie analytique des lignes à double courbure.*

(**) *Loc. cit*; pp. 15 et 16.

Il résulte, de ces valeurs :

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \frac{34}{25};$$

$$a'b''-b'a''=-\frac{1250}{25^2},\quad b'c''-c'b''=-\frac{860}{25^2},\quad c'a''-a'c''=\frac{270}{25^2};$$

$$ab'-ba'=-\frac{225}{25^2},\quad bc'-cb'=-\frac{320}{25^2},\quad ca'-ac'=\frac{615}{25^2};$$

$$\sum(ab'-ba')c''=\frac{1}{25^3}(225.20-320.14-615.48)=-\frac{1180}{25^2};$$

puis

$$1250^2 + 860^2 + 270^2 = 34^3.25 + 1180^2,$$

ou

$$250^2 + 172^2 + 54^2 = 34^3 + 236^2;$$

conformément à l'énoncé.

Addition. — (*Mai* 1887.)

III. Pour éviter les fractions, on peut remplacer la première des conditions (2) par celle-ci :

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2\ (^*). \tag{3}$$

Alors (A) devient

$$\sum\left[k(a'b''-b'a'')\right]^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2)^3 + \left[\sum(ab'-ba')c''\right]^2. \tag{B}$$

Si, par exemple, on suppose :

$$a = 2,\quad b = 2,\quad c = 1,\quad k = 3;$$
$$a' = -1,\quad b' = 3,\quad c' = -4;$$
$$a'' = -5,\quad b'' = -9,\quad c'' = 2;$$

on trouve

$$(3.24)^2 + (3.30)^2 + (3.22)^2 = 26^3 + 8^2.$$

(*) Prenant a et b arbitrairement, on décompose $a^2 + b^2$ en deux facteurs, de *même parité* : l'un est $k + c$; l'autre, $k - c$; etc.

CCXLIV. — Conséquences du Problème de Malfatti.

(*Octobre* 1874) (*).

I. En évaluant, de deux manières différentes, l'aire du triangle ABC (**), on est conduit à cette proposition :

Si trois quantités f, g, h *satisfont à la condition*

$$fg + gh + hf = 1 \text{ (***)}, \tag{1}$$

elles rendent identique l'équation

$$\sum(1-fg)(1-h)(1+f)(1+g) = (1+f+g+h)\sum f(1-g^2)(1-h^2). \tag{2}$$

II. Dans cette identité (2), dont la vérification est plus longue que difficile :

$$\left.\begin{aligned} f = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{4}A}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{4}A}, \quad g = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{4}B}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{4}B}, \\ h = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{4}C}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{4}C} \text{ (IV)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Elle exprime donc une relation entre

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}A, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}B, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}C.$$

Toutes réductions faites, cette relation se réduit à celle-ci :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}A\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}B\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}C - (\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}A\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}B + \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}B\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}C + \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}C\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}A) \\ - (\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}A + \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}B + \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}C) + 1 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

laquelle est connue.

(*) Complément de la *Note* LXXII.

(**) *Loc. cit.*

(***) *Loc cit.*

(IV) *Loc. cit.*

Addition. — (Février 1886.)

III. *Théorème d'Arithmétique. — Si* f, g, h *sont trois entiers, satisfaisant à la condition* (1), *la quantité*

$$\sum(1-fg)(1-h)(1+f)(1+g),$$

est divisible par

$$f+g+h+1.$$

IV. *Application géométrique.* — Remplaçons f, g, h par x, y, z; et considérons les équations :

$$xy+yz+zx=1, \tag{5}$$

$$\sum(1-xy)(1-z)(1+x)(1+y)=0. \tag{6}$$

La combinaison des deux conduit, d'après la proposition ci-dessus (I), à l'équation

$$(1+x+y+z)\sum x(1-y^2)(1-z^2)=0;$$

laquelle se décompose en

$$x+y+z=-1, \tag{7}$$

$$\sum x(1-y^2)(1-z^2)=0. \tag{8}$$

L'équation (5) représente un hyperboloïde de révolution (à deux nappes), dont l'axe est la droite *isogonale*. L'équation (7) représente un plan perpendiculaire à cette droite, et, par conséquent, parallèle aux plans *cycliques* de l'hyperboloïde. Mais, comme on déduit, des équations (2), (5) :

$$x^2+y^2+z^2=-1,$$

le plan ne coupe pas l'hyperboloïde.

Quant aux équations (6), (8), elles représentent deux surfaces

S, Σ, telles, que *chacune est située de la même manière, relativement aux trois plans coordonnés.*

On vient de voir que l'équation (8) est une conséquence des équations (5), (6). Donc :

La ligne, suivant laquelle l'hyperboloïde coupe la surface S, *est située sur la surface* Σ (*).

V. *Remarque.* — *Trois quantités* f, g, h *ne peuvent satisfaire, à la fois, aux conditions*

$$fg + gh + hf = 1, \quad f + g + h = -1 \text{ (**)}.$$

CCXLV (***). — Sur la projection stéréographique.

(*Mars* 1874.)

Théorème I. — *Un ellipsoïde étant donné, on prend pour* tableau *un plan diamétral* AOB, *et, pour* point de vue V, *l'une des extrémités du diamètre conjugué de* AOB. *Cela posé, les perspectives de toutes les coniques* C, *tracées sur l'ellipsoïde, sont semblables à la section diamétrale* AOB (IV).

Corollaire. — *Si* AOB *est une section circulaire* (auquel cas V est un ombilic), *les perspectives de toutes les coniques* C *sont des cercles* c.

(*) Soit P un plan cyclique de l'hyperboloïde. Il coupe l'angle trièdre des coordonnées positives, suivant un triangle équilatéral; et il coupe les surfaces S, Σ, suivant deux courbes s, σ, telles, que *chacune est située de la même manière, relativement aux côtés du triangle.* Cela posé, si M est un point du plan P, commun au parallèle de l'hyperboloïde et à la courbe c, M appartient à la courbe σ.

(**) On peut se rappeler qu'à notre point de vue, *les imaginaires ne sont pas des quantités.* (*Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 167).

(***) Tirée des *Comptes rendus.*

(IV) Après l'impression, j'ai appris que ce théorème appartient, en partie, au savant Hachette, mon ancien Professeur.

THÉORÈME II (Mêmes hypothèses que dans le Corollaire). — *Considérons, dans le plan du tableau, un système orthogonal formé d'une infinité de cercles* c *et d'une infinité de cercles* c′ (*) :

1° *les plans* P, *des coniques* C, *dont les perspectives sont les cercles* c, *passent tous par une même droite* D ;

2° *les plans* P′, *des coniques* C′, *dont les perspectives sont les cercles* c′, *passent tous par une même droite* D′ ;

3° *les droites* D, D′ *sont conjuguées, c'est-à-dire que le pôle de chaque plan* P *est situé sur* D′ ; et vice versâ.

THÉORÈME III (Réciproque du précédent). — *Soient* C *les coniques dont les plans passent par une droite* D, *et* C′ *les coniques dont les plans passent par la droite* D′, *conjuguée de* D : *les cercles* c, *perspectives des coniques* C, *et les cercles* c′, *perspectives des coniques* C′, *constituent un système orthogonal.*

Remarques. — I. Le système orthogonal est le plus simple possible quand, les cercles c ayant leurs centres sur l'axe moyen OB, les cercles c' ont les leurs sur le demi-diamètre $OD = OB$, situé dans le plan principal AOC. Alors les droites D, D′, respectivement parallèles à OB, OD, rencontrent le diamètre OV en des points R, R′. De plus, $OR \cdot OR' = \overline{OV}^2$, absolument comme dans le cas de la sphère.

II. Puisque, à chaque point M, intersection de deux coniques *obliques* (**), correspond un point m, intersection de deux cercles *orthogonaux*, l'ensemble de tous les cercles c, c' (ensemble déterminé par des points fixes, A, B, pris arbitrairement) constitue un nouveau système de coordonnées. Ce système *orthogonal circulaire* pourra, peut-être, s'appliquer à certaines questions relatives à l'ellipsoïde.

(*) *Journal de Liouville*, t. XIX, p. 134.

(**) C'est-à-dire, *se coupant obliquement.* (Mars 1888.)

CCXLVI. — Sur l'Hélice-caténoïdique (*).

(*Août* 1874.)

I. Théorème. — *Soient une chaînette* AC, *située dans le plan* zx, *et une hyperbole équilatère* AH, *située dans le plan* xy (**). *Ces deux courbes ont même axe* OAx, *même sommet* A ; *de plus*, Oz *est la directrice de* AC. *Cela posé, la courbe* AMI, *projetée suivant les deux courbes données, est une hélice.*

Les équations de cette courbe sont :

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right), \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Si l'on élimine x, on trouve

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} - e^{-\frac{z}{a}}\right).$$

Considérons le cylindre qui contient la chaînette AC et la courbe AMI ; soit PM une génératrice de ce cylindre, limitée aux deux courbes. La dernière équation exprime que

$$\text{PM} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{a}{a}} - e^{-\frac{z}{a}}\right).$$

Mais, d'après une propriété connue, le second membre représente aussi la longueur de l'arc AP. Donc

$$\text{PM} = arc\,\text{AP}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

II. Si une hélice-caténoïdique est éclairée par des rayons parallèles, l'*ombre* de cette courbe, sur un certain plan, est une hyperbole équilatère (***).

(*) Réponse (indirecte) à une question proposée dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. I, p. 67).

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

(***) N'est-ce point au Professeur Guillery que l'on doit le théorème suivant, attribué parfois à Th. Olivier : *L'ombre de l'hélice ordinaire peut être une cycloïde ?*

CCXLVII. — Un développement de $\dfrac{x}{\sin x}$.

(*Mai* 1874.)

I. On sait que

$$\frac{x}{\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{1 + \cos x \sin \alpha} \; (*); \tag{1}$$

donc

$$\frac{x}{\sin x} = \sum_0^\infty (-1)^n \cos^n x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \alpha d\alpha. \tag{2}$$

L'intégrale définie a pour valeur :

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sum_0^\infty (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cos^n x. \tag{3}$$

Telle est la formule annoncée.

Addition. — (*Mai* 1887.)

II. La somme, développée, est

$$\sqrt{\pi} - \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\cos x + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{1}\cos^2 x - \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\pi}}\cos^3 x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\pi}}{1.2}\cos^4 x - \cdots,$$

ou

$$\sqrt{\pi} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cos^2 x - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{2}{3}\cos^3 x$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}\sqrt{\pi}\cos^4 x - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{2.4}{3.5}\cos^5 x + \cdots$$

(*) *Cours d'Analyse*, p. 595; *Bierens de Haan*, T. 6.

L'égalité (3) devient donc

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{\pi}{1}-\cos x+\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x-\dfrac{2}{3}\cos^3 x+\dfrac{1.3}{2.4}\dfrac{\pi}{2}\cos^4 x\\ \qquad -\dfrac{2.4}{3.5}\cos^5 x+\cdots;\end{array}\right\} \quad (4)$$

et, lorsque $x=0$:

$$1=\frac{\pi}{2}-1+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2}-\frac{2.4}{3.5}+\cdots \quad (5)$$

III. Quand $\cos x$ est inférieur à l'unité, les termes de rang *impair*, dans (4), forment une série convergente; et il en est de même pour les termes de rang *pair*. Conséquemment,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{\pi}{2}\left[1+\dfrac{1}{2}\cos^2 x+\dfrac{1.3}{1.4}\cos^4 x+\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cos^6 x+\cdots\right]\\ \qquad -\left[\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x+\dfrac{2.4}{3.5}\cos^5 x+\cdots\right];\end{array}\right\} \quad (6)$$

mais la même *réduction* n'est pas applicable à la série (5) (*).

IV. La démonstration employée dans le paragraphe (I) est peu rigoureuse; mais il serait facile de remédier à ce défaut, en prenant l'expression du *reste :*

$$R_n=\cos^{n+1} x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n+1}\alpha\, d\alpha}{1+\cos x\sin\alpha},$$

et en faisant voir que ce reste tend vers zéro, même lorsque $\cos x=1$. Au lieu d'entrer dans ce détail, posons :

$$y=\frac{x}{\sin x}, \quad \cos x=z; \quad (7)$$

de manière que

$$y=\frac{\arccos z}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}}. \quad (8)$$

(*) Sous le rapport de l'*incommodité*, elle est comparable à l'une de celles que j'ai rencontrées en étudiant la constante G (*Recherches sur la constante* G..., p. 51). De plus, les termes de la série (5) sont les carrés des termes de l'autre.

Tant que z est inférieur à 1,

$$y = \frac{\pi}{2}(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\arcsin z}{\sqrt{1 - z^2}}. \tag{9}$$

Or,

$$\frac{\arcsin z}{\sqrt{1 - z^2}} = z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{2.4}{3.5}z^5 + \cdots \text{ (*)}.$$

Par conséquent,

$$y = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1.3}{2.4}z^4 + \cdots\right) - \left(z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{2.4}{3.5}z^5 + \cdots\right);$$

comme ci-dessus (6). En outre, *en série convergente*,

$$\frac{\arccos z}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\pi}{2} - z + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}z^2 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2}z^4 - \cdots;$$

et, *si* z = 1 :

$$1 = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2} - \frac{2.4}{3.5} + \cdots \tag{5}$$

CCXLVIII. — Sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde.

(*Mai* 1882.)

I. *Introduction.* — On doit, à Liouville, le théorème suivant :

« *Si parallèlement à la tangente en un point quelconque* M
» *d'une ligne géodésique et à la tangente conjuguée, on conçoit*
» *deux demi-diamètres de l'ellipsoïde, la perpendiculaire* H
» *abaissée de l'extrémité du second de ces demi-diamètres sur le*
» *premier sera constante* (**). »

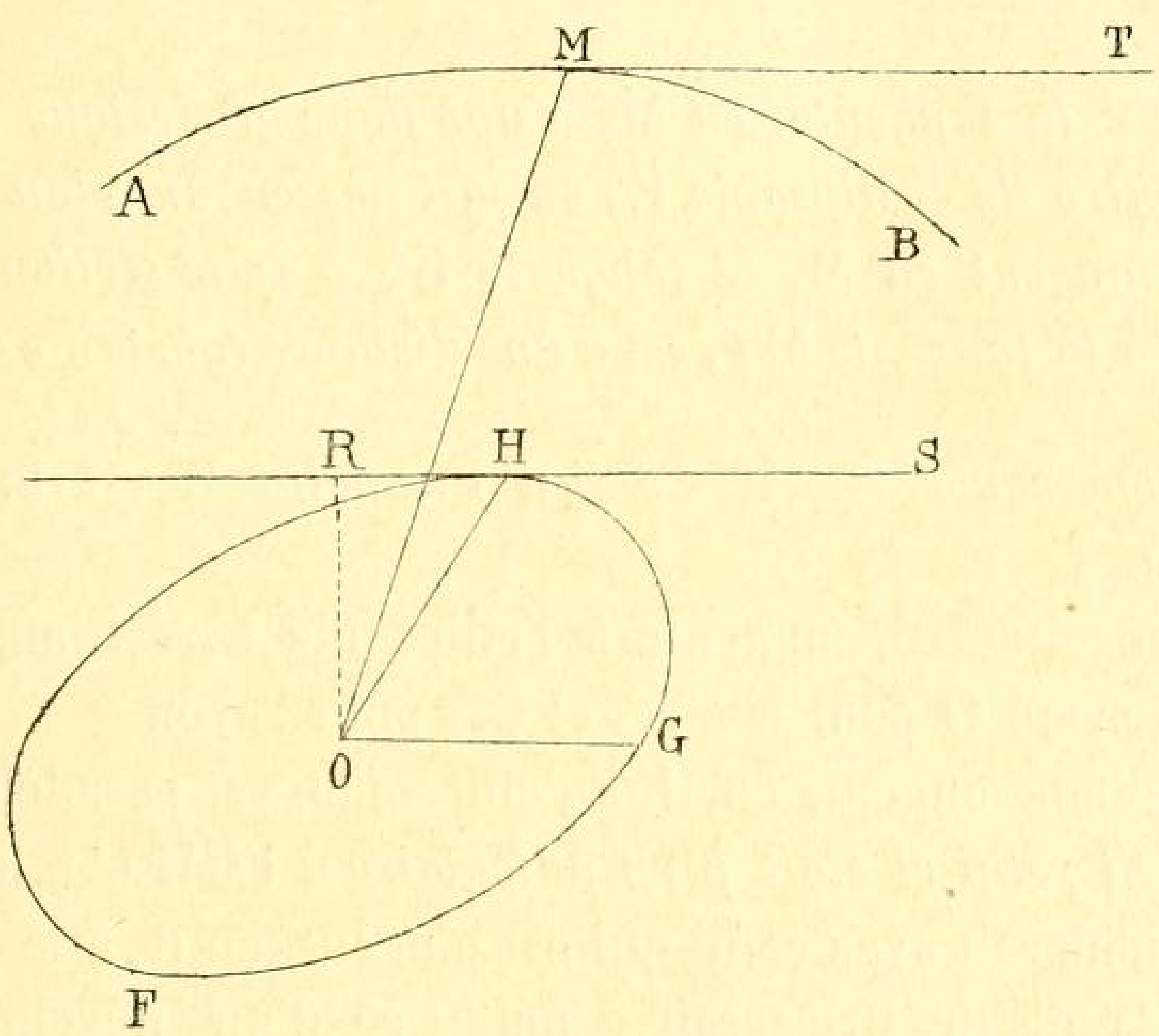
La démonstration géométrique donnée par mon illustre Maître

(*) Voir, par exemple, *Notes d'Algèbre et d'Analyse*, p. 14.

(**) *Journal de Mathématiques*, t. XI, p. 22.

me paraît peu satisfaisante (*). En déduisant le théorème de Liouville de celui de Joachimstal (ce qui est naturel et connu), on peut modifier l'énoncé du premier théorème, de manière à rattacher celui-ci, jusqu'à un certain point, à la théorie de la *polhodie*.

II. *Démonstration nouvelle.* — Soit MT la tangente, en M, à une ligne géodésique AMB. Soit FGH la section faite, dans l'ellipsoïde E, par un plan central, parallèle au plan tangent



en M. Soit encore P la distance de ces deux plans. Menons, dans la section centrale, le demi-diamètre OG et la tangente HS, parallèles à MT. Le théorème de Joachimstal consiste en l'équation :

$$\mathrm{OG}\,.\,\mathrm{P} = const. \tag{1}$$

Les demi-diamètres OG, OH, OM sont conjugués deux à deux; donc le parallélipipède, déterminé par ces droites, a un volume constant. Ainsi

$$\mathrm{P}\,.\,\mathrm{OG}\,.\,\mathrm{OH}\sin\mathrm{GOH} = const. \tag{2}$$

(*) Il en est de même de la démonstration publiée, il y a un an, dans les *Nouvelles Annales* (1882, p. 49). Qu'est-ce que le savant auteur appelle *tangentes conjuguées sur la surface?*

Menons OR perpendiculaire à HS : $OR = OH \sin GOH$. L'égalité (2) devient

$$P . OG . R = const. \tag{3}$$

Comparant avec la relation (1), nous avons donc

$$OR = const. ;$$

ce qui est le théorème de Liouville. Mais nous pouvons l'énoncer ainsi :

Soit MT *la tangente, en* M, *à une ligne géodésique* AMB. *Si, par le centre de l'ellipsoïde* E, *on fait passer un plan parallèle au plan tangent en* M, *la tangente* HS *à cette section centrale, parallèle à la tangente* MT, *est à une distance constante du centre.*

III. *Remarques.* — 1° *Le lieu du point* R *est une courbe sphérique.*

2° La droite HS, tangente à l'ellipsoïde E, est tangente à la sphère S ayant O pour centre, et OR pour rayon.

3° Le plan tangent, en H, à l'ellipsoïde, est parallèle au plan GOMT. *Si celui-ci était perpendiculaire à* FGH (*), le premier plan coïnciderait avec celui qui est tangent, en R, à la sphère S; et alors la droite RS serait génératrice d'une développable Σ, circonscrite à l'ellipsoïde et à la sphère. Par suite, le *lieu du point* H *serait une polhodie.* Mais il n'y a pas de lieu du point H, attendu que le mouvement de la droite RS n'est pas déterminé par les conditions du problème.

(*) Cette hypothèse, que rien ne justifie, m'avait paru résulter du texte de Liouville (*loc cit.*). *Naturellement*, elle conduit à des résultats *absurdes*, inutiles à rapporter. (Juin 1887.)

CCXLIX. — Théorème d'Algèbre (*).

(*Mai* 1872.)

1. *Si l'on donne les équations*

$$\frac{ax' + by'}{x - x'} = \frac{bx' + cy'}{y - y'} = z', \tag{1}$$

$$X = b(x - x')^2 - (a - c)(x - x')(y - y') - b(y - y')^2, \tag{2}$$

$$Z = (a + z')(c + z') - b^2 \tag{3}$$

dans lesquelles les inconnues sont

$$x',\ y',\ z',\ X,\ Z;$$

le produit XZ *est indépendant de* x', y', z'.

On tire, des équations (1) :

$$x' = \frac{z'}{Z}\big[(c + z')x - by\big], \quad y' = \frac{z'}{Z}\big[(a + z)y - bx\big]. \tag{4}$$

L'égalité (2) peut être écrite ainsi :

$$Xz'^2 = b(ax' + by')^2 - (a - c)(ax' + by')(bx' + cy') - b(bx' + cy')^2;$$

puis sous cette forme :

$$Xz'^2 = (ac - b^2)\big[bx'^2 - (a - c)x'y' - by'^2\big];$$

puis encore sous celle-ci :

$$Xz'^2 = (ac - b^2)\big[(bx' + cy')x' - (ax' + by')y'\big]. \tag{5}$$

D'après les équations (1), la quantité entre parenthèses égale

$$\big[(y - y')x' - (x - x')y'\big]z';$$

c'est-à-dire

$$(x'y - y'x)z'.$$

(*) Obtenu par une étude sur les *Systèmes triplement orthogonaux* (voir la *Note* CCXXXIII).

Donc

$$Xz' = (ac - b^2)(x'y - y'x). \tag{6}$$

D'ailleurs, par les formules (4),

$$x'y - y'x = \frac{z'}{Z}\left[bx^2 - (a-c)xy - by^2\right].$$

Ainsi

$$XZ = (ac - b^2)\left[bx^2 - (a-c)xy - by^2\right]. \tag{A}$$

Addition. — (*Juin* 1887.)

II. *Interprétation géométrique.* — Au lieu des équations (1), prenons :

$$ax + by + (x - \alpha)z = 0, \quad bx + cy + (y - \beta)z = 0; \tag{7}$$

puis l'équation auxiliaire :

$$\left.\begin{aligned}&\left[b(\alpha - x)^2 - (a-c)(\alpha - x)(\beta - y) - b(\beta - y)^2\right]\left[(a+z)(c+z) - b^2\right]\\ &\qquad = \left[b\alpha^2 - (a-c)\alpha\beta - b\beta^2\right](ac - b^2).\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Pour toutes valeurs particulières des paramètres α, β, les équations (7) représentent deux paraboloïdes hyperboliques P, P'; et l'équation (8) appartient à une surface S, du troisième ordre, dont *les lignes de niveau sont des coniques semblables.*

Cela posé, d'après le théorème précédent, si l'on éliminait x et y entre les trois équations, on trouverait une identité. Donc *les trois surfaces se coupent, deux à deux, suivant une même ligne.*

CCL. — Problème trouvé en songe.

(9 *mars* 1886.)

I. *Décomposer une fonction donnée*, f(x, y), *en deux parties* M, N, *de telle sorte que* Mdx + Ndy *soit une différentielle exacte.*

La seconde partie égale $f(x, y)$ — M. L'équation du problème est donc

$$Mdx + \left[f(x, y) - M\right]dy = du. \tag{1}$$

On doit avoir

$$\frac{dM}{dy} = \frac{df}{dx} - \frac{dM}{dx},$$

ou

$$\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy} = \frac{df}{dx}; \tag{2}$$

équation aux dérivées partielles, du premier ordre.

Les équations auxiliaires sont :

$$dx = dy = \frac{dM}{\left(\frac{df}{dx}\right)}; \tag{3}$$

et leurs intégrales :

$$x = \alpha + y, \qquad M = \int \frac{df}{dx} dx + \beta. \tag{4}$$

Dans $\frac{df}{dx}$, on doit remplacer x par $\alpha + y$. Ainsi

$$M = \int \frac{df}{dx} dy + \varphi(x - y); \tag{5}$$

pourvu qu'après l'intégration on suppose α égale x — y.

II. *Exemple :*

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2y + y^2;$$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 6xy = 3(\alpha + y)^2 - 6(\alpha + y)y;$$

$$\int \frac{df}{dx} dy = (\alpha + y)^3 - 3\alpha y^2 - 2y^3 = x^3 - 3(x - y)y^2 - 2y^3 = x^3 - 3xy^2 + y^3;$$

$$M = x^3 - 3xy^2 + y^3 + \varphi(x - y),$$

$$N = -3x^2y + 3xy^2 + y^2 - y^3 - \varphi(x - y).$$

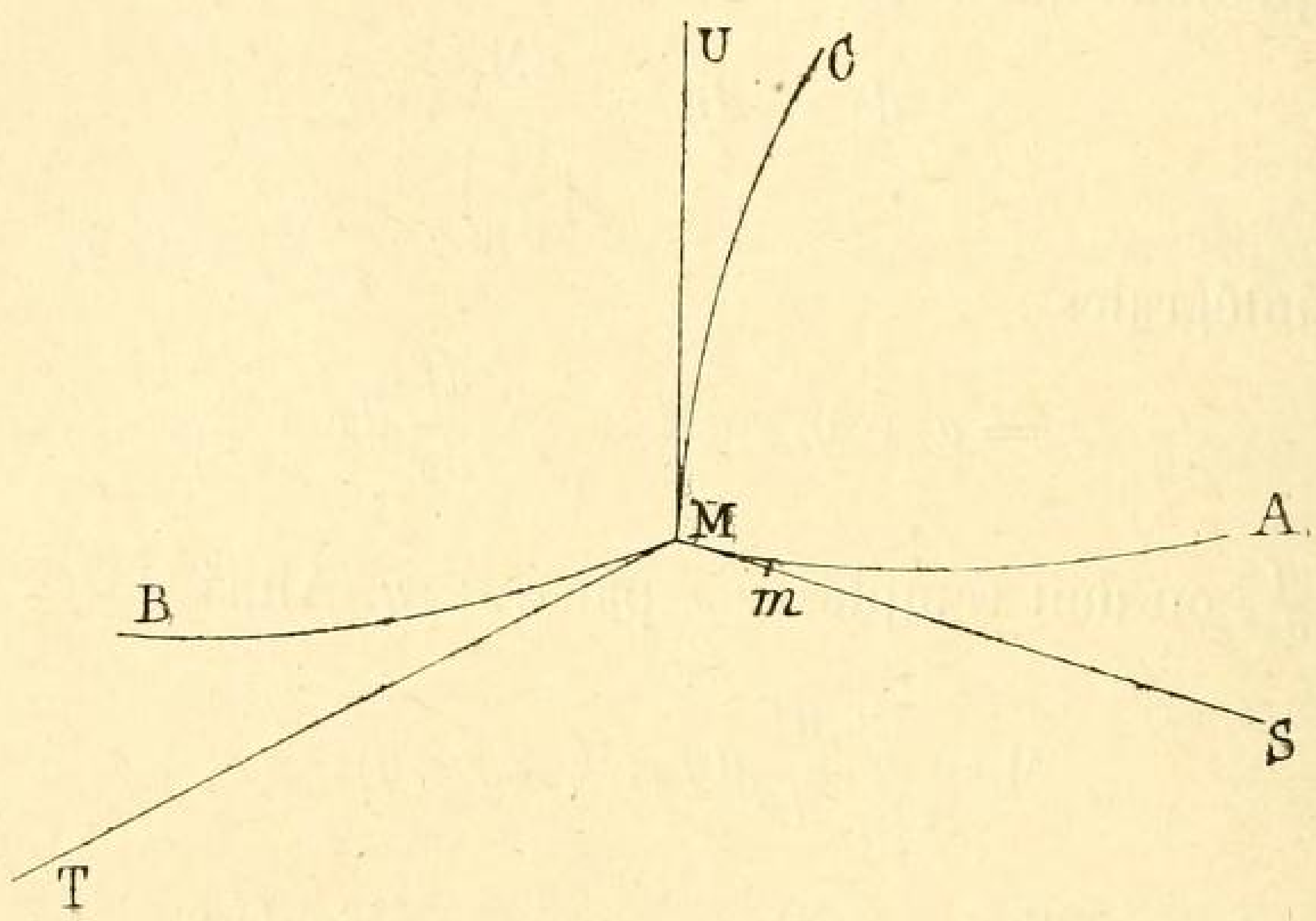
On trouve ensuite :

$$u = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + xy^3 + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \psi(x - y).$$

CCLI. — Une propriété des systèmes triplement orthogonaux.

(*Mai* 1872.)

I. Soient trois surfaces appartenant à un pareil système, et se coupant suivant les *lignes de courbure* MA, MB, MC, dont les



tangentes sont MS, MP, MU. Les directions MS, MP sont déterminées par les équations

$$dx = pdx + qdy, \tag{1}$$

$$\frac{dx + pdx}{rdx + sdy} = \frac{dy + qdz}{sdx + tdy}, \tag{2}$$

dans lesquelles les dérivées se rapportent à la surface AMB.

MS est normale à la surface BMC; donc

$$\frac{dx}{p'} = \frac{dy}{q'} = \frac{dz}{-1}. \tag{3}$$

Cette fois, les dérivées sont relatives à cette seconde surface; et dx, dy, dz sont les projections, sur les axes de coordonnées, d'un élément Mm de MA.

L'angle UMS est droit ; donc

$$pp' + qq' + 1 = 0. \tag{4}$$

Au moyen des proportions (3), l'équation (2) devient

$$\frac{rp' + sq'}{p - p'} = \frac{sp' + tp'}{q - q'} = \theta; \tag{5}$$

θ étant une inconnue auxiliaire.

Soit, en outre,

$$P = [(p'-p)^2 s-(p'-p)(q'-q)(r-t)-(q'-q)^2 s][(r+\theta)(t+\theta)-s^2]. \tag{6}$$

Les équations (5) ont même forme que les équations (1) de la *Note* CCXLIX. De plus, P ne diffère, du produit XZ (*), que par un changement de lettres. Donc, en vertu de la formule (A) (*):

$$P = [p^2 s - pq(r - t) - q^2 s](rt - s^2). \tag{7}$$

Ainsi, *la fonction* P *dépend, uniquement, de la surface* AMB.

II. On tire, des équations (5) (*) :

$$p' = \theta \frac{(t + \theta)p - qs}{(r + \theta)(t + \theta) - s^2}, \quad q' = \theta \frac{(r + \theta)q - ps}{(r + \theta)(t + \theta) - s^2}; \tag{8}$$

après quoi la substitution dans (4) donne

$$(1 + p^2 + q^2)\theta^2 + [(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r]\theta + rt - s^2 = 0. \tag{9}$$

Si R est le rayon de la section normale, tangente à MA :

$$\left.\begin{aligned}&(1 + p^2 + q^2)^2 \frac{1}{R^2} - [(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r] \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{R}\\&\qquad + rt - s^2 = 0 \ (^{**}).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Donc, abstraction faite du signe, l'auxiliaire θ est donnée par la formule

$$\theta = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{R}. \tag{11}$$

(*) *Loc. cit.*

(**) Voir, par exemple, l'*Analyse appliquée,* de Leroy, p. 314

Autrement dit, $\frac{1}{\theta}$ *est la projection, sur l'axe* Oz, *du rayon principal* R.

III. Si R' est le second rayon principal, on a, par l'équation (10),

$$\frac{1}{RR'} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Donc la formule (7) peut être écrite ainsi :

$$P = [p^2 s - pq(r - t) - q^2 s] \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{RR'} \text{ (*)}. \qquad (12)$$

(*) La réduction de la forme (6) aux formes (7) ou (12) doit, sans doute, pouvoir être interprétée géométriquement. J'ai cherché cette interprétation; mais je n'ai rien trouvé de satisfaisant, *même quand les surfaces données sont des* QUARTIQUES *homofocales*. Quand il en est ainsi, on a (*) :

$$p = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}, \quad pq = \frac{c^4}{a^2 b^2}\frac{xy}{z^2},$$

$$r = -\frac{c^4(b^2 - y^2)}{a^2 b^2 z^5}, \quad s = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}, \quad t = -\frac{c^4(a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3},$$

$$r - t = \frac{c^4(a^2 - x^2 - b^2 + y^2)}{a^2 b^2 z^3}, \quad rt - s^2 = \frac{c^6}{a^2 b^2 z^4}.$$

Donc :

$$p^2 s - pq(r - t) - q^2 s =$$

$$-\frac{c^8 xy}{a^2 b^2 z^5}\left(\frac{x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^4}\right) - \frac{c^8 xy}{a^4 b^4 z^5}(a^2 - x^2 - b^2 + y^2) = -\frac{(a^2 - b^2)c^6 xy}{a^4 b^4 z^3};$$

puis

$$P = -\frac{(a^2 - b^2)c^{12} xy}{a^6 b^6 z^7}.$$

(*) CHARLES DUPIN, *Développements de Géométrie*, p. 203.

CCLII. — Sur la Géométrie de MM. Brocard, Lemoine, Neuberg, de Longchamps, ... (*).

(*Avril* 1886.)

1. Théorème préliminaire. — *Si trois droites* APA′, BPB′, CPC′, *issues des sommets d'un triangle, se coupent en un point* P, *les symétriques de ces droites, relativement aux bissectrices intérieures, se coupent en un point* Q (**).

Appelons γ les angles *égaux* ACC′, BCC″.

Dans les triangles ACC′, ACC″, BCC″, BCC′ :

$$\frac{AC'}{AC}=\frac{\sin\gamma}{\sin(A+\gamma)},\quad \frac{AC''}{AC}=\frac{\sin(C-\gamma)}{\sin(B-\gamma)},$$

$$\frac{BC'}{BC}=\frac{\sin(C-\gamma)}{\sin(A+\gamma)},\quad \frac{BC''}{BC}=\frac{\sin\gamma}{\sin(B+\gamma)}.$$

Donc

$$\frac{AC'.AC''}{BC'.BC''}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2; \tag{1}$$

relation remarquable (***).

Il en résulte :

$$\frac{AC'.AC''}{BC'.BC''}\cdot\frac{BA'.BA''}{CA'.CA''}\cdot\frac{CB'.CB''}{AB'.AB''}=1.$$

(*) La *Nouvelle Géométrie du triangle,* créée, il y a douze ans, par MM. *Brocard* et *Lemoine,* est déjà si féconde et si importante, qu'il est devenu nécessaire d'en écrire l'*histoire*. M. *Émile Vigarié, Élève à l'École des Mines* (Paris), publie en ce moment (juin 1887), dans le *Journal de M. G. de Longchamps,* une *Étude bibliographique et terminologique,* à laquelle nous renvoyons le lecteur.

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

(***) Si $CM\gamma$ est une transversale, passant au centre de gravité M, on peut écrire ainsi l'égalité (1) :

$$\frac{AC'.AC''}{BC'.BC''}=\frac{A\gamma}{B\gamma};$$

et en déduire d'autres conséquences (*Théorèmes et Problèmes* de *Géométrie élémentaire,* 6e édition, p. 252). (Mars 1888.)

Par hypothèse,

$$AC'.BA'.CB' = BC'.CA'AB'.$$

Conséquemment,

$$AC''.BA''.CB'' = BC''.CA''.AB''. \qquad (2)$$

C Q. F. D.

II. *Remarque.* — On peut dire que les points P, Q sont *associés*. Cela posé : si P est le *centre de gravité*, Q est le *point de Lemoine;* si P est un *point de Brocard*, Q est l'autre *point de Brocard;* etc.

CCLIII. — Problème de Probabilités (*).

(*Novembre* 1884.)

I. *Combien y a-t-il de nombres de* n *chiffres, composés, chacun, de* p *chiffres donnés?* ou encore :

De combien de manières peut-on remplir n *cases données, avec* p *lettres données,* a, b, c, ..., f, g, *chaque arrangement devant contenir les* p *lettres?*

Soit $\varphi(n, p)$ ce nombre de manières. Considérons les arrangements composés de $n - 1$ lettres, et contenant, soit les p lettres données, soit seulement $p - 1$ de ces lettres.

1° A la droite de chacun des premiers, apportons, successivement, chacune des p lettres $a, b, c, ..., f, g$. Nous obtiendrons $p\varphi(n - 1, p)$ des arrangements demandés.

2° Parmi les arrangements composés de $n - 1$ lettres, il y en a $\varphi(n - 1, p - 1)$ qui ne contiennent pas a, $\varphi(n - 1, p - 1)$ qui ne contiennent pas b; etc. A la droite de chacun, écrivons la lettre *manquante :* nous formerons $p\varphi(n - 1, p - 1)$ nouveaux arrangements, faisant partie de ceux que nous cherchions. L'équation du problème est donc

$$\varphi(n, p) = p\left[\varphi(n - 1)p) + \varphi(n - 1, p - 1)\right] \text{ (**)}. \qquad (1)$$

(*) Extrait d'un *Traité*, inédit.

(**) Dans mon cours à l'Université, j'avais obtenu cette équation (1) au moyen d'un raisonnement *inexact;* et, en conséquence, je la croyais *fausse*. M. *Beaupain*, l'un de mes meilleurs élèves, me communiqua la démonstration précédente.

II. On peut supposer $\varphi(n, 0) = 0$. De plus, il est visible que $\varphi(n, 1) = 1$. Or, dans le *Calcul des différences*, on trouve la formule

$$\Delta^p(o^n) = p\left[\Delta^p(o^{n-1}) + \Delta^{p-1}(o^{n-1})\right], \tag{2}$$

dont la vérification est facile, et qui a même forme que l'équation (1). On satisfait donc à celle-ci en prenant

$$\varphi(n, p) = \Delta^p(o^n),$$

ou

$$\varphi(n, p) = p^n - \frac{p}{1}(p-1)^n + \frac{p(p-1)}{1.2}(p-2)^n - \dots \pm \frac{p}{1}(1^n). \tag{3}$$

III. *Remarque.* — La quantité $\varphi(n, p)$ est le nombre des cas favorables, dans le problème suivant :

Quelle est la probabilité que les p *numéros, contenus dans une urne, sortiront en* n *tirages* (*)?

Le nombre des cas possibles est p^n. En effet, on peut remplacer les n tirages par un seul, effectué au moyen de n urnes (**).

CCLIV. — Quelques décompositions de l'unité (***).

(*Juin* 1886.)

I. Théorème (IV). — *Si* xyz = abc, *on a :*

$$\left.\begin{aligned}
1 &= \sum \frac{bx}{xy + b(a+x)}, & 1 &= \sum \frac{ay}{xy + a(b+y)},\\
1 &= \sum \frac{ab}{xy + b(a+x)}, & 1 &= \sum \frac{ab}{xy + a(b+y)},\\
1 &= \sum \frac{xy}{xy + b(a+x)}, & 1 &= \sum \frac{xy}{xy + a(b+y)}.
\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

(*) A chaque fois, le numéro sorti est remis dans l'urne.

(**) Laplace, *Théorie analytique des Probabilités* (1812), p. 193.

(***) Trouvées en résolvant un problème sur le triangle.

(IV) Ou, plus exactement : *Remarque.*

II. *Application.* — Soient :

$$a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5,$$
$$x = 10, \quad y = 3, \quad r = 2.$$

On doit trouver :

$$\frac{40}{30 + 4.13} + \frac{15}{6 + 5.7} + \frac{6}{20 + 3.7} = 1,$$
$$\frac{9}{30 + 3.7} + \frac{8}{6 + 4.7} + \frac{50}{20 + 5.13} = 1,$$
$$\frac{12}{30 + 3.7} + \frac{20}{6 + 4.7} + \frac{15}{20 + 5.13} = 1,$$
$$\frac{12}{30 + 4.13} + \frac{20}{6 + 5.7} + \frac{15}{20 + 3.7} = 1,$$
$$\frac{30}{30 + 4.13} + \frac{6}{6 + 5.7} + \frac{20}{20 + 3.7} = 1,$$
$$\frac{30}{30 + 3.7} + \frac{6}{6 + 4.7} + \frac{20}{30 + 5.13} = 1;$$

et tous ces résultats sont exacts.

III. *Corollaire.* — *L'équation*

$$(xyz - abc)^2 = 0,$$

peut être écrite sous les six formes (A).

CCLV. — Conséquences du Théorème de Fermat.

(*Septembre* 1886.)

I. Soient p, q deux nombres premiers, impairs et inégaux. *Si* p *ne divise pas* q — 1, on a, par le Théorème de Fermat :

$$(q - 1)^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}(p). \tag{1}$$

Mais

$$(q - 1)^{p-1} = q^{p-1} - \frac{p-1}{1} q^{p-2} + \dots - \frac{p-1}{1} q + 1 = \mathfrak{M}(q) + 1.$$

Donc, dans l'égalité (1), le premier membre est divisible par q. Et comme p, q sont premiers entre eux, cette égalité devient :

$$(q-1)^{p-1}-1=\mathfrak{M}(pq). \tag{A}$$

De même, *si* q *ne divise pas* p — 1 :

$$(p-1)^{q-1}-1=\mathfrak{M}(pq). \tag{B}$$

Quand les deux conditions ont lieu simultanément :

$$(q-1)^{p-1}-(p-1)^{q-1}=\mathfrak{M}(pq), \tag{C}$$

ou

$$\left[(q-1)^{\frac{p-1}{2}}+(p-1)^{\frac{q-1}{2}}\right]\left[(q-1)^{\frac{p-1}{2}}-(p-1)^{\frac{q-1}{2}}\right]=\mathfrak{M}(pq). \tag{D}$$

II. p étant *impair*, $a^{p-1}-1$ est, *algébriquement*, divisible par $a+1$. Donc ce binôme est, *arithmétiquement* aussi, divisible par $a+1$. En conséquence :

p *étant un nombre premier, qui ne divise ni* a *ni* a + 1 :

$$a^{p-1}-1=\mathfrak{M}\left[p(a+1)\right]. \tag{E}$$

De même : p *étant un nombre premier, qui ne divise ni* a *ni* a — 1 :

$$a^{p-1}-1=\mathfrak{M}\left[p(a-1)\right]. \tag{F}$$

Enfin, *si le nombre premier*, p, *ne divise ni* a — 1, *ni* a, *ni* a + 1 (*) :

$$a^{p-1}-1=\mathfrak{M}\left[p(a^2-1)\right]. \tag{G}$$

Soient, par exemple,

$$a=4, \quad p=7.$$

On doit trouver

$$4^6-1=\mathfrak{M}(105).$$

En effet,

$$4^6-1=65.63=5.13.7.9.$$

(*) Ces trois conditions sont remplies si p surpasse $a+1$.

III. D'après (E) et (F) : *si le nombre premier* p *ne divise pas, à la fois,* q + 1 *et* q — 1 :

$$(q+1)^{p-1} - (q-1)^{p-1} = \mathfrak{M}(pq),$$

ou

$$\left[(q+1)^{\frac{p-1}{2}} + (q-1)^{\frac{p-1}{2}}\right]\left[(q+1)^{\frac{p-1}{2}} - (q-1)^{\frac{p-1}{2}}\right] = \mathfrak{M}(pq). \quad \text{(H)}$$

IV. Supposons *q impair*. Alors le premier membre est divisible par 2^{p-1}, nombre premier avec pq. Donc :

$$\left[\left(\frac{q+1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}} + \left(\frac{q-1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}}\right]\left[\left(\frac{q+1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}} + \left(\frac{q-1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}}\right] = \mathfrak{M}(pq). \quad \text{(K)}$$

V. *Remarques*. — 1° Si p a la forme $4\mu - 1$, le premier facteur égale

$$\left(\frac{q+1}{2}\right)^{2\mu-1} + \left(\frac{q-1}{2}\right)^{2\mu-1}:$$

il est divisible par q.

2° Si $p = 4\mu + 1$, le second facteur est divisible par q.

VI. Lorsque $q = 3$, l'égalité (K) se réduit à

$$\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) = \mathfrak{M}(3p).$$

Cela posé, d'après un théorème connu (*) :

1° *Si* p $= 8\mu \pm 1$, *le second facteur est divisible par* p ;

2° *Si* p $= 8\mu \pm 3$, *le premier facteur est divisible par* p (**).

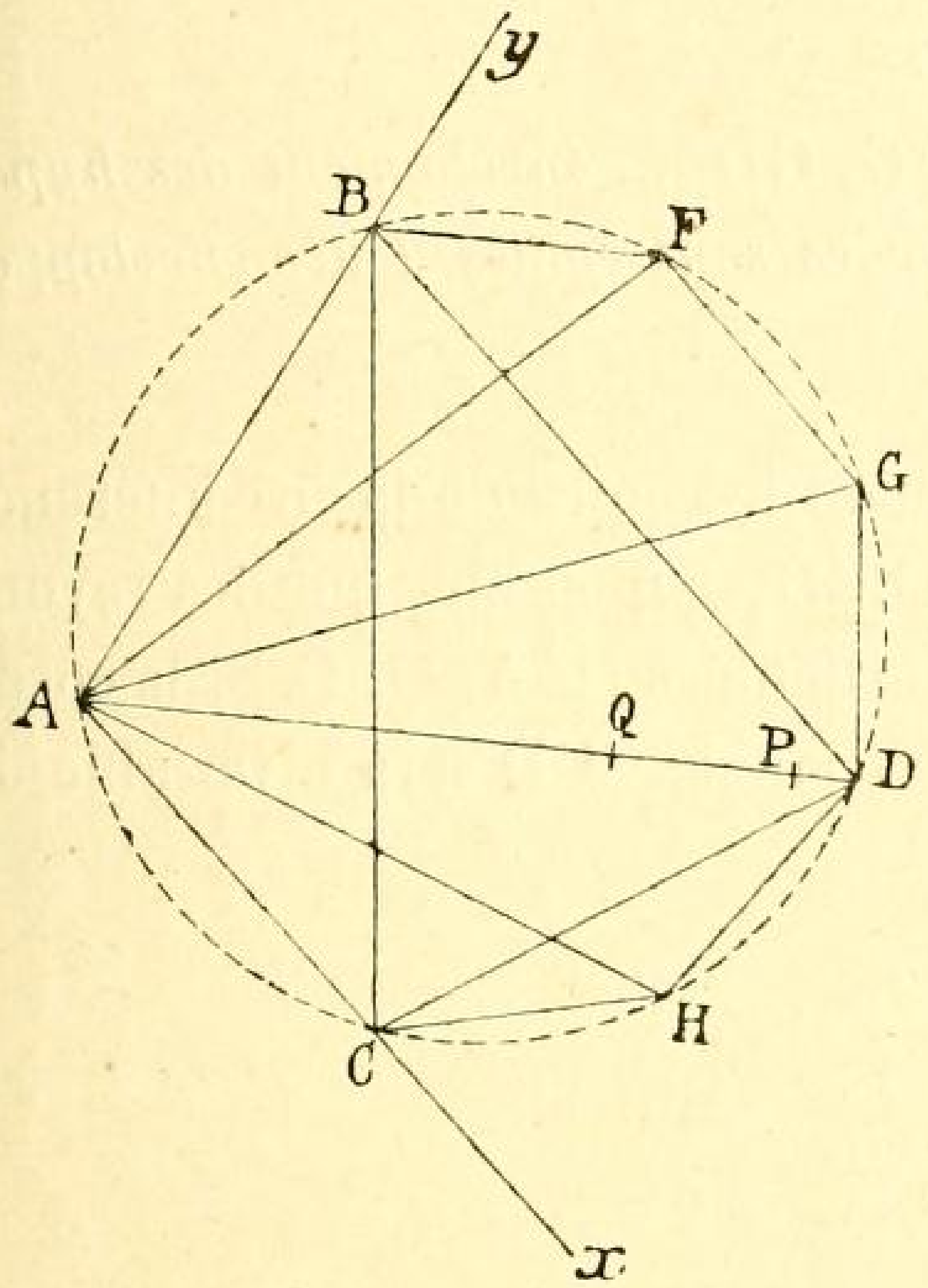
(*) SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II, p. 109.

(**) Je ne pense pas que, dans le cas général, on puisse, *a priori*, déterminer quel est le facteur divisible par p, même au moyen de la *loi de réciprocité*, de Legendre. (Alors, bien entendu, q doit être supposé *premier*.)

CCLVI. — Systèmes articulés.

(*Avril* 1886.)

I. *Préliminaires.* — Soit BACD un quadrilatère inscrit. Si l'angle BAC est rendu fixe, la diagonale BC est une *droite de longueur constante, glissant entre les côtés de l'angle* xAy. Quant aux côtés, BD, CD, ce sont des cordes dont les longueurs sont données, et qui appartiennent à un cercle mobile, de rayon *constant.* Donc l'*angle* DAx *est constant;* et *le sommet* D *décrit un segment de la droite* DA (*). Les positions extrêmes du point D, savoir : P, Q, sont déterminées par



$$AP = BD, \qquad AQ = CD \ (^{**}).$$

II. Lorsque l'angle A est droit, l'enveloppe de BC est une *hypocycloïde droite.* Dans le cas général, cette enveloppe est une courbe fort compliquée, que nous pouvons appeler *hypocycloïde oblique* (***).

III. Les droites BD, CD ont des longueurs constantes; elles

(*) Théorème connu. Voir, dans mon *Application de l'Algèbre à la Géométrie* (1848), une remarquable Note de M. Mannheim.

(**) Quand B vient en A, BD coïncide avec AP; quand C vient en A, CD coïncide avec AQ. Par suite, les points P, Q se confondent, si BD = CD.

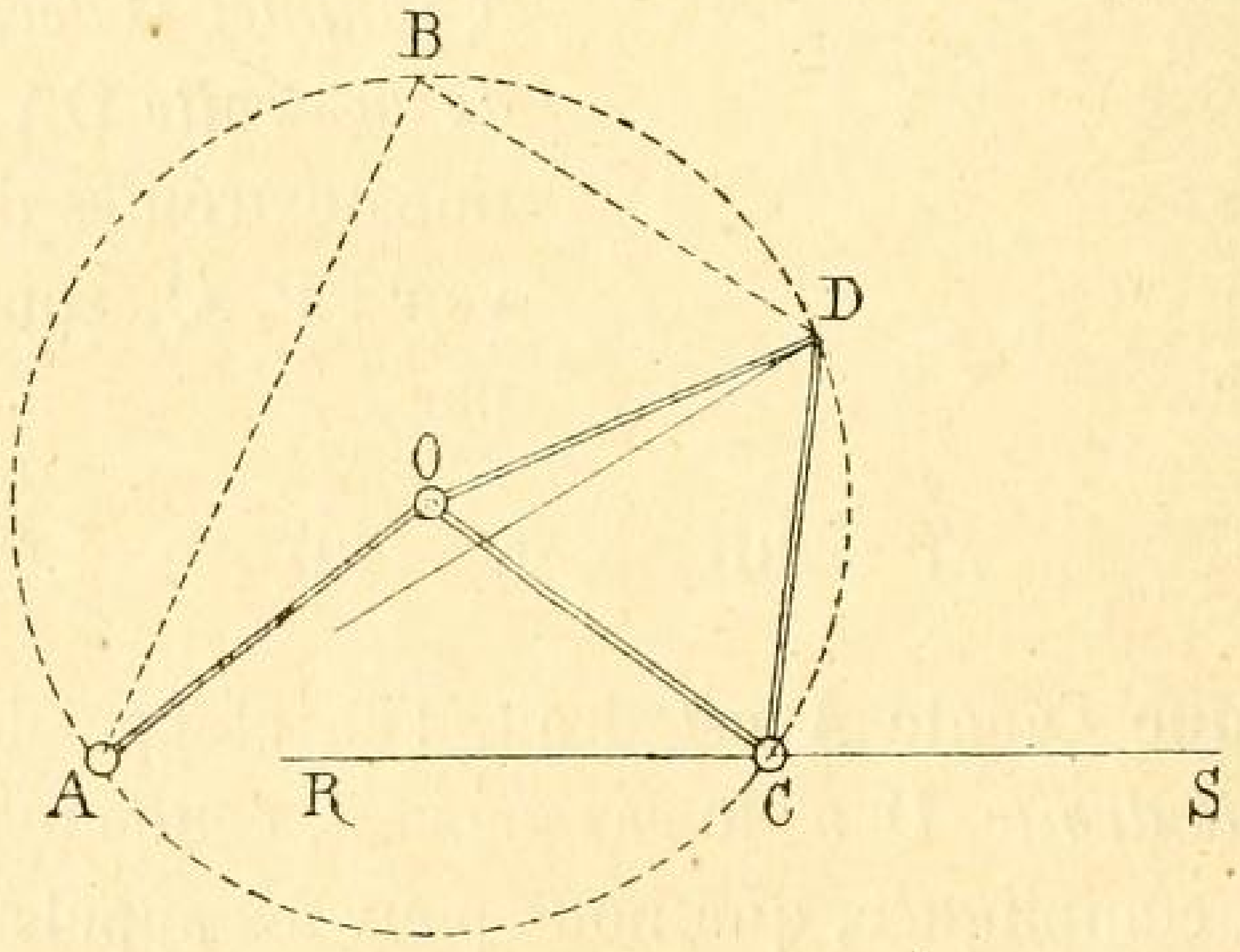
(***) Il n'est pas difficile de prouver que *toute hypocycloïde oblique est parallèle à une certaine hypocycloïde droite.* Voir, dans les *Nouvelles Annales* (1878, p. 321), une autre Note de M. Mannheim.

glissent dans des angles donnés; donc l'enveloppe de chacune est une *hypocycloïde oblique.*

IV. Prenons, sur la circonférence circonscrite au quadrilatère ABCD, des points F, G, H, ... La propriété démontrée pour le point D subsiste pour ces divers points; donc *ils décrivent des droites passant par le sommet* A.

V. De plus, *les cordes* BF, FG, GD, ... *enveloppent des hypocycloïdes obliques.* Et *si ces cordes sont égales, leurs enveloppes le sont.*

VI. *Système articulé.* — O étant le centre de la circonférence circonscrite au quadrilatère ABCD, supposons que les rayons AO, CO, DO soient trois tiges, articulées en A, O, C. Si la corde CD est une quatrième tige, le triangle COD sera invariable de



forme et de grandeur. Par suite, quand l'*anneau* C décrira la droite fixe RS, passant en A, le sommet D décrira également une droite, passant aussi en A; et l'on aura transformé un *mouvement rectiligne alternatif* en un autre *mouvement rectiligne alternatif.*

CCLVII. — Sur des sommes de bi-carrés.

(*Mai* 1886-*Juin* 1887.)

I. D'après l'identité connue :

$$\left.\begin{aligned}&(-x+y+z)^4+(x-y+z)^4+(x+y-z)^4+(x+y+z)^4\\&=(2x^2+2y^2+2z^2)^2+(4xy)^2+(4yz)^2+(4zx)^2\ (^*);\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

la somme de quatre bi-carrés peut être égale à la somme de quatre carrés (**).

Soient, par exemple,

$$x=1,\qquad y=2,\qquad z=6.$$

On trouve

$$7^4+5^4+3^4+9^4=82^2+8^2+24^2+48^2,$$

ou

$$2\,401+625+81+6\,561=6\,724+64+576+2\,304=9\,668.$$

II. Une autre identité, à peu près évidente :

$$\left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2,$$

donne celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}x^4+y^4+z^4+u^4=&\left(\frac{-x^2+y^2+z^2+u^2}{2}\right)^2+\left(\frac{x^2-y^2+z^2+u^2}{2}\right)^2\\&+\left(\frac{x^2+y^2-z^2+u^2}{2}\right)^2+\left(\frac{x^2+y^2+z^2-u^2}{2}\right)^2;\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

au moyen de laquelle on peut résoudre le même problème. Exemple :

$$7^4+5^4+3^4+9^4=33^2+57^2+73^2+1^2$$
$$=1089+3249+5329+1=9668.$$

(*) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 66.

(**) On ne compte pas l'égalité *insignifiante :*

$$a^4+b^4+c^4+d^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2+(d^2)^2.$$

III. Il est visible que

$$x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2. \tag{3}$$

Ainsi, *la somme de trois bi-carrés,* a^4, b^4, c^4, *est le double d'un carré, lorsque*

$$c = a + b.$$

IV. *Remarque* (*). — Soit

$$\begin{aligned} N = {} & (x^2 + xy + y^2)^2 + (x'^2 + x'y' + y'^2)^2 \\ & + (x''^2 + x''y'' + y''^2)^2 + (x'''^2 + x'''y''' + y'''^2)^2. \end{aligned}$$

Alors $2N$ *est la somme de douze bi-carrés.*

En particulier, *si*

$$\begin{aligned} N = {} & (3x^2 + 3x + 1)^2 + (3x^2 + 9x + 7)^2 \\ & + (3x^2 + 15x + 19)^2 + (3x^2 + 21x + 37)^2, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} 2N = {} & x^4 + 2(x + 1)^4 + 2(x + 2)^4 + 2(x + 3)^4 + (x + 4)^4 \\ & + (2x + 1)^4 + (2x + 3)^4 + (2x + 5)^4 + (2x + 7)^4. \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} 2[7^2 + 19^2 + 37^2 + 61^2] = {} & 1^4 + 2.2^4 + 2.3^4 + 2\ 4^4 \\ & + 5^4 + 5^4 + 5^4 + 7^4 + 9^4, \end{aligned}$$

ou

$$2.5500 = 11\,000.$$

V. *Autres identités.*

$$\left.\begin{aligned} & (x - y)^3(x - z) + (y - z)^3(y - x) + (z - x)^3(z - y) \\ & \qquad = (x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)^2\,(^{**}) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} & x^4 + y^4 + z^4 + (x + y + z)^4 = (x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy)^2 \\ & + \left[(x + z)(y + x)\right]^2 + \left[(y + x)(z + y)\right]^2 + \left[(z + y)(x + z)\right]^2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(*) Peut-elle être utilisée pour la démonstration du théorème empirique de Waring?

(**) Il en résulte que l'*équation*

$$(x - y)^3(x - z) + (y - z)^3(y - x) + (z - x)^3(z - y) = 0$$

représente la droite isogonale.

CCLVIII. — Quelques sommations (*).

(*Juin* 1887.)

IX. Lorsque $c = 1$, le second membre de l'égalité (1) (**) se réduit à

$$\frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{ab\Gamma(a+b+n+1)}.$$

En outre,

$$C_{n,p}.\Gamma(1+p) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(q+1)}.$$

Donc cette égalité (1) devient

$$\sum_{q=0}^{q=n} \frac{\Gamma(a+q)\Gamma(b+q)}{\Gamma(a+b+1+q)\Gamma(q+1)} = \frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{ab\Gamma(a+b+n+1)\Gamma(n+1)}. \quad (4)$$

Si, dans celle-ci, on supprime les facteurs communs, et qu'on développe complètement le premier membre, elle prend cette forme remarquable :

$$\left.\begin{aligned} &1 + \frac{ab}{(a+b+1)\Gamma(2)} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{(a+b+1)(a+b+2)\Gamma(3)} + \cdots \\ &+ \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{(a+b+1)(a+b+2)\cdots(a+b+n)\Gamma(n+1)} \\ &= \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(b+1)(b+2)(b+n)}{(a+b+1)(a+b+2)\cdots(a+b+n)\Gamma(n+1)}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

X. *Remarque.* — Dans la série de Gauss :

$$1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \text{ (***)},$$

supposons :

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = a+b+1, \quad x = 1.$$

(*) Suite de la *Note* CCXXXVII.

(**) Page 65.

(***) *Sur quelques intégrales définies*, p. 14.

Elle se change en

$$1 + \frac{ab}{(a+b+1)\Gamma(2)} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{(a+b+1)(a+b+2)\Gamma(3)} + \cdots \qquad (6)$$

Ainsi, *le premier membre de l'égalité* (5) *est la somme des* n + 1 *premiers termes de la série* (6).

XI. *Étude d'une série.* — Pour plus de simplicité, faisons abstraction du premier terme, et posons :

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{ab}{(a+b+1)\Gamma(2)}, \quad u_2 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{(a+b+1)(a+b+2)\Gamma(3)}, \cdots \\ u_n &= \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{(a+b+1)(a+b+2)\cdots(a+b+n)\Gamma(n+1)}, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \qquad (8)$$

D'après l'égalité (5) :

$$1 + S_n = \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}{(a+b+1)\cdots(a+b+n)\Gamma(n+1)}. \qquad (9)$$

Donc

$$\frac{1+S_n}{u_n} = \frac{(a+n)(b+n)}{ab};$$

ou, ce qui est équivalent,

$$S_n = -1 + \frac{(a+n)(b+n)}{ab} u_n. \qquad (10)$$

Ainsi, *la somme* S_n *s'exprime, fort simplement, au moyen de* u_n.

XII. *Suite.* — On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(a+b+n+1)}. \qquad (11)$$

De là résulte que *la série est toujours convergente* (*). En effet,

$$lim\left[(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n} - n\right] = lim\,\frac{ab-n}{a+b+n+1} = -1 \ (^{**}).$$

(*) Les constantes a, b sont supposées *positives.*

(**) *Traité élémentaire des séries,* p. 23.

Par suite,

$$lim.S_n = S = -1 + \frac{1}{ab} lim\big[(a+n)(b+n)u_n\big]. \qquad (12)$$

Pour évaluer cette limite, nous nous servirons d'une proposition auxiliaire.

XIII. Théorème. — *Soient quatre nombres* a, b, a′, b′, *tels que* a + b = a′ + b′, *et soit* x *une variable indéfiniment croissante. On a*

$$lim \cdot \frac{\Gamma(a+x)\Gamma(b+x)}{\Gamma(a'+x)\Gamma(b'+x)} = 1. \qquad (13)$$

Posons

$$y = \frac{\Gamma(a+x)\Gamma(b+x)}{\Gamma(a'+x)\Gamma(b'+x)};$$

ou, ce qui revient au même :

$$y = \frac{B(a+x,\ b+x)}{B(a'+x,\ b'+x)}.$$

Supposons que b' soit le plus grand des quatre nombres donnés. Nous aurons $b' - a = b - a' > 0$.

D'après le théorème d'Euler, exprimé par l'équation

$$\frac{B(p,m)}{B(q,m)} = \frac{B(p,m+q)}{B(q,m+p)} \ (^*),$$

$$y = \frac{B(a+x,\ b'-a)}{B(a'+x,\ b'-a)};$$

(*) Tome I, page 136. En passant, je ferai observer que cette équation revient à celle-ci :

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(m)}{\Gamma(p+m)} \frac{\Gamma(q+m)}{\Gamma(q)\Gamma(m)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+m)}{\Gamma(q)\Gamma(m+p)},$$

laquelle est évidente.

ou, par une formule connue (*) :

$$y = 1 - \frac{b'-a}{1}\frac{a-a'}{a+x} + \frac{(b'-a)(b'-a-1)}{1.2}\frac{(a-a')(a-a'+1)}{(a+x)(a'+x+1)} + \cdots$$

Donc

$$lim\, y = 1.$$

XIV. Revenons à la formule (12). On a

$$(a+n)(b+n)u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n)b(b+1)\cdots(b+n)}{(a+b+1)\cdots(a+b+n)\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{\Gamma(a+b+n+1)\Gamma(n+1)},$$

et

$$(a+1)+(b+1) = (a+b+1)+1.$$

Donc, en vertu du théorème précédent,

$$lim\left[(a+n)(b+n)u_n\right] = \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}; \qquad (14)$$

puis

$$S = -1 + \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}. \qquad (15)$$

XV. *Remarque.* — *Si* a, b *sont des nombres entiers, ou, si l'un des deux étant entier, l'autre est fractionnaire, la limite* S *est commensurable.* Par exemple, pour $a = b = 1$:

$$\frac{1^2}{1.3} + \frac{(1.2)^2}{1.2\times3.4} + \frac{(1.2.3)^2}{1.2.3\times3.4.5} + \frac{(1.2.3.4)^2}{1.2.3.4\times3.4.5.6} + \cdots = 1,$$

ou

$$\frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.4} + \frac{1.2.3}{3.4.5} + \cdots = 1.$$

(*) *Loc. cit*

De même, si $a = 1$, $b = \frac{2}{3}$:

$$\frac{2}{8} + \frac{2.5}{8.11} + \frac{2.5.8}{8.11.14} + \cdots = \frac{2}{3},$$

et

$$\frac{2}{8} + \frac{2.5}{8.11} + \frac{2.5.8}{8.11.14} = -1 + 22 \cdot \frac{2.5.8}{8.11.14}.$$

XVI. *Une équation aux différences.* — A cause de

$$(a + n)(b + n)u_n = (n + 1)(a + b + n + 1)u_{n+1}, \tag{11}$$

l'égalité (10) peut être écrite ainsi :

$$ab(1 + S_n) = (n + 1)(a + b + n + 1)u_{n+1}.$$

Mais

$$u_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \Delta S_n = \Delta(1 + S_n).$$

Donc, si l'on remplace $1 + S_n$ par Z_n :

$$abZ_n = (n + 1)(a + b + n + 1)\Delta Z_n, \tag{16}$$

équation aux différences finies. En vertu de la formule (9), elle est vérifiée par

$$Z_n = \frac{(a + 1)\cdots(a + n)(b + 1)\cdots(b + n)}{(a + b + 1)\cdots(a + b + n)\Gamma(n + 1)}. \tag{17}$$

CCLIX. — Sur le Postulatum de Bertrand.

(*Juin* 1886.)

I. Lemme. — *Selon que* $\left(\frac{2n}{a}\right)$ *est pair ou impair,*

$$\left(\frac{2n}{a}\right) - 2\left(\frac{n}{a}\right),$$

égale zéro ou un (*).

II. Considérons le nombre entier

$$\varphi(n) = \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{1.2\ldots n} \quad (^{**}) \tag{1}$$

Soit p un nombre premier qui divise le dénominateur, et soit p^α la plus grande puissance de p qui divise $\varphi(n)$.

Comme

$$\varphi(n) = \frac{1.2.3\ldots 2n}{(1.2.3\ldots n)^2},$$

on a

$$\alpha = \left(\frac{2n}{p}\right) + \left(\frac{2n}{p^2}\right) + \cdots - 2\left[\left(\frac{n}{p}\right) + \left(\frac{n}{p^2}\right) + \cdots\right],$$

ou

$$\alpha = \left[\left(\frac{2n}{p}\right) - 2\left(\frac{n}{p}\right)\right] + \left[\left(\frac{2n}{p^2}\right) - 2\left(\frac{n}{p^2}\right)\right] + \left[\left(\frac{2n}{p^3}\right) - 2\left(\frac{n}{p^3}\right)\right] + \cdots \tag{2}$$

D'après le Lemme, *si* l *est le nombre de ceux, des quotients entiers*

$$\left(\frac{2n}{p}\right), \quad \left(\frac{2n}{p^2}\right), \quad \left(\frac{2n}{p^3}\right), \ldots,$$

qui sont impairs,

$$\alpha = l. \tag{3}$$

(*) *Note* LXXXI, § 2.

(**) $\varphi(n) = C_{2n,n} = (n+1)T_{n+2}$. Voir *Note* CVII.

III. *Exemple*, n $= 15$. — Les valeurs de p sont 2, 3, 5, 7, 11, 13. Pour $p = 2$, les quotients impairs sont

$$\left(\frac{30}{2}\right),\quad \left(\frac{30}{4}\right),\quad \left(\frac{30}{8}\right),\quad \left(\frac{30}{16}\right):\ \alpha = 4.$$

Pour $p = 3$, les quotients impairs sont

$$\left(\frac{30}{9}\right),\quad \left(\frac{30}{27}\right):\ \alpha = 2.$$

Pour $p = 5$, le seul quotient impair est

$$\left(\frac{30}{25}\right):\ \alpha = 1.$$

Pour $p = 7, 11, 13$, aucun quotient n'est impair.

Donc

$$\varphi(15) = 2^4.3^2.5.\mathrm{E},$$

E *étant un nombre entier, composé des facteurs premiers compris entre* 16 *et* 30.

En effet,

$$\varphi(15) = \frac{16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15}$$

$$= \frac{17.2.19.22.23.25.2.27.28.29}{11.14.15}$$

$$= 17.2.19.2.23.5.2.9.2.29 = 2^4.3^2.5 \times 17.19.23.29.$$

IV. Changeons de notation, et appelons $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \pi$ les nombres premiers qui ne surpassent pas n (*).

Soit a le nombre de ceux, des quotients $\left(\frac{2n}{\alpha}\right), \left(\frac{2n}{\alpha^2}\right), \ldots$, qui sont *impairs;*

Soit b le nombre de ceux, des quotients $\left(\frac{2n}{\beta}\right), \left(\frac{2n}{\beta^2}\right), \ldots$, qui sont *impairs;*

. . . .

(*) $\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 5, \ldots$

Nous aurons, par ce qui précède,

$$\varphi(n) = \alpha^a \beta^b \gamma^c \dots \pi^p \mathrm{E}, \tag{A}$$

E *étant un nombre entier, composé des facteurs premiers compris entre* n + 1 *et* 2n, *s'il en existe.*

V. *Postulatum de Bertrand.* — D'après M. Bertrand, *entre* n *et* 2n, *il y a, au moins, un nombre premier* (*). Autrement dit, *le nombre* E *surpasse* 1 (**). Ce célèbre *postulatum* équivaut donc à l'inégalité

$$\varphi(n) > \alpha^a \beta^b \gamma^c \dots \pi^p. \tag{B}$$

VI. *Remarque.* — La Note citée contient (p. 8) cette autre *traduction* du *Postulatum :*

Le nombre entier n, étant supposé compris entre 2^k et $2^{k+1} - 1$, soient β, γ, δ, ..., π les nombres premiers impairs, non supérieurs à n. Soient en outre :

l_1, *le nombre de ceux, des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta}\right)$, $\left(\frac{2n}{\gamma}\right)$, ..., *qui sont impairs ;*

l_2, *le nombre de ceux, des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right)$, $\left(\frac{2n}{\beta\delta}\right)$, ..., *qui sont impairs ;*

. . . .

Si, entre n + 1 *et* 2n, *il y a des nombres premiers, on a*

$$k - l_1 + l_2 - l_3 + \dots > 0;$$

et réciproquement. De plus, le premier membre de cette inégalité est la *quotité* de ces nombres premiers.

Soit, par exemple, $n = 15$; et, par conséquent, $k = 3$.

On a

$$\beta = 3, \quad \gamma = 5, \quad \delta = 7, \quad \varepsilon = 11, \quad \pi = 13;$$

puis les quotients

$$\left(\frac{30}{3}\right) = 10, \quad \left(\frac{30}{5}\right) = 6, \quad \left(\frac{30}{7}\right) = 4, \quad \left(\frac{30}{11}\right) = 2, \quad \left(\frac{30}{13}\right) = 2,$$

$$\left(\frac{30}{15}\right) = 2, \quad \left(\frac{30}{21}\right) = 1, \quad \left(\frac{30}{35}\right) = 0.$$

(*) Voir les *Notes* LXXXI et CCXXV.

(**) Si n surpasse 1, E surpasse n.

Tous ces quotients sont *pairs*, excepté $\left(\frac{30}{21}\right)$. Donc

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 1, \quad l_3 = 0, \ldots,$$

puis

$$k - l_1 + l_2 - l_3 + \cdots = 4.$$

Effectivement, entre 16 et 30, il y a *quatre* nombres premiers; savoir : 17, 19, 23, 29.

CCLX. — Théorème d'Arithmétique.

(*Juillet* 1886.)

Nous avons cité, fréquemment, la propriété suivante, énoncée dans le *Cours d'Analyse* (*) :

a, b *étant deux nombres entiers, premiers entre eux :*

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(a+b-1)}{1\,.\,2\ldots a \times 1\,.\,2\ldots b} = \textit{entier}.$$

En voici une autre, du même genre, qui nous paraît curieuse :

n *étant premier avec* 6, *on a :*

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots\overline{2n-4}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n \times 1\,.\,2\,.\,3\ldots\overline{n-2}} = \textit{entier}. \tag{A}$$

Pour la démontrer, il suffit de vérifier la relation

$$\left(\frac{2n-4}{p}\right) \geqq \left(\frac{n}{p}\right) + \left(\frac{n-2}{p}\right); \tag{1}$$

p étant un nombre premier (**).

1° Soit $p = 2$. A cause de $n = 2n' + 1$, la relation (1) devient

$$\left(\frac{4n'-2}{2}\right) \geqq \left(\frac{2n'+1}{2}\right) + \left(\frac{2n'-2}{2}\right),$$

(*) Page 48.

(**) En effet, de

$$A \geqq B + C,$$

on conclut

$$\left(\frac{A}{p^\alpha}\right) \geqq \left(\frac{B}{p^\alpha}\right) + \left(\frac{C}{p^\alpha}\right).$$

ou

$$2n' - 1 \overline{\gtrless} n' + n' - 1 ;$$

ce qui est exact.

2° Soit $p = 3$. On peut avoir $n = 6n' \pm 1$.

Dans le premier cas, on trouve

$$4n' - 1 \overline{\gtrless} (2n') + (2n' - 1);$$

et, dans le second,

$$4n' - 2 \overline{\gtrless} (2n' - 1) + (2n' - 1).$$

3° Supposons $p > 3$.

Si $\left(\frac{2n-4}{p}\right)$ est *impair*, on a (*)

$$\left(\frac{2n-4}{p}\right) = 2\left(\frac{n-2}{p}\right) + 1 ;$$

donc la relation (1) se réduit à

$$\left(\frac{n-2}{p}\right) + 1 \overline{\gtrless} \left(\frac{n}{p}\right) ;$$

et celle-ci est évidente.

Si $\left(\frac{2n-4}{p}\right)$ est *pair*, posons

$$2n - 4 = 2ap + 2b,$$

ou

$$n - 2 = ap + b.$$

La même relation (1) devient

$$2a \overline{\gtrless} \left(\frac{ap + b + 2}{p}\right) + a,$$

ou

$$0 = \left(\frac{b+2}{p}\right).$$

Or, cette équation est une conséquence des inégalités

$$b < \frac{p}{2}, \quad 2 < \frac{p}{2}.$$

(*) *Note* CCLIX.

CCLXI. — Sur les Nombres de Segner (*).

(*Août* 1886.)

XVIII. *Relation entre les Nombres de Segner et les Nombres de Catalan* (**).

Le petit Mémoire intitulé: *Sur un développement de l'intégrale elliptique, de première espèce* (***), contient les égalités suivantes :

$$\frac{P_n}{2^{n+2}}=(2n-1)^2T_{n+1}^2-4\frac{n-1}{1}(2n-3)^2T_n^2+4^2\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}(2n-5)^2T_{n-1}^2-\dots,$$

$$n^2P_n-8(3n^2-3n+1)P_{n-1}+128(n-1)^2P_{n-2}=0 \text{ (iv)}.$$

On en conclut, évidemment, une *équation du premier degré, entre les carrés des Nombres de Segner*. Elle paraît devoir être fort compliquée.

XIX. *Propriétés nouvelles* (v). — 1° *Soit* i *le nombre des termes impairs compris dans la suite :*

$$\left(\frac{n-2}{1}\right),\quad \left(\frac{n-2}{2}\right),\quad \left(\frac{n-2}{4}\right),\quad \left(\frac{n-2}{8}\right),\ \dots;$$

selon que n *est pair ou impair,* T_n *est ou n'est pas divisible par* 2^i (vi).

(*) Complément à la *Note* CVII. (Congrès de Nancy.)

(**) M. l'Amiral de Jonquières m'a fait l'honneur de proposer cette dénomination, qui n'a point prévalu. Je l'emploie pour abréger.

(***) *Académie de Belgique*, 10 octobre 1885.

(iv) Les nombres *entiers* P_1, P_2, P_3, ..., que M. de Jonquières a bien voulu calculer, ont les valeurs suivantes :

$$P_1=8,\quad P_2=80,\quad P_3=896,\quad P_4=10\,816,\ \dots$$

(v) Addition au paragraphe XVII.

(vi) Cette proposition résulte de l'égalité

$$nT_{n+1}=C_{2n-2,\,n-1}, \tag{7}$$

2° *Lorsque*

$$n = 3\mu + 1, \quad T_n = \mathfrak{M}\left(\frac{2n-5}{3}\right).$$

Dans les cas contraires,

$$T_n = \mathfrak{M}(2n-5).$$

On sait, et il est facile de prouver, que

$$C_{2n,n} = \mathfrak{M}(2n-1).$$

Or,

$$C_{2n,n} = (n+1)T_{n+2}.$$

Donc

$$(n+1)T_{n+2} = \mathfrak{M}(2n-1),$$

ou

$$(n-1)T_n = \mathfrak{M}(2n-5). \tag{37}$$

Cela posé : si $n = 3\mu + 1$, cette égalité se réduit à

$$\mu T_n = \mathfrak{M}(2\mu - 1).$$

Et comme μ et $2\mu - 1$ sont premiers entre eux, on a

$$T_n = \mathfrak{M}(2\mu - 1) = \mathfrak{M}\left(\frac{2n-5}{3}\right).$$

Soit $n = 3\mu$. Alors

$$(3\mu - 1)T_n = \mathfrak{M}(6\mu - 5).$$

combinée avec le théorème suivant :

s étant le nombre des termes impairs compris dans la suite

$$\left(\frac{n}{1}\right), \left(\frac{n}{2}\right), \left(\frac{n}{4}\right), \left(\frac{n}{8}\right),$$

$C_{2n,n}$ *est divisible par* 2^s, *et le quotient est impair* (*Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 65). Ajoutons que :

1° *Si* n *est impair et égal à* $2^\alpha n' + 1$, $i - \alpha$ *est positif;* 2° T_n *est divisible par* $2^{i-\alpha}$. Enfin, d'après la relation (7) et une propriété démontrée : *Si* n *est premier avec* 6,

$$C_{2n-1,n-2} = \mathfrak{M}(n^2 - n).$$

Mais, évidemment, $3\mu - 1$ et $6\mu - 5$ sont premiers entre eux; donc

$$T_n = \mathfrak{M}(6\mu - 5) = \mathfrak{M}(2n - 5).$$

Si $n = 3\mu - 1$, on trouve, avec la même facilité,

$$T_n = \mathfrak{M}(6\mu - 7) = \mathfrak{M}(2n - 5).$$

3° *Dans la suite* $T_4, T_5, \ldots, T_n, T_{n+1}, \ldots$, *deux termes consécutifs ne sont pas composés des mêmes facteurs premiers.*

Pour démontrer cette proposition, je m'appuierai sur le Lemme suivant, à peu près évident :

Si deux fractions équivalentes ont leurs dénominateurs premiers entre eux :

1° *Ces fractions se réduisent à un nombre entier;*

2° *Leurs numérateurs ne sont pas composés des mêmes facteurs premiers.*

Ceci admis, prenons l'égalité (2) (*), mise sous la forme

$$\frac{T_{n+1}}{4n - 6} = \frac{T_n}{n}. \tag{38}$$

Si n est premier avec 6, les dénominateurs sont premiers entre eux; donc T_n et T_{n+1} *diffèrent par les facteurs premiers de* n *et de* 4n — 6 (**).

Soit $n = 2^\alpha 3^\beta n'$, n' étant premier avec 6. L'égalité (38) devient, si l'on suppose α et β différents de zéro :

$$\frac{T_{n+1}}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}n' - 1} = \frac{T_n}{2^{\alpha-1}3^{\beta-1}n'};$$

et l'on retombe sur le premier cas.

(*) *Note* CVII.

(**) Soit, par exemple, $n = 13$, ou $4n - 6 = 46$. On a

$$T_{13} = 2.7.13.17.19, \quad T_{14} = 2^2.7.17.19.23,$$

conformément à l'énoncé.

XX. *Groupes relatifs à un nombre premier.* — Soit, comme ci-dessus (XVII, 3°), p un nombre premier, supérieur à 5. On a vu que :

Si T_n *est divisible par* p, *sans que* T_{n-1} *le soit,* p *divise* $2n - 5$.

Les termes

$$T_{\frac{p+5}{2}},\quad T_{\frac{p+7}{2}}, \ldots, T_p,$$

tous divisibles par p, constituent ce que l'on peut appeler : *le premier groupe relatif au nombre* p.

Après $2n - 5 = p$, on peut prendre

$$2n - 5 = 3p,\quad 2n - 5 = 5p, \ldots,$$

ou

$$n = \frac{3p + 5}{2}.\quad n = \frac{5p + 5}{2},\quad n = \frac{7p + 5}{2}, \ldots$$

De ces valeurs résultent une infinité d'autres groupes relatifs à p ; savoir :

$$T_{\frac{3p+5}{2}},\quad T_{\frac{3p+7}{2}}, \ldots, T_{2p};$$

$$T_{\frac{5p+5}{2}},\quad T_{\frac{5p+5}{2}}, \ldots, T_{3p};$$

$$T_{\frac{7p+5}{2}},\quad T_{\frac{7p+7}{2}}, \ldots, T_{4p};$$

. . . .

Les Nombres de Segner, compris dans ces groupes, sont les seuls qui soient divisibles par p (*).

Cela posé :

Si T_n appartient au premier groupe, n est compris entre $\frac{p+5}{2}$ et p, inclusivement;

Si T_n appartient au deuxième groupe, n est compris entre $\frac{3p+5}{2}$ et $2p$, inclusivement;

Si T_n appartient au troisième groupe, n est compris entre $\frac{5p+5}{2}$ et $3p$, inclusivement;

. . . .

(*) On reconnaît aisément que :

1° Les groupes n'*empiètent* pas les uns sur les autres ;

2° T_{p+1}, T_{2p+1}, T_{3p+1}, ... *ne sont pas divisibles par* p.

Les valeurs de p sont ainsi déterminées par les relations suivantes :

$$n \leqq p \leqq 2n - 5,$$

$$\frac{n}{2} \leqq p \leqq \frac{2n-5}{3},$$

$$\frac{n}{3} \leqq p \leqq \frac{2n-5}{5},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

De plus, *tous les nombres premiers*, p, *qui y satisfont, divisent* T_n.

Soit, par exemple, $n = 23$, auquel cas :

$$23 \leqq p \leqq 41, \quad 11 < p < 14;$$

et, par conséquent,

$$p = 23, \quad p = 29, \quad p = 31, \quad p = 37, \quad p = 41, \quad p = 13.$$

En effet, T_{23} *appartient au premier groupe relatif à* 23, 29, 31, 37, 41, *et au deuxième groupe relatif à* 13.

XXI. *Postulatum.* — Soit p un nombre premier, supérieur à n. *S'il divise* T_n, on a

$$n < p \leqq 2n - 5;$$

car les relations

$$p < \frac{2n-5}{3}, \quad p < \frac{2n-5}{5}, \ldots$$

sont impossibles.

On est donc conduit à la proposition suivante qui ne diffère pas, au fond, du célèbre *postulatum* de M. Bertrand (*) :

Entre un nombre entier, supérieur à 5, *et son double diminué de* 5, *il y a, au moins, un nombre premier* (**).

(*) Voir la *Note* CCLIX.

(**) Très probablement, la démonstration rigoureuse doit être fort simple; mais, jusqu'à présent, je n'ai pu la trouver.

CCLXII. — Lettre à M. De Tilly.

Cher et savant Confrère,

Savez-vous, en effet, intégrer

$$\frac{z^{(p)}}{z} = Ax^m, \tag{1}$$

m étant *quelconque?* S'il en est ainsi, la théorie des équations linéaires vous doit un progrès considérable, et je me reproche de n'avoir pas étudié votre méthode. Rappelez-vous que Liouville a cité, *avec éloges*, le procédé au moyen duquel Kummer intégrait, *péniblement*, l'équation

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = x^2 y. \tag{2}$$

Quant à l'équation

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = xy, \tag{3}$$

encore plus simple que la précédente, voici ce que je trouve dans mes notes de mai 1884, et que j'ai donné à mes élèves, *in illo tempore*.

Soit θ_1 une racine *primitive* de $\theta^m - 1 = 0$. Une intégrale particulière est (sauf erreur) :

$$y_1 = \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^m}{m}} \left(e^{\alpha x} + e^{\alpha\theta_1 x} + \dots + e^{\alpha\theta_1^{m-1} x} \right) d\alpha. \tag{4}$$

Ainsi, l'intégrale générale est une *somme de* m — 1 *intégrales définies*, respectivement multipliées par des constantes. Avez-vous la valeur de y, au moins dans certains cas, sous forme finie? Alors, voilà une vraie *fabrique* d'intégrales!

Soit $m = 2$. Par *ma* (?) méthode,

$$y = A \int^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) d\alpha. \tag{5}$$

Mais il est évident (et *archi*-connu) que :

$$y = Ce^{\frac{\alpha^2}{2}}. \tag{6}$$

On doit donc avoir

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}}(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})d\alpha = ke^{\frac{x^2}{2}}. \tag{7}$$

Pour déterminer la *constante* k, je suppose $x = 0$:

$$k = 2\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha = \sqrt{2\pi}.$$

En conséquence :

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}}(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})d\alpha = \sqrt{2\pi}e^{\frac{x^2}{2}}; \tag{8}$$

formule probablement connue (*).

Revenant à l'équation (2), je trouve, comme intégrale *particulière* (toujours sauf erreur de calcul) :

$$\left.\begin{array}{c} y_1 = \\ \displaystyle\int_0^\infty udue^{-\frac{u^{m+1}}{m+1}}\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^{m+1}}{m+1}}\left(e^{\alpha ux} + e^{\theta_1\alpha ux} + \cdots + e^{\theta_1^m \alpha ux}\right)d\alpha; \end{array}\right\} \tag{9}$$

θ_1 étant une racine primitive de $\theta^{m+1} - 1 = 0$.

Je désire, mon cher Confrère, que cette lettre soit de nature à vous intéresser. Puissiez-vous en tirer quelque chose!

Salut affectueux.

E. C.

Spa, 5 juillet 1886.

(*) Bien entendu, je n'ai pas, ici, les Tables de Bierens

CCLXIII. — Sur l'équation $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

(*Mai* 1885.)

I. *Une solution.* — Si p désigne un nombre premier, de la forme $4\mu + 1$, on peut prendre $y^2 + z^2 = p$ (*). De plus, la condition $(u + x)(u - x) = p$ donne

$$u + x = p, \quad u - x = 1;$$

puis

$$u = 2\mu + 1, \quad x = 2\mu.$$

Soit, comme application, $p = 73 = 64 + 9$, auquel cas $\mu = 18$. La proposée est vérifiée par

$$u = 37, \quad x = 36, \quad y = 8, \quad z = 3 \text{ (**)}.$$

II. *Autre solution.* — D'après les formules du ***Mémoire sur certaines décompositions en carrés*** (***), on satisfait, à l'équation

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{1}$$

par les valeurs suivantes :

$$x = 2\alpha\gamma, \quad y = 2\beta\gamma, \quad z = -\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2, \quad u = \gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2; \tag{2}$$

α, β, γ étant des nombres entiers quelconques.

En effet, la relation

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 = 4\alpha^2\gamma^2 + 4\beta^2\gamma^2 + (\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 \tag{3}$$

est identique.

(*) D'après le beau théorème de Lagrange : *tout nombre premier, de la forme* $4\mu + 1$, *est la somme de deux carrés.*

(**) Comme il arrive souvent en Analyse indéterminée, ce procédé simple, qui donne une *infinité de solutions,* ne donne pas *toutes les solutions ;* par exemple celle-ci :

$$441^2 = 209^2 + 256^2 + 292^2.$$

(***) Pages 10 et suivantes. Ces formules s'appliquent à l'équation générale

$$u^n = x^2 + y^2 + z^2.$$

III. *Remarque.* — Pourvu que α, β, γ soient différents de zéro, et que l'on n'ait pas $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$, *le nombre* u^2, *somme de trois carrés, sera le carré d'une somme de trois carrés* (*).

IV. *Généralités.* — 1° On suppose les nombres x, y, z, u premiers entre eux (**); alors, évidemment, x, y, z *sont premiers entre eux;* x, y, u *sont premiers entre eux;* etc.

2° La somme *algébrique* de trois nombres *impairs* est *impaire;* donc *il est impossible qu'un seul des quatre nombres* x, y, z, u *soit pair.*

3° Si y *et* z *sont pairs,* u *et* x *sont impairs.*

4° Supposons y *et* z, *impairs.* Alors

$$y^2 + z^2 = u^2 - x^2 = \mathfrak{M}(4) + 2.$$

Des facteurs $u + x$, $u - x$, l'un est *simplement pair*, et l'autre, *impair*; donc u et x ne sauraient être entiers. Conséquemment : *des trois nombres* x, y, z, *un seul est impair.*

5° Relativement au diviseur 3, on établit, avec la même facilité, les propriétés suivantes :

Un, au moins, des nombres x, y, z, u *est divisible par* 3; *si* u *est divisible par* 3, *aucun des nombres* x, y, z *n'est divisible par* 3.

V. *Autre solution.* — A cause de

$$(u + x)(u - x) = y^2 + z^2,$$

si l'on suppose y *et* z *premiers entre eux,* on a, par un théorème connu :

$$u + x = a^2 + b^2, \quad u - x = c^2 + d^2;$$

puis

$$u = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2), \quad x = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2),$$

$$y = ac \pm bd, \quad z = ad \mp bc;$$

(*) Dans le Mémoire cité, j'ai démontré ce théorème : *Si* u *est une somme de trois carrés,* u^n *est une somme de trois carrés.*

(**) Afin de n'avoir à considérer que les solutions *primitives.*

ou, ce qui revient au même :

$$\left.\begin{array}{ll} u = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, & x = a^2 + b^2 - c^2 - d^2, \\ y = 2(ac \pm bd), & z = 2(ad \mp bc). \end{array}\right\} \quad (4)$$

De ces valeurs résulte l'identité connue :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = (a+b^2-c^2-d^2)^2 + 4(ac \pm bd)^2 + 4(ad \mp bc)^2 \text{ (*)}; \quad (5)$$

d'où nous aurions pu partir.

VI. *Remarques.* — On a vu (IV, 4°) que : *des trois nombres* x, y, z, *un seul est impair.* Conséquemment, dans l'application des formules (4), on devra prendre a, b, c, d de manière que $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ soit *impair.* En d'autres termes : *parmi les indéterminées* a, b, c, d, *une seule doit être paire, ou une seule doit être impaire.*

2° Si l'on admettait que, *des trois nombres* x, y, z, *deux, au moins, sont premiers entre eux,* les formules (4) donneraient, je pense, toutes les solutions de l'équation (1).

CCLXIV. — Nouvelles propriétés des fonctions X_n (**).

(*Janvier* 1887.)

I. *Première propriété.* — Soit

$$A_p = 1 - \frac{2}{3} C_{p,1} + \frac{2^2}{5} C_{p,2} - \cdots \pm \frac{2^p}{2p+1}; \quad (1)$$

ou, par une sommation facile,

$$A_p = \int_0^1 (1 - 2x^2)^p dx. \quad (2)$$

(*) Elle comprend, comme cas particulier, l'identité (3).

(**) Addition à la *seconde Note sur les fonctions* X_n (*Académie de Belgique*, août 1886).

Si l'on fait $x = \sin\varphi$, on trouve

$$A_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p 2\varphi . \cos\varphi d\varphi. \tag{3}$$

Cette intégrale est celle qui entre dans la formule (F) (*). Donc

$$\int_0^1 x^p (X_p + X_{p-2} + \cdots) dx = A_p, \tag{A}$$

ou

$$\int_0^1 x^p (X_p + X_{p-2} + \cdots) dx = \int_0^1 (1 - 2x^2)^p dx. \tag{A'}$$

II. *Deuxième propriété.* — L'intégration par parties, effectuée sur l'égalité (2), donne aisément

$$(2p + 1) A_p - 2p A_{p-1} = (-1)^p. \tag{4}$$

Par conséquent :

$$\int_0^1 \left[(2p+1) x^p (X_p + X_{p-2} + \cdots) - 2p x^{p-1} (X_{p-1} + X_{p-3} + \cdots)\right] dx = (-1)^p. \tag{B}$$

III. *Troisième propriété.* — Si, dans l'équation (4), on change p en $p - 1$, $p - 2$, ..., 1, on trouve, par addition :

$$(2p + 1) A_p = A_{p-1} + A_{p-2} + \cdots + A_0 + \frac{1}{0}, \tag{5}$$

selon que p est *pair* ou *impair* (**). Par suite,

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \Big[(2p + 1) x^p (X_p + X_{p-2} + \cdots) - x^{p-1} (X_{p-1} + X_{p-3} + \cdots) \\ &- x^{p-2} (X_{p-2} + X_{p-4} + \cdots) - \cdots - X_0\Big] dx = \textit{un ou zéro } (***). \end{aligned}\right\} \text{(C)}$$

IV. *Application.* — Soit $p = 4$. On doit trouver

$$\int_0^1 \left[9x^4 (X_4 + X_2 + X_0) - 8x^3 (X_3 + X_1)\right] dx = 1.$$

(*) *Seconde Note sur les fonctions* X_n, p. 9.

(**) A cause de $A_0 = 1$.

(***) On arrive au même résultat en faisant varier p dans la relation (B).

Or :

$$X_0 = 1,\quad X_1 = x,\quad X_2 = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1),\quad X_3 = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$X_4 = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\ (^*).$$

Donc

$$\int_0^1 \left[\frac{9}{8}(35x^8 - 18x^6 + 7x^4) - 4(5x^6 - x^4)\right] dx = 1,$$

ou

$$\frac{9}{8}\left(\frac{35}{9} - \frac{18}{7} + \frac{7}{5}\right) - 4\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{5}\right) = 1\,;$$

ce qui est exact.

V. *Suite.* — La relation (5) équivaut à

$$\int_0^1 dx\left[(2p+1)(1-2x^2)^p - (1-2x^2)^{p-1} - \cdots - (1-2x^2) - 1\right] = \frac{1}{0}.$$

Dans la parenthèse, la partie négative égale

$$-\frac{(1-2x^2)^p - 1}{(1-2x^2) - 1}.$$

Si donc la différentielle est représentée par $F(x)dx$, on a

$$F(x) = \frac{(2p+1)(1-2x^2)^{p+1} - 2(p+1)(1-2x^2)^p + 1}{-2x^2}. \tag{6}$$

La fraction est la dérivée de

$$\frac{1-(1-2x^2)^{p+1}}{2x}.$$

Par conséquent :

$$\int_0^x \frac{(2p+1)(1-2x^2)^{p+1} - 2(p+1)(1-2x^2)^p + 1}{x^2}\,dx = \frac{(1-2x^2)^{p+1} - 1}{x}, \tag{D}$$

$$\int_0^1 \frac{(2p+1)(1-2x^2)^{p+1} - 2(p+1)(1-2x^2)^p + 1}{x^2}\,dx = (-1)^{p+1} - 1. \tag{E}$$

(*) *Premier Mémoire sur les fonctions* X_n, p. 10.

VI. *Autres intégrales.* — Faisons, comme précédemment, $x = \sin\varphi$.

Nous aurons :

$$\int_0^{\varphi} \frac{(2p+1)\cos^{p+1}2\varphi - 2(p+1)\cos^p 2\varphi + 1}{\sin^2\varphi}\cos\varphi d\varphi = \frac{\cos^{p+1}2\varphi - 1}{\sin\varphi}, \quad \text{(D')}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2p+1)\cos^{p+1}2\varphi - 2(p+1)\cos^p 2\varphi + 1}{\sin^2\varphi}\cos\varphi d\varphi = (-1)^{p+1} - 1. \quad \text{(E')}$$

Addition. — (*Juillet* 1887.)

VII. *Remarques.* — 1° Le second membre de (E′) ne change pas, quand on y remplace p par $p + 2$. Conséquemment

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2p+5)\cos^3 2\varphi - (2p+6)\cos^2 2\varphi - (2p+1)\cos 2\varphi + 2p + 2}{\sin^2\varphi}\cos^p 2\varphi . \cos\varphi d\varphi = 0.$$

Le numérateur est divisible par

$$1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi.$$

Donc, sous une forme plus simple :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2p + 2 + \cos 2\varphi - (2p + 5)\cos^2 2\varphi\right]\cos^p 2\varphi . \cos\varphi d\varphi = 0. \quad \text{(F)}$$

2° Cette égalité est une conséquence des formules (3) et (4). On peut l'écrire ainsi :

$$\int_0^{1} \left[1 - (4p + 9)x^2 + (4p + 10)x^4\right](1 - 2x^2)^p dx = 0. \quad \text{(G)}$$

VIII. *Autres intégrales.* — 1° Soit

$$\int_0^{x} \left[1 - (4p + 9)x^2 + (4p + 10)x^4\right](1 - 2x^2)^p dx = f(x). \quad (7)$$

Le polynôme $f(x)$ a une valeur fort simple. En effet, la quantité entre parenthèses ne diffère pas de

$$(1 - 2x^2)(1 - 3x^2) - 4(p + 1)(x^2 - x^4).$$

Donc

$$f'(x) = (1 - 2x^2)^{p+1}(1 - 3x^2) - 4(p+1)(1 - 2x^2)^p(x^2 - x^4);$$

puis

$$f(x) = (1 - 2x^2)^{p+1}(x - x^3). \qquad \text{(H)}$$

2° La formule (4) équivaut à

$$\int_0^1 (1 - 2x^2)^{p-1}\left[1 - 2(2p+1)x^2\right]dx = (-1)^p.$$

3° On a, plus généralement,

$$\int_0^x (1 - 2x^2)^{p-1}\left[1 - 2(2p+1)x^2\right]dx = (1 - 2x^2)^p x. \qquad \text{(K)}$$

IX. *Relation combinatoire.* — Dans $f'(x)$, le coefficient de x^{2k} est

$$C_{p,k}(-2)^k - (4p+9)C_{p,k-1}(-2)^{k-1} + (4p+10)C_{p,k-2}(-2)^{k-2},$$

ou

$$-(-2)^{k-1}\left[2C_{p,k} + (4p+9)C_{p,k-1} + (2p+5)C_{p,k-2}\right].$$

Dans $f(x)$, le coefficient de x^{2k+1} est

$$-(-2)^{k-1}\left[2C_{p+1,k} + C_{p+1,k-1}\right].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 2C_{p,k} + (4p+9)C_{p,k-1} + (2p+5)C_{p,k-2} &= \mathfrak{M}(2k+1) \\ &= (2k+1\left[2C_{p+1,k} + C_{p+1,k-1}\right] \ (^*). \end{aligned} \qquad \text{(L)}$$

Soient, par exemple, $p = 5$, $k = 3$. On doit trouver

$$2.C_{5,3} + 29.C_{5,2} + 15C_{5,1} = 7\left[2C_{6,3} + C_{6,2}\right],$$

ou

$$2.10 + 29.10 + 15.5 = 7(2.20 + 15),$$

ou

$$385 = 7.55.$$

(*) La propriété exprimée par la *première* équation est assez difficile à démontrer directement.

X. Théorème. — *La fonction* X_n *satisfait à l'équation*

$$A_p(x^2-1)^p\frac{d^pX_n}{dx^p}=\frac{d\left[(x^2-1)^{p+1}\frac{d^{p+1}X_n}{dx^{p+1}}\right]}{dx}, \tag{M}$$

dans laquelle A_p *est un coefficient numérique* (*).

XI. Théorème. — *La fonction* X_n *satisfait à l'équation*

$$B_p\int_{-1}^{x}dx\int_{-1}^{x}\cdots\int_{-1}^{x}X_n dx=(x^2-1)^p\frac{d^pX_n}{dx^p}; \tag{P}$$

p *désignant le nombre des intégrations.*

XII. Théorème (**). — *Si l'on prend les dérivées successives de la fonction* $(x^2-1)^n$, *la dérivée d'ordre* $n-p$ *est divisible, algébriquement, par la dérivée d'ordre* $n+p$: *le quotient égale* $(x^2-1)^p$.

XIII. Théorème $X_1+X_2+\cdots+X_n$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\int_1^x\frac{1+\frac{dX_n}{dx}-\frac{dX_{n+1}}{dx}}{\sqrt{1-x}}dx. \tag{S}$$

XIV. Théorème. $(n+1)X_0+nX_1+\cdots+X_n$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\int_1^x\frac{\frac{dX_{n+1}}{dx}}{\sqrt{1-x}}dx. \tag{X}$$

XV. Théorème. — *Si les* $2p+1$ *inconnues* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ *satisfont, de toutes les manières possibles, à la condition*

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda=n,$$

on a

$$1.3.5\ldots\overline{2p-1}\sum X_\alpha X_\beta\ldots X_\lambda=\frac{d^pX_{n+p}}{dx^p}. \tag{A'}$$

(*) Pour abréger, nous supprimons les démonstrations de ce théorème et des théorèmes suivants. Elles sont développées dans les deux Mémoires intitulés : *Nouvelles propriétés des fonctions* X_n.

(**) Énoncé, en 1884, par M. Lucien Lévy.

XVI. Théorème. $X_n = \frac{2^n}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^n\varphi (x \sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^n d\varphi.$ (B′)

XVII. Théorème. $$\left.\begin{aligned} &1.3.5\ldots\overline{2p-1}\int_{-1}^{+1} dx \sum X_\alpha X_\beta \ldots X_\lambda \\ &= \left[\frac{d^{p-1}X_{n+p}}{dx^{p-1}}\right]_{-1}^{+1}. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{D}')$$

XVIII. *Remarque.* — Le second membre de l'équation (D′) est réductible à

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \frac{\Gamma(n+2p)}{\Gamma(p)\Gamma(n+2)}.$$

XIX. Théorème. $$\left.\begin{aligned} &\sum C_{2\alpha,\alpha} . C_{2\beta,\beta} \ldots C_{2\lambda,\lambda} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2n+2p+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2p+1)\Gamma(n+p+1)}. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{F}')$$

XX. Théorème. — *Le produit de* n *termes consécutifs, de la progression*

$$2, \quad 6, \quad 10, \quad 14, \quad 18, \ldots$$

est divisible par le produit des n *premiers nombres entiers.*

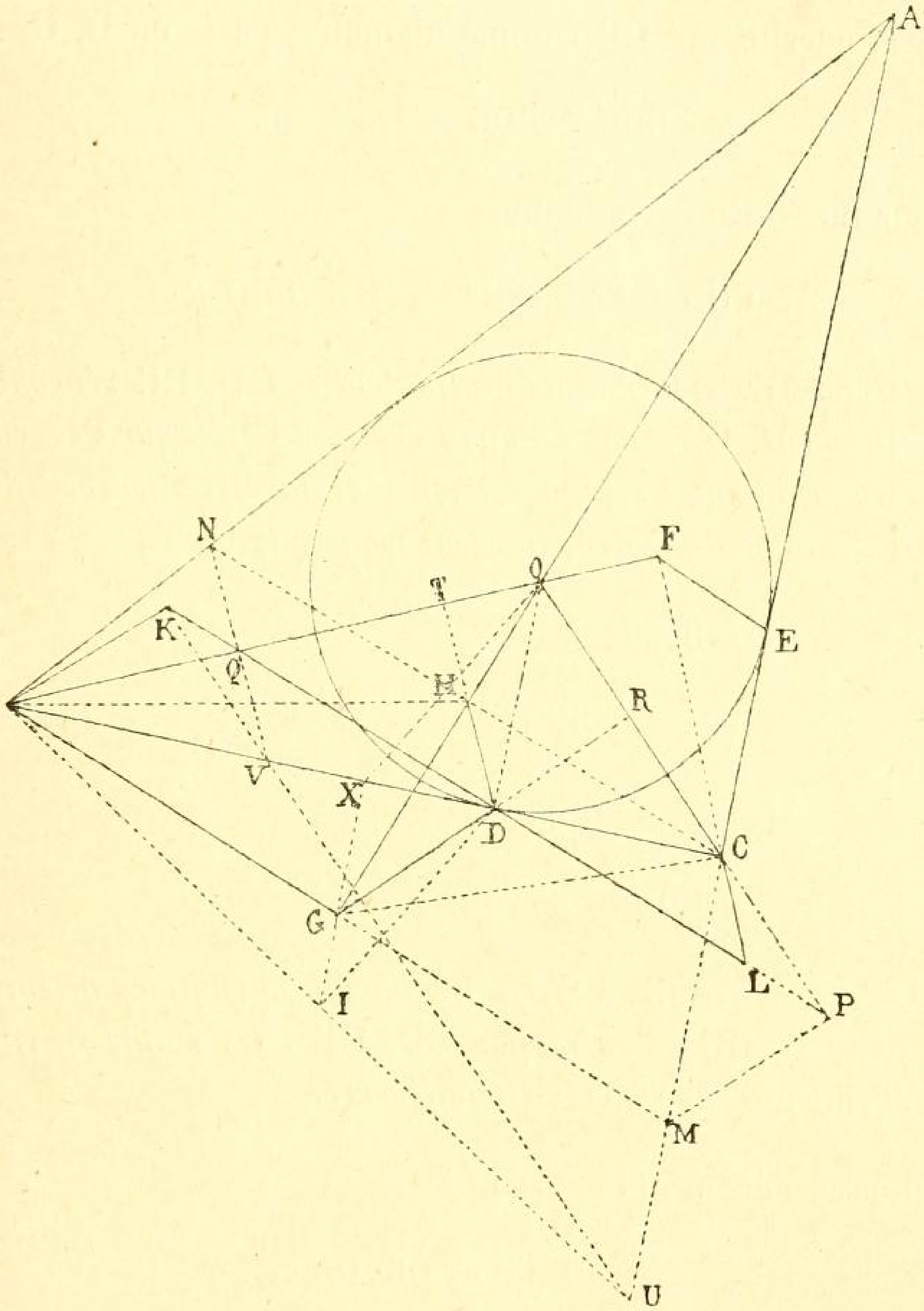
XXI. Théorème. $$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin^n\varphi(\cos\theta\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^n \\ &\times \left[\frac{\sin(n+1)(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)} + \frac{\sin(n-1)(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}\right] d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin^n\varphi(\cos\alpha\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^n d\varphi. \end{aligned}\right\}$$

XXII. Théorème. $$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2zx\cos^2\varphi}{1+4(z-x)z\cos^2\varphi + 4z^2(x^2-1)\cos^4\varphi} d\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{K}')$$

CCLXV (*). — Théorèmes de Géométrie élémentaire.

(*Novembre* 1884.)

I. *Des sommets* B, C *d'un triangle, on abaisse les perpendi-*



culaires BG, CH, *sur la bissectrice de l'angle* A. D *étant le point où le côté* BC *touche le cercle inscrit, on a*

$$BD.CD = BG.GH. \qquad (1)$$

(*) A l'occasion d'une Note de M. Weill.

Il suffit de vérifier que les triangles BDG, CHD sont semblables. Or, à cause des *parallèles* BG, CH :

$$DBG = DCH.$$

D'un autre côté, les angles BDO, BGO étant droits, la circonférence, décrite sur OB comme diamètre, passe en D, G. Donc

$$BDG = BOG = \tfrac{1}{2}(A + B).$$

Pour une raison semblable,

$$CHD = COD = 1^d - \tfrac{1}{2}C = BDG \text{ (*)}.$$

II. *Soient* R, T *les points où les droites* GD, DH *rencontrent, respectivement,* CO, BO. *La circonférence décrite sur* CG, *comme diamètre, contient les points* H, R ; *et la circonférence décrite sur* BH, *comme diamètre, contient les points* G, T.

On vient de voir que

$$BDG = 1^d - \tfrac{1}{2}C.$$

Donc

$$RDC = 1^d - \tfrac{1}{2}C;$$

ainsi l'angle R est droit; etc.

III. *Soient* BGDK, CHDL *les parallélogrammes déterminés, l'un par* BD, DG ; *l'autre par* CD, DH : *les points* B, K, C, L *appartiennent à une même circonférence.*

En effet, l'égalité (1) revient à

$$BD . CD = DK . DL. \qquad (2)$$

IV. *Remarque.* — E étant le point de contact de AC avec le cercle inscrit, et F la projection de C sur BO ; *l'hexagone* CDHOFE

(*) La démonstration est encore plus courte au moyen des formules trigonométriques.

est inscrit au cercle décrit sur CO *comme diamètre.* Dans cette figure, CD = CE, DH est perpendiculaire à FO, EF est perpendiculaire à OH; etc.

V. *Valeurs de* GH, GD, HD.

1° Prolongeons BG jusqu'à sa rencontre, en M, avec le prolongement de AC. Il est clair que $CM = c - b$, et que

$$GH = (c - b)\cos\tfrac{1}{2}A.$$

2° L'angle HGD, complément de GOC, égale

$$1^d - \tfrac{1}{2}(A + C) = \tfrac{1}{2}B.$$

De même,

$$GHD = \tfrac{1}{2}C.$$

Par suite,

$$GD = (c - b)\sin\tfrac{1}{2}C, \qquad HD = (c - b)\sin\tfrac{1}{2}B.$$

VI. *Si l'on construit les parallélogrammes* DGMP, DHNQ : 1° P *est sur la bissectrice de* C; 2° Q *est sur la bissectrice de* B; 3° *les points* P, L, D, Q, K *sont en ligne droite.*

1° On vient de voir que

$$GD = (c - b)\sin\tfrac{1}{2}C;$$

donc

$$MP = (c - b)\sin\tfrac{1}{2}C = MC\sin\tfrac{1}{2}C.$$

Cette expression représente la distance du point M à la bissectrice de C; donc CP est cette bissectrice.

2° Pour la même raison, le point N, situé sur AB, a pour projection, sur OB, le sommet Q.

3° Les points P, Q appartiennent à la droite KDL. Etc.

VII. *Le centre* O, *du cercle inscrit, et le centre* I, *de la circonférence* BKCL, *sont également distants du côté* BC.

Soit KU perpendiculaire à BK, et rencontrant, en U, le prolongement du côté AC. A cause des angles droits, en K et en C, BU est un diamètre de la circonférence BKCL.

Soit V l'intersection de KU avec BC. On a

$$BV = \frac{BK}{\sin KBV} = \frac{GD}{\cos BDG} = \frac{(c-b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos(1^d - \frac{1}{2}C)} = c - b = BN.$$

Ainsi la droite NQ, prolongée, passe en V.

L'angle CVU, complément de KCV, égale $\frac{1}{2}$C.

De plus,

$$CV = 2CD = 2(p - c).$$

Donc

$$CU = 2(p-c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = 2\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = 2\frac{T}{p},$$

T étant l'aire du triangle ABC. Et comme $OD = \frac{T}{p}$, nous avons, finalement,

$$CU = 2OD;$$

ce qui équivaut à la proposition énoncée.

VIII. *Remarque.* — I étant le centre de la circonférence BKCLU, et X étant le milieu du côté BC, *le quadrilatère* DOXI *est un parallélogramme;* et XGI *est une ligne droite.*

CCLXVI. — Application d'une formule combinatoire.

(*Septembre* 1886.)

I. Cette formule, que nous avons démontrée précédemment (*), est

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} C_{p,1} + \frac{1}{n-1} C_{p,2} - \cdots = \frac{(-1)^p}{(n+1) C_{n,p}}. \qquad (1)$$

En supposant p constant, nous représenterons le premier membre par A_{n+1}; de sorte que

$$A_{n+1} = \frac{(-1)^p}{(n+1) C_{n,p}}. \qquad (2)$$

II. Soient

$$\mathcal{L}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \qquad (3)$$

$$(1+x)^p = 1 + C_{p,1} x + C_{p,2} x^2 + \cdots + x^p; \qquad (4)$$

p étant supposé entier, positif.

Dans le produit des seconds membres, il y a une partie *irrégulière*, polynôme du degré p, que nous pouvons appeler P_p. Quant à la partie *régulière*, série commençant par un terme en x^{p+1}, représentons-la, pour un instant, par

$$B_{p+1} x^{p+1} + B_{p+2} x^{p+2} + \cdots$$

Il est clair que :

$$B_{p+1} = (-1)^{p+2} \left[\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} C_{p,1} + \frac{1}{p+1} C_{p,2} - \cdots \right],$$

$$B_{p+2} = (-1)^{p+3} \left[\frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+1} C_{p+1,1} + \frac{1}{p} C_{p+1,2} - \cdots \right],$$

. . . . ;

(*) Tome II, page 503.

ou, d'après la formule (2) :

$$B_{p+1} = \frac{1}{(p+1)C_{p,p}}, \quad B_{p+2} = -\frac{1}{(p+2)C_{p+1,p}}, \ldots$$

Donc

$$(1+x)^p \mathcal{L}(1+x) = P_p + \sum_{n=p}^{n=\infty} (-1)^{n+p} \frac{x^{n+1}}{(n+1)C_{n,p}}. \tag{5}$$

III. Si l'on prend $p=1$, $p=2$, $p=3$, ... on trouve :

$$P_1 = x, \quad P_2 = x + \frac{3}{2}x^2, \quad P_3 = x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3, \ldots$$

expressions dont la loi paraît difficile à saisir. Mais, dans l'égalité (5), le premier terme de la série est $\frac{x^{p+1}}{p+1}$. Par conséquent,

$$P_{p+1} = (1+x)P_p + \frac{x^{p+1}}{p+1},$$

ou

$$P_p = (1+x)P_{p-1} + \frac{x^p}{p};$$

puis, par un calcul très simple,

$$P_p = (1+x)^{p-1}x + \frac{1}{2}(1+x)^{p-2}x^2 + \frac{1}{3}(1+x)^{p-3}x^3 + \cdots + \frac{1}{p}x^p. \tag{6}$$

IV. *Remarque.* — Lorsque $x=1$, les formules (6), (5) deviennent :

$$P_p = 2^{p-1} + \frac{1}{2}2^{p-2} + \frac{1}{3}2^{p-3} + \cdots + \frac{1}{p}, \tag{7}$$

$$2^p \mathcal{L}\, 2 = P_p + \sum_{n=p}^{n=\infty} (-1)^{n+p} \frac{1}{(n+1)C_{n,p}}. \tag{8}$$

Par conséquent,

$$\mathcal{L}\, 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\right)^p$$
$$+ \frac{1}{2^p}\left[\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+3}\frac{1.2}{(p+2)(p+1)} - \frac{1}{p+4}\frac{1.2.3}{(p+3)(p+2)(p+1)} - \cdots\right],$$

ou

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}\,2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\right)^p \\ &+ \frac{1}{(p+1)2^p}\left[1 - \frac{1}{p+2} + \frac{1.2}{(p+3)(p+2)} - \frac{1.2.3}{(p+4)(p+3)(p+2)} + \cdots\right].\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

V. *Développements de* $\mathcal{L}\,2$. — La dernière formule en donne une infinité. Par exemple, si $p = 3$:

$$\mathcal{L}\,2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{32}\left[1 - \frac{1}{5} + \frac{1.2}{5.6} - \frac{1.2.3}{5.6.7} + \frac{1.2.3.4}{5.6.7.8} - \cdots\right].$$

La série est, évidemment, beaucoup plus convergente que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

D'ailleurs, si l'on effectue, on trouve, pour l'ensemble des *quatre* premiers termes, 0,69375. Par conséquent,

$$\mathcal{L}\,2 > 0{,}69375 - 0{,}00088,\quad \mathcal{L}\,2 < 0{,}69375 - 0{,}00088 + 0{,}00044;$$

ou

$$\mathcal{L}\,2 > 0{,}69287,\quad \mathcal{L}\,2 < 0{,}69331.$$

En effet,

$$\mathcal{L}\,2 = 0{,}69314\ldots$$

VI. *Remarque.* — La formule (9) donne, en fonction de $\mathcal{L}\,2$, la somme de la série

$$1 - \frac{1}{p+2} + \frac{1.2}{(p+2)(p+3)} - \frac{1.2.3}{(p+2)(p+3)(p+4)} + \cdots$$

C'est un résultat auquel on pouvait ne pas s'attendre, en considérant celui-ci :

$$1 + \frac{1}{p+2} + \frac{1.2}{(p+2)(p+3)} + \frac{1.2.3}{(p+2)(p+3)(p+4)} + \cdots = \frac{p+1}{p}\ (^*)$$

(*) *Cours d'Analyse*, p. 30.

VII. *Une limite.* — Divisons, par $(1+x)^p$, les deux membres de l'égalité (6), puis faisons croître indéfiniment p. Nous trouvons

$$lim\left[\frac{P_p}{(1+x)^p}\right] = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \cdots,$$

ou

$$lim\left[\frac{P_p}{(1+x)^p}\right] = \mathcal{L}(1+x); \tag{10}$$

et, si $x = 1$:

$$lim\left[\frac{P_p}{2^p}\right] = \mathcal{L}\,2. \tag{11}$$

VIII. *Suite.* — De l'égalité (5) on déduit, en prenant les dérivées des deux membres,

$$p(1+x)^{p-1}\mathcal{L}(1+x) = -(1+x)^{p-1} + \left(\frac{dP_p}{dx}\right) + \sum_{n=p}^{n=\infty}(-1)^{n+p}\frac{x^n}{C_{n,p}}; \tag{12}$$

et, si $x = 1$:

$$2^{p-1}p\,\mathcal{L}\,2 = -\,2^{p-1} + \left(\frac{dP_p}{dx}\right)_{x=1} + S_p; \tag{13}$$

en supposant

$$S_p = 1 - \frac{1}{p+1} + \frac{1.2}{p(p+1)} - \frac{1.2.3}{p(p+1)(p+2)} + \cdots \tag{14}$$

L'égalité (9) revient à celle-ci :

$$2^{p-1}p\,\mathcal{L}\,2 - p(P_{p-1})_{x=1} = S_p.$$

Donc, par soustraction,

$$2^{p-1} = \left(\frac{dP_p}{dx} - pP_{p-1}\right)_{x=1}. \tag{15}$$

IX. *Remarque.* — La formule (6) donne, plus généralement,

$$(1+x)^{p-1} = \frac{dP_p}{dx} - pP_{p-1}; \tag{16}$$

relation remarquable, qui caractérise, si l'on veut, les polynômes P.

CCLXVII. — Théorèmes d'Arithmétique.

(*Septembre* 1886.)

I. *Soit un nombre* N, *divisible par un nombre premier* p. *La somme des diviseurs de* N, *qui donnent des quotients indépendants de* p, *égale* p — 1 *fois la somme des diviseurs qui donnent des quotients contenant* p, *augmentée de la somme des diviseurs indépendants de* p (*).

II. a, b, c *étant des nombres entiers, on a*

$$a(a+1)\cdots(a+c) \pm b(b+1)\cdots(b+c)$$
$$= \mathfrak{M}[1.2.3\ldots(c+1)(a+b+c)] \ (^{**}).$$

En effet : 1° le *polynôme*

$$x(x+1)\cdots(x+c) \pm y(y+1)\cdots(y+c),$$

s'annule quand on y remplace x par $-(y+c)$;

2° Chacune des parties du premier membre est, comme on sait, divisible par 1.2.3 ... (c + 1); ainsi

$$\frac{(a+b+c)\varphi(a,b)}{1.2.3\ldots(c+1)} = \textit{entier};$$

puis, $\varphi(a, b)$ désignant un *nombre entier :*

$$a(a+1)\cdots(a+c) \pm b(b+1)\cdots(b+c) = (a+b+c)\varphi(a,b) \ (^{***}).$$

III. *Remarque. — Si* a + b + c *est premier*,

$$\varphi(a,b) = \mathfrak{M}[1.2.3\ldots(c+1)].$$

(*) Presque évident.

(**) Le signe +, si c est *pair*.

(***) Cette propriété généralise celle-ci :

$$C_{p+q,q} \pm C_{n-p-1,q} = \mathfrak{M}(n),$$

que l'on trouve dans ma *Démonstration du théorème de Staudt* (*Note* LXXVI).

CCLXVIII. — Deux intégrales définies.

(*Mars* 1887).

I. Dans la *Note sur une formule de M. Botesu*, on trouve

$$\int_0^1 \left[\frac{x^n}{1-x} + \frac{x^{n-1}}{\mathcal{L}x} + \frac{F(x^n) - x^n}{1+x}\right] dx = 0, \qquad (1)$$

$F(x^n)$ représentant

$$x^n + x^{2n} + x^{4n} + \cdots$$

Si l'on fait $n = 1, 3, 5, \ldots$ et que l'on ajoute, on a donc

$$\int_0^1 \left[\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{1}{(1-x^2)\mathcal{L}x} + \frac{F(x)+F(x^3)+\cdots}{1+x} - \frac{x}{(1+x)(1-x^2)}\right] dx = 0.$$

Mais

$$F(x) + F(x^3) + F(x^5) + \cdots = \frac{x}{1-x} \ (^*).$$

Conséquemment, la relation ci-dessus se réduit à

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}\left[\frac{x(1+2x-x^2)}{1-x^2} + \frac{1}{\mathcal{L}x}\right] = 0. \qquad (A)$$

Celle-ci est la première des formules annoncées.

II. Pour en conclure la seconde, j'observe qu'un calcul fort simple donne

$$\int_0^1 \frac{x(1-2x+x^2)}{(1-x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x)^2} = \mathcal{L}2 - \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Donc, par addition :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}\left[\frac{2x}{1-x^2} + \frac{1}{\mathcal{L}x}\right] = \mathcal{L}2 - \frac{1}{2}. \qquad (B)$$

(*) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 65; *Sur un tableau numérique...*, etc.

CCLXIX. — Sur le théorème de Wilson.

(*Août* 1887.)

I. Le *théorème de Wilson* (*) peut s'énoncer ainsi : *Le nombre entier* 2n + 1 *est premier ou composé, selon que le produit* 1.2.3 .. 2n, *augmenté de l'unité, est ou n'est pas multiple de* 2n + 1. On y peut joindre les remarques suivantes (**) :

1° *Si* 2n + 1 *est composé, mais non égal au carré d'un nombre premier,*

$$1.2.3\ldots n = \mathfrak{M}(2n+1); \tag{1}$$

2° *Si* 2n + 1 *est le carré d'un nombre premier,*

$$(1.2.3\ldots n)^2 = \mathfrak{M}(2n+1); \tag{2}$$

3° *Si* 2n + 1 *est composé,*

$$1.2.3\ldots 2n = \mathfrak{M}(2n+1). \tag{3}$$

Démonstrations. — 1° Soit

$$2n + 1 = ab;$$

a étant supérieur à 2 et inférieur à b ; de sorte que l'on ait

$$2n + 1 > 2b, \quad b < n.$$

Les diviseurs *conjugués*, a, b, se trouvent ainsi dans la suite $1.2.3\ldots n$. Donc

$$1.2.3\ldots n = \mathfrak{M}(ab) = \mathfrak{M}(2n+1);$$

2° Si

$$2n + 1 = p^2,$$

p étant premier, on doit prendre $a = b = p$; le produit

$$1.2.3\ldots n = \mathfrak{M}(p),$$

puis

$$(1.2.3\ldots n)^2 = \mathfrak{M}(2n+1).$$

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, pp. 32 et 110.

(**) Elles sont fort simples, mais n'ont peut-être pas été faites.

3° D'après la théorie des Combinaisons :

$$1.2.3\ldots 2n = \mathfrak{M}\left[(1.2.3\ldots n)^2\right] = \mathfrak{M}(2n+1).$$

II. *Autres remarques.* — 1° *Soit un nombre entier* N, *non divisible par* 2, 3, 5, ..., p. *Soit* q *le quotient entier de* N *par* p. *Si*

$$\left[(p+1)(p+2)\ldots q\right]^2 = \mathfrak{M}(\mathrm{N}), \qquad (4)$$

le nombre N *est composé.*

L'égalité (2) subsiste si, dans le premier membre, on supprime les facteurs 2, 3, ... p, non diviseurs de $2n+1$. D'ailleurs, si l'on pose $\mathrm{N} = 2n+1$, on a $q < n$.

2° *Dans le produit*

$$(p+1)(p+2)\ldots q,$$

on peut supprimer les facteurs non divisibles par 2, *par* 3, ..., *ou par* p.

III. *Application.* — On veut savoir si le nombre 221, non divisible par 2, 3, 5, 7, 11, est premier ou composé. L'égalité (4) est

$$(12.13.14.15.16.17.18.19.20)^2 = \mathfrak{M}(221);$$

ou, plus simplement,

$$(13.17.19)^2 = \mathfrak{M}(221).$$

Or, 13 divise 221 (*); donc, etc.

IV. Théorème. — *La somme*

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

n'est pas un nombre entier.

(*) Ce calcul ne diffère pas de celui que l'on trouve dans tous les Traités d'Arithmétique.

Il y a deux cas à distinguer, selon que n est premier ou composé :

1° n *premier*. Posons

$$S = \frac{A}{B} + \frac{1}{n} = \frac{nA + B}{nB};$$

la fraction $\frac{A}{B}$ étant supposée irréductible.

Tous les facteurs premiers de B sont inférieurs à n; donc B est premier avec n; donc, d'après une propriété connue (*), S est une fraction irréductible.

2° n *composé*. Soit p le plus grand nombre premier compris dans la suite 2, 3, 4, ... n. D'après le *Postulatum* de M. Bertrand, p surpasse $\frac{n}{2}$; donc, p ne divise aucun des nombres $p + 1, \ldots n$. Cela étant, soit

$$S = \frac{A}{B} + \frac{1}{p} \cdot$$

Le dénominateur B est composé de facteurs premiers avec p; donc il est premier avec p; etc.

V. Théorème (**). — *Si* 2n + 1 *est premier,*

$$C_{2n,n} \pm 1 = \mathfrak{M}(2n + 1) \text{ (***)}. \tag{5}$$

On a

$$C_{2n,n} = \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

A cause de

$$2n = \overline{2n+1} - 1,\quad 2n - 1 = \overline{2n+1} - 2, \ldots\quad n + 1 = \overline{2n+1} - n,$$

le numérateur a la forme

$$\mathfrak{M}(2n + 1) + (-1)^n 1.2.3 \ldots n.$$

(*) *Si deux fractions irréductibles,* $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$, *ont leurs dénominateurs premiers entre eux, la fraction* $\frac{AB' + BA'}{BB'}$ *est irréductible.*

(**) Connu.

(***) On doit prendre le signe +, si n est *impair*.

Donc

$$C_{2n,n} + (-1)^{n-1} = \frac{\mathfrak{M}(2n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Le premier membre est un nombre entier ; donc le numérateur de la fraction est divisible par le dénominateur. Et comme les facteurs 2, 3, ... n sont premiers avec $2n+1$, cette fraction est réductible à la forme $\mathfrak{M}(2n+1)$.

CCLXX. — Conséquences d'une division algébrique.

(*Août* 1887.)

I. Soit à déterminer le quotient entier de x^m par $(x-1)^p$, et le reste de la division ; de manière que

$$x^m = (x-1)^p Q + R. \tag{1}$$

Si l'on fait $x = 1 + z$, on a

$$(1+z)^m = z^p Q + R;$$

et, par conséquent :

$$Q = z^{m-p} + C_{m,1} z^{m-p-1} + C_{m,2} z^{m-p-2} + \cdots + C_{m,p},$$

$$R = C_{m,p-1} z^{p-1} + C_{m,p-2} z^{p-2} + \cdots + 1;$$

ou bien :

$$Q = (x-1)^{m-p} + C_{m,1}(x-1)^{m-p-1} + C_{m,2}(x-1)^{m-p-2} + \cdots + C_{m,p}, \tag{2}$$

$$R = C_{m,p-2}(x-1)^{p-1} + C_{m,p-2}(x-1)^{p-2} + \cdots + 1. \tag{3}$$

II. En opérant autrement, on peut développer Q suivant les puissances de x. En effet,

$$\frac{x^m}{(x-1)^p} = x^{m-p}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-p};$$

donc

$$Q = x^{m-p} + C_{p,1} x^{m-p-1} + C_{p+1,2} x^{m-p-2} + \cdots + C_{m-1,m-p}. \tag{4}$$

III. *Identités.* — D'après les formules (2), (4), on a, *identiquement*,

$$\left.\begin{array}{l}(x-1)^{m-p}+C_{m,1}(x-1)^{m-p-1}+C_{m,2}(x-1)^{m-p-2}+\dots+C_{m,p}\\ \quad =x^{m-p}+C_{p,1}x^{m-p-1}+C_{p+1,2}x^{m-p-2}+\dots+C_{m-1,m-p};\end{array}\right\}\quad(\mathrm{A})$$

et, en particulier :

$$\left.\begin{array}{l}1+C_{m,1}+C_{m,2}+C_{m,p}\\ \quad =2^{m-p}+C_{p,1}2^{m-p-1}+C_{p+1,2}2^{m-p-2}+\cdot\cdot\cdot+C_{m-1,m-p}\ (^*),\end{array}\right\}\quad(\mathrm{B})$$

$$1-C_{m,1}+C_{m,2}-\dots\pm C_{m,p}=\dots\pm C_{m-1,m-p}\ (^{**}).\qquad(\mathrm{C})$$

IV. *Autres identités.* — Après avoir mis (A) sous la forme abrégée :

$$\sum_{q=0}^{q=m-p} C_{m,p}(x-1)^{m-p-q}=\sum_{q=0}^{q=m-p} C_{p+q-1,p-1}x^{m-p-q},\qquad(\mathrm{A}')$$

prenons les dérivées d'ordre r, et divisons par $1.2.3\dots r$. En observant que les termes de degré inférieur à r ont des dérivées nulles, nous avons

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{q=0}^{q=m-p\ \ r} C_{m,p}\,.\,C_{m-p-q,r}(x-1)^{m-p-q-r}\\ \displaystyle=\sum_{q=0}^{q=m-p-r} C_{p+q-1,p-1}\,.\,C_{m-p-q,r}x^{m-p-q-r};\end{array}\right\}$$

ou, par un changement de notation,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{q=0}^{q=s} C_{m,p}\,.\,C_{m-p-q,s-q}\,.\,(x-1)^{s-q}\\ \displaystyle=\sum_{q=0}^{q=s} C_{p+q-1,p-1}\,.\,C_{m-p-q,s-q}x^{s-q}\end{array}\right\}\quad(\mathrm{D})$$

(*) Le nombre des termes, dans chacun des deux membres, est $m-p+1$.

(**) Cette relation est due à M. Genocchi. Voir la *Note* CXC.

Si, dans cette relation générale, on suppose $x=0$, puis $x=1$, on en déduit :

$$\sum_{q=0}^{q=s} C_{m,q}\,.\,C_{m-p-q,s-q}(-1)^{s-q} = C_{p+s-1,s}, \tag{E}$$

$$\sum_{q=0}^{q=s} C_{p+q-1,p-1}\,.\,C_{m-p-q,s-q} = C_{m,s} \tag{F}$$

Soient, par exemple,

$$m=8, \qquad p=2, \qquad s=3.$$

On doit trouver :

$$-C_{6,3}+C_{8,1}\,.\,C_{5,2}-C_{8,2}\,.\,C_{4,1}+C_{8,3}=C_{4,3},$$

$$C_{6,3}+C_{2,1}\,.\,C_{5,2}+C_{3,1}\,.\,C_{4,1}+C_{4,1}=C_{8,3};$$

ou

$$-20+8\,.\,10-28\,.\,4+36=4,$$

$$20+2\,.\,10+3\,.\,4+4=56;$$

et ces résultats sont exacts.

V. *Seconde forme du reste.* — Reprenons la formule

$$R=C_{m,p-1}(x-1)^{p-1}+C_{m,p-2}(x-1)^{p-2}+\cdots+1. \tag{3}$$

Dans le second membre, le coefficient de x^{p-q} est

$$C_q=(-1)^{q-1}\left\{C_{m,p-1}\,.\,C_{p-1,q-1}-C_{m,p-2}\,.\,C_{p-2,q-2}+\cdots\right\},$$

ou

$$C_q=(-1)^{q-1}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q}(-1)^{\alpha-1}C_{m,p-\alpha}\,.\,C_{p-\alpha,q-\alpha}; \tag{5}$$

mais cette expression peut être considérablement réduite.

En effet :

$$C_{m,p-\alpha}\,.\,C_{p-\alpha,q-\alpha}=\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}{\overline{1.2\ldots p-\alpha}\,.\,\overline{1.2\ldots m-p+\alpha}}\;\frac{\overline{1.2\ldots p-\alpha}}{\overline{1.2\ldots p-q}\,.\,\overline{1.2\ldots q-\alpha}}$$

$$=\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}{\overline{1\,.\,2\ldots p-q}}\;\frac{1}{\overline{1\,.\,2\ldots m-p+\alpha}\,.\,\overline{1\,.\,2\ldots q-\alpha}}$$

$$=\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}{\overline{1.2.3\ldots p-q}\,.\,\overline{1.2\ldots m-p+q}}\;\frac{\overline{1\,.\,2\,.\,3\ldots m-p+q}}{\overline{1.2\ldots m-p+\alpha}\,.\,\overline{1.2\ldots q-\alpha}}$$

$$=C_{m,p-q}\,.\,C_{m-p+q,q-\alpha}.$$

Donc

$$C_q = (-1)^{q-1} C_{m,p-q} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} (-1)^{\alpha-1} C_{m-p+q,q-\alpha}. \tag{6}$$

Observons maintenant que, par la formule (C) :

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} (-1)^{\alpha-1} C_{m-p+q,q-\alpha} = C_{m-p+q-1,m-p}.$$

Conséquemment,

$$C_q = (-1)^{q-1} C_{m,p-q} \cdot C_{m-p+q-1,m-p}; \tag{7}$$

puis

$$R = \sum_{q=1}^{q=p} (-1)^{q-1} C_{m,p-q} \cdot C_{m-p+q-1,m-p} x^{p-q}, \tag{8}$$

ou

$$R = C_{m,p-1} x^{p-1} - C_{m,p-2} \cdot C_{m-p+1,1} x^{p-2} + \cdots + (-1)^{p-1} C_{m-1,m-p}. \tag{9}$$

Telle est l'expression demandée (*).

VI. *Remarques.* — 1° La comparaison des valeurs (3), (9) donne l'identité :

$$\left.\begin{array}{l} C_{m,p-1}(x-1)^{p-1} + C_{m,p-2}(x-1)^{p-2} + \cdots + 1 \\ = C_{m,p-1} x^{p-1} - C_{m,p-2} \cdot C_{m-p+1,1} x^{p-2} + \cdots + (-1)^{p-1} C_{m-1,m-p}; \end{array}\right\} \tag{G}$$

et, en particulier :

$$C_{m,p-1} - C_{m,p-2} \cdot C_{m-p+1,1} + C_{m,p-3} \cdot C_{m-p+2,2} - \cdots \pm C_{m-1,m-p} = 1. \tag{H}$$

2° *Si l'exposant* m *est premier, tous les termes de* R, *sauf* $C_{m-1,m-p}$, *sont divisibles par* m.

3° Afin d'avoir un énoncé plus simple, remplaçons x^m par $x^m - 1$. L'égalité (1) devient

$$x^m - 1 = (x-1)^p Q + R', \tag{10}$$

en supposant

$$R' = C_{m,p-1} x^{p-1} - C_{m,p-2} \cdot C_{m-p+1,1} x^{p-2} + \cdots + (-1)^{p-1} C_{m-1,m-p} - 1.$$

(*) Je l'ai trouvée en appliquant la *formule de Poisson* (*Note* LXVIII).

On sait que, m étant *premier*,

$$C_{m-1,m-p} \pm 1 = \mathfrak{M}(m) \text{ (*)}.$$

Conséquemment :

Si l'exposant m *est premier, le reste* R', *de la division de* $x^m - 1$ *par* $(x - 1)^p$, *a tous ses termes divisibles par* m (**).

VI. *Division arithmétique.* — Dans l'égalité (10), remplaçons x par un nombre entier a, tel que, à partir de $x = a$, on ait constamment

$$Q > R',$$

ou

$$(x-1)^p - \left[C_{m,p-1}(x-1)^{p-1} + C_{m,p-2}(x-1)^{p-2} + \cdots + C_{m,1}(x-1)\right] > 0;$$

ou, après suppression du facteur $x - 1 = z$:

$$z^{p-1} - \left[C_{m,p-1}z^{p-2} + C_{m,p-2}z^{p-3} + \cdots + C_{m,1}\right] > 0. \qquad (11)$$

Il est clair que *les valeurs de* Q *et de* R, *répondant à* x = a, *seront le quotient et le reste obtenus en divisant le nombre entier* $a^m - 1$ *par le nombre entier* $(a - 1)^p$. En conséquence :

Si a *est un nombre entier suffisamment grand, et que* m *soit premier, le reste* r, *de la division de* $a^m - 1$ *par* $(a - 1)^p$, *est divisible par* m.

VII. *Remarque.* — Soit λ la racine positive (unique) de

$$z^{p-1} - \left[C_{m,p-1}z^{p-2} + C_{m,p-2}z^{p-3} + \cdots + C_{m,1}\right] = 0. \qquad (12)$$

On a

$$a \overline{\geq} 1 + \lambda. \qquad (13)$$

(*) *Note* LXXX. Cette propriété résulte, d'ailleurs, de l'identité (H).

(**) Cette division se ramène, évidemment, à celle de

$$x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1 \quad \text{par} \quad (x - 1)^{p-1}.$$

Donc, si R'' est le nouveau reste,

$$R' = (x - 1)R''.$$

VIII. *Applications.* — Prenons $m = 7, p = 2, 3, 4, 5$. L'équation (12) est, dans ces différents cas :

$$z - 7 = 0, \quad z^2 - 21z - 7 = 0, \quad z^3 - 35z^2 - 21z - 7 = 0,$$
$$z^4 - 35z^3 - 35z^2 - 21z - 7 = 0.$$

Les *limites supérieures* correspondantes sont :

$$7, \qquad 22, \qquad 36, \qquad 36.$$

Donc

$$a = 8, \quad a = 23, \quad a = 37, \quad a = 37.$$

Ainsi, les restes des *divisions* suivantes :

$$\frac{8^7 - 1}{7^2}, \quad \frac{23^7 - 1}{22^3}, \quad \frac{37^7 - 1}{36^4}, \quad \frac{37^7 - 1}{36^5},$$

doivent être des multiples de 7.

1° $$\frac{8^7 - 1}{7^2} = \frac{2\,097\,151}{7^2} = \frac{299\,593}{7} = 42\,799; \quad r = 0,$$

ce qui devait être, à cause de l'équation $z - 7 = 0$.

2° Si, dans la fraction $\frac{a^7-1}{(a-1)^2}$, on fait $a = 10$, elle devient

$$\frac{9\,999\,999}{9^2} = \frac{1\,111\,111}{9}:$$

il est clair que $r = 7$.

3° $$\frac{23^7 - 1}{22^3} = \frac{1 + 23 + 23^2 + 23^3 + 23^4 + 23^5 + 23^6}{22^2}.$$

Le numérateur est

$$1 + 23 + 529 + 12\,167 + 279\,841 + 8\,115\,389 + 186\,653\,947$$
$$= 195\,061\,897;$$

donc

$$\frac{23^7 - 1}{22^3} = \frac{195\,061\,897}{484}.$$

On trouve

$$q = 40\,302, \qquad r = 217 = \mathfrak{M}(7).$$

4° Dans la deuxième fraction, je remplace 23 par 30, 22 par 29 :

$$\frac{30^7-1}{29^3}=\frac{21\,869\,999\,999}{24\,389}=\frac{754\,137\,931}{841}=896\,715+\frac{616}{841}.$$

Or,

$$616 = 88 \,.\, 7.$$

Etc.

IX. *Généralisation.* — Posons

$$F(x)=f(x)\varphi(x)+\psi(x), \tag{14}$$

de manière que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ soient le quotient et le reste de $F(x)$ divisé par $f(x)$ (*). *Ordinairement,* si l'on remplace x par un nombre entier a, la division de $F(a)$ par $f(a)$ ne donne pas $\varphi(a)$ pour quotient, et $\psi(a)$ pour reste. En effet, dans cette opération, le reste est inférieur au diviseur. Ainsi, nous devons avoir

$$f(a) > \psi(a).$$

Ce n'est pas tout. Afin que $\psi(a)$ puisse *représenter le reste, pour une infinité de valeurs de* a, nous admettrons que *le coefficient du premier terme de* ψ(x) *est positif* (**).

Ces conventions étant admises, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Soit a *un nombre entier, supérieur aux racines des équations*

$$F(x)=0,\quad f(x)=0,\quad \psi(x)=0,\quad f(x)-\psi(x)=0.$$

Si l'on divise F(a) *par* f(a), *le quotient entier sera* φ(a), *et le reste,* ψ(a) (***).

(*) On suppose, bien entendu, que F(x) *et* f(x) *sont des polynômes entiers, à coefficients entiers.*

(**) La même hypothèse est étendue aux coefficients des termes initiaux de $F(x)$ et de $f(x)$.

(***) Je pense que cette proposition, presque évidente, est nouvelle.

X. *Exemple :* Si l'on prend

$$F(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1, \qquad f(x) = x^3 + x^2 - x + 2,$$

on trouve

$$\varphi(x) = x^2 + x - 1, \qquad \psi(x) = x^2 - 2x + 3\,;$$

puis

$$a = 1.$$

En effet : 1° pour $x = 1$:

$$5 = 3 \times 1 + 2;$$

2° Pour $x = 3$:

$$391 = 35 \times 11 + 6;$$

3° Pour $x = 10$:

$$119\,111 = 1\,092 \times 109 + 83;$$

etc.

XI. *Autre exemple :*

$$F(x) = x^m - 1, \qquad f(x) = x^p - 1\,;$$

puis

$$\varphi(x) = x^{m-p} + x^{m-2p} + \cdots + x^{m'}, \qquad \psi(x) = x^{m'} - 1\,;$$

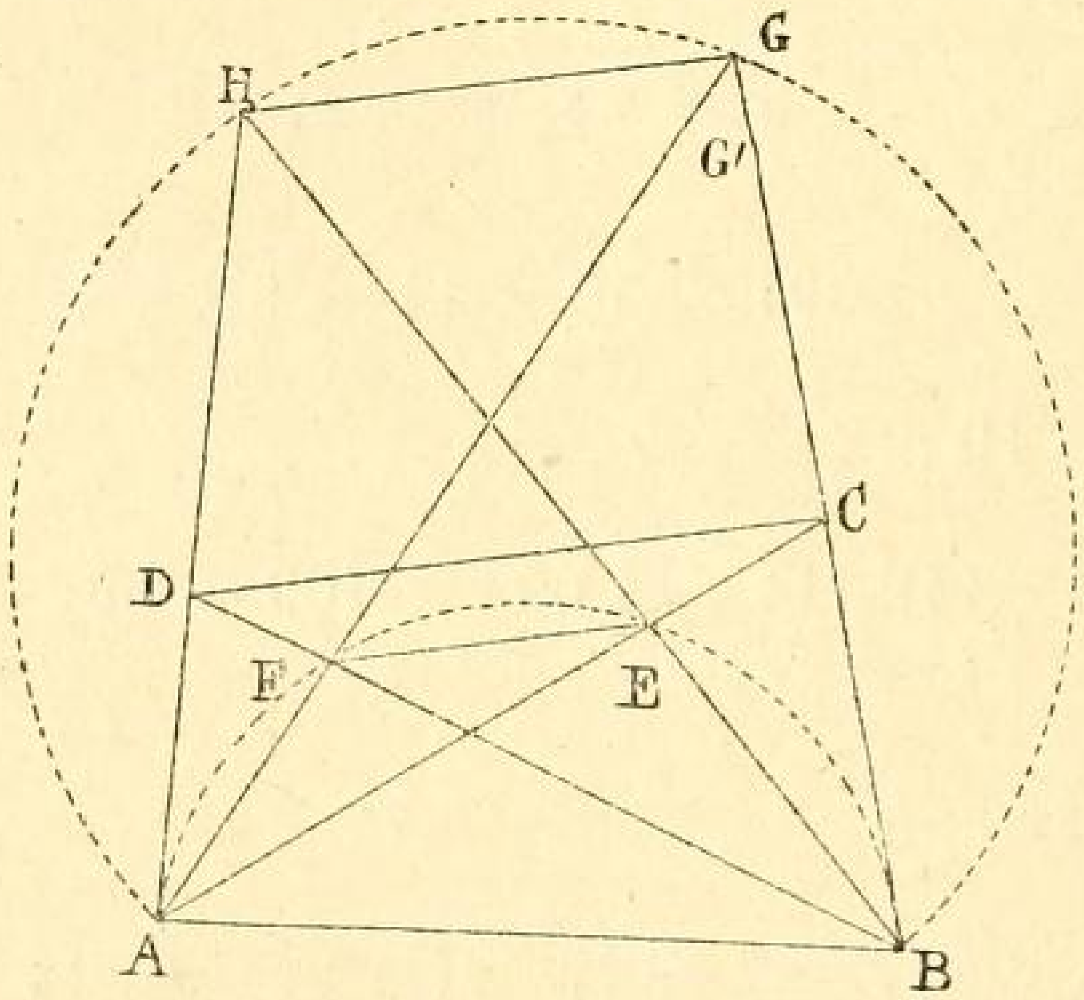
m' désignant le reste de la division de m par p.

Il est clair que $a = 2$. Ainsi, en particulier : *Si l'on divise* $3^{11} - 1$ *par* $3^4 - 1$, *le quotient est* $3^7 + 3^3$, *et le reste,* $3^3 - 1$.

CCLXXI. — Sur un théorème de M. Mannheim (*).

(*Juillet* 1887.)

I. Lemme I. — *Soient deux quadrilatères inscriptibles* ABCD, ABEF *ayant un côté commun* AB, *et dont les diagonales coïncident* (en direction) : *les derniers côtés* CD, EF *sont parallèles.*



Il suffit de démontrer que les angles AEF, ACD sont égaux. Or, si l'on trace les circonférences ABEF, ABCD, on a

$$\mathrm{AEF} = \mathrm{ABF} = \mathrm{ABD}, \qquad \mathrm{ACD} = \mathrm{ABD}.$$

II. Lemme II. — *Soient deux quadrilatères inscriptibles* ABCD, ABGH *ayant un côté commun* AB, *et dont les côtés* AD, AH, BC, BG *coïncident deux à deux* (en direction) : *les derniers côtés* CD, GH, *sont parallèles.*

En effet, chacun des angles BCD, BGH est le supplément de BAD.

III. Lemme III. — *Soient deux quadrilatères inscriptibles* ABEF, ABGH *ayant un côté commun* AB, *et tels, que les*

(*) *Journal de Mathématiques élémentaires; Question* 254. La présente Note a pour objet la généralisation de ce joli théorème.

côtés AF, BE *de l'un, coïncident* (en direction) *avec les diagonales* AG, BH *de l'autre : les derniers côtés* EF, GH *sont parallèles.*

Même démonstration.

IV. Lemme IV (*Réciproque* du Lemme I). — *Soient deux quadrilatères* ABCD, ABEF *ayant un côté commun* AB, *dont les diagonales coïncident* (en direction), *et dont les derniers côtés* CD, EF *sont parallèles : ces quadrilatères sont, simultanément, inscriptibles ou non inscriptibles.*

Si ABCD est inscriptible, les angles DCA, DBA sont égaux. Mais, à cause des parallèles, DCA = FEA. Donc DBE = FEA, et le quadrilatère AFEB est inscriptible.

V. Lemme V (*Réciproque* du Lemme II). — *Soient deux quadrilatères* ABCD, ABGH *ayant un côté commun* AB, *dont les côtés* AD, AH, BC, BG *coïncident deux à deux* (en direction), *et dont les derniers côtés* CD, GH *sont parallèles : ces quadrilatères sont, simultanément, inscriptibles ou non inscriptibles.*

En effet, les angles correspondants BCD, BGH, sont égaux.

VI. Théorème I. — *Soient deux quadrilatères inscriptibles* ABCD, ABEF *ayant un côté commun* AB, *et dont les diagonales coïncident* (en direction). *Si l'on prolonge les côtés* BE, AF *jusqu'à ce qu'ils rencontrent, en* H, G, *les côtés* AD, BC ; *la droite* GH *sera parallèle à* CD, EF *et le quadrilatère* ABGH *sera inscriptible* (*).

Si HG n'est point parallèle à EF, soit HG′ cette parallèle (**) : ABG′H est inscriptible. Menons AG′, qui rencontre en F′ la droite EF : BEF′A sera inscriptible. Mais, par hypothèse, BEFA est inscriptible; donc F′ coïncide avec F.

VII. *Remarque.* — *Dans l'hexagone* DFECGH : 1° *les côtés* DF, GC, *et la diagonale* HE, *concourent en* B ; 2° *les côtés* CE,

(*) Le théorème de M. Mannheim est un cas particulier de celui-ci.

(**) Non tracée sur la figure.

HD, *et la diagonale* GF, *concourent en* A; 3° *les côtés* EF, GH *sont parallèles à la diagonale* CD.

Ce résultat est d'accord avec le théorème connu (*).

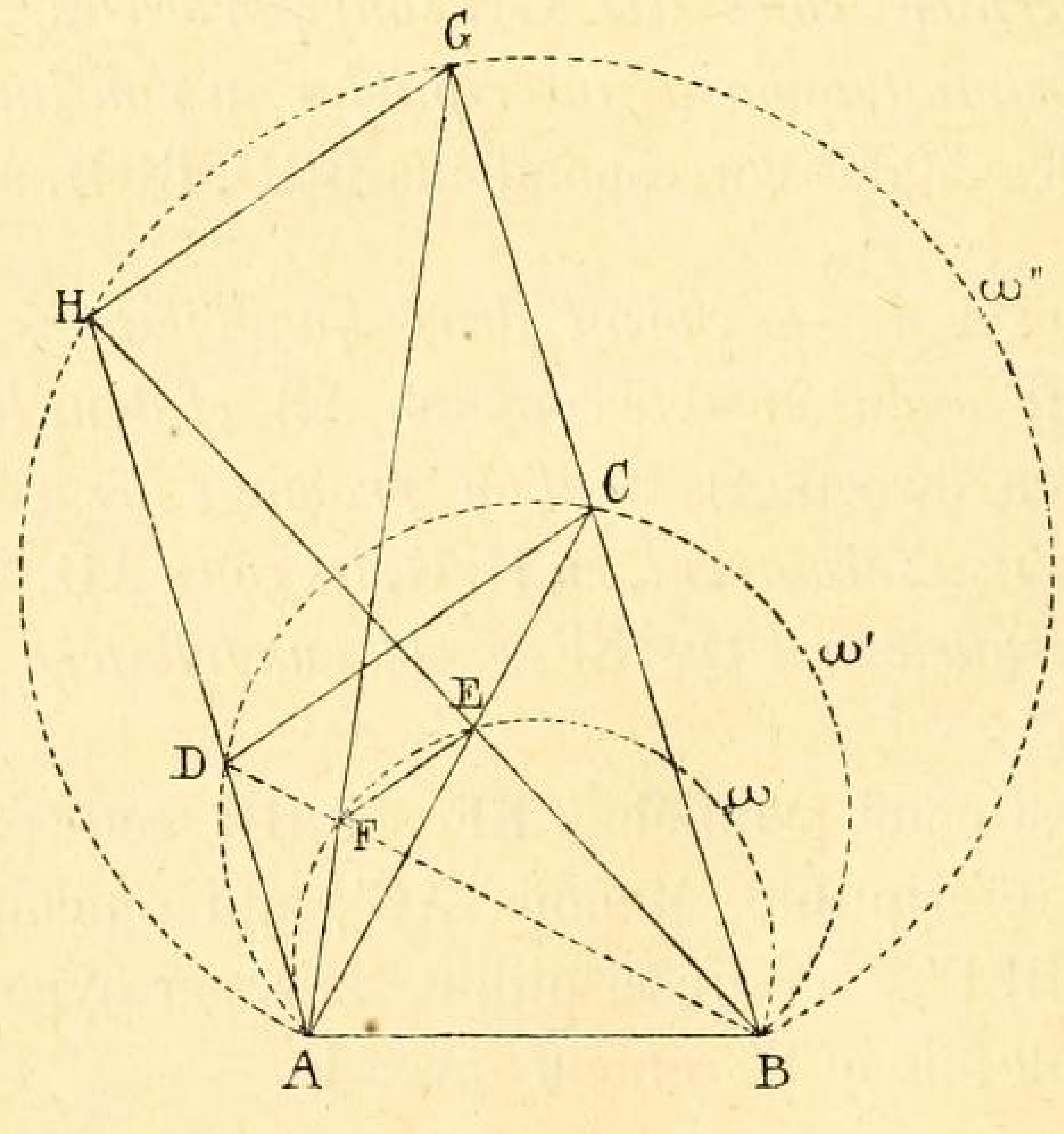
VIII. Théorème II. — *Un quadrilatère inscriptible*, ABCD, *étant donné, on en déduit deux autres*, ABEF, ABGH, *tels que* ADH, AEC, BCG, AFG, BFD, BEH *soient six lignes droites. Cela posé :*

1° *Si l'un de ceux-ci est inscriptible, l'autre l'est aussi, et les côtés* CD, EF, GH *sont parallèles;*

2° *Si l'un des côtés* EF, GH *est parallèle à* CD, *l'autre l'est aussi, et* ABEF, ABGH *sont inscriptibles.*

Addition. — (*Septembre* 1887.)

IX. Théorème III. — ω, ω′, ω″ *étant trois circonférences décrites sur une corde commune* AB; *on trace, sucessivement, les*



doubles cordes BCG, CEA, BEH, HDA, GFA, *lesquelles déter-*

(*) Tome II, page 251. Ce théorème est fort ancien; car on le trouve dans les *Collections mathématiques*, de Pappus. Voir, par exemple, les *Propriétés projectives*, de Poncelet, t. I, pp. 86, 87 (seconde édition).

minent les sommets C, G, E, H, D, F *d'un hexagone. Cela posé :* 1° *Le dernier sommet,* F, *est situé sur la double corde* BD ; 2° *les côtés* GH, EF *sont parallèles à la diagonale* CD (*).

X. *Remarque. — Si les diagonales* CD, EH, FG *se coupent en un même point, l'hexagone, appartenant à trois circonférences, est circonscrit à une conique* (**).

CCLXXII. — Sur un théorème d'Abel (***).

(Lettre à M. de Saint-Germain.)

« Hier, 1^er^ mai, votre aimable lettre m'est parvenue : agréez-en » tous mes remerciements.

» La veille, j'avais reçu la Note annoncée, tirée du dernier » numéro des *Nouvelles Annales.* Quand il a paru, j'étais à » l'*Hospice Dubois,* gravement malade. Aussi, la livraison est-elle » restée non coupée.

» Il n'en est pas de même pour l'*extrait :* bien que ma tête » soit encore un peu faible (IV), je me suis hâté de la lire (en » partie) ; et je viens vous communiquer quelques remarques, » suggérées par cette lecture.

I.

» De l'équation

$$» \quad F(x) = f_n(x) + \varphi_n(x) \ (^{\text{v}}), \tag{2}$$

(*) Ce théorème, qui nous semble curieux, résume les propriétés précédentes. C'est pourquoi nous en supprimons la démonstration *directe.* D'ailleurs, au moyen d'une projection conique, on pourrait le généraliser encore.

(**) Théorème de Brianchon.

(***) Complément à la *Note* LXVII.

(IV) « Elle l'est encore trop pour que je puisse étudier votre démon- » stration, bien compliquée ».

(V) « Je pense que vous avez, sous les yeux, ma *Note sur un théorème* » *d'Abel* ».

» on ne peut, dites-vous, conclure

$$\text{» } F(b) = f_n(b) + \varphi_n(b); \tag{3}$$

» b étant la valeur *extrême* de x. Pourquoi ?

» Contestez-vous que *la limite de la somme de deux quantités* » *est égale à la somme des limites de celles-ci?*

II.

» Lorsque, de

$$\text{» } F(x) = f(x) + \varphi(x),$$

» on déduit

$$\text{» } \lim F(x) = \lim f(x) + \lim \varphi(x),$$

» ou

$$\text{» } F(b) = f(b) + \varphi(b),$$

» il est sous-entendu que $\varphi(x)$, par exemple, *varie d'une* » *manière continue,* de $x < b$ à $x = b$. Si, pour $x = b$, $\varphi(x)$ est » discontinue, il n'y a plus, *ni démonstration, ni théorème.*

» Si je ne me trompe, ceci arrive pour l'exemple choisi par » vous, exemple qui ne me semble pas *topique.*

III.

» En effet, x étant inférieur à l'unité, on peut, dans le » développement de $\mathcal{L}(1 + x)$, grouper *arbitrairement* les » termes, et écrire, par exemple,

$$\text{» } \mathcal{L}(1 + x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} - \frac{x^{2n}}{2n} \right].$$

» Mais, lorsque $x = 1$, ce groupement arbitraire n'est plus » permis (Th. de Dirichlet). Aussi, au lieu de trouver

$$\text{» } \sum_1^\infty \left[\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right] = \mathcal{L}\, 2,$$

» obtenez-vous :

$$\text{»}\ \sum_1^{\infty}\left[\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right]=\frac{3}{2}\,\text{ℓ}\,2\ (^*).$$

» Que résulte-t-il de là, sauf erreur? C'est que *la quantité*

$$\text{»}\ f_n(x)=\mathrm{S}_n=\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}-\frac{x^{2n}}{2n}\right),$$

» *est discontinue pour* x = 1 (**).

IV.

» Vous avez donc, me semble-t-il, appliqué mon (?) théorème » au cas *formellement exclus;* et, trouvant un résultat inadmissible » (ce qui devait arriver), vous en avez conclu que *le théorème* » *est faux.* Est-ce bien raisonné? Je m'en rapporte à vous.

» Si vous pensez, mon cher Collègue, qu'un extrait de cette » lettre puisse intéresser les lecteurs des *N. A.*, je vous prie de » la faire imprimer (avec vos répliques, bien entendu) (***). » *Dans toute discussion, peu importe qui a tort ou qui a raison :* » *le principal est que la vérité se fasse jour* ».

« Votre bien dévoué vieux Collègue,

E. C.

» Liège, 2 mai 1885. »

(*) « N'ayant pas le temps de vérifier ce résultat, je m'en rapporte à » votre affirmation ».

(**) « x étant inférieur à 1, elle est

$$\text{»}\ \text{ℓ}(1+x)-\varepsilon_n;$$

» si $x=1$, elle est

$$\text{»}\ \frac{3}{2}\,\text{ℓ}(1+x)-\varepsilon_n.$$

» *Ergo...* ».

(***) M. de Saint-Germain m'a répondu dans les *Nouvelles Annales*. A son article, j'ai riposté par une lettre. Le procès est encore pendant. (Mai 1888.)

CCLXXIII. — Remarques sur l'intégrale

$$A = \int_0^{\pi} \mathfrak{L}(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx \; (^*).$$

(*Septembre* 1887.)

I. Les valeurs de A ont été trouvées par Poisson (*Journal de l'École polytechnique,* 17ième Cahier, p. 617); mais ce grand Géomètre a commis, dans sa démonstration, une singulière inadvertance.

« Soit », dit Poisson,

$$« \quad u = \log(1 - 2a\cos x + a^2); \tag{1}$$

» d'où l'on tire

$$» \quad -a\frac{du}{da} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2} - 1. \tag{2}$$

» Pour fixer les idées, supposons $a < 1$; nous aurons, en série » convergente,

$$» \quad \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2} = 1 + a\cos x + a^2\cos 2x + a^3\cos 3x + \cdots; \tag{3}$$

» et, par conséquent,

$$» \quad -\frac{du}{da} = \cos x + a\cos 2x + a^2\cos 3x + \cdots \tag{4}$$

» Intégrant par rapport à a, et observant que u est nul en » même temps que a, il vient

$$» \quad -u = a\cos x + \frac{a^2}{2}\cos 2x + \frac{a^3}{3}\cos 3x + \cdots; \tag{5}$$

(*) Cette *Note* a été publiée, en partie, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. I).

» d'où l'on conclut

$$» \int_0^{\pi} u\,dx = \int_0^{\pi} \log(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx = 0.$$

. . . .

II. Le développement (3) est *faux*. En effet, la série a pour somme,

$$\frac{1 - 2a\cos x}{1 - 2a\cos x + x^2},$$

lorsque a est compris entre -1 et $+1$ (exclusivement) (*).

III. La relation (5) est *fausse;* car, pour $x = 0$, elle devient

$$-u = -\ell(1-a)^2 = -2\ell(1-a) = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \cdots,$$

ou

$$2\ell(1-a) = \ell(1-a).$$

IV. On peut, ainsi qu'il suit, rectifier le calcul de Poisson.

$$\frac{du}{da} = 2\,\frac{a - \cos x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{2}{a}\,\frac{1 - \frac{1}{a}\cos x}{1 - \frac{2}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}}.$$

1° Si a surpasse 1, on a, par le paragraphe II :

$$\frac{1 - \frac{1}{a}\cos x}{1 - \frac{2}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}} = 1 + \frac{1}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}\cos 2x + \frac{1}{a^3}\cos 3x + \cdots,$$

ou

$$\frac{du}{da} = 2\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\cos x + \frac{1}{a^3}\cos 2x + \cdots\right], \tag{6}$$

puis

$$u - C = 2\left[\ell a - \frac{1}{a}\cos x - \frac{1}{2a^2}\cos 2x - \frac{1}{3a^3}\cos 3x - \cdots\right]. \tag{7}$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 77.

Pour déterminer la constante C, faisons $a = 1$ (*); nous aurons

$$u = \mathcal{L}(1 - 2\cos x + 1) = 2\mathcal{L}(2\sin\tfrac{1}{2}x),$$

$$2\mathcal{L}(2\sin\tfrac{1}{2}x) - C = -2[\cos x + \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{3}\cos 3x + \cdots];$$

donc (**) $C = 0$.

La formule (7) se réduit à

$$u = 2\left[\mathcal{L}a - \frac{1}{a}\cos x - \frac{1}{2a^2}\cos 2x - \frac{1}{3a^3}\cos 3x - \cdots\right]. \tag{8}$$

Il en résulte, pour $a \overline{>} 1$:

$$A = \int_0^\pi u\,dx = 2\pi\,\mathcal{L}a. \tag{9}$$

2° Soit $a < 1$.

De

$$1 + a\cos x + a^2\cos 2x + \cdots = \frac{1 - a\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2},$$

on tire

$$\cos x + a\cos 2x + a^2\cos 3x + \cdots = \frac{\cos x - a}{1 - 2a\cos x + a^2},$$

puis

$$a\cos x + \tfrac{1}{2}a^2\cos 2x + \tfrac{1}{3}a^3\cos 3x + \cdots = -\tfrac{1}{2}\mathcal{L}(1 - 2a\cos x + a^2),$$

ou bien

$$a\cos x + \tfrac{1}{2}a^2\cos 2x + \tfrac{1}{3}a^3\cos 3x + \cdots = -\tfrac{1}{2}u. \tag{10}$$

De cette égalité, qui doit remplacer la relation (3), on conclut

$$A = \int_0^\pi u\,dx = 0.$$

(*) Cette hypothèse est permise; car la série (7) est *convergente* quand a reçoit cette valeur limite, bien que la série (6) soit, alors, *indéterminée*.

(**) On sait que

$$\mathcal{L}(2\sin\tfrac{1}{2}x) = -[\cos x + \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{3}\cos 3x + \cdots].$$

(*Traité élémentaire des séries*, p. 106.)

CCLXXIV (*). — Sur la démonstration d'un théorème de Fermat, donnée par Legendre.

(*Septembre* 1887.)

I. On lit, dans la *Théorie des Nombres* (**) :

« Théorème. — *Tout nombre premier* A *est de la forme*
» $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$.

. . . .

» Considérons plus généralement l'équation

$$\text{» } AA' = p^2 + q^2 + r^2 + s^2,$$

» dans laquelle chacun des nombres p, q, r, s, sera supposé
» moindre que $\frac{1}{2}A$, on aura $A'A < \frac{4}{4}A^2$, ou $A' < A$ (***).
» Et d'abord si on avait $A' = 1$, il est clair que A serait
» égal à la somme de quatre carrés, et la proposition serait
» démontrée (IV).

» Soit donc $A' > 1$, et parce que A' est diviseur de
» $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$, il sera aussi diviseur de la quantité

$$\text{» } (p - \alpha A')^2 + (q - \beta A')^2 + (r - \gamma A')^2 + (s - \delta A')^2,$$

» α, β, γ, δ étant pris à volonté. Supposons qu'on prenne ces
» indéterminées de manière qu'aucun des termes $p - \alpha A'$,
» $q - \beta A'$, etc., n'excède $\frac{1}{2}A'$ (V) ; alors si l'on fait

$$\text{» } A'A'' = (p - \alpha A')^2 + (q - \beta A')^2 + (r - \gamma A')^2 + (s - \delta A')^2,$$

» on aura $A'A'' < \frac{4}{4}A'A'$ ou $A'' < A'$. Maintenant si au moyen
» de la formule du n° 150 (VI) on multiplie la valeur de AA' par

(*) Addition à la *Note* CCXVIII.

(**) Tome I, page 214, édition de 1830.

(***) Voir la *Remarque* (A).

(IV) Voir la *Remarque* (B).

(V) *Remarque* (C).

(VI) Faute typographique : on doit lire 152. Voir la *Remarque* (D).

» celle de A'A'', on trouvera pour produit une somme de quatre
» carrés dont chacun sera divisible par A'A'; de sorte qu'en
» divisant tout par A'^2, on aura

$$« \; AA'' = (A - \alpha p - \beta q - \gamma r - \delta s)^2 + (\alpha q - \beta p + \gamma s - \delta r)^2$$
$$+ (\alpha r - \gamma p + \delta q - \beta s)^2 + (\alpha s - \delta p + \beta r - \gamma q)^2.$$

» Cela posé, si on a $A'' = 1$, la proposition sera démontrée;
» mais si on a $A'' > 1$, on procédera de la même manière pour
» obtenir un nouveau produit AA''' exprimé par quatre carrés,
» et dans lequel on aura $A''' < A''$. Continuant ainsi la suite des
» entiers décroissants A, A', A'', A''', etc., on parviendra néces-
» sairement à un terme égal à l'unité; donc alors le nombre
» premier A sera exprimé par la somme de quatre carrés (*). »

(A)

Soit

$$N = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = AA'; \tag{1}$$

et, par conséquent, $A > \sqrt{N}$. Un nombre donné, N, n'admet pas, nécessairement, un diviseur *premier*, supérieur à $\sqrt{N}$. Par exemple, si $N = 27$, le plus grand facteur premier de N est 3.

Legendre ne démontre donc pas le théorème énoncé : il prouve, tout au plus, celui-ci :

Si un nombre N *est la somme de quatre carrés, tout diviseur de* N, *supérieur à* $\sqrt{N}$, *est la somme de quatre carrés.*

(B)

D'après la Remarque (A), *la proposition ne serait pas démontrée.*

(C)

On doit avoir, non

$$p - \alpha A' \overline{\underline{<}} \tfrac{1}{2} A',$$

mais

$$(p - \alpha A')^2 \overline{\underline{<}} (\tfrac{1}{2} A')^2 :$$

il s'agit de la valeur *numérique* de $p - \alpha A'$.

(*) *Remarque* (E).

(D)

La formule citée est celle d'Euler :

$$\left.\begin{aligned}&(p^2+q^2+r^2+s^2)(p'^2+q'^2+r'^2+s'^2)\\=&(pp'+qq'+rr'+ss')^2+(pq'-qp'+rs'-sr')^2\\+&(pr'-qs'-rp'+sq')^2+(ps'+qr'-rq'-sp')^2.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Si l'on fait :

$$p'=p-\alpha A',\quad q'=q-\beta A',\quad r'=r-\gamma A',\quad s'=s-\delta A',\quad(3)$$

elle devient

$$\begin{aligned}AA'^2A''=&\left[p^2+q^2+r^2+s^2-A'(p\alpha+q\beta+r\gamma+s\delta)\right]^2\\&+\left[p(q-\beta A')-q(p-\alpha A')+r(s-\delta A')-s(r-\gamma A')\right]^2\\&+\left[p(r-\gamma A')-q(s-\delta A')-r(p-\alpha A')+s(q-\beta A')\right]^2\\&+\left[p(s-\delta A')+q(r-\gamma A')-r(q-\beta A')-s(p-\alpha A')\right]^2.\end{aligned}$$

Le second membre égalant

$$\begin{aligned}&\left[AA'-A'(p\alpha+q\beta+r\gamma+s\delta)\right]^2+\left[(\alpha q-\beta p)A'+(\gamma s-\delta r)A'\right]^2\\+&\left[(\alpha r-\gamma p)A'+(\delta q-\beta s)A'\right]^2+\left[\alpha s-\delta p)A'+(\beta r-\gamma q)A'\right]^2,\end{aligned}$$

il reste

$$\left.\begin{aligned}AA''=&(A-\alpha p-\beta q-\gamma r-\delta s)^2+(\alpha q-\beta p+\gamma s-\delta r)^2\\&+(\alpha r-\gamma p+\delta q-\beta s)^2+(\alpha s-\delta p+\beta r-\gamma q)^2,\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

comme l'écrit Legendre.

(E)

On a vu, dans la *Remarque* (A), que le théorème énoncé n'est nullement démontré. Il en est de même, par conséquent, pour le *théorème de Fermat : « Un nombre quelconque est la somme » de quatre ou d'un moindre nombre de carrés* » (*).

(*) *Théorie des Nombres*, t. I, p. 215. L'illustre Auteur se contente de dire : « C'est une conséquence immédiate de la proposition qu'on vien » de démontrer, et du lemme qui la précède. »

Autres Remarques.

I. Lagrange, à qui l'on doit la première démonstration du théorème de Fermat, n'a pas commis les inexactitudes que nous venons de signaler; néanmoins, cette démonstration ne nous semble pas irréprochable. Après avoir énoncé ainsi la proposition préliminaire :

« Si la somme de quatre carrés est divible par un nombre » premier plus grand que la racine carrée de la même somme, » ce nombre sera nécessairement égal à la somme de quatre » carrés (*) », et l'avoir prouvée très péniblement, Lagrange ajoute :

« COROLLAIRE. — *Si un nombre premier quelconque est un* » *diviseur de la somme de quatre carrés qui n'aient point de* » *commun diviseur, ce nombre sera aussi la somme de quatre* » *carrés.*

« Car nommant, comme ci-dessus, A le nombre premier » donné et $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ le nombre composé de quatre » carrés qui est divisible par A, il est clair que, si chacune des » racines p, q, r, s était moindre que $\frac{A}{2}$, on aurait

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 < 4\left(\frac{A}{2}\right)^2 < A^2;$$

» de sorte que A serait plus grand que $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2 + s^2}$ » comme on l'a supposé dans le Théorème précédent; donc, etc. » Or je dis que quels que soient les nombres p, q, ..., on peut » toujours les réduire à être moindres que $\frac{A}{2}$; car soit, par » exemple, $p > \frac{A}{2}$, il est visible que si

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2$$

» est divisible par A,

$$(p - mA)^2 + q^2 + r^2 + s^2$$

(*) *OEuvres de Lagrange,* publiées par Serret, t. III, p. 193. Les défauts que nous venons de signaler ont été aggravés par Le Besgue, dans ses *Exercices d'Analyse numérique* (pp. 106, 107). Ils me semblent avoir été évités par Serret (*Cours d'Algèbre supérieure,* troisième édition, t. II, p. 94).

» le sera aussi, de même que

$$(mA - p)^2 + q^2 + r^2 + s^2 \ldots \text{ »}$$

Ceci fait, l'illustre Géomètre établit cet autre théorème auxiliaire :

Étant donné un nombre premier A, *on peut toujours déterminer deux nombre entiers,* a, b, *tels, que* $a^2 + b^2 + 1$ *soit divisible par* A (*).

II. On peut former, bien simplement, la valeur de A''.

En effet, des équations

$$AA' = \sum p^2, \quad A'A'' = \sum (p - \alpha A')^2,$$

on tire

$$A'' = \frac{\sum (p - \alpha A')^2}{A'},$$

ou

$$A'' = A - 2\sum \alpha p + A' \sum \alpha^2. \tag{5}$$

III. Dans l'identité d'Euler (D), changeons de notation, de manière que l'égalité

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \delta'^2) = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 \tag{6}$$

soit vérifiée par :

$$\left.\begin{aligned} p &= \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta', \\ q &= - \beta\alpha' + \alpha\beta' - \delta\gamma' + \gamma\delta', \\ r &= - \gamma\alpha' + \delta\beta' + \alpha\gamma' - \beta\delta', \\ s &= - \delta\alpha' - \gamma\beta' + \beta\gamma' + \alpha\delta'. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Si l'on pose

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = A, \tag{8}$$

il résulte, des équations précédentes :

$$\left.\begin{aligned} A\alpha' &= p\alpha - q\beta - r\gamma - s\delta, \\ A\beta' &= p\beta + q\alpha + r\delta - s\gamma, \\ A\gamma' &= p\gamma - q\delta + r\alpha + s\beta, \\ A\delta' &= p\delta + q\gamma - r\beta + s\alpha; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(*) Legendre commence par là (*Théorie des Nombres*, t. I, p. 211).

puis

$$\left.\begin{aligned}\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2 &= \left(\frac{p\alpha-q\beta-r\gamma-s\delta}{A'}\right)^2+\left(\frac{p\beta+q\alpha+r\delta-s\gamma}{A'}\right)^2\\ &+\left(\frac{p\gamma-q\delta+r\alpha+s\beta}{A'}\right)^2+\left(\frac{p\delta+q\gamma-r\beta+s\alpha}{A'}\right)^2.\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Si chaque fraction était réductible à un nombre entier, le théorème suivant serait démontré :

Soit $N = AA'$, *les trois nombres étant entiers. Si* N *et* A *sont, chacun, la somme de quatre carrés entiers, le quotient de* N *par* A *est, également, la somme de quatre carrés entiers.*

Mais cette conclusion (vraie) serait trop précipitée.

Prenons, par exemple,

$$N = 462, \quad A = 66, \quad A' = 7;$$

puis

$$p = 21, \quad q = 4, \quad r = 2, \quad s = 1; \qquad \alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 5, \quad \delta = 6.$$

Nous trouvons, par les formules (9) :

$$\alpha' = -\frac{3}{66}, \quad \beta' = \frac{53}{66}, \quad \gamma' = \frac{85}{66}, \quad \delta' = \frac{143}{66};$$

et

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \delta'^2 = \frac{3^2 + 53^2 + 85^2 + 143^2}{66^2}$$

$$= \frac{9 + 2\,809 + 7\,225 + 20\,449}{4\,356} = \frac{30\,492}{4\,356} = 7 \ (*).$$

En conséquence :

1° *Si un nombre* N, *égal à la somme de quatre carrés entiers, est divisible par un nombre* A, *égal à la somme de quatre carrés entiers, le quotient* $\frac{N}{A}$ *peut se présenter sous la forme d'une somme de quatre carrés fractionnaires ;*

(*) Si l'on veut, au moyen des formules (9), trouver des valeurs de α', β', δ', γ', qui soient *entières*, on peut faire

$$p = 15, \quad q = -4, \quad r = -5, \quad s = -14,$$

quantités dont la somme des carrés est 462. Il résulte, de ces hypothèses :

$$\alpha' = 2, \quad \beta' = 1, \quad \gamma' = 1, \quad \delta' = 1.$$

2° *Un nombre entier peut être la somme de quatre carrés fractionnaires* (*).

Par exemple,

$$7 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{13}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2$$
$$= \left(\frac{29}{11}\right)^2 + \left(\frac{2}{11}\right)^2 + \left(\frac{1}{11}\right)^2 + \left(\frac{1}{11}\right)^2,$$

etc. (**).

IV. Si *l'on admet* le théorème de Fermat, il en résulte celui-ci, généralisation du théorème d'Euler, employé par Lagrange :

Tout nombre entier est, d'une infinité de manières, égal à la somme de quatre carrés fractionnaires (***).

CCLXXV. — Sur un théorème de Gauss.

(*Septembre* 1887.)

I. A la page 283 du *Journal de Liouville* (tome II, 1837), Le Besgue s'énonce ainsi :

« De là ce théorème de M. Gauss :

» *La quantité*

$$\frac{1}{2}\,\frac{2h(2h-1)\cdots(h+1)}{1.2\ldots h}, \quad (\text{mod. } p)$$

» *est toujours égale à*

$$\pm \mathrm{L}\left(< \frac{p}{2}\right),$$

» *en prenant*

$$p = \mathrm{L}^2 + 4\mathrm{M}^2$$

» *et*

$$\pm \mathrm{L} = 1 + 4n \text{ »}.$$

(*) Ces remarques, peut-être nouvelles, complètent ce que l'on a vu dans la *Note* CCXVIII.

(**) Dans chaque décomposition, les numérateurs doivent, bien entendu, être premiers entre eux.

(***) Voir, ci-dessus, les décompositions de 7.

Autrement dit :

« *Soit un nombre premier*

$$p = L^2 + 4M^2.$$

» *En supposant* L = 1 + 4n, *on a*

$$\frac{1}{2}\,\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{1.2\ldots n} = \mathfrak{M}(p) \pm L. \text{ »} \qquad \text{(A)}$$

Prenons $n=6$, $u=0$, $M=1$; valeurs d'où résultent $L=1$, $p=5$. Nous devons trouver :

$$\frac{1}{2}\,\frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6} = \mathfrak{M}(5) \pm 1,$$

ou

$$11.6.7 = \mathfrak{M}(5) \pm 1,$$

ou

$$2 = \mathfrak{M}(5) \pm 1;$$

ce qui est *faux*.

Soient $n=6$, $u=-1$, $M=1$; et, par conséquent, $L=-3$, $p=13$. L'égalité (A) devient

$$11.6.7 = \mathfrak{M}(13) \pm 3,$$

ou

$$7 = \mathfrak{M}(13) \pm 3;$$

ce qui est *faux*.

II. L'énoncé de Le Besgue est donc inexact. Voici celui que donne Jacobi (*) :

« *Sit* p *numerus* = 4k + 1, *atque resolvatur in duo quadrata* » ee + ff, *designante* ee *quadratum impar,* ff *quadratum par,* » *fore* ± e *residuum minimum* (*quod inter* — $\frac{1}{2}$p *et* + $\frac{1}{2}$p *conti-* » *netur*), *numeri*

$$\frac{1}{2}\,\frac{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots 2k}{1.2.3\ldots k},$$

» *per* p *divisi; hoc insuper residuum minimum per* 4 *divisum*

(*) *Journal de Crelle,* t. II, p. 69. C'est à propos d'une recherche particulière que j'ai rencontré, par hasard, les Notes de Le Besgue et de Jacobi. Il ne m'a pas été possible de trouver, dans les *OEuvres de Gauss,* le théorème en question.

» *semper residuum* + 1, *relinquere ; ita ut sit aut numerus nega-*
» *tivus formae* — (4n + 3), *aut positivus formae* 4n + 1 ».

Ainsi, le nombre entier h (ou n) n'est point arbitraire : il égale $\frac{p-1}{4}$.

CCLXXVI. — Exercice sur un Problème de Géométrie élémentaire.

(*Octobre-Novembre* 1887.)

I.

Construire un quadrilatère convexe P, *dont le périmètre* l *et les angles* A, B, C, D *sont donnés.*

Fig. 1.

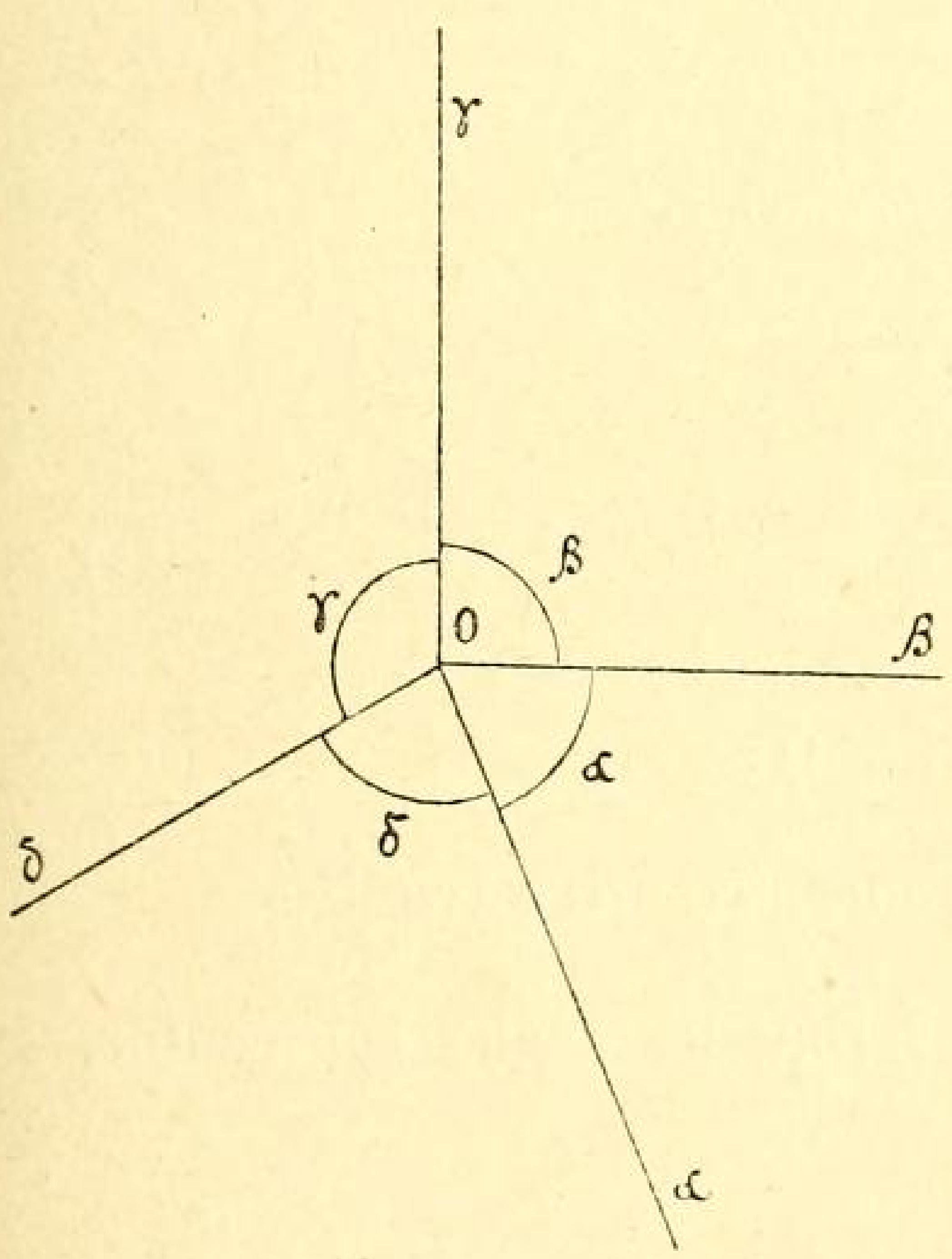
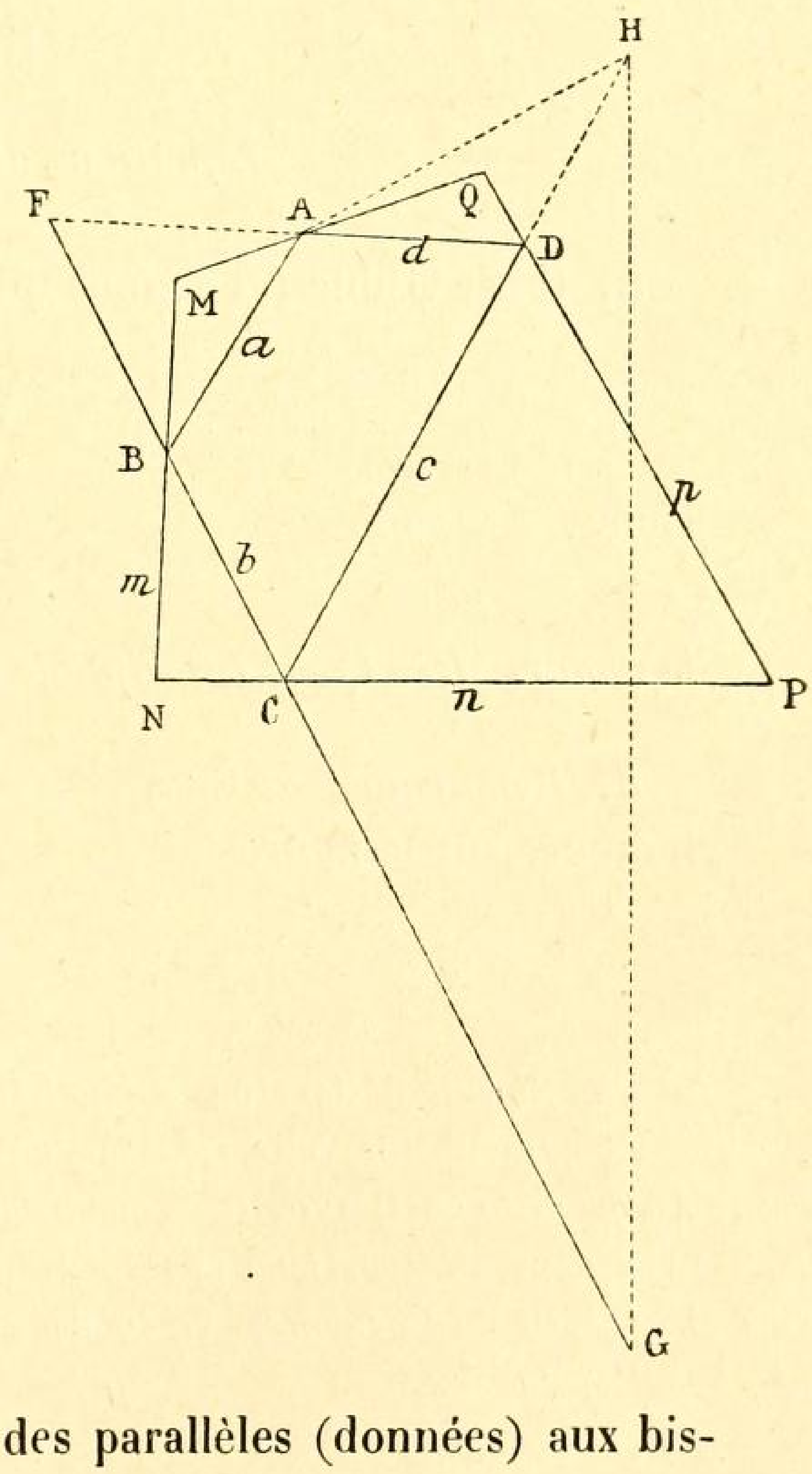


Fig. 2.



1. Soient $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ des parallèles (données) aux bissectrices intérieures des angles A, B, C, D. Soit la droite $GF = l$, faisant, avec $O\gamma$, un angle égal à $\frac{C}{2}$. Prenons, arbitrairement, $FB = a$; puis construisons le point A, symétrique de F, relativement à la droite MN, perpendiculaire à $O\beta$: A est un sommet de P. Menons AH perpendiculaire à $O\delta$, GH perpendiculaire à $O\gamma$: ces droites se coupent en un point H.

Si l'on trace QP perpendiculaire au milieu de AH, PN perpendiculaire au milieu de GH; et qu'enfin, par le sommet A, on mène MQ perpendiculaire à $O\alpha$; on détermine le quadrilatère MNPQ (*), circonscrit au quadrilatère P, dont tous les sommets sont connus (**).

2. *Remarque.* — Le problème est *indéterminé;* ce qui était évident *a priori.*

II.

Équations du problème.

3. Il est visible (et connu) que :

$$M = \frac{A + B}{2}, \quad N = \frac{B + C}{2}, \quad D = \frac{C + D}{2}, \quad Q = \frac{D + A}{2}. \qquad (1)$$

Donc

$$M + P = N + Q :$$

le quadrilatère Q *est inscriptible à une circonférence* (***).

4. *Remarque.* — Si α, β, γ, δ sont les angles consécutifs, indiqués sur la figure 1 :

$$\alpha + M = \pi, \quad \beta + N = \pi, \quad \gamma + P = \pi, \quad \delta + Q = \pi.$$

(*) Nous le désignerons par la lettre Q.

(**) On justifie cette construction en se reportant au problème direct : *Au quadrilatère* Q, *inscrire un quadrilatère* P, *dont le périmètre soit minimum* (Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire, 6e édit., pp. 20 et 21). La théorie du *kaléidoscope* est fondée sur ce problème.

(***) *Loc. cit.*

Mais, par hypothèse, la droite GF fait, avec $O\gamma$, un angle égal à $\frac{C}{2}$. Conséquemment :

$$B = 2(\pi - \beta) - C, \quad A = 2(\pi - \alpha) - B, \quad D = 2(\pi - \delta) - A.$$

Ainsi, la construction indiquée équivaut à l'emploi des angles C, B, A, D.

5. Dans les triangles AMB, BNC :

$$BM = a\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin M}, \qquad BN = b\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin N};$$

donc, m, n, p, q étant les côtés consécutifs de Q :

$$m \sin M \sin N = a \sin N \cos\frac{A}{2} + b \sin M \cos\frac{C}{2}, \tag{3}$$

$$n \sin M \sin N = b \sin M \cos\frac{B}{2} + c \sin N \cos\frac{D}{2}, \tag{4}$$

$$p \sin M \sin N = c \sin N \cos\frac{C}{2} + d \sin N \cos\frac{A}{2}, \tag{5}$$

$$q \sin M \sin N = d \sin M \cos\frac{D}{2} + a \sin N \cos\frac{B}{2}\cdot \tag{6}$$

6. Des équations (3), (4), on déduit :

$$\sin M\left(m\cos\frac{B}{2} - n\cos\frac{C}{2}\right) = a\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cdot \tag{7}$$

Des équations (5), (7) :

$$\left.\begin{aligned}&\sin M \sin N\left(m\cos\frac{B}{2} - n\cos\frac{C}{2} + p\cos\frac{D}{2}\right)\\ &= a\sin N\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + d\sin M\cos\frac{A}{2}\cos\frac{D}{2}\cdot\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Des équations (6), (8) :

$$m\cos\frac{B}{2} - n\cos\frac{C}{2} + p\cos\frac{D}{2} - q\cos\frac{A}{2} = 0. \tag{9}$$

7. On tire, des équations (5), (7), (6) :

$$b = m\frac{\sin N}{\cos\frac{C}{2}} - a\frac{\sin N\cos\frac{A}{2}}{\sin M\cos\frac{C}{2}}, \tag{10}$$

$$c = \sin M\frac{n\cos\frac{C}{2} - m\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}} + a\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}}, \tag{11}$$

$$d = q\frac{\sin N}{\cos\frac{D}{2}} - a\frac{\sin N\cos\frac{B}{2}}{\sin M\cos\frac{D}{2}}; \tag{12}$$

puis, des trois dernières,

$$\left.\begin{aligned} l = {} & m\frac{\sin N}{\cos\frac{C}{2}} + \sin M\frac{n\cos\frac{C}{2} - m\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}} + q\frac{\sin N}{\cos\frac{D}{2}} \\ & + \left[1 - \frac{\sin N\cos\frac{A}{2}}{\sin M\cos\frac{C}{2}} + \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}} - \frac{\sin N\cos\frac{B}{2}}{\sin M\cos\frac{D}{2}}\right]a. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

III.

Simplification.

8. L'équation (13) peut être notablement réduite ; car *le coefficient de* a *est nul.* En d'autres termes : *dans tout quadrilatère convexe, dont* A, B, C, D *sont les angles consécutifs, on a*

$$\left.\begin{aligned} & \sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}\right] \\ & = \sin\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{D}{2}\cos\frac{A}{2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

En effet, si l'on multiplie par 2, cette égalité devient

$$\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C+D}{2}+\cos\frac{C-D}{2}\right]$$
$$=\sin\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{D+A}{2}+\cos\frac{D-A}{2}\right];$$

ou, parce que $A+B+C+D=2\pi$:

$$\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C-D}{2}\right]=\sin\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{D-A}{2}\right].$$

Pour la même raison :

$$\frac{C-D}{2}=\left(\frac{A+B}{2}+C\right)-\pi,\quad \frac{A-D}{2}=\left(\frac{B+C}{2}+A\right)-\pi.$$

Donc

$$\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\left(\frac{A+B}{2}+C\right)\right]$$
$$=\sin\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}-\cos\left(\frac{B+C}{2}+A\right)\right];$$

ou, après multiplication par 2 :

$$\sin A+\sin B-\left[\sin(A+B+C)-\sin C\right]$$
$$=\sin B+\sin C-\left[\sin(A+B+C)-\sin A\right];$$

ce qui est identique.

9. *Remarque.* — On sait que

$$\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}.$$

Par conséquent, *dans tout quadrilatère convexe :*

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}. \qquad (15)$$

10. *Autre remarque. — Dans tout quadrilatère convexe :*

1° $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}, \qquad (16)$$

$$
2^{\circ}\qquad \left.\begin{aligned}
&\sin\frac{A+B}{2}\left[\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}\right]\\
&=\sin\frac{B+C}{2}\left[\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}\right],
\end{aligned}\right\}\qquad (17)
$$

$$
3^{\circ}\qquad \left.\begin{aligned}
&\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}\right]\\
&=\sin\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{D}{2}\cos\frac{A}{2}\right].
\end{aligned}\right\}\qquad (18)
$$

IV.

Équations réduites.

11. L'équation (13) est devenue

$$
\left.\begin{aligned}
l\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}&=\left[\sin N\cos\frac{D}{2}-\sin M\cos\frac{B}{2}\right]m\\
&+n\sin M\cos\frac{C}{2}+q\sin N\cos\frac{C}{2}.
\end{aligned}\right\}\qquad (19)
$$

Mais on peut la simplifier encore. En effet, le coefficient de m est

$$
\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{D}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{A+D}{2}\cos\frac{D}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{B}{2}
$$

$$
=\frac{1}{2}\left[\sin\left(D+\frac{A}{2}\right)-\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)\right]=\sin\frac{D-B}{2}\cos\frac{A+B+D}{2}
$$

$$
=\sin\frac{B-D}{2}\cos\frac{C}{2}=\sin\left(\frac{2B+A+C}{2}-\pi\right)\cos\frac{C}{2}=-\sin(M+N)\cos\frac{C}{2}.
$$

Donc, après suppression d'un facteur, et par des permutations tournantes :

$$
l\cos\frac{D}{2}=-m\sin(M+N)+n\sin M+q\sin N,\qquad (20)
$$

$$
l\cos\frac{A}{2}=-n\sin(N+P)+p\sin N+m\sin P,\qquad (21)
$$

$$l \cos \frac{B}{2} = - p \sin (P + Q) + q \sin P + n \sin Q, \qquad (22)$$

$$l \cos \frac{C}{2} = - q \sin (Q + M) + m \sin Q + p \sin M \text{ (*)}. \qquad (23)$$

V.

Valeurs des inconnues.

12. Si l'on suppose $a = 0$, le quadrilatère P se réduit à un triangle MCD, dans lequel

$$\frac{b}{\sin D} = \frac{d}{\sin C} = \frac{c}{\sin(C + D)} = \frac{l}{4 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2}} \text{ (**)}.$$

En conséquence :

$$b = \frac{l}{2} \frac{\sin \frac{D}{2}}{\sin M \cos \frac{C}{2}}, \quad d = \frac{l}{2} \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin M \cos \frac{D}{2}}, \quad c = - \frac{l}{2} \frac{\cos M}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2}}. \qquad (24)$$

La substitution dans l'équation (3) donne ensuite

$$m = \frac{l}{2} \frac{\sin \frac{D}{2}}{2 \sin M \sin N}. \qquad (25)$$

(*) En passant, il est bon de faire observer que :

$$\sin P = \sin M, \quad \sin Q = \sin N, \quad \sin (P + Q) = - \sin (M + N), \text{ etc.}$$

(**) L'identité

$$\sin D + \sin C + \sin (C + D) = 4 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2}$$

ne diffère pas de celle-ci :

$$\sin A + \sin B + \sin C - \sin (A + B + C) = 4 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2},$$

que nous avons rappelée précédemment.

13. D'après la nature du problème *direct* (**1**, *note*), on est *porté à croire* que cette valeur de m est *générale*, c'est-à-dire, indépendante de l'hypothèse faite sur a, et que l'on a aussi, par un changement de lettres :

$$n = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin M \sin N}, \quad p = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin M \sin N}, \quad q = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin M \sin N}. \qquad (26)$$

Tout à l'heure, cette espèce de *prévision* sera justifiée. En attendant qu'elle le soit, voyons si les valeurs (25), (26) satisfont aux équations (20), (21), ...

Substituant dans l'équation (20), par exemple, on trouve

$$2\cos\frac{D}{2}\sin M \sin N = -\sin\frac{D}{2}\sin(M+N) + \sin\frac{A}{2}\sin M + \sin\frac{C}{2}\sin N,$$

ou

$$\left.\begin{aligned} &2\cos\frac{D}{2}\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2} \\ &= -\sin\frac{D}{2}\sin\left(B+\frac{A+C}{2}\right) + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{B+C}{2}; \end{aligned}\right\} (27)$$

puis

$$\left.\begin{aligned} &-2\cos\frac{A+B+C}{2}\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2} + \sin\frac{A+B+C}{2}\sin\left(B+\frac{A+C}{2}\right) \\ &= \sin\frac{A}{2}\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{B+C}{2}. \end{aligned}\right\} (28)$$

Le premier membre égale

$$-\cos\frac{A+B+C}{2}\left[\cos\frac{A-C}{2} - \cos\left(B+\frac{A+C}{2}\right)\right]$$
$$+\sin\frac{A+B+C}{2}\sin\left(B+\frac{A+C}{2}\right)$$
$$= -\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$
$$+\left[\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\left(B+\frac{A+C}{2}\right) + \sin\frac{A+B+C}{2}\sin\left(B+\frac{A+C}{2}\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\cos\left(A+\frac{B}{2}\right) + \cos\left(C+\frac{B}{2}\right)\right] + \cos\frac{B}{2}.$$

Le second membre de l'égalité (28) est

$$\frac{1}{2}\left[\cos\frac{B}{2} - \cos\left(A + \frac{B}{2}\right) + \cos\frac{B}{2} - \cos\left(C + \frac{B}{2}\right)\right];$$

donc les deux membres ont même valeur.

14. *Remarques.* — I. *Dans tout quadrilatère convexe, les angles* A, B, C, D *vérifient les relations*

$$\left.\begin{aligned}
&2\cos\frac{D}{2}\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\\
&= -\sin\frac{D}{2}\sin\left(B + \frac{A+C}{2}\right) + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{B+C}{2},\\
&2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+D}{2}\\
&= -\sin\frac{A}{2}\sin\left(C + \frac{B+D}{2}\right) + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{B+C}{2} + \sin\frac{D}{2}\sin\frac{C+D}{2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

II. Si l'on fait

$$A = 2x, \quad B = 2y, \quad C = 2z,$$

l'égalité (28) prend la forme

$$\left.\begin{aligned}
&\sin(x+y+z)\sin(x+2y+z) - \sin x\sin(x+y) - \sin z\sin(y+z)\\
&= 2\cos(x+y+z)\sin(x+y)\sin(y+z).
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Ainsi, *la fonction contenue dans le premier membre est calculable par logarithmes.*

VI.

Calculs de déterminants.

15. Si le système des équations (20), ... (23) est *déterminé*, nous aurons ce théorème, peut-être nouveau :

Les quadrilatères Q, *circonscrits aux quadrilatères* P *ayant les mêmes éléments* I, A, B, C, D, *sont tous égaux entre eux* (*).

Les coefficients des inconnues, dans ces équations, étant :

$$\begin{array}{llll} -\sin(M+N), & \sin M, & 0; & \sin N; \\ \sin M, & -\sin(N+D), & \sin N, & 0; \\ 0, & \sin N, & \sin(M+N), & \sin M; \\ \sin N, & 0, & \sin M, & \sin(N+D); \end{array}$$

il y a lieu de former le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} -h, & f, & o, & g \\ f, & -h, & g, & o \\ o, & g, & h, & f \\ g, & o, & f, & h' \end{vmatrix};$$

et d'examiner s'il est différent de zéro quand

$$f = \sin M, \quad g = \sin N, \quad h = \sin(M+N), \quad h' = \sin(N+P). \qquad (31)$$

On a

$$\Delta = -[h\Delta_1 + f\Delta_2 + g\Delta_4], \qquad (32)$$

en supposant :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -h', & g, & o \\ g, & h, & f \\ o, & f, & h' \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f, & o, & g \\ g, & h, & f \\ o, & f, & h' \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} f, & o, & g \\ -h', & g, & o \\ g, & h, & f \end{vmatrix}.$$

(*) C'est le théorème *supposé* ci-dessus (13).

Or :

$$\Delta_1 = -h'(hh' - f^2) - g^2h' = -h'(f^2 - g^2 - hh'),$$
$$\Delta_2 = f(hh' - f^2) + fg^2 = -f(f^2 - g^2 - hh'),$$
$$\Delta_4 = f^2g - ghh' - g^3 = g(f^2 - g^2 - hh').$$

Donc, au lieu de la formule (32) :

$$\Delta = (f^2 - g^2 - hh')^2; \tag{33}$$

expression remarquable (*).

16. Revenant aux valeurs (31), nous avons

$$\sqrt{\Delta} = \sin^2 M - \sin^2 N - \sin(M + N)\sin(N + P),$$

ou

$$2\sqrt{\Delta} = -\cos 2M + \cos 2N - \cos(M - P) + \cos(M + 2N + P);$$

et, si $P = \pi - M$:

$$\Delta = 0.$$

Ainsi, *quand le quadrilatère* Q *est inscriptible* (ce qui a lieu), *le déterminant* Δ *est nul.*

(*) D'après une application donnée par M. *Dostor*, dans sa *Théorie des déterminants* (p. 62), on a

$$f^2 - g^2 - hh' = \begin{vmatrix} o, & 1, & g \\ -1, & o, & f \\ f, & g, & -hh' \end{vmatrix}.$$

Ainsi : *le déterminant* Δ, *à seize éléments, est le carré d'un déterminant à neuf éléments.* D'ailleurs, par un théorème de Cauchy, Δ *est un déterminant à neuf éléments;* savoir :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + g^2, & fg, & g(1 - hh') \\ fg, & 1 + f^2, & -f(1 + hh') \\ g(1 - hh'), & -f(1 + hh'), & f^2 + g^2 + h^2h'^2 \end{vmatrix}.$$

Nous ferons encore observer que, d'après cette formule, ou d'après la formule (33), la valeur de Δ dépend, uniquement, de f, de g, et du *produit* hh'.

17. Comme les équations (20), ... (23) ne sont pas incompatibles, et que le dénominateur Δ est nul, *les numérateurs* des valeurs des inconnues (*) *doivent*, de toute nécessité, *être nuls*. Par exemple, le numérateur de la valeur de m étant (après suppression du facteur l)

$$\mu = \begin{vmatrix} \cos\frac{D}{2}, & f, & o, & g \\ \cos\frac{A}{2}, & -h', & g, & o \\ \cos\frac{B}{2}, & g, & h, & f \\ \cos\frac{C}{2}, & o, & f, & h' \end{vmatrix},$$

il doit se réduire à zéro.

En effet,

$$\mu = \Delta_1 \cos\frac{D}{2} - \Delta_2 \cos\frac{A}{2} + \Delta_3 \cos\frac{B}{2} - \Delta_4 \cos\frac{C}{2}$$

$$= (f^2 - g^2 - hh')\left[h' \cos\frac{D}{2} + f \cos\frac{A}{2} - g \cos\frac{C}{2}\right] = 0 \text{ (**)}.$$

Les valeurs des inconnues m, n, p, q se présentant sous la forme $\frac{0}{0}$, on doit, pour démontrer le théorème énoncé (15), recourir à la Géométrie (***).

(*) Dans les formules de Cramer.

(**) $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f, & o, & g \\ -h', & g, & o \\ o, & f, & h' \end{vmatrix} = fgh' - h'fg = 0.$$

(***) J'ai essayé de résoudre, directement, les équations (20), (23) ; mais, à cause de la complication des calculs, cette tentative n'a pas réussi.

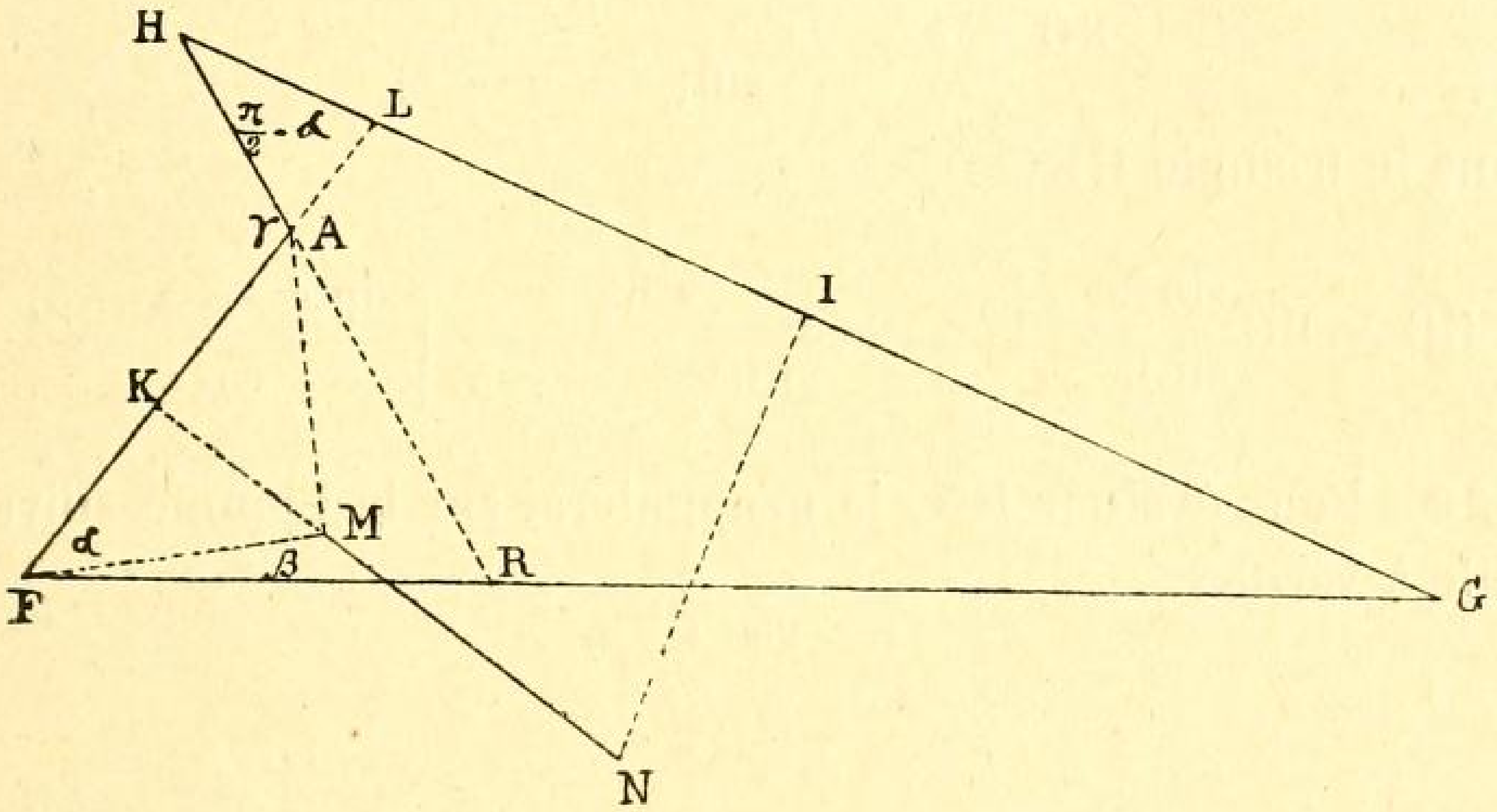
VII.

Propriétés auxiliaires.

18. Si l'on se reporte à la figure 2, on voit que le théorème, dont il s'agit, peut être énoncé en ces termes :

Soit un quadrilatère non convexe, FAHG, *dont la* BASE FG *est donnée, les autres côtés ayant des* DIRECTIONS *données* (*).

Fig. 3.



Au milieu de AF, *on élève la perpendiculaire* KMN ; *au milieu de* GH, *la perpendiculaire* IN. *On trace encore la droite* FM *faisant, avec* NMK, *un angle égal à* H.

Cela posé, MN = *const.* (**).

(*) C'est-à-dire qu'ils sont parallèles à des droites données.

(**) Autrement dit, *quand le point* A *parcourt* FK ; *le point* N *décrit une parallèle à* FM.

Depuis que cette Note est rédigée, un jeune Collègue et ami, M. G. de Longchamps, m'a fait observer que le théorème à démontrer est compris dans celui-ci :

Sur les côtés Ox, Oy *d'un angle donné, on prend* OA = u, OB = v; *on*

Soient :

$$FG = l, \quad FA = 2x, \quad AFM = \alpha, \quad MFG = \beta, \quad FAH = \gamma,$$

$$AHG = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Soit R l'intersection des droites AH, FG.

L'angle $HRG = \pi - (\gamma - \alpha - \beta)$; donc

$$FR = 2x \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma - \alpha - \beta)};$$

puis

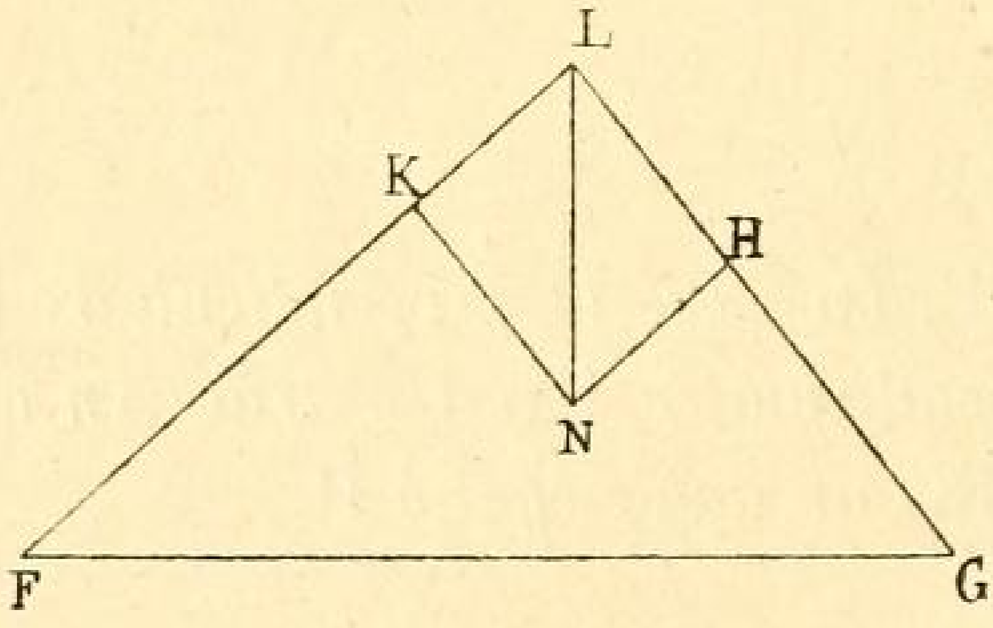
$$RG = l - 2x \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma - \alpha - \beta)}.$$

Dans le triangle HRG :

$$HG = RG \frac{\sin R}{\sin H} = \left[l - 2x \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma - \alpha - \beta)} \right] \frac{\sin(\gamma - \alpha - \beta)}{\cos\alpha}.$$

19. Pour évaluer KN, je m'appuierai sur le Lemme suivant, facile à vérifier.

Fig. 4.



élève AM *perpendiculaire à* Ox, BM *perpendiculaire à* Oy. *Cela posé, si les variables* u, v *satisfont à une relation ayant la forme*

$$au + bv + C = 0,$$

le point M *décrit une ligne droite.*

Cette remarque est très juste ; mais, dans la question actuelle, il s'agissait, principalement, d'établir la formule MN $=$ *const.* Le calcul précédent, bien qu'un peu long, n'est donc peut-être pas inutile.

Sur les côtés FL, GL *d'un triangle* FGL, *on prend* $FK = f$, $GI = g$; *puis on trace les perpendiculaires* KN, IN *à ces côtés. Les distances* KN, IN *sont données par les formules :*

$$KN = \frac{1}{\sin L}[f\cos L + l\cos G - g],$$

$$IN = \frac{1}{\sin L}[g\cos L + l\cos F - f] \ (*).$$

Dans le cas particulier considéré,

$$f = x, \qquad g = \frac{1}{2}\left[l - 2x\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma - \alpha - \beta)}\right]\frac{\sin(\gamma - \alpha - \beta)}{\cos\alpha}.$$

En outre, AL étant le prolongement de FA :

$$L = FLG = \frac{3}{2}\pi - \alpha - \gamma,$$

$$\sin L = -\cos(\alpha + \gamma), \qquad \cos L = -\sin(\alpha + \gamma),$$

$$G = -\frac{\pi}{2} + (\gamma - \beta), \quad \sin G = -\cos(\gamma - \beta), \quad \cos G = \sin(\gamma - \beta).$$

Nous avons donc

$$KN = \frac{1}{\cos(\alpha + \gamma)}\left\{x\sin(\alpha + \gamma) - l\sin(\gamma - \beta) + \frac{1}{2}\left[l - 2x\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma - \alpha - \beta)}\right]\frac{\sin(\gamma - \alpha - \beta)}{\cos\alpha}\right\}.$$

(*) Il en résulte

$$\overline{LN}^2 = \frac{1}{\sin^2 L}[f^2 + g^2 + l^2 - 2gl\cos G - 2fl\cos F - 2fg\cos L];$$

puis

$$\overline{KI}^2 = f^2 + g^2 + l^2 - 2gl\cos G - 2fl\cos F - 2fg\cos L.$$

Par conséquent, si l'on conçoit un angle trièdre O, ayant pour faces F, G, L, et que l'on construise un point M dont les coordonnées soient f, g, l, on aura

$$OM = KI.$$

Il est visible que $KM = x \operatorname{tg} \alpha$. Par conséquent,

$$MN = \frac{1}{2} l \frac{\sin(\gamma - \alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos(\alpha + \gamma)} - l \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos(\alpha + \gamma)} + Kx, \qquad (34)$$

en posant

$$K = \frac{1}{\cos(\alpha + \gamma)} \left[\sin(\alpha + \gamma) - \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha} \right] - \operatorname{tg}\alpha.$$

Or,

$$K = \frac{1}{\cos\alpha\cos(\alpha+\gamma)} \left[\sin(\alpha+\gamma)\cos\alpha - \sin\gamma - \sin\alpha\cos(\alpha+\gamma) \right] = 0;$$

donc la formule (34) se réduit à

$$MN = \frac{l}{2\cos\alpha\cos(\alpha+\gamma)} \left[\cos(\gamma - \alpha - \beta) - 2\sin(\gamma - \beta)\cos\alpha \right];$$

ou, plus simplement, à

$$MN = -\frac{l \sin(\gamma - \beta + \alpha)}{2 \cos\alpha\cos(\alpha + \gamma)} \ (^*). \qquad (35)$$

Cette quantité étant constante, *le théorème* que nous avions en vue *est démontré.*

20. Soit (fig. 5) ZNYX la parallèle à FM, menée par le point N, c'est-à-dire *le lieu de ce point.* Menons FZ parallèle à MN. Il est clair que, Y étant l'intersection de ZX avec FG :

$$FY = MN \frac{\sin M}{\sin Y} = -\frac{l \sin(\gamma - \beta + \alpha)}{2 \cos(\alpha + \gamma)\sin\beta},$$

$$GY = l + \frac{l \sin(\gamma - \beta - \alpha)}{2\cos(\alpha + \gamma)\sin\beta} = \frac{l \sin(\beta + \alpha + \gamma)}{2\cos(\alpha + \gamma)\sin\beta}.$$

(*) En reprenant les notations primitives, on a :

$$\cos\alpha = \sin M, \quad \cos(\alpha + \gamma) = -\sin N, \quad \sin(\gamma - \beta + \alpha) = \sin\frac{D}{2}.$$

Par suite,

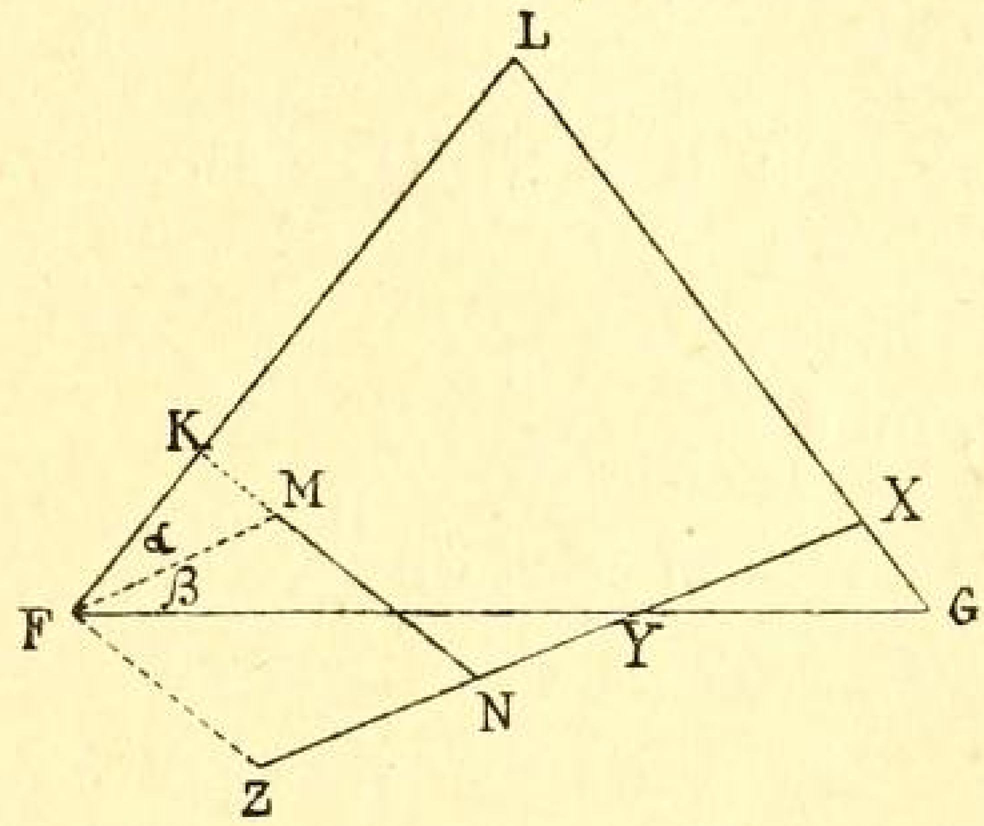
$$MN = \frac{l}{2} \frac{\sin\frac{D}{2}}{\sin M \sin N};$$

ce qui ne diffère pas de la formule (25).

On conclut, de ces deux expressions,

$$\frac{FY}{GY} = \frac{\sin(\beta - \alpha - \gamma)}{\sin(\beta + \alpha + \gamma)}. \qquad (36)$$

Fig. 5.



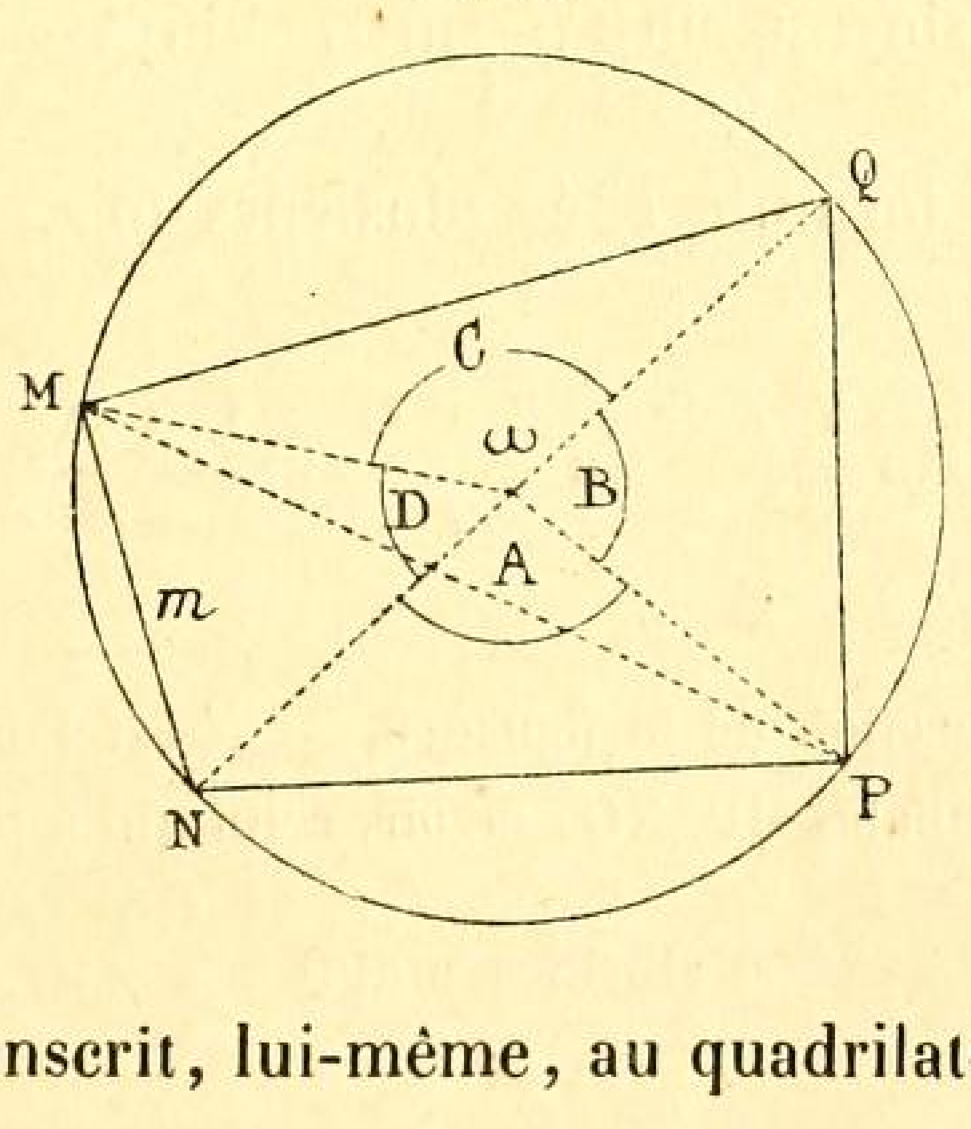
Ainsi, la droite ZX divise FG dans un rapport très simple.

VIII.

Relations entre les quadrilatères P, Q.

21. Soit ω la circonférence, inconnue, circonscrite au qua-

Fig. 6.



drilatère Q circonscrit, lui-même, au quadrilatère P. Formons, autour du centre ω, les angles A, B, C, D. Si le rayon ρ a été pris convenablement, le quadrilatère MNPQ sera celui que l'on cherchait.

En effet, d'après cette construction,

$$A = 2NMP, \quad B = 2QMP;$$

donc

$$A + B = 2NMQ = 2M;$$

etc.

22. Cela posé, on a

$$m = 2\rho \sin \frac{D}{2} \cdot$$

Et comme

$$m = \frac{l}{2} \frac{\sin \frac{D}{2}}{\sin M \sin N}, \tag{25}$$

nous avons ce résultat simple :

$$\rho = \frac{l}{4 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{B+C}{2}}. \tag{37}$$

23. Si S désigne l'aire du quadrilatère Q, il est visible que

$$S = \tfrac{1}{2}\rho^2 \left[\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A + B + C)\right].$$

Mais, d'après la formule citée plusieurs fois, la quantité entre parenthèses égale

$$4 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2} \text{ (*)}.$$

(*) D'après l'inspection de la figure 6, $\frac{A+C}{2}$ est l'un des deux angles formés par les diagonales MP, NQ; savoir, celui qui a pour mesure

$$\frac{\text{arc} MN + \text{arc} PQ}{2\rho}.$$

Donc, à cause de la relation (37) :

$$S = \frac{l^2}{8} \frac{\sin \frac{A + C}{2}}{\sin \frac{A + B}{2} \sin \frac{B + C}{2}}. \tag{38}$$

Ainsi, *le rayon et l'aire du quadrilatère* Q *dépendent, fort simplement, des éléments du quadrilatère* P.

IX.

PROBLÈME. — *Parmi tous les quadrilatères* P, *de périmètre minimum, inscrits à un quadrilatère* Q (*), *quel est le plus grand en surface?*

24. Les équations (25) et (26) peuvent être écrites ainsi :

$$\frac{\sin \frac{A}{2}}{n} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{p} = \frac{\sin \frac{C}{2}}{q} = \frac{\sin \frac{D}{2}}{m} = \frac{2}{l} \sin M \sin N.$$

Donc, *si le quadrilatère* Q *est donné, les angles du quadrilatère* P *sont connus* (**).

Si l'on désigne par u l'aire de P, on a

$$2u = ad \sin A + bc \sin C, \tag{39}$$

$$2u = ab \sin B + cd \sin D. \tag{40}$$

Soient a', b', c', d' les dérivées de a, b, c, d, relatives à une variable indépendante t. La condition du maximum, appliquée à l'équation (39), donne

$$(ad' + da') \sin A + (bc' + cb') \sin C = 0. \tag{41}$$

(*) Toujours supposé inscriptible à une circonférence.

(**) Cette remarque préliminaire est importante.

Mais, par les équations (3), (4), (5) :

$$a' \sin N \cos \frac{A}{2} = - b' \sin M \cos \frac{C}{2},$$

$$b' \sin M \cos \frac{B}{2} = - c' \sin N \cos \frac{D}{2},$$

$$c' \sin N \cos \frac{C}{2} = - d' \sin M \cos \frac{A}{2};$$

puis :

$$\left.\begin{aligned} b' = - a' \frac{\sin N \cos \frac{A}{2}}{\sin M \cos \frac{C}{2}}, \quad c' = a' \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2}}, \\ d' = - a' \frac{\sin N \cos \frac{B}{2}}{\sin M \cos \frac{D}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Donc l'équation (41) devient, après quelques réductions,

$$\left.\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} \left[- a \sin N \cos \frac{B}{2} + d \sin M \cos \frac{D}{2} \right] \\ + \sin \frac{C}{2} \left[b \sin M \cos \frac{B}{2} - c \sin N \cos \frac{D}{2} \right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

L'équation (40) donnerait, semblablement,

$$\left.\begin{aligned} \sin \frac{B}{2} \left[- b \sin M \cos \frac{C}{2} + a \sin N \cos \frac{A}{2} \right] \\ + \sin \frac{D}{2} \left[c \sin N \cos \frac{C}{2} - d \sin M \cos \frac{A}{2} \right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Combinant, par soustraction, (43) et (44), on a

$$- a \sin N \sin \frac{A+B}{2} + b \sin M \sin \frac{B+C}{2}$$

$$- c \sin N \sin \frac{C+D}{2} + d \sin M \sin \frac{D+A}{2} = 0,$$

ou

$$a + c = b + d = \tfrac{1}{2} l. \tag{45}$$

Ainsi, *le quadrilatère cherché est circonscriptible à une circonférence.*

25. Nous avons trouvé l'équation

$$\sin M\left[m\cos\frac{B}{2} - n\cos\frac{C}{2}\right] = a\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - c\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}, \tag{7}$$

dans laquelle :

$$m = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{D}{2}}{2\sin M\sin N}, \quad n = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{A}{2}}{2\sin M\sin N}.$$

Donc, au lieu de l'équation (7) :

$$\frac{l}{2}\left[\sin\frac{D}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\right] = \sin N\left[a\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - c\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}\right]. \tag{46}$$

Le multiplicateur de $\frac{l}{2}$ est

$$\frac{1}{2}\left[\sin\frac{D+B}{2} + \sin\frac{D-B}{2} - \sin\frac{A+C}{2} - \sin\frac{A-C}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{D-B}{2} - \sin\frac{A-C}{2}\right] = \sin\frac{D+C-B-A}{4}\cos\frac{A+D-B-C}{4}$$

$$= \cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \cos M\sin N.$$

L'équation (46) devient

$$\frac{l}{2}\cos M = a\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - c\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}. \tag{47}$$

On tire, des équations (45), (47) :

$$a = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin N\sin\frac{A+C}{2}}, \quad c = \frac{l}{2}\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin N\sin\frac{A+C}{2}}; \tag{48}$$

après quoi une simple permutation donne

$$b = \frac{l}{2}\,\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin M \sin\frac{A+C}{2}}, \qquad d = \frac{l}{2}\,\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin M \sin\frac{A+C}{2}}. \tag{49}$$

26. *Remarque.* — Les valeurs (48) devant vérifier les équations (45), (47), il s'ensuit que, *dans tout quadrilatère convexe :*

1° $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} = \sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2};$$

2° $$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} - \cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$
$$= \cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{A+C}{2}.$$

27. A cause de

$$ad = \frac{l^2}{4}\,\frac{\sin\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin M \sin N \sin^2\frac{A+C}{2}}, \qquad bc = \frac{l^2}{4}\,\frac{\sin^2\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin M \sin N \sin^2\frac{A+C}{2}},$$

la formule

$$2u = ad\sin A + bc\sin C \tag{39}$$

devient

$$u = \frac{l^2}{4}\,\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin M \sin N \sin^2\frac{A+C}{2}}\left[\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\right],$$

ou

$$u = \frac{l^2}{4}\,\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}}. \tag{50}$$

Tel est le *maximum des aires des quadrilatères* P.

28. Le rayon r, du cercle inscrit au quadrilatère P, est donné par la formule

$$r = \frac{2u}{l}.$$

Ainsi

$$r = \frac{l}{2} \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}}. \tag{51}$$

Mais cette expression peut être transformée.

En premier lieu,

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} = \frac{mnpq}{16\rho^4}.$$

D'autre part,

$$\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \sin M \sin N = \frac{l}{4\rho}. \tag{37}$$

Enfin,

$$\sin\frac{A+C}{2} = \frac{1}{4\rho^2}\left[n\sqrt{4\rho^2 - q^2} + q\sqrt{4\rho^2 - n^2}\right]. \tag{52}$$

Par conséquent,

$$r = \frac{mnpq}{2\rho\left[n\sqrt{4\rho^2 - q^2} + q\sqrt{4\rho^2 - n^2}\right]}. \tag{53}$$

29. *Remarque.* — Un changement de lettres donne

$$n\sqrt{4\rho^2 - q^2} + q\sqrt{4\rho^2 - n^2} = m\sqrt{4\rho^2 - p^2} + p\sqrt{4\rho^2 - m^2};$$

puis ce théorème, qu'il est facile de vérifier :

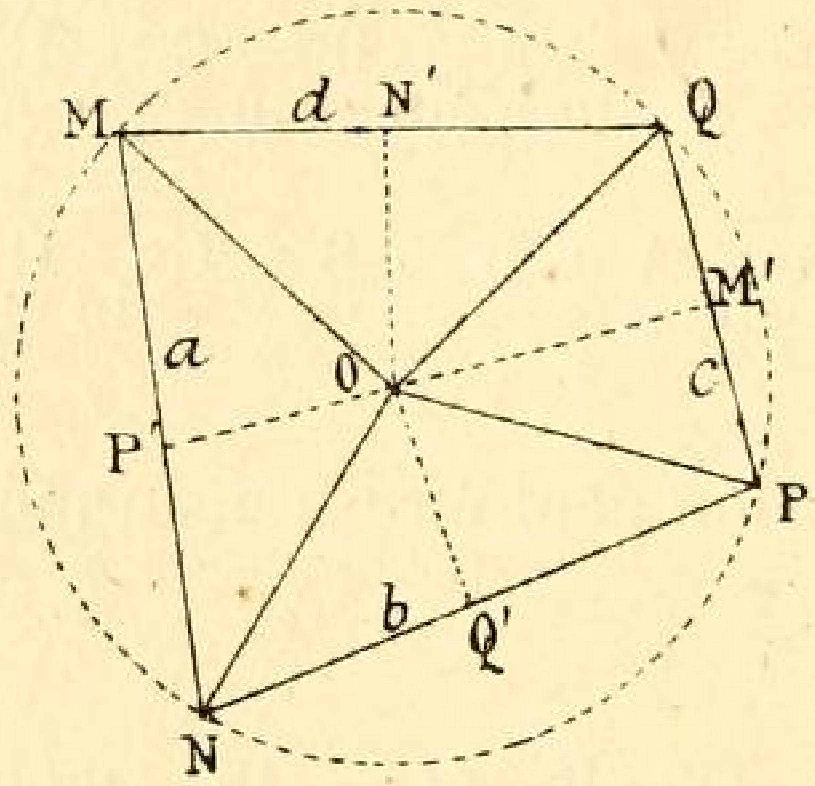
Dans tout quadrilatère inscrit, MNPQ, *dont les apothèmes sont* OM′, ON′, OP′, OQ′, *on a*

$$MN.OM' + PQ.OP' = NP.OM' + MQ.OQ';$$

ou bien :

Dans tout quadrilatère inscrit, la somme des rectangles formés *par un côté et l'apothème opposé, est constante, si l'on prend, dans chaque somme, deux côtés opposés.*

Fig. 7.



30. *Propriétés numériques.* — Changeant de notation, appelons a, b, c, d les côtés successifs d'un quadrilatère inscriptible, et R le rayon du cercle. En posant

$$N = (ab + cd)(ac + bd)(ad + bc), \tag{54}$$

$$\Delta = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d), \tag{55}$$

nous avons, par une formule connue,

$$R^2 = \frac{N}{\Delta}. \tag{56}$$

Il n'est pas difficile d'établir ce théorème, assez curieux :

A, B, C, D *étant des quantités rationnelles, on a*

$$\left.\begin{array}{c} 4R^2 - a^2 = \dfrac{A^2}{\Delta}, \quad 4R^2 - b^2 = \dfrac{B^2}{\Delta}, \quad 4R^2 - c^2 = \dfrac{C^2}{\Delta}, \\ 4R^2 - d^2 = \dfrac{D^2}{\Delta}; \end{array}\right\} \tag{57}$$

ou, ce qui est équivalent :

$$4N - a^2\Delta = A^2,\quad 4N - b^2\Delta = B^2,\quad 4N - c^2\Delta = C^2,\quad 4N - d^2\Delta = D^2. \tag{58}$$

Considérons, par exemple, la dernière égalité.

D'après la formule (54),

$$N = abcd^3 + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2)d^2 + abc(a^2 + b^2 + c^2)d + a^2b^2c^2;$$

et, par la formule (55) :

$$\Delta = d^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)d^2 - 8abcd + (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2.$$

Conséquemment, après quelques réductions,

$$4N - d^2\Delta = d^6 - 2(a^2 + b^2 + c^2)d^4 - 4abcd^3 + (a^2 + b^2 + c^2)^2d^2 + 4abc(a^2 + b^2 + c^2)d + 4a^2b^2c^2,$$

ou

$$4N - d^2\Delta = \left[d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc\right]^2. \tag{59}$$

Ainsi

$$\pm D = d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc \text{ (*)}. \tag{60}$$

31. *Remarques.* — I. Posons

$$N_1 = (ab + cx)(ac + bx)(bc + ax),$$

$$\Delta_1 = (-a + b + c + x)(a - b + c + x)(a + b - c + x)(a + b + c - x).$$

Alors, par le dernier calcul,

$$4N_1 - \Delta_1x^2 = \left[x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc\right]^2 = X^2. \tag{61}$$

Le polynôme X est celui que l'on rencontre dans la solution d'un problème de Newton, et dans un problème relatif à l'ellipsoïde (**).

(*) Si $d = 0$, le second membre est négatif; il s'annule lorsque $d = 2R$ (voir la note suivante) Donc, si l'on veut que D soit positif, on doit attribuer, au premier membre, le signe *inférieur*.

(**) *Notes* XI et XII. D'ailleurs, si $d = 2R = x$, le triangle ABC est *inscrit à un demi-cercle :* on retombe sur le problème de Newton. L'équation de ce problème est donc

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0,$$

comme nous l'avons rappelé dans la *Note* XI.

II. Si, dans la relation

$$n\sqrt{4\rho^2 - q^2} + q\sqrt{4\rho^2 - n^2} = m\sqrt{4\rho^2 - p^2} + p\sqrt{4\rho^2 - m^2}, \quad (53)$$

on fait :

$$\sqrt{4\rho^2 - q^2} = \pm\frac{q^3 - (m^2 + n^2 + p^2)q - 2mnp}{\sqrt{\Delta_2}},$$

$$\sqrt{4\rho^2 - n^2} = \pm\frac{n^3 - (m^2 + p^2 + q^2)n - 2mpq}{\sqrt{\Delta_2}},$$

etc., elle devient *identique;* ce qui devait être.

32. *Suite.* — Dans la formule

$$r = \frac{mnpq}{2\rho\left[n\sqrt{4\rho^2 - q^2} + q\sqrt{4\rho^2 - n^2}\right]}, \quad (52)$$

substituons les valeurs précédentes, en supposant, comme nous venons de le faire,

$$\Delta_2 = (-m+n+p+q)(m-n+p+q)(m+n-p+q)(m+n+p+q). \quad (62)$$

Un calcul facile donne

$$r = \frac{mnpq\sqrt{\Delta_2}}{4\rho(mn + pq)(mq + np)}.$$

Et comme

$$\rho = \sqrt{\frac{N_2}{\Delta_2}}, \quad (56)$$

il vient, finalement,

$$r = \frac{mnpq\Delta_2}{4(mn + pq)(mq + np)\sqrt{N_2}}. \quad (63)$$

33. *Remarque.* — On a, entre le rayon r du cercle *inscrit* au polygone P, et le rayon ρ du cercle *circonscrit* au polygone Q, cette relation assez simple :

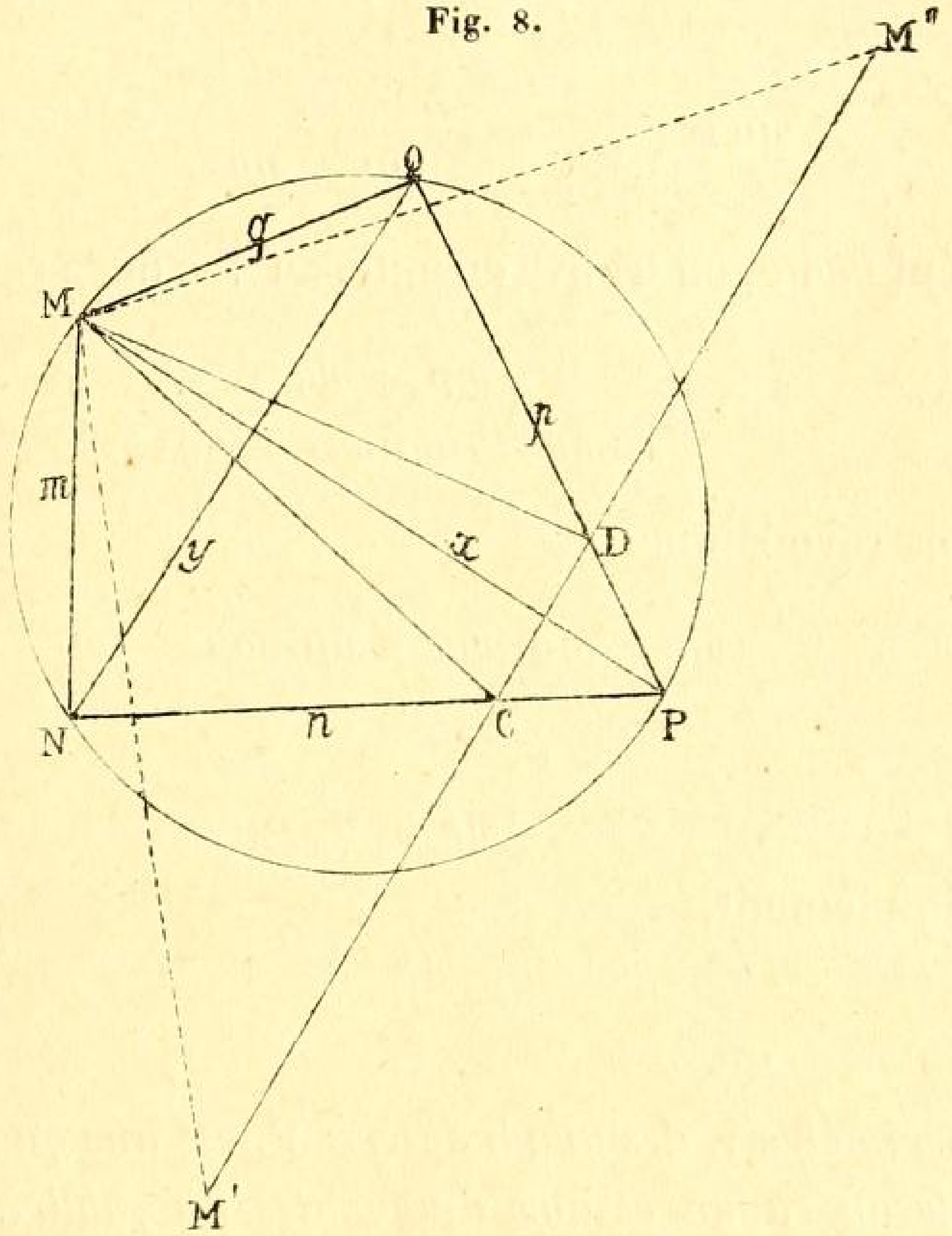
$$r\rho = \frac{mnpq\sqrt{\Delta_2}}{4(mn + pq)(mq + np)}. \quad (64)$$

X.

Quelques réductions.

84. *Valeur de* l. — Afin de simplifier les relations (53) et suivantes, nous allons exprimer le périmètre du quadrilatère P, en fonction des éléments du quadrilatère inscriptible Q.

Fig. 8.



Supposons $a = 0$. Alors P se réduit au triangle MCD. La construction indiquée (*) donne

$$MM' = 2m \sin N, \qquad MM'' = 2q \sin N,$$

$$\overline{M'M''}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{MM''}^2 + 2MM'.MM'' \cos P;$$

donc

$$l^2 = 4 \sin^2 N (m^2 + q^2 - 2mq \cos M). \qquad (65)$$

Soient $MP = x$, $NQ = y$: nous avons

$$x^2 = \frac{(mp + nq)(mq + np)}{mn + pq}, \qquad y^2 = \frac{(mp + nq)(mn + pq)}{mq + np}. \qquad (66)$$

(*) *Problèmes et Théorèmes*, p. 21.

D'autre part, la considération du quadrilatère MNPQ donne ces valeurs connues :

$$\cos M = \frac{m^2 + q^2 - n^2 - p^2}{2(mq + np)}, \tag{67}$$

$$\sin M = \frac{y}{2\rho} = \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2(mq + np)}, \tag{68}$$

$$\sin N = \frac{x}{2\rho} = \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2(mn + pq)}. \tag{69}$$

Par un calcul facile, on trouve ensuite, au lieu de la relation (65) :

$$l^2 = \Delta_2 \frac{mp + nq}{(mq + np)(mn + pq)}. \tag{70}$$

35. Nous savons que

$$\rho^2 = \frac{(mp + nq)(mq + np)(mn + pq)}{\Delta_2}. \tag{56}$$

Donc

$$l^2\rho^2 = (mp + nq)^2;$$

ou, plus simplement,

$$l = \frac{xy}{\rho}. \tag{71}$$

Ainsi, *le périmètre* l, *des quadrilatères* P, *est une quatrième proportionnelle au rayon et aux diagonales du quadrilatère* Q (*).

36. *Expression d'un cosinus.* — Soient, dans la figure 3 :

$$\mathrm{MON} = \alpha, \quad \mathrm{QOP} = \gamma.$$

Il est visible que

$$\cos\frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{1}{4R^2}\left[\sqrt{(4R^2 - a^2)(4R^2 - c^2)} - ac\right];$$

(*) Ce théorème ne diffère pas de la propriété démontrée dans la *Note* CCII (première *Remarque*). L'*énoncé* doit être rectifié ainsi : *Chacune de ces quatre distances est une quatrième proportionnelle au diamètre du cercle circonscrit et aux diagonales du quadrilatère.*

ou, avec les notations du paragraphe (**29**) :

$$\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{AC-ac\Delta}{4N},\tag{72}$$

valeur rationnelle.

Nous avons trouvé :

$$-A=a^3-(b^2+c^2+d^2)a-2bcd,\quad -C=c^3-(a^2+b^2+d^2)c-2abd.$$

De plus, comme on peut le vérifier,

$$\Delta=-\sum a^4+2\sum a^2b^2+8abcd.\tag{73}$$

De là résultent ces deux formules :

$$AC-ac\,\Delta=2(b^2+d^2-a^2-c^2)(ab+cd)(ad+bc),\tag{74}$$

$$\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{b^2+d^2-a^2-c^2}{ac+bd};\tag{75}$$

puis celle-ci :

$$\cos\frac{A+C}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{n^2+q^2-m^2-p^2}{mp+nq}.\tag{76}$$

37. *Remarques.* — I. On a vu (**23**, note), que $\frac{A+C}{2}$ est l'angle des diagonales x, y.

Donc, par analogie avec les formules (68), (69) :

$$\sin\frac{A+C}{2}=\frac{\sqrt{\Delta_2}}{2(mp+pq)}.\tag{77}$$

Cette expression, beaucoup plus simple que celle qui a été donnée ci-dessus (52), s'accorde avec la formule (76). Il en résulte, en effet, l'*identité*

$$\left.\begin{aligned}&4(mp+nq)^2=(n^2+q^2-m^2-p^2)^2\\&+(-m+n+p+q)(m-n+p+q)(m+n-p+q)(m+n+p-q).\end{aligned}\right\}\tag{78}$$

II. Si $a^2+c^2=b^2+d^2$, *les angles* α, γ *sont supplémentaires :* cette condition est nécessaire et suffisante (*). Quand il en est ainsi,

$$4R^2=\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{ac+bd}=a^2+c^2.\tag{79}$$

(*) Au moyen du raisonnement dont nous avons fait usage dans la *Note* CCLXV, on rend la proposition évidente, sans calcul.

CCLXXVII. — Lettre à M. Battaglini (*).

Monsieur le Rédacteur,

J'ai reçu, il y a quelques jours, par l'entremise de mon Collègue Mansion, la dernière livraison du *Giornale di Matematiche*. A la page 155, on lit ceci :

« *La serie a termini positivi*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

» *è convergente, se tutti i suoi termini decrescono col crescere* » *di* n, *e se è inoltre, per* $n = \infty$, *lim* $nu_n = 0$.. ».

Autrement dit (si je comprends bien) :

« *La série à termes positifs*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

» *est convergente, si tous les termes décroissent quand* n *croît,* » *et si, en outre, pour* $n = \infty$, *lim* $nu_n = 0$ ».

Cette proposition, émise, il y a soixante ans, par L. Olivier (*Journal de Crelle*, t. II, p. 34), *est fausse,* ainsi que l'a montré l'illustre Abel (**). Comme son devancier, votre Collaborateur pense que : *la série est convergente, si la somme*

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n}$$

tend vers zéro, quand n *augmente.* Or, cette hypothèse n'est pas admissible; car la série (***)

$$\frac{1}{2\,l2} + \frac{1}{3\,l3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\,l(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)\,l(2n+1)} + \cdots$$

(*) Publiée dans le *Giornale di Matematiche* (septembre 1887).

(**) *OEuvres d'Abel,* publiées par M. Holmboë (1re édition, t. I, p. 111).

(***) Considérée par Abel.

est *divergente,* et cependant

$$Lim\left[\frac{1}{(n+1)\,\mathcal{L}^p(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)\,\mathcal{L}^p(2n+1)}\right]=0.$$

Agréez, etc.

E. C.

Liège, 23 septembre 1887.

CCLXXVIII. — Lettre à M. Hermite.

Mon cher Monsieur Hermite,

En lisant, l'autre jour, le commencement de votre intéressante Note *Sur les valeurs asymptotiques,* je me disais : « Il me » semble que j'ai fait des recherches analogues à celles-ci ». Comme vous allez en juger, je ne me trompais pas.

I.

Hier, j'ai été à Liège; et, dans un vieux cahier, à la date du 11 avril 1870, j'ai trouvé ce qui suit :

« D'après une citation de l'auteur (*), Clausen a donné la » formule :

$$» \sum_1^\infty \frac{x^n}{1-x^n}=\sum_1^\infty \frac{1+x^n}{1-x^n}\,x^{(n^2)}\ (^{**}).$$

» La vérification est facile.

» Le second membre égale

$$\sum x^{(n^2)}\left[1+2x^n+2x^{2n}+2x^{3n}+\cdots\right]$$
$$=\sum x^{(n^2)}+2\sum x^{n^2+n}+2\sum x^{n^2+2n}+\cdots+2\sum x^{n^2+pn}+\cdots$$

(*) Curtze.

(**) Je crois que la formule de Clausen est, également, dans les *Fundamenta.*

» Soit A_N le coefficient de x^N, et soit $N = n^2 + pn$. On voit
» que $A_N = 2$ *fois le nombre des solutions de l'équation précé-*
» *dente, augmenté de* 1 *si* N *est un carré. Mais cette équation*
» *est* $N = n(n+p)$: *le nombre des solutions est celui des divi-*
» *seurs de* N ; ce qui fait retomber sur le point de départ. La
» formule de Clausen (formule bien remarquable) est donc
» démontrée ».

En lisant ce que je viens de souligner, on serait tenté de croire que j'ai voulu vous copier. Heureusement, les dates sont là !

II.

Parmi les centaines de résultats contenus dans mes *Recherches sur quelques produits indéfinis*, permettez-moi de vous rappeler ceux-ci :

$$\sum_1^\infty \frac{q^{3a-2}}{1-q^{4a-3}} = \sum_1^\infty \frac{q^b}{1-q^{4b-1}} \text{ (*) (p. 88)};$$

$$\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^n} = \sum_1^\infty (\alpha+1)\frac{q^n}{1-q^{2n}} \text{ (**)}.$$

Si l'on fait $n = di$ (i, *impair*), *le nombre des solutions de l'équation*

$$i_1^2 + i_2^2 + \cdots + i_8^2 = 8n,$$

est égal à la somme des cubes des diviseurs d, etc.

$$q^{-\frac{1}{4}}\frac{\omega}{\pi}\sqrt{k} = \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} q^n \text{ (***) (p. 116)}.$$

(*) Si l'on met cette identité sous la forme

$$\sum_1^\infty A_n q^n = \sum_1^\infty B_n q^n,$$

chacun des coefficients A_n, B_n *égale la moitié du nombre des diviseurs de* $4n - 1$.

(**) Le premier membre est la *série de Lambert*. Dans le second membre, $\alpha + 1$ *est le nombre des puissances de* 2 *qui divisent* n.

(***) ε_{4n+1} *est l'excès du nombre des diviseurs de* $4n+1$, *ayant la forme* $4\mu+1$, *sur le nombre de ceux qui ont la forme* $4\mu - 1$.

III. — *Sur une formule d'Eisenstein* (mai 1881).

Cette formule, qui donne une transformation de la série de Lambert, est

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{E}\left[\dfrac{z}{1-z}+\dfrac{z^2}{1-z^2}+\dfrac{z^3}{1-z^3}+\cdots\right]=\dfrac{z}{1-z}-2\dfrac{z^3}{(1-z)(1-z^2)} \\ +3\dfrac{z^6}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}-4\dfrac{z^{10}}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)}+\cdots(^*), \end{array}\right\} \quad (\mathrm{A})$$

$$\mathrm{E}=(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)\ldots=1-z-z^2+z^5+z^7-z^{12}-\cdots$$

On peut écrire autrement le second membre. En général,

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)\ldots(1-z^p)}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\mathrm{F}(n,p)\,z^n; \qquad (1)$$

$\mathrm{F}(n, p)$ est *le nombre des décompositions de* n, *en parties égales ou inégales, non supérieures à* p (*Recherches...*, p. 47). Donc

$$(-1)^{p-1}p\,\frac{z^{\frac{p(p+1)}{2}}}{(1-z)(1-z^2)\ldots(1-z^p)}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{p-1}p\,\mathrm{F}(n,p)\,z^{n+\frac{p(p+1)}{2}}. \quad (2)$$

Soit

$$\mathrm{N}=n+\frac{p(p+1)}{2},$$

ou

$$n=\mathrm{N}-\frac{p(p+1)}{2}.$$

Alors

$$\mathrm{F}(n,p)=\mathrm{F}\left[\mathrm{N}-\frac{p(p+1)}{2},\,p\right]$$

égale le nombre de manières de partager N *en* p *parties inégales* $=$ (N, p) (**).

(*) *Journal de Crelle*, t. XXVII.

(**) *Introduction à l'Analyse*, p. 245; *Recherches...*, p. 54.

Ainsi, le coefficient de z^N est

$$(N, 1) - 2(N, 2) + 3(N, 3) - \cdots \pm N(N, N).$$

Soit maintenant G(N) *le nombre des diviseurs de* N. Il est visible que, dans le premier membre de (A), le coefficient de z^N est

$$G(N) - G(N-1) - G(N-2) + G(N-5) + G(N-7) - G(N-12) - \cdots$$

On a donc cette relation entre deux fonctions numériques, bien différentes :

$$\left.\begin{array}{l}(N, 1) - 2(N, 2) + 3(N, 3) - \cdots \pm N(N, N)\\ = G(N) - G(N-1) - G(N-2) + G(N-5) + G(N-7) - \cdots \;(^*).\end{array}\right\} \text{(B)}$$

Application. — Soit $N = 19$. On doit trouver

$$\begin{aligned}&(19, 1) - 2(19, 2) + 3(19, 3) - 4(19, 4) + \cdots\\ &= G(19) - G(18) - G(17) + G(14) + G(12) - G(7) - G(5);\end{aligned}$$

ou (**)

$$1 - 2.9 + 3.21 - 4.18 + 5.5 = 2 - 6 - 2 + 4 + 6 - 2 - 3;$$

ce qui est exact.

IV.

Si j'avais sous les yeux les Mémoires de Liouville, je pourrais, peut-être, tirer quelques conséquences de cette égalité (B). En attendant, si $\varpi(N)$ représente chacun des deux membres, on a (sauf erreur de calculs) :

$$\begin{array}{lllll}\varpi(2) = 1, & \varpi(3) = -1, & \varpi(4) = -1, & \varpi(5) = -3, & \varpi(6) = 0,\\ \varpi(7) = -1, & \varpi(8) = 1, & \varpi(9) = 2, & \varpi(10) = 1, & \varpi(11) = 2,\\ \varpi(12) = 4, & \varpi(13) = 1, & \varpi(14) = -1, & \varpi(15) = 4, \ldots, & \varpi(33) = 0.\end{array}$$

Ces coefficients *semblent* osciller entre deux valeurs extrêmes. Qu'en pensez-vous?

(*) Est-elle connue?

(**) *Recherches...*, Table I.

V.

D'après votre obligeante indication, j'ai consulté le Mémoire de Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. V, p. 443). Notre illustre Maître dit :

« $$(x - x^3)\frac{d^2z}{dx^2} + (1 - 3x^2)\frac{dz}{dx} - xz = 0,$$

» ou plutôt l'équation plus simple

» (5) $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(1+x^2)^2}{4(x-x^3)^2}y,$$

» que l'on en déduit en posant

$$» \; z = \frac{y}{\sqrt{x - x^3}} ».$$

Rien de plus. Il ne fait pas observer que, si l'on prend

$$X = \sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi},$$

on a

$$\frac{X''}{X} = -\frac{1+3x^2}{4(1-x^2)x^2}.$$

Somme toute, mon équation

$$\frac{z''}{z} + \frac{1+3x^2}{4(1-x^2)x^2} = 0$$

est un peu plus simple que l'équation (5) ; et l'on en peut écrire, tout de suite, l'intégrale générale.

VI.

Aussitôt après vous avoir envoyé ma vieille formule :

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{1 + x^{2n+1} + \sqrt{1 + x^{4n+2}}} = a,$$

j'ai reconnu (ce qui n'était pas difficile) qu'on peut la généraliser ainsi :

Soit y *une fonction impaire de* x, *telle que la quantité*

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + y^2}}{y},$$

reste finie, quand x *varie entre* — a *et* + a. *Cela posé :*

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{1 + y + \sqrt{1 + y^2}} = a.$$

Voilà donc une infinité d'intégrales ayant même valeur. Je n'ai pas besoin d'ajouter que la proposition est *presque évidente.* A-t-elle été remarquée?

Je vous souhaite, mon cher Monsieur Hermite, la quiétude et la bonne santé dont jouit, à Spa,

Votre bien dévoué très *Ancien,*

E. C.

Spa, 27-28 juin 1886.

CCLXXIX. — Circonférences focales (*).

(*Janvier* 1878.)

I. Quand on identifie l'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (1)$$

avec

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (my + nx + l)^2,$$

on trouve, comme expressions des rayons vecteurs :

$$u = a + \frac{c}{a}x, \quad u' = a - \frac{c}{a}x;$$

puis les équations des deux directrices :

$$x = -\frac{a^2}{c}, \quad x = \frac{a^2}{c}.$$

Semblablement, l'équation (1), mise sous la forme

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = (my + nx + l)^2,$$

donne, non seulement l'équation des *circonférences focales* :

$$(x - a)^2 + y^2 = b^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2}\right) \; (^{**}); \qquad (2)$$

mais encore les équations

$$x = -\frac{a^2}{c^2}\alpha, \quad x = +\frac{a^2}{c^2}\alpha$$

de deux séries de droites, que l'on peut appeler *droites radicales*. Chacune de ces droites est la *corde de contact* (réelle ou imaginaire) commune à l'ellipse donnée et à une circonférence focale (***).

(*) A propos d'une *Note de M. Boset* (Bull. de l'Académie, juin 1887).

(**) *Loc. cit.*

(***) En effet, l'élimination de y^2, entre les équations (1), (2), conduit à

$$\left(\frac{c}{a}x - \frac{a}{c}\alpha\right)^2 = 0.$$

De plus, *la distance d'un point* M, *de la courbe, à la droite radicale, et la longueur de la tangente correspondante* MT, *sont dans un rapport constant* (*).

II. L'équation générale des courbes algébriques, susceptibles d'admettre des circonférences focales est, évidemment,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=\frac{P^2}{Q^2}; \tag{3}$$

P, Q étant des polynômes entiers (**). Par suite, si une courbe donnée admet de telles circonférences, son équation devra pouvoir être identifiée avec la relation (3).

III. *Application.* — Soit la *conchoïde* représentée par

$$x^2y^2=(b-y)^2(a^2-y^2).$$

Si l'on met cette équation sous la forme

$$x^2+(y-b)^2=a^2\frac{(y-b)^2}{y^2},$$

on voit que l'on peut prendre :

$$\alpha=0, \quad \beta=b, \quad P=a(y-b), \quad Q=y.$$

Donc *la conchoïde a un foyer,* comme l'a trouvé M. Boset.

IV. L'équation (3) permet de généraliser les propriétés des circonférences focales et des droites radicales, relatives aux coniques. En effet, M étant le premier membre de cette équation, soient S la courbe donnée, et L la ligne représentée par

$$P=0. \tag{4}$$

(*) Ce rapport égale celui qui existe entre les distances de M à la directrice et au foyer correspondant.

(**) Ces polynômes peuvent contenir α, β, R. Par exemple, dans le cas de l'ellipse, l'équation (3) est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-b^2\left(1-\frac{\alpha^2}{c^2}\right)=\left(\frac{a}{c}\alpha-\frac{c}{a}x\right)^2$$

(*Bulletin,* juin 1877.)

L'équation (3) est une conséquence de celle-ci et de

$$M = 0. \tag{5}$$

Donc : *l'intersection de chaque circonférence focale, avec la ligne radicale correspondante, appartient à la courbe donnée.*

CCLXXX. — Sur les nombres parfaits.

(Lettre à M. Mansion.)

Hier, seulement, j'ai pu prendre connaissance de l'intéressante Note de M. Sylvester, relative aux *Nombres parfaits* (*), *impairs.* Il me semble qu'elle peut être abrégée et simplifiée.

Soit

$$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda;$$

$a, b, c, \ldots$ étant *premiers, impairs,* et rangés par ordre de grandeur *croissante.* Si N est *parfait,* on doit avoir

$$\frac{a}{a-1}\,\frac{b}{b-1}\cdots\frac{l}{l-1} > 2 \text{ (**)}, \tag{1}$$

ou

$$\frac{a-1}{a}\,\frac{b-1}{b}\cdots\frac{l-1}{l} < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Soit $P(l)$ le premier membre de la seconde inégalité. La *Théorie des Nombres,* de Legendre, contient une Table des valeurs de $P(l)$, prolongée jusqu'à $l = 1229$ (***). Soit $Q(n)$ le produit de n facteurs, choisis parmi

$$\frac{a-1}{a},\ \frac{b-1}{b},\ldots,\ \frac{l-1}{l}.$$

(*) *Mathesis,* mars 1888.

(**) La relation (1), bien connue, a été employée par MM. Servais et Sylvester.

(***) Le produit $P(l)$ a pour limite zéro. (Voir, par exemple, les *Exercices d'Analyse numérique,* de Le Besgue, p. 138.)

Il est visible que :

1° Le minimum de Q(1) est

$$P(a) = \frac{a-1}{a} = \frac{2}{3};$$

2° Le minimum de Q(2) est

$$P(b) = \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15};$$

etc.

En effet, nous avons

$$1 - \frac{1}{a} < 1 - \frac{1}{b} < 1 - \frac{1}{c} < \cdots$$

Cela posé :

1° Si N est *composé d'un seul facteur premier* (*), la condition (2) se réduit à

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{2}.$$

Celle-ci n'est pas remplie; donc *aucun nombre parfait n'est composé d'un seul facteur premier;*

2° Si N est composé de *deux facteurs,* le minimum de Q(2) est

$$P(5) = \frac{8}{15} > \frac{1}{2};$$

donc *aucun nombre parfait n'est composé de deux facteurs premiers;*

etc.

Pour arriver à un résultat plus curieux, admettons ce Lemme, dû à M. Sylvester :

Aucun nombre parfait, impair, n'est divisible par 105. Alors,

$$\frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdots < \frac{1}{2},$$

(*) On fait abstraction des exposants.

ou

$$P(l) < \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7};$$

c'est-à-dire

$$P(l) < \frac{8}{35},$$

ou encore

$$P(l) < 0{,}228\,5\ldots$$

D'après la Table, cette condition est remplie à partir de $l = 127$.

En conséquence (et c'est par là que je termine, faute de temps) : *Si un nombre* N, *premier avec* 105, *est parfait, il est composé d'au moins vingt-six facteurs premiers, inégaux.*

4 mars 1888.

P. S. Le logarithme du produit

$$11 . 13 . 17 . 19 . 23 . 29 . 31 . 37 . 41 . 43 . 47 . 53 . 59 . 61 . 67 . 71 . 73 . 79 . 83 . 89 . 97 . 101 . 103 . 107 . 109 . 113$$

est compris entre 44 et 45. Donc *le plus petit Nombre parfait, impair* (s'il existe), *contient quarante-cinq chiffres.*

CCLXXXI. — Lettre à M. Arthur Cayley.

Monsieur,

Un hasard heureux (je me trouve à Paris en ce moment) me permet de lire l'intéressante Note que vous venez de faire paraître dans les *C. R.* (3 avril 1888). Je vous remercie, vivement, de votre appréciation de mon vieux théorème. La démonstration contenue dans le *Journal de Liouville* (t. VII), *si elle est exacte*, est beaucoup trop longue. Mais, vous le savez : *les choses simples arrivent toujours tard.* Aussi, c'est seulement vers 1866, que, laissant de côté mes anciens calculs, j'ai trouvé une démonstration géométrique, contenue en quelques lignes. Cette démonstration qui, me semble-t-il, diffère peu de la vôtre, a été imprimée dans mes *Mélanges mathématiques* (1re édition), puis dans la seconde édition du même ouvrage (t. I, p. 62).

Agréez, Monsieur, l'expression de mes meilleurs sentiments.

E. C.

Paris, 10 avril 1888.

Vous rappelez-vous que je vous ai fait une petite visite en 1851 ? Nous étions jeunes, alors!

CCLXXXII. — Sur la courbure des lignes.

(*Mars* 1876.)

I. Problème. — *Trouver la relation qui existe entre les courbures des trois projections orthogonales d'une ligne* L.

Soient MA, MB les projections de L, sur les plans zMy, zMx, perpendiculaires entre eux (*).

Soit, *dans le plan* zMx,

$$z = f(x), \tag{1}$$

l'équation de MB.

De même, *dans le plan* zMy, soit

$$z = \varphi(x), \tag{2}$$

l'équation de MA.

L'ensemble de ces équations représente L, dont la projection, sur le plan xMy, est représentée, elle-même, par

$$f(x) = \varphi(y). \tag{3}$$

Si l'on prend x comme variable indépendante, on tire, de cette équation (3) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'}{\varphi'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f''\varphi'^2 - \varphi''f'^2}{\varphi'^3}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Par conséquent, A, B, C désignant les rayons de courbure des trois projections :

$$A=\frac{(1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi''},\quad B=\frac{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''},\quad C=\frac{(f'^2+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''\varphi'^2-\varphi''f'^2}.\tag{4}$$

Si a, b, c sont les cosinus directifs de la tangente à L :

$$\frac{c}{a}=f',\quad \frac{c}{b}=\varphi';\tag{5}$$

donc, α, β, γ étant les angles correspondants :

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{\sin^3\alpha}{\varphi''\cos^3\beta},\quad B=\frac{\sin^3\beta}{f''\cos^3\alpha},\\ C&=\frac{\sin^3\gamma\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta(f''\cos^2\alpha-\varphi''\cos^2\beta)}\ (^*).\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Éliminant f'', φ'', on trouve cette *relation entre les courbures des trois projections :*

$$\frac{\cos\beta\sin^3\beta}{B}-\frac{\cos\alpha\sin^3\alpha}{A}=\frac{\cos\gamma\sin^3\gamma}{C}.\tag{A}$$

II. *Relation entre quatre courbures.* — La formule connue :

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{ds^6}\sum(dyd^2z-dzd^2y)^2\tag{7}$$

devient d'abord, à cause de

$$dy=\frac{f'}{\varphi'}dx,\quad dz=f'dx,\quad d^2x=0,\ \text{etc.}:$$

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\varphi'^6}{(f'^2+\varphi'^2+f'^2\varphi'^2)^3}\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right],$$

(*) On peut abréger ce calcul, mais en le rendant *moins clair.*

puis

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{[f'^2+\varphi'^2+f'^2\varphi'^2]^3}\left[(f''\varphi'^2-\varphi''f'^2)^2+f''^2\varphi'^6+\varphi''^2f'^6\right]. \quad (8)$$

Or :

$$f'^2+\varphi'^2+f'^2\varphi'^2=\left(\frac{c}{ab}\right)^2, \quad \varphi''^2f'^6=\frac{c^6(b^2+c^2)^3}{a^6b^6A^2},$$

$$f''^2\varphi'^6=\frac{c^6(a^2+c^2)^3}{a^6b^6B^2}, \quad (f''\varphi'^2-\varphi''f'^2)^2=\frac{c^6(a^2+b^2)^3}{a^6b^6C^2}.$$

Donc

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{(b^2+c^2)^3}{A^2}+\frac{(a^2+c^2)^3}{B^2}+\frac{(a^2+b^2)^3}{C^2},$$

ou

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\sin^6\alpha}{A^2}+\frac{\sin^6\beta}{B^2}+\frac{\sin^6\gamma}{C^2}. \quad (B)$$

III. *Remarque.* — Si $\gamma=\frac{\pi}{2}$; les relations (A), (B) deviennent :

$$\frac{\sin^2\alpha}{A}=\frac{\sin^2\beta}{B}, \quad \frac{1}{\rho^2}=\frac{\sin^6\alpha}{A^2}+\frac{\sin^6\beta}{B^2}.$$

On conclut, de celles-ci :

$$\rho=A+B. \quad (C)$$

Ainsi : *le rayon de courbure, d'une ligne quelconque, est égal à la somme des rayons de courbure des projections de cette ligne sur deux plans parallèles au premier rayon, et perpendiculaires entre eux* (*).

(*) Charles Dupin, *Développements de Géométrie*, p. 88.

CCLXXXIII. — Théorèmes d'Arithmétique.

(*Mai* 1887.)

I. *Le triple de la somme de quatre carrés est toujours la somme de quatre carrés.*

Ce théorème résulte, immédiatement, de l'identité

$$\left.\begin{aligned} 3(a^2+b^2+c^2+d^2) = (a+b-c)^2 + (a+d-b)^2 \\ + (a+c-d)^2 + (b+c+d)^2. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

On peut supposer que les *nombres* a, b, c, d soient rangés par ordre de *grandeur décroissante.* Cela étant, on a

$$a+b>c, \quad a+d>b, \quad a+c>d.$$

Donc, dans le second membre de l'identité, *aucun terme n'est nul.*

II. *Le quintuple de la somme de quatre carrés est toujours la somme de quatre carrés.*

On a, identiquement,

$$5(a^2+b^2+c^2+d^2) = (2a+b)^2+(a-2b)^2+(2c+d)^2+(c-2d)^2. \quad (2)$$

Et comme on peut supposer

$$a \gtreqless b \gtreqless c \gtreqless d,$$

aucun des binômes n'est nul.

III. *Le produit de la somme de quatre carrés, par la somme de deux carrés inégaux, est toujours la somme de quatre carrés.*

Dans l'identité connue

$$\left.\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2+d^2)(f^2+g^2) = (fa+gb)^2 + (ga-fb)^2 \\ + (fc+gd)^2 + (gc-fd)^2, \end{aligned}\right\} \quad (3$$

je supposé

$$a \gtreqless b, \quad c \gtreqless d, \quad g < f.$$

Aucun des binômes n'est nul ; etc.

IV. Corollaire. — *Si* p *est un nombre premier, ayant la forme* $4\mu + 1$, *le produit d'une somme de quatre carrés, par* p, *est toujours la somme de quatre carrés.*

Addition. — (*Mai* 1888.)

V. *Le produit d'une somme de quatre carrés, par un nombre impair, est la somme de quatre carrés* (*).

VI. *Tout nombre* $8n + 4$ *est la somme de quatre carrés impairs, dont deux, au moins, sont égaux* (**).

(*) Théorème *empirique*.

(**) La première partie est connue (*Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 99). Quant à la seconde, elle *semble* résulter des décompositions suivantes :

$4 = 1 + 1 + 1 + 1$,	$12 = 9 + 1 + 1 + 1$,	$20 = 9 + 9 + 1 + 1$,
$28 = 25 + 1 + 1 + 1$,	$36 = 25 + 9 + 1 + 1$,	$44 = 25 + 9 + 9 + 1$,
$52 = 25 + 25 + 1 + 1$,	$60 = 25 + 25 + 9 + 1$,	$68 = 49 + 9 + 9 + 1$,
$76 = 49 + 25 + 1 + 1$,	$84 = 81 + 1 + 1 + 1$,	$92 = 81 + 9 + 1 + 1$,
$00 = 81 + 9 + 9 + 1$,	$108 = 81 + 25 + 1 + 1$,	. . . .

CCLXXXIV. — Sur les lignes géodésiques des surfaces de révolution (*).

(*Mars* 1887.)

I.

Remarques sur la Note.

1. Le curieux théorème de M. Jamet résulte de l'équation

$$u^2 d\omega = k ds \text{ (**)}, \qquad (1)$$

laquelle résulte, elle-même, d'une combinaison convenable des relations

$$\frac{ds}{dt} = \text{const}, \qquad u^2 \frac{d\omega}{dt} = \text{const}. \qquad (2)$$

La première exprime que *toute ligne géodésique est la trajectoire d'un point matériel animé d'une vitesse constante* (***).

2. D'après la seconde des équations (2) : *Soit une ligne géodésique, tracée sur une surface de révolution. Si l'on projette cette ligne sur un plan perpendiculaire à l'axe, le principe des aires a lieu pour la projection;* ou, ce qui est équivalent :

Soit une surface S, *dont toutes les normales rencontrent une droite fixe,* D ; *et soit* C *une ligne géodésique de* S. *Si l'on*

(*) *Bulletin de l'Académie de Belgique* (1887). A l'occasion d'une Note de M. *Jamet* (*Bull.,* avril 1887).

(**) Je modifie un peu la notation adoptée par l'honorable Auteur.

(***) Propriété bien connue. Dans son premier Mémoire sur les lignes géodésiques, Liouville s'énonçait ainsi : « Je prends pour point de départ » ce théorème connu (ou, si l'on veut, cette définition), que la ligne géo- » désique pour une surface est celle que décrirait, à la suite d'une impul- » sion quelconque, un mobile assujetti à demeurer sur la surface et dont » le mouvement ne serait altéré par aucune force accélératrice. » (*Journal de Mathématiques,* t. IX, p. 401.)

projette C *sur un plan perpendiculaire à* D, *le principe des aires a lieu pour la projection de* C.

En effet, la condition

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q}, \tag{3}$$

déduite des équations

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0,$$

prouve que S *est une surface de révolution* (*).

3. Naturellement, M. Jamet a formé les équations (2) en appliquant le *principe des forces vives* et la *théorie des moments* (**). Cette méthode, employée par Liouville (***), est ingénieuse et simple; mais elle a un défaut : elle introduit des éléments étrangers à la question. Or, il est très facile de former, directement, l'égalité (1).

4. En effet, l'équation des lignes géodésiques :

$$\frac{d.\frac{dx}{ds}}{p} = \frac{d.\frac{dy}{ds}}{q} \tag{4}$$

devient d'abord, dans le cas où

$$z = \varphi(x^2 + y^2) = f(u): \tag{5}$$

$$ds(yd^2x - xd^2y) - d^2s(ydx - xdy) = 0,$$

(*) Houël, *Calcul infinitésimal,* t. III, p. 168.

(**) Ou plutôt, en employant les relations fondamentales :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N\cos\lambda,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -N\cos\mu,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -N\cos\nu;$$

et en ayant égard à la condition (3).

(***) Je viens de le rappeler.

ou

$$\frac{d^2s}{ds} = \frac{d(xdy - ydx)}{xdy - ydx}. \tag{6}$$

L'intégrale immédiate est

$$kds = xdy - ydx; \tag{7}$$

ou, après transformation de coordonnées (*) :

$$kds = u^2 d\omega. \tag{1}$$

5. Au moyen des équations (1), (5), jointes à la formule évidente

$$ds^2 = u^2 d\omega^2 + (1 + f'^2)du^2; \tag{8}$$

le savant Professeur de Nantes forme, sans s'y arrêter, la relation

$$d\omega = \frac{k}{u}du\sqrt{\frac{1 + f'^2}{u^2 - k^2}}, \tag{9}$$

intégrale première de l'équation des lignes géodésiques tracées sur une surface de révolution

J'ignore si cette intégrale, dont la forme est remarquable, était déjà connue (**).

Il en résulte, à cause de l'équation (1) :

$$ds = udu\sqrt{\frac{1 + f'^2}{u^2 - k^2}}. \tag{10}$$

(*) On sait que

$$xdy - ydx = u^2 d \,.\, \text{arc tg}\,\frac{y}{x} = u^2 d\omega.$$

(**) Après coup, je m'aperçois qu'elle a été publiée dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. VI, p. 560).

II.

Rayon de courbure d'une ligne géodésique.

6. Remplaçons l'équation (4) par

$$\frac{d\cdot\frac{dx}{ds}}{-p}=\frac{d\cdot\frac{dy}{ds}}{-q}=\frac{d\cdot\frac{dz}{ds}}{1}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{p^2+q^2+1}}=\frac{ds}{\rho\sqrt{1+p^2+q^2}};\qquad(11)$$

ε et ρ désignant l'angle de contingence et le rayon de courbure (*).

A cause de

$$p=f'\cdot\frac{du}{dx}=f'\cdot\frac{x}{u},\quad q=f'\cdot\frac{du}{dy}=f'\cdot\frac{y}{u},\qquad(12)$$

nous avons

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+f'^2},$$

puis

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\sqrt{1+f'^2}}{ds}d\cdot\frac{dz}{ds};$$

ou, par la formule (10),

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\sqrt{u^2-k^2}}{udu}d\cdot\frac{dz}{ds}.\qquad(13)$$

Il ne reste donc plus qu'à développer la différentielle de $\frac{dz}{ds}$.

7. Il est visible que

$$\frac{dz}{ds}=\cos\gamma=\frac{f'}{u}\sqrt{\frac{u^2-k^2}{1+f'^2}}=\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\cdot\frac{\sqrt{u^2-k^2}}{u}.\qquad(14)$$

(*) Il est connu que, α, β, γ étant les angles de la tangente avec les axes rectangulaires, on a

$$\varepsilon^2=(d.\cos\alpha)^2+(d\ \cos\beta)^2+(d.\cos\gamma)^2=\left(d\cdot\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\cdot\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\ \frac{dz}{ds}\right)^2;$$

etc.

Pour simplifier le calcul, je pose :

$$f' = \operatorname{tg} \lambda, \qquad u = \frac{k}{\cos \mu}. \tag{15}$$

Il résulte, de ces abréviations :

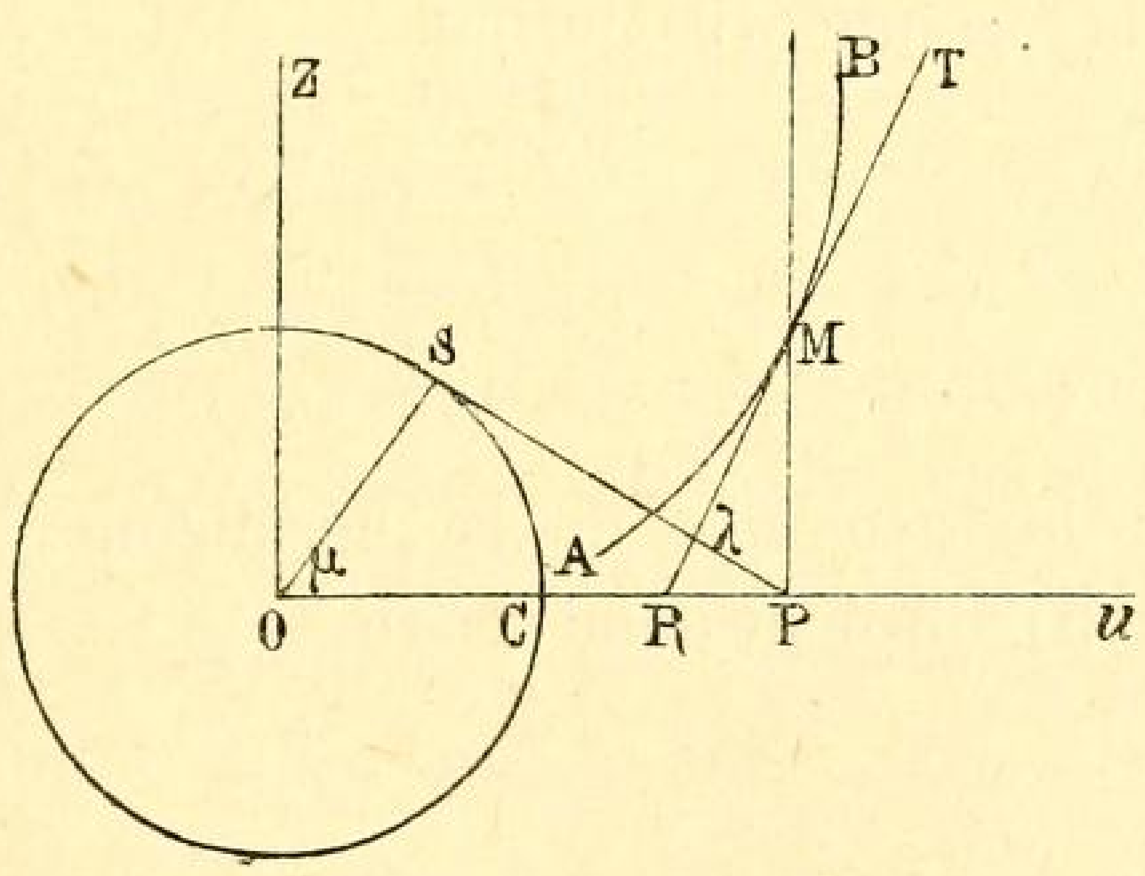
$$\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}} = \sin \lambda, \qquad \frac{\sqrt{u^2 - k^2}}{u} = \sin \mu; \tag{16}$$

puis

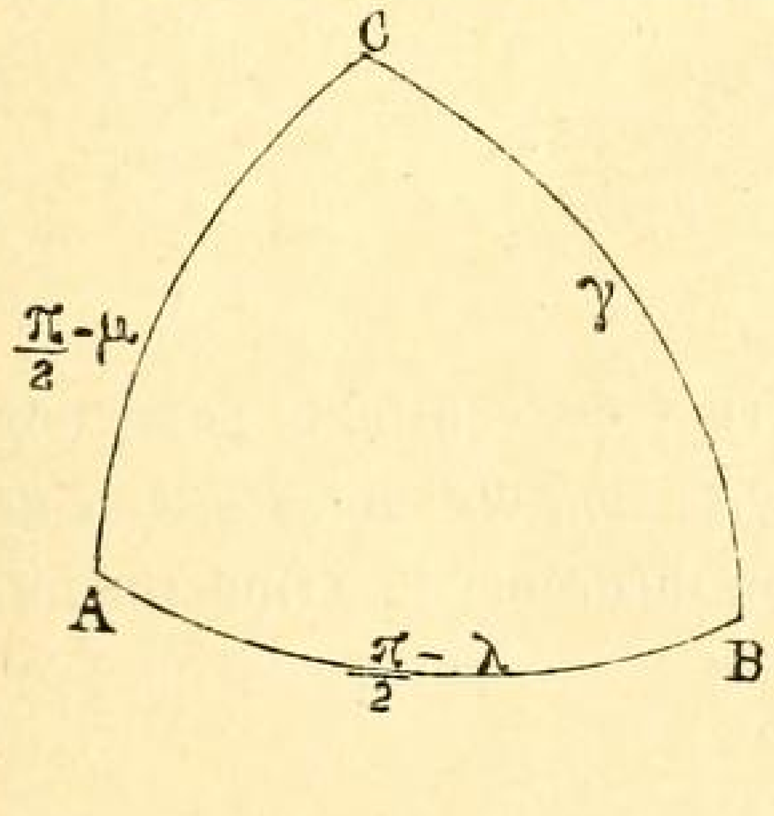
$$\cos \gamma = \sin \lambda \sin \mu. \tag{17}$$

Les formules (15) et (17) peuvent être interprétées géométriquement :

1° M étant un point de la ligne géodésique considérée, soit AMB la section méridienne passant en M. Il est clair que λ est l'angle TRu formé par la tangente RMT et la droite Ou, perpendiculaire à l'axe Oz de la surface ;



2° Du point O comme centre, avec k pour rayon, décrivons une circonférence OC. Si, du pied de l'ordonnée de M, nous menons, à OC, la tangente PS, nous aurons uOS $= \mu$;



3° La relation (17) exprime que γ est l'hypoténuse d'un triangle sphérique, dans lequel les côtés de l'angle droit sont les compléments de λ et de μ.

8. Par les formules (15) et (17) :

$$d\lambda = \frac{f''}{1+f'^2}du, \quad d\mu = \frac{k}{u}\frac{du}{\sqrt{u^2-k^2}},$$

$$\frac{d(\cos\gamma)}{du} = \sin\mu\cos\lambda\frac{f''}{1+f'^2} + \sin\lambda\cos\mu\frac{k}{u\sqrt{u^2-k^2}};$$

puis

$$\frac{d(\cos\gamma)}{du} = \frac{\sqrt{u^2-k^2}f''}{u(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{k^2f'}{u^2\sqrt{(u^2-k^2)(1+f'^2)}}. \tag{18}$$

Au moyen de cette valeur et de la formule (13), on a, finalement :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(u^2-k^2)f''}{u^2(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}} + k^2\frac{f'}{u^3\sqrt{1+f'^2}}. \tag{19}$$

9. Les sections méridiennes, caractérisées par $\omega = const.$, sont, évidemment, des lignes géodésiques. Quand il en est ainsi, $k = 0$ (*); et la formule (19) devient

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{f''}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui devait être.

Introduisant le rayon ρ_1, de la méridienne, ainsi que les angles λ et μ (15), on peut donc écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2\mu}{\rho_1} + \frac{\sin\lambda\cos^2\mu}{u}; \tag{21}$$

expression assez simple.

Il en résulte

$$\frac{1}{\rho} = \frac{u^2-k^2}{u^2}\frac{1}{\rho_1} + \frac{k^2f'}{u^3\sqrt{1+f'^2}}.$$

(*) Si l'on cherche dans quel cas le rapport $\frac{\rho_1}{\rho}$ est constant, pour une même ligne géodésique, on trouve que *la surface doit être un ellipsoïde de révolution.* Cette propriété est la réciproque d'un théorème dû à Gudermann. (Lindelöf, *Calcul des variations*, p. 278.)

CCLXXXV. — Une propriété des progressions géométriques.

(*Mai* 1888) (*).

I. Théorème. — *Soit une progression géométrique, composée de* n *termes. Si, de* n *fois la somme des carrés de leurs logarithmes, on retranche le carré du logarithme de leur produit, le reste est constant.*

II. Corollaire :

$$y = n\left[(\ell x)^2 + (\ell q x)^2 + \cdots + (\ell q^{n-1} x)^2\right] - \left[\ell\left(x^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)\right]^2$$

représente une parallèle à l'axe des abscisses (**).

CCLXXXVI. — Géométrie de situation.

(*Mai* 1887.)

Problème (***). — *Sur un échiquier de trente-six cases, placer six jetons, de manière qu'aucune ligne et qu'aucune colonne ne contienne un nombre impair de jetons.*

Si une *ligne* contenait *quatre* jetons, deux *colonnes*, au moins, ne contiendraient qu'*un* jeton. Ainsi, les lignes et les colonnes employées doivent contenir, chacune, *deux* jetons. Faisons abstraction des autres lignes et des autres colonnes ; il nous reste un échiquier de *neuf* cases, disposé comme ceci, par exemple :

×	×	
	×	×
×		×

(*) Complément à la *Note* CCXLII.

(**) C'est à cause du Corollaire que le Théorème est énoncé.

(***) Proposé par M. *Émile Deliége*.

Les cases non remplies sont au nombre de *trois*. La question peut donc être formulée en ces termes :

		0
0		
	0	

Sur un échiquier de neuf cases, *placer trois jetons, de manière qu'il y en ait un dans chaque ligne, et un dans chaque colonne.*

Ce problème auxiliaire admet (*) $3.2.1 = 6$ solutions.

Sur l'échiquier primitif, on peut choisir *trois* lignes, de 20 manières, et *trois* colonnes, de 20 manières. Le nombre demandé est donc

$$N = 20.20.6 = 2\,400.$$

CCLXXXVII. — Sur les sections circulaires de l'ellipsoïde.

(*Février* 1888.)

I. Lemme (**). — OA, OB *étant deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse; par l'extrémité* B *du second, on mène une droite* EBF, *perpendiculaire au premier; et l'on prend, sur cette droite, les distances* BE, BF, *égales à ce premier demi-diamètre. On joint les points* E, F *au centre* O.

Cela posé : 1° *La bissectrice de l'angle* EOF *est, en direction, l'un des axes de la courbe;* 2° 2a, 2b *désignant ces axes, on a*

$$OE = a + b, \quad OF = a - b \text{ (***)}.$$

(*) En effet, pour former tous les carrés, il suffit de permuter les trois lignes tracées ci-dessus.

(**) Le lecteur est prié de faire les deux premières figures.

(***) Chasles, *Aperçu historique*, deuxième édition, p. 362.

II. Théorème. — *Soit* MN *une corde de l'ellipse considérée, parallèle au demi-diamètre* OA. *Si, par le milieu* G *de* MN, *on mène la droite* HGK, *perpendiculaire à* MN, *et inscrite à l'angle* EOF; *le quadrilatère* HNKM *est un losange, dont le côté égale* OA. *En outre :*

$$OH = \frac{y}{b'}(a + b), \quad OK = \frac{y}{b'}(a - b).$$

A cause des parallèles HGK, EBF, le point G est le milieu de HK; donc HNKM est un losange.

De plus,

$$\frac{GK}{BF} = \frac{OG}{OB},$$

ou

$$GK = \frac{a'}{b'}y;$$

puis, à cause de

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1:$$

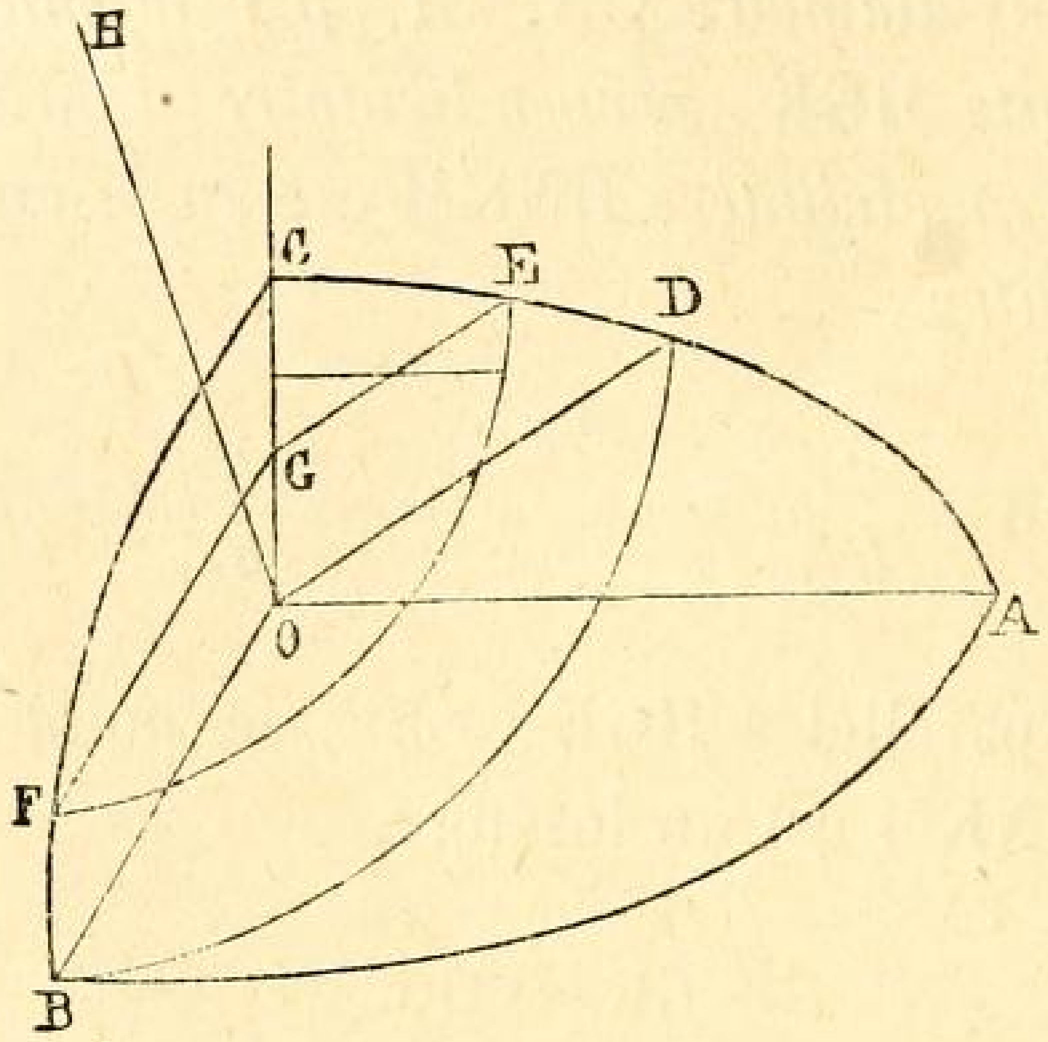
$$\overline{KM}^2 = \frac{a'^2}{b'^2}y^2 + x^2 = a'^2.$$

III. Théorème (*). — *Une ellipse étant donnée, on construit un losange* HNKM, *dont le côté soit égal à un demi-diamètre* OA, *et dont la diagonale* NM *soit une corde de l'ellipse, parallèle à ce demi-diamètre. Cela posé, les sommets* H, K *décrivent deux diamètres, symétriquement placés par rapport à chacun des deux axes.*

IV. Corollaire. — *Soit, dans un ellipsoïde* E, *une section circulaire centrale* BOD, *et une section circulaire* EGF, *située dans un plan parallèle à celui de la première. Toutes les sections circulaires, telles que* EGF, *appartiennent à des sphères décrites*

(*) Résumé des deux premières propositions.

avec un rayon égal à OD, *et dont les centres sont situés sur un*



diamètre OH *de la section principale* AOC (*).

CCLXXXVIII. — Une application de la Géométrie à l'Algèbre.

(Vers 1840.)

I. *Cordes principales.* — L'équation d'une surface Σ étant

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

considérons un système de cordes parallèles à la direction déterminée par

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \qquad (2)$$

(*) On trouve, par un calcul facile,

$$\operatorname{tg} \mathrm{AOH} = -\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}.$$

D'ailleurs

$$\operatorname{tg} \mathrm{AOD} = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - e^2}}.$$

Donc

$$\operatorname{tg} \mathrm{AOH} \,.\, \operatorname{tg} \mathrm{AOD} = -\frac{c}{a}.$$

puis le plan diamétral conjugué à ces cordes. Celles-ci seront *principales* si les cosinus a, b, c satisfont aux conditions connues :

$$\frac{\mathrm{A}a + \mathrm{B}''b + \mathrm{B}'c}{a} = \frac{\mathrm{A}'\mathrm{B} + \mathrm{B}c + \mathrm{B}''a}{b} = \frac{\mathrm{A}''c + \mathrm{B}'a + \mathrm{B}b}{c}. \tag{3}$$

On sait que, s étant la valeur commune des trois rapports,

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{A} - s)(\mathrm{A}' - s)(\mathrm{A}'' - s) - \mathrm{B}^2(\mathrm{A} - s) - \mathrm{B}'^2(\mathrm{A}' - s) \\ \quad - \mathrm{B}''^2(\mathrm{A}'' - s) + 2\mathrm{BB}'\mathrm{B}'' = 0 \text{ (*)}.\end{array}\right\} \tag{4}$$

Cette équation, du troisième degré, a, au moins, une racine réelle. Par conséquent, *dans toute surface du second ordre, il existe, au moins, un système de cordes principales* (**).

II. *Réalité des racines.* — Prenons une de ces droites pour axe des z : les équations (3) devront être vérifiées par $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$; ce qui exige que

$$\mathrm{B} = 0, \quad \mathrm{B}' = 0, \quad s = \mathrm{A}''. \tag{5}$$

En même temps, l'équation (4) se réduit à celle-ci :

$$s^2 - (\mathrm{A} + \mathrm{A}')s + \mathrm{AA}' - \mathrm{B}'^2 = 0, \tag{6}$$

laquelle a ses racines réelles.

Puisqu'il en est ainsi, la surface Σ possède *trois systèmes* de cordes principales (***). Mais le nombre de ces systèmes ne peut dépendre du choix des axes; donc *les trois racines de l'équation* (4) *sont réelles* (IV).

(*) Cauchy, *Exercices de Mathematiques*, t. IV, p. 141.

(**) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. II, p. 42.

(***) Pour faire disparaître le terme en xy, on fait tourner les axes Ox, Oy dans leur plan, en les laissant rectangulaires; etc.

(IV) Démonstration donnée à l'École polytechnique. Si je la rappelle, c'est parce que, fréquemment, on en voit paraître d'autres, fort compliquées. (Mai 1888.)

CCLXXXIX. — Équations dont toutes les racines sont imaginaires.

(*Mars* 1869.)

1. Théorème. — *Si l'équation* f(x) = 0 (*) *a toutes ses racines réelles et inégales, l'équation obtenue en égalant à zéro la seconde dérivée de* $\frac{1}{\mathrm{f(x)}}$, *a toutes ses racines imaginaires.*

Soit

$$y = \frac{1}{f},$$

et, par conséquent :

$$y' = -\frac{f'}{f^2}, \quad y'' = \frac{2f'^2 - ff''}{f^3}.$$

L'équation $y'' = 0$ est donc

$$2f'^2 - ff'' = 0. \qquad (1)$$

Or, si l'on suppose

$$f(x) = (x-a)(x-b)\cdots(x-k), \qquad (2)$$

on a :

$$\frac{f'}{f} = \sum \frac{1}{x-a}, \quad \frac{ff'' - f'^2}{f^2} = -\sum \frac{1}{(x-a)^2};$$

ou

$$f'^2 - ff'' = f^2 \sum \frac{1}{(x-a)^2}, \qquad (3)$$

puis

$$2f'^2 - ff'' = f^2 \left\{ \left[\sum \frac{1}{x-a} \right]^2 + \sum \frac{1}{(x-a)^2} \right\}. \qquad (4)$$

Le premier membre de l'équation (1) étant une *somme de carrés,* cette équation n'a aucune racine réelle (**).

(*) $f(x)$ est un polynôme entier.

(**) C'est à peu près ainsi que le théorème a été démontré par M. *Agarrat* (*Nouvelles Annales,* 1849, p. 445).

Addition. — (*Mai* 1888.)

II. Théorème. — *Si l'équation* $f(x) = 0$ *a toutes ses racines réelles, l'équation*

$$ff'' - f'^2 = 0, \tag{A}$$

a toutes ses racines imaginaires (*).

III. Théorème. — *Si l'équation*

$$ff'' - f'^2 = 0$$

a des racines réelles, l'équation $f(x) = 0$ *a des racines imaginaires.*

IV. *Application.* — Soit $f(x) = X_n$, X_n étant un *polynôme de Legendre*. On sait que toutes les racines de $X_n = 0$ sont réelles. Conséquemment :

L'équation

$$X_n \frac{d^2X_n}{dx^2} - \left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 = 0 \tag{B}$$

n'a aucune racine réelle.

V. *Remarque.* — On sait que

$$2^n X_n = (x+1)^n + \left[\frac{n}{1}\right]^2 (x+1)^{n-1}(x-1)$$
$$+ \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 (x+1)^{n-2}(x-1)^2 + \cdots \text{ (**)}.$$

De plus, si l'on fait

$$f(x) = x^n + \left[\frac{n}{1}\right]^2 x^{n-1} + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^{n-2} + \cdots + \left[\frac{n}{1}\right]^2 x + 1, \tag{5}$$

toutes les racines de $f(x) = 0$ sont réelles (***). Donc le théorème ci-dessus (II) est applicable.

(*) Évident par la formule (3).

(**) Premier *Mémoire sur les fonctions* X_n, p. 13.

(***) *Ibid.*, p. 52.

Soit, par exemple, $n = 3$; d'où :

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 9x + 1, \quad f'(x) = 3(x^2 + 6x + 3), \quad f'' = 6(x+3).$$

L'équation (A), développée, est

$$x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 52x + 21 = 0:$$

elle n'a aucune racine réelle (*).

VI. *Autre application.* — L'équation

$$\frac{a_1}{x-a} + \frac{b_1}{x-b} + \cdots + \frac{k_1}{x-k} = 1,$$

a ses racines réelles et inégales (**).

On peut donc prendre, dans l'équation (A),

$$f(x) = (x-a)(x-b)\cdots(x-k) - \sum a_1(x-b)(x-c)\cdots(x-k) \text{ (***)}.$$

VII. *Remarque.* — On pourrait supposer que, *si la proposée a des racines imaginaires, la transformée a, nécessairement, des racines réelles.* Il n'en est rien. Soit, en effet,

$$f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1).$$

On trouve

$$f'^2 - ff'' = 5x^8 + 10x^4 + 1;$$

et ce trinôme ne s'annule pour aucune valeur réelle de x.

(*) Dans les *Nouvelles Annales*, 1848, page 368, on énonce, sous le nom de Gauss, une propriété qui résulte de la *formule de Rodrigues.* En outre, l'équation $f(x) = 0$ (5) étant une simple transformée de $X_n = 0$, le théorème sur la réalité de ses racines ne doit point être attribué à M. H. Laurent.

(**) Voir, par exemple, une Note de Binet (*Journal de Liouville*, t. II, p. 250).

(***) Nous citerons encore, comme équation *proposée*, celle que l'on rencontre dans la *théorie des inégalités séculaires*, et dont un cas particulier fait l'objet de la *Note* CCLXXXV.

CCXC. — Sur une formule de Cauchy.

(*Mai* 1888.)

I. Dans le tome IV des *Anciens Exercices,* on trouve cette relation remarquable, que l'illustre Géomètre démontre au moyen de la théorie des *Résidus :*

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\frac{1}{6}\operatorname{tg}\frac{x}{6}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{x}{8}+\cdot\\ &=\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{x}-\cot\frac{x}{3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{5}{x}-\cot\frac{x}{5}\right)+\cdot\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Il est très facile de la *vérifier.* En effet, elle donne, par intégration,

$$-\mathrm{l}\left[\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{6}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots\right]=\mathrm{l}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{3}}\cdot\frac{\frac{x}{5}}{\sin\frac{x}{5}}\cdots\right],$$

ou

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{6}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{5}}{\frac{x}{5}}\cdots\tag{2}$$

Cela posé, soient :

$$P_1=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots,$$

$$P_3=\cos\frac{x}{6}\cos\frac{x}{12}\cos\frac{x}{24}\cdots,$$

$$P_5=\cos\frac{x}{10}\cos\frac{x}{20}\cos\frac{x}{40}\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

par une formule d'Euler, bien connue, on a :

$$P_1=\frac{\sin x}{x},\quad P_3=\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}},\quad P_5=\frac{\sin\frac{x}{5}}{\frac{x}{5}},\ldots$$

D'ailleurs (*),

$$\cos\frac{x}{2}\,.\,\cos\frac{x}{4}\,.\,\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots = P_1\,.\,P_3\,.\,P_5\ldots; \tag{3}$$

donc l'égalité (2) est démontrée.

II. On peut se proposer de sommer la série

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{3} + \cdots = \sum_1^\infty \frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{x}{n}. \tag{4}$$

Dans l'état actuel de l'Analyse, ce problème n'est peut-être pas résoluble; mais nous pouvons, du moins, le rattacher à la *série de Lambert.*

D'après une formule du Mémoire intitulé : *Sur quelques intégrales définies* (**), on a

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\alpha^{-\frac{x}{\pi}} - \alpha^{\frac{x}{\pi}}}{1-\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}\ (^{***}). \tag{5}$$

Conséquemment,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\alpha^{-\frac{x}{n\pi}} - \alpha^{\frac{x}{n\pi}}}{1-\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}; \tag{6}$$

puis, si l'on fait $\alpha = q^{2n}$:

$$\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{x}{n} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \left(q^{-\frac{2x}{\pi}} - q^{\frac{2x}{\pi}}\right)\frac{dq}{q}\frac{q^n}{1-q^{2n}}. \tag{7}$$

On conclut, de cette formule,

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{x}{n} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \left(q^{-\frac{2x}{\pi}} - q^{\frac{2x}{\pi}}\right)\frac{dq}{q}\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}}. \tag{8}$$

(*) *Sur un tableau numérique...,* p. 7.

(**) *Académie de Belgique,* octobre 1885.

(***) Elle ne diffère, qu'en apparence, de la célèbre formule, due à Poisson

$$\operatorname{tg} x = 2\int_0^\infty \frac{e^{2\beta x} - e^{-2\beta x}}{e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}}\,d\beta.$$

De plus, si l'on fait

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots=f(q), \tag{9}$$

on a

$$\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}}=f(q)-f(q^2)\ (^*). \tag{10}$$

Donc enfin

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{x}{n}=\frac{2}{\pi}\int_0^1\left(q^{-\frac{2x}{\pi}}-q^{\frac{2x}{\pi}}\right)\left[f(q)-f(q^2)\right]\frac{dq}{q}. \tag{11}$$

III. La relation (11) peut en faire trouver d'autres. Par exemple celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}&\ell\left(\cos x\,.\cos\frac{x}{2}\,.\cos\frac{x}{3}\,.\cos\frac{x}{4}\,.\cos\frac{x}{5}\cdots\right)\\&=\int_0^1\frac{\left(q^{-\frac{x}{\pi}}-q^{\frac{x}{\pi}}\right)^2}{\ell q}\left[f(q)-f(q^2)\right]\frac{dq}{q}.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Le changement de x en $\frac{x}{2}$ donne ensuite

$$\begin{aligned}&\ell\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{6}\cos\frac{x}{8}\cdots\right)\\&=\int_0^1\frac{\left(q^{-\frac{x}{2\pi}}-q^{\frac{x}{2\pi}}\right)^2}{\ell q}\left[f(q)-f(q^2)\right]\frac{dq}{q};\end{aligned}$$

puis, par soustraction :

$$\left.\begin{aligned}&\ell\left(\cos x\,.\cos\frac{x}{3}\,.\cos\frac{x}{5}\,.\cos\frac{x}{7}\cdots\right)\\&=\int_0^1\frac{\left(q^{\frac{x}{\pi}}+1+q^{-\frac{x}{\pi}}\right)\left(q^{-\frac{x}{2\pi}}-q^{\frac{x}{2\pi}}\right)^2}{\ell q}\left[f(q)-f(q^2)\right]\frac{dq}{q}.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(*) *Notes sur la théorie des fractions continues*, p. 14.

Une nouvelle soustraction conduit à cette dernière formule, assez curieuse :

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}\left(\dfrac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\cos\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{4}}\cdot\dfrac{\cos\frac{x}{5}}{\cos\frac{x}{6}}\cdot\dfrac{\cos\frac{x}{7}}{\cos\frac{x}{8}}\cdots\right)\\[2ex] =\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(q^{-\frac{x}{\pi}}+q^{\frac{x}{\pi}}\right)\left(q^{-\frac{x}{2\pi}}-q^{\frac{x}{2\pi}}\right)^2}{\mathcal{L}q}\left[f(q)-f(q^2)\right]\frac{dq}{q}.\end{array}\right\}\quad(14)$$

CCXCI. — Sur une équation d'Abel.

(*Septembre* 1886.)

I. Pour éclaircir un passage de la page 46 (*), Holmboë démontre, d'une manière peu naturelle (**), une propriété de la fonction

$$y=\frac{1}{e^x-1}\ (^{***}).\qquad(1)$$

Voici comment on peut l'établir :

On a

$$y'=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2};$$

donc

$$y+y'=-\frac{1}{(e^x-1)^2}.\qquad(2)$$

Soit $y+y'=u$. Alors

$$u'=2\frac{e^x}{(e^x-1)^3},$$

puis

$$2u+u'=2\frac{1}{(e^x-1)^3}.\qquad(3)$$

(*) *OEuvres d'Abel*, t. II, 1re édition.

(**) Page 274.

(***) Nous avons remplacé p et v par y et x.

Soit encore $2u + u' = v$. On trouve

$$v' = -2.3\frac{e^x}{(e^x-1)^4};$$

et, par conséquent,

$$3v + v' = -2.3.\frac{1}{(e^x-1)^4}; \tag{4}$$

etc.

Ainsi :

$$y + y' = -y^2; \tag{2'}$$

$$2(y+y') + (y'+y'') = 2y^3; \tag{3'}$$

$$6(y+y') + 3(y'+y'') + 2(y'+y'') + (y''+y''') = -2.3.y^4,$$

ou

$$6(y+y') + 5(y'+y'') + (y''+y''') = -2.3.y^4; \tag{4'}$$

$$\begin{aligned} &24(y+y') + 20(y'+y'') + 4(y''+y''') \\ &+ 6(y'+y'') + 5(y''+y''') + (y'''+y^{\text{IV}}) = 2.3.4y^5, \end{aligned}$$

ou

$$24(y+y')+26(y'+y'')+9(y''+y''')+(y'''+y^{\text{IV}}) = 2.3.4.y^5; \tag{5'}$$

. . . .

Chacune de ces équations est vérifiée par $y = (e^x - 1)^{-1}$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

II. *Remarques.* — 1° Dans ces équations, les coefficients numériques forment la table *à double entrée :*

1					
1	2				
1	3	6			
1	9	26	24		
1	14	71	154	120	

2° Si $N_{p,q}$ désigne le terme placé dans la $p^{\text{ième}}$ *colonne* et dans la $q^{\text{ième}}$ *ligne :*

$$N_{p,q} = N_{p-1,q-1} \cdot q + N_{p,q-1}.$$

3° *La somme des termes composant la* q[ième] *ligne est* $3.4.5\ldots(q+1)$.

4° Les *derniers* termes sont :

$$1,\quad 1.2,\quad 1.2.3,\quad 1.2.3.4,\quad \ldots$$

III. *Une intégration.* — Soit l'équation (3'), ou

$$2(y+y') + (y'+y'') = 2y^3. \qquad \text{(A)}$$

Quoi qu'elle ne soit pas linéaire, il est facile d'en trouver l'intégrale générale. En effet, multipliant les deux membres par $\lambda(y+y')$, on a

$$2\lambda(y+y')^2 + \lambda(y+y')(y'+y'') = 2\lambda(y+y')y^3. \qquad (6)$$

Le premier membre est une dérivée exacte si l'on prend $\lambda = e^{4x}$ (*). D'ailleurs, $2e^{4x}(y+y')y^3$ est la dérivée de $(ye^x)^4$. Donc une intégrale première de (A) est

$$(y+y')^2e^{4x} = (ye^x)^4 + g,$$

ou

$$(y+y')e^{2x} = \sqrt{(ye^x)^4 + g}, \qquad \text{(B)}$$

ou encore :

$$e^x(ye^x)' = \sqrt{(ye^x)^4 + g}.$$

Ainsi

$$e^{-x} = \frac{(ye^x)'}{\sqrt{(ye^x)^4 + g}}, \qquad \text{(C)}$$

(*) La dérivée de $\lambda(y+y')^2$ étant

$$2\lambda(y+y')(y'+y'') + (y+y')\frac{d\lambda}{dx},$$

on doit avoir

$$\frac{\frac{d\lambda}{dx}}{2x} = 2;\ \text{etc.}$$

et enfin :

$$e^{-x} = h - \int \frac{d(ye^x)}{\sqrt{(ye^x)^4 + g}} \; (^*) \tag{D}$$

IV. *Suite.* — Pour simplifier l'intégrale (D), qui n'a pas la forme normale, posons

$$ye^x = u. \tag{7}$$

Il vient, immédiatement,

$$y = u\left[h - \int \frac{du}{\sqrt{u^4 + g}}\right], \tag{8}$$

puis

$$x = -\,\mathrm{l}\left[h - \int \frac{du}{\sqrt{u^4 + g}}\right] \tag{9}$$

Le système de ces deux formules constitue l'intégrale *générale* de l'équation (A).

V. Si la constante g est positive, remplaçons g par g^4; puis posons, comme le fait Legendre,

$$u = g \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi. \tag{10}$$

Il résulte, de cette transformation :

$$du = \frac{g d\varphi}{1 + \cos\varphi}, \quad \sqrt{u^4 + g^4} = 2g \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}{1 + \cos\varphi} \; (^{**});$$

puis :

$$y = g \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \left[h - \frac{1}{2g} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\right], \tag{11}$$

$$x = -\,\mathrm{l}\left[h - \frac{1}{2g} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\right]. \tag{12}$$

(*) Si la constante g est nulle, cette formule se réduit à

$$y = \frac{1}{1 - he^x}.$$

(**) *Note* CXXXVI (t. II, p. 177).

VI. Si la constante g est négative, on trouve, avec la même facilité :

$$y = \frac{g}{\cos\varphi}\left[h - \frac{1}{2g}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\right], \tag{13}$$

$$x = -\mathcal{L}\left[h - \frac{1}{2g}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\right] (^*). \tag{12}$$

Addition. — (*Juin* 1888.)

VII. *Généralisation.* — Dans l'intégrale

$$e^{-x} = h - \int\frac{d(ye^x)}{\sqrt{(ye^x)^4 + g}}, \tag{D}$$

remplaçons e^x par une fonction f, donnée; de manière que :

$$\frac{1}{f} = h - \int\frac{d(yf)}{\sqrt{(yf)^4 + g}}. \tag{E}$$

Il résulte d'abord, de cette égalité,

$$\frac{f'}{f^2} = \frac{yf' + fy'}{\sqrt{(yf)^4 + g}},$$

ou

$$(yf)^4 + g = \frac{f^4}{f'^2}(yf' + fy')^2;$$

puis

$$2(yf)^3 = \frac{f^4}{f'^2}(yf'' + 2y'f' + fy'') + (fy' + yf')\frac{2f^3f'^2 - f^4f''}{f'^3};$$

et enfin

$$f^2f'y'' + f(4f'^2 - ff'')y' + 2f'^3y = 2f^5y^3. \tag{F}$$

Ainsi, *l'intégrale générale de cette équation* (F) *est l'équation* (E).

(*) On fait

$$u = \frac{g}{\cos\varphi}.$$

CCXCII (*). — Une équation aux différences.

(*Février* 1880.)

I. *Première méthode.* — L'équation donnée étant

$$P_{n+1} = nP_n + P_{n-1}, \tag{1}$$

soit y la *fonction générative* de P_n, de manière que

$$y = P_0 + P_1 x + P_2 x' + \cdots + P_n x^2 + \cdots; \tag{2}$$

puis, par un calcul facile,

$$\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y = -\frac{P_0}{x^2} - \frac{P_1}{x}. \tag{3}$$

L'intégrale de cette équation linéaire est

$$y = -e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)} \int e^{x+\frac{1}{x}} \left(\frac{P_0}{x^2} + \frac{P_1}{x}\right) dx. \tag{4}$$

Malheureusement, la quantité placée sous le signe $\int$ n'est pas intégrable par les procédés connus : on ne peut pas même développer, en série, la fonction $e^{x+\frac{1}{x}}$.

II. *Seconde méthode* (**). — En l'appliquant, on trouve qu'on satisfait à l'équation (1) par

$$P_n = A \int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)} \alpha^{n-1} d\alpha :$$

la vérification est facile (***).

(*) Extraite d'un *Traité* inédit.

(**) Due à Laplace (*Théorie des Probabilités*).

(***) En effet,

$$\int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)} \alpha^{n-1} d\alpha = \frac{1}{n}\left[e^{-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)} \alpha^n\right]_0^\infty + \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-\left(\alpha\ \frac{1}{\alpha}\right)} (\alpha^n - \alpha^{n-2}) d\alpha,$$

ou

$$P_r = \frac{1}{n}[P_{n+1} - P_{n-1}].$$

III. *Remarque.* — Si l'on suppose $P_1 = 0$, $P_2 = 1$, la formule (1) donne, successivement :

$$P_3 = 2, \quad P_4 = 7, \quad P_5 = 30.$$

Ces nombres sont les dénominateurs des réduites de la fraction continue

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}},$$

étudiée par Amoretti (*). Ce jeune Géomètre (**) considère la série

$$s = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(1 \,.\, 2)^2} + \frac{1}{(1 \,.\, 2 \,.\, 3)^2} + \cdots$$

Or, d'après Fourier (***) :

$$1 - \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^4}{(2 \,.\, 4)^2} - \frac{\alpha^6}{(2 \,.\, 4 \,.\, 6)^2} + \cdots = \frac{1}{\pi}\int^{\pi} dx \cos(\alpha \sin x);$$

donc

$$s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx \cos\left(2\sqrt{-1}\sin x\right),$$

ou, sous forme réelle,

$$s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(e^{2\sin x} + e^{-2\sin x}\right) dx \text{ (}^{\text{IV}}\text{)}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 1855, p. 40.

(**) Mort à l'âge de *seize* ans !

(***) *Théorie de la Chaleur*, p. 578.

(IV) Pour démontrer directement cette formule, il suffit de développer les exponentielles.

CCXCIII. — Sur une intégrale définie.

(*Février* 1876.)

I. Soit

$$A_m = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(2+x)\dots(m+x)}. \tag{1}$$

Au lieu de décomposer, en fractions simples, la quantité

$$\frac{1}{(1+x)(2+x)\dots(m+x)},$$

on peut observer que

$$(1+x)(2+x)\dots(m+x) = \Gamma(m)\frac{\Gamma(m+1+x)}{\Gamma(1+x)\Gamma(m)} = \frac{\Gamma(m)}{\int_0^1 \theta^x(1-\theta)^{m-1}d\theta}.$$

Donc

$$A_m = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^1 dx \int_0^1 \theta^x(1-\theta)^{m-1}d\theta. \tag{2}$$

II. On a

$$(1-\theta)^{m-1} = 1 - \frac{m-1}{\theta}\theta + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\theta^2 - \dots \pm \theta^{m-1}.$$

Conséquemment,

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 \theta^x(1-\theta)^{m-1}d\theta = {}& \frac{1}{x+1} - \frac{m-1}{1}\frac{1}{x+2} \\ & + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{1}{x+3} - \dots \pm \frac{1}{x+m};\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

puis

$$A_m = \frac{1}{\Gamma(m)}\left\{\mathcal{L}\frac{2}{1} - \frac{m-1}{1}\mathcal{L}\frac{3}{2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\mathcal{L}\frac{4}{3} - \dots \pm \mathcal{L}\frac{m+1}{m}\right\},$$

ou

$$A_m = \frac{1}{\Gamma(m)}\mathcal{L}\left\{\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{m-1}{1}}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}}\dots\right\}(^*). \tag{4}$$

(*) Le dernier facteur est $\frac{m+1}{m}$ ou $\frac{m}{m+1}$, selon que m est *impair* ou *pair*.

III. L'intégrale double, qui entre dans la formule (2), peut être écrite ainsi :

$$\int_0^1 (1-\theta)^{m-1} d\theta \int_0^1 \theta^x dx.$$

Or,

$$\int_0^1 \theta^x dx = -\frac{1-\theta}{\mathcal{L}\theta};$$

donc

$$A_m = -\frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^m}{\mathcal{L}\theta} \delta\theta. \tag{5}$$

IV. La comparaison des valeurs (4), (5) donne

$$\int_0^1 \frac{(1-\theta)^m}{\mathcal{L}\theta} d\theta = -\mathcal{L}\left\{\frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{m-1}{1}}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}}\cdots\right\}. \tag{6}$$

V. *Remarque.* — On lit, dans les *Tables* de M. Bierens de Haan (1[re] édition, T. 167) :

$$\int_0^1 (x-1)^a \frac{dx}{\mathcal{L}x} = \sum_0^\infty \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{1.2\dots n} \mathcal{L}(a-n+1).$$

Même abstraction faite de la faute typographique, dans le premier membre, cette formule est inadmissible; car le facteur $\mathcal{L}(a-n+1)$ devient imaginaire pour $n > a$.

Dans la seconde édition (T. 123), la formule est

$$\int_0^1 (1-x)^p \frac{dx}{\mathcal{L}x} = \sum_1^\infty (-1)^n \frac{p^{n|-1}}{p^{n|1}} \mathcal{L}(1+n);$$

ce qui équivaut à

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 (1-\theta)^m \frac{d\theta}{\mathcal{L}\theta}\\ &= -\frac{m}{1}\mathcal{L}2 + \frac{m(m-1)}{1.2}\mathcal{L}3 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\mathcal{L}4 + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Il est facile de voir que celle-ci ne diffère pas de la nôtre, au moins quand m est *entier positif*. Si m n'est pas entier, le second membre de l'égalité (7) devient une série *divergente*, à cause du facteur $\mathcal{L}(1+n)$.

VI. *Généralisation.* — Soit

$$B_m = \int_0^1 \frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(m+1+x)}\,dx; \tag{8}$$

m étant une quantité positive quelconque. Les calculs précédents ne subissent aucune modification; donc *les formules* (4) *et* (6) *sont générales.* Par exemple,

$$\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{L}\theta}\,d\theta = -\mathcal{L}\left\{\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1.3}{2.4}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{1.3.5}{2.4.6}}\cdots\right\},$$

ou

$$\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{L}\theta}\,d\theta = -\mathcal{L}\left\{\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1.3}{2.4}}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1.3.5}{2.4.6}}\cdots\right\}(^*). \tag{9}$$

VII. *Remarque.* — Comme

$$\int_0^1 \theta^x(1-\theta)^{m-1}d\theta = \int_0^1 (1-\theta)^x\theta^{m-1}d\theta,$$

on aurait pu prendre, au lieu de la formule (5) :

$$A_m = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^1 dx\int_0^1 \theta^{m-1}d\theta\left[1-\frac{x}{1}\theta+\frac{x(x-1)}{1.2}\theta^2-\cdots\right],$$

ou

$$A_m = \frac{1}{\Gamma(m)}\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{1.(m+1)}\int_0^1 x\,dx+\frac{1}{1.2(m+2)}\int_0^1 x(x-1)dx-\cdots\right\}. \tag{10}$$

Les intégrales

$$\int_0^1 x\,dx,\quad \int_0^1 x(x-1)dx,\quad \int_0^1 x(x-1)(x-2)dx,\ \ldots,$$

analogues à celles que contient la *série de Binet*, sont toutes commensurables.

(*) On peut comparer ces résultats avec ceux que nous avons indiqués dans les *Recherches sur la constante* G, dans le Mémoire *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet*, etc.

CCXCIV. — A propos d'un théorème de M. Oltramare (*).

(*Décembre* 1887.)

I. Ce théorème, *presque évident*, fait *supposer* celui-ci :

Soit n_1 *la somme des diviseurs d'un nombre* n, *inférieurs à* n. *Soit* n_2 *la somme des diviseurs de* n_1, *inférieurs à* n_1, etc. *Ces sommes* $n_1, n_2, \ldots$ *tendent vers une limite* λ, *laquelle est* 1, *ou un nombre parfait* (**).

La seconde partie de l'énoncé est visible : Si n_4, par exemple, est un *nombre parfait* p, on aura $n_5 = p$, $n_6 = p$, ... Au contraire, la première partie, si elle est exacte, doit être très difficile à démontrer.

II. *Remarque*. — Si le terme u_k est *premier*, u_{k+1} *égale* 1.

III. Si l'on prend $n = 25$, on trouve, tout de suite, $n_1 = 1 + 5 = 6$, *nombre parfait*. $n = 30$ donne les résultats suivants :

$$n_1 = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 = 42,$$
$$n_2 = 1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 14 + 21 = 54,$$
$$n_3 = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 + 27 = 66,$$
$$n_4 = 1 + 2 + 3 + 6 + 11 + 22 + 33 = 78,$$
$$n_5 = 1 + 2 + 3 + 6 + 13 + 26 + 39 = 90,$$
$$n_6 = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 10 + 15 + 18 + 30 + 45 = 144,$$
$$n_7 = 1+2+3+4+6+8+9+12+16+18+24+36+48+72 = 259,$$
$$n_8 = 1 + 7 + 37 = 45,$$
$$n_9 = 1 + 3 + 5 + 9 + 15 = 33,$$
$$n_{10} = 1 + 3 + 11 = 17,$$
$$n_{11} = 1.$$

(*) *Mathesis*, déc. 1887.

(**) Un *nombre parfait* p est celui qui est égal à la somme de ses diviseurs, abstraction faite de p.

CCXCV. — Quelques formules elliptiques.

(*Février* 1887.)

I. Le Mémoire intitulé : *Notes sur la théorie des fractions continues*... contient les égalités suivantes :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}+\frac{q+4q^4+9q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+\cdots}\\&=2q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4\,(^*),\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

$$q-4q^4+9q^9-\cdots=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2\Theta''(0)\,(^*),\qquad(2)$$

$$q+4q^4+9q^9+\cdots=-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2\Theta''(\omega)\,(^*),\qquad(3)$$

$$\Theta''(0)=\left[\omega-E_1(k)\right]\sqrt{\frac{2k'}{\pi\omega}}\,(^{**}),\qquad(4)$$

$$\Theta''(\omega)=\left[\omega k'^2-E_1(k)\right]\sqrt{\frac{2}{\pi\omega}}\,(^{**}).\qquad(5)$$

Il résulte, des quatre dernières :

$$q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\cdots=\frac{\omega}{\pi^2}[\omega-E_1]\sqrt{\frac{k'\omega}{2\pi}},\qquad(6)$$

$$q+4q^4+9q^9+16q^{16}+\cdots=\frac{\omega}{\pi^2}[E_1-\omega k'^2]\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}.\qquad(7)$$

II. Dans l'égalité (1), chassons les dénominateurs. Elle devient

$$\left.\begin{aligned}&(q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)\\&+(q+4q^4+9q^9+16q^{16}+\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)\\&=2q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4(1+2q+2q^4+\cdots)(1-2q+2q^4-\cdots).\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

On sait que

$$\begin{aligned}&(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)(1+2q+2q^4+\cdots)(1-2q+2q^4-\cdots)\\&\qquad=(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)^3\,(^{***}).\end{aligned}$$

(*) Page 55.
(**) Page 57.
(***) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, pp. 106 et 107.

Donc, si l'on fait

$$P = (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots), \quad (9)$$

le second membre de l'équation (8) prendra la forme $2qP^3$.

III. D'après deux autres relations connues,

$$P = (1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots)^2 \ (^*), \quad (10)$$

$$P^3 = (1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots)^6 = (1 - 3q^4 + 5q^{12} - 7q^{24} + 9q^{40} - \cdots)^2. \quad (11)$$

Ainsi, dans le second membre de cette même équation (8), le multiplicateur de $2q$ est : 1° *un cube;* 2° *une sixième puissance;* 3° *un carré.*

IV. Par les formules (6), (7), jointes à celles-ci :

$$1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \ (^{**}), \quad (11)$$

$$1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots = \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}} \ (^{**}), \quad (12)$$

le premier membre de l'équation (8) a pour valeur :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 [\omega - E_1] \sqrt{\frac{4k'}{\pi^2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 [\omega k'^2 - E_1] \sqrt{\frac{4k'}{\pi^2}},$$

ou

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^3 k^2 \sqrt{k'}.$$

Conséquemment

$$P = 2^{-\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{3}} \frac{\omega}{\pi} k^{\frac{2}{3}} k'^{\frac{1}{6}}; \quad (13)$$

comme on le vérifie au moyen des relations (9) ou (10).

V. L'équation (8) peut être écrite ainsi :

$$\left.\begin{aligned} & q + 9q^9 + 25q^{25} + 49q^{49} + \cdots \\ & + (q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + 25q^{25} - \cdots)(q + q^4 + q^9 + q^{16} + q^{25} + \cdots) \\ & - (q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + 25q^{25} + \cdots)(q - q^4 + q^9 - q^{16} + q^{25} - \cdots) \\ & = qP^3. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

(*) *Recherches.*, p. 8.

(**) *Ibid.*, p. 2.

Posons, pour abréger :

$$q + 9q^9 + 25q^{25} + 49q^{49} + \cdots = \mathrm{A},$$
$$4q^4 + 16q^{16} + 36q^{36} + 64q^{64} + \cdots = \mathrm{A}',$$
$$q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \cdots = \mathrm{B},$$
$$q - q^9 + q^{25} - q^{49} + \cdots = \mathrm{B}'.$$

Le premier membre de l'égalité (13) devient

$$\mathrm{A} + (\mathrm{A} - \mathrm{A}')(\mathrm{B} + \mathrm{B}') - (\mathrm{A} + \mathrm{A}')(\mathrm{B} - \mathrm{B}') = \mathrm{A} + 2(\mathrm{AB}' - \mathrm{BA}').$$

Ainsi

$$\mathrm{A} + 2(\mathrm{AB}' - \mathrm{BA}') = q\mathrm{P}^3.$$

Chaque terme de AB′ a la forme $x^2q^{x^2+y^2}$; (x *imp.*, y *pair*) chaque terme de BA′ a la forme $y^2q^{x^2+y^2}$.

Conséquemment, notre égalité (13) se réduit à

$$\sum x^2q^{x^2} + 2\sum(x^2 - y^2)q^{x^2+y^2} = q\mathrm{P}^3. \tag{14}$$

D'après celle-ci : *dans le développement de* qP³, *chaque exposant est, ou un carré, ou la somme de deux carrés* (*).

(*) Cette propriété, évidente à l'inspection de l'égalité (13), résulte aussi de la formule

$$q\mathrm{P}^3 = q(1 - 3q^4 + 5q^{12} - 7q^{24} + 9q^{40} - \cdots)^2. \tag{11}$$

En effet, dans la parenthèse, chaque exposant a la forme $2n(n+1)$. Donc, tout terme du premier membre contient une puissance de q marquée par

$$2n(n+1) + 2n'(n'+1) + 1.$$

Or, si l'on multiplie et qu'on divise par 2, ce trinôme devient

$$\frac{1}{2}\left[(2n+1)^2 + (2n'+1)^2\right] = \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + (x-y)^2\right] = x^2 + y^2.$$

Notons, en passant, que : *le quadruple de la somme de deux nombres triangulaires, augmenté de* 1, *égale une somme de deux carrés* (ou *égale un carré*).

Par exemple,

$$4\left(\frac{5 \cdot 6}{2} + \frac{9 \cdot 10}{2}\right) + 1 = 241 = 10^2 + 11^2.$$

VI. La combinaison des égalités (14), (11) donne celle-ci :

$$\left.\begin{array}{l} q(1 - 3q^4 + 5q^{12} - 7q^{24} + 9q^{40} - \cdots)^2 \\ = \sum x^2 q^{x^2} + 2\sum (x^2 - y^2) q^{x^2+y^2} = \sum x^2 q^{x^2} + 2\sum A_n q^n ; \end{array}\right\} \quad (15)$$

pourvu que

$$n = x^2 + y^2, \quad (16)$$

$$A_n = \sum (x^2 - y^2) \text{ (*)}. \quad (17)$$

Soit, par exemple,

$$n = 85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2 ;$$

puis

$$A_{85} = 81 + 49 - 4 - 36 = 90.$$

En effet, dans le carré de

$$1 - 3q^4 + 5q^{12} - 7q^{24} + 9q^{40} - 11q^{60} + 13q^{84} - \cdots,$$

le coefficient de q^{84} est

$$2(1 \cdot 13 + 7 \cdot 11) = 2 \cdot 90 \text{ (**)},$$

VII. *Développement de* P. — Nous avons trouvé

$$P = (1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots)^2. \quad (10)$$

Donc, si nous faisons

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' = \sum_0^\infty (-1)^l q^{3l^2 \mp l} \\ = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + q^{44} + q^{52} - q^{70} - q^{80} \\ + q^{102} + q^{114} - q^{140} - q^{154} + q^{184} + q^{200} - \cdots \text{ (***)}, \end{array}\right\} \quad (18)$$

la série P se déduira, de α'^2, par le changement de q en q^2.

(*) La dernière formule résulte, immédiatement, de l'égalité (11); mais la démonstration est moins claire que celle qui vient d'être exposée. De plus, si k est le nombre des solutions de l'équation (16), la valeur de A_n peut être remplacée par l'une ou l'autre de ces deux-ci :

$$A_n = 2\Sigma x^2 - kn, \quad A_n = kn - 2\Sigma y^2,$$

peut-être plus commodes que la première, dans la plupart des cas.

(**) Faisons encore observer que :

$$81 - 4 = 7 \cdot 11, \quad 49 - 36 = 1 \cdot 13.$$

(***) *Recherches...*, p. 17.

Or,

$$\left.\begin{aligned}\alpha'^2 = 1 &- 2q^2 - q^4 + 2q^6 + q^8 + 2q^{10} - 2q^{12} - 2q^{16} - 2q^{18} + q^{20} \\ &+ 2q^{26} + 3q^{28} - 2q^{30} + 2q^{32} - 2q^{38} - 2q^{40} - 2q^{46} - q^{48} + 2q^{52} \\ &+ 2q^{54} - 2q^{56} + 2q^{58} + q^{60} + 2q^{62} + 2q^{66} - 2q^{68} - 2q^{70} + 2q^{72} \\ &- 2q^{76} - 4q^{80} + q^{88} - 2q^{90} + 2q^{96} + 2q^{100} + 2q^{102} + q^{104} - 2q^{106} \\ &+ 2q^{110} + 2q^{112} - 2q^{118} - 2q^{122} - 2q^{126} + 2q^{128} - 4q^{132} - 2q^{138} \\ &- q^{140} + 2q^{142} + 2q^{146} - 2q^{154} + 2q^{156} + 4q^{158} + q^{160} + 2q^{166} \\ &- 2q^{168} + 2q^{170} - 2q^{172} + 2q^{178} - 2q^{182} - 2q^{186} - 2q^{188} - 2q^{192} \\ &+ 2q^{200} + \cdots (^*);\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

donc

$$P = 1 - 2q^4 - q^8 + 2q^{12} + q^{16} + 2q^{20} - 2q^{24} - \cdots; \qquad (20)$$

et, d'après ce que l'on a vu ci-dessus (III) :

$$\left.\begin{aligned}&(1 - 2q^4 - q^8 + 2q^{12} + q^{16} + 2q^{20} - 2q^{24} - \cdots)^3 \\ =\;&(1 - 3q^4 + 5q^{12} - 7q^{24} + 9q^{40} - \cdots)^2 \\ =\;&(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots)^6 \, (^{**}).\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

VIII. *Loi des coefficients.* — Soient, dans l'égalité (19) :

$$\alpha'^2 = \sum_0^\infty L_n q^{2n}, \qquad (22)$$

$$2n = (3l^2 \mp l) + (3l'^2 \mp l'). \qquad (23)$$

On a

$$(-1)^l q^{3l^2 \mp l} \times (-1)^{l'} q^{3l'^2 \mp l'} = (-1)^{l+l'} q^{2n}.$$

Donc, si l et l' sont *inégaux*,

$$L_n = \sum (-1)^{l+l'}, \qquad (24)$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les solutions, *entières et positives*, de l'équation (23).

(*) *Recherches...*, p. 41. Ce développement a été obtenu de deux manières différentes : il y a donc lieu de le croire exact.

(**) Cette double égalité devient évidente si l'on fait attention que la formule connue :

$$\alpha' = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^8)\ldots,$$

donne

$$P = \left[(1 - q^4)(1 - q^8)(1 - q^{12})(1 - q^{16})\ldots\right]^2.$$

Mais, si $l' = l$, ou

$$n = 3l^2 \mp l,$$

on doit prendre

$$L_n = 1 + \sum (-1)^{l+l'}, \qquad (24^{bis})$$

pourvu que, dans cette nouvelle formule, l et l' soient supposés *inégaux* (*).

Soit, par exemple,

$$n = 3 \,.\, 5^2 - 5 = 70.$$

L'équation (23) devient

$$140 = (3l^2 \mp l) + (3l'^2 \mp l').$$

Celle-ci est vérifiée par

$$l = l' = 5; \quad l = 0, l' = 7; \quad l = 7, \quad l' = 0.$$

Donc le coefficient de q^{140} doit être

$$1 + 2(-1)^7 = -1;$$

ce qui est exact.

IX. *Suite.* — L'équation (23) peut être remplacée par

$$24n + 2 = (6l \mp 1)^2 + (6l' \mp 1)^2 \text{ (**)}. \qquad (25)$$

Ainsi, sauf le cas où $n = 3\lambda^2 \mp \lambda$, L_n *égale l'excès du nombre des solutions de l'équation* (25), *dans lesquelles* l *et* l' *sont de même parité, sur le nombre des solutions dans lesquelles ces nombres sont de parités contraires* (***). Mais cet énoncé peut être simplifié, au moyen des remarques suivantes :

1° On peut substituer, au second membre de l'équation,

$$(6x + 1)^2 + (6y + 1)^2,$$

x et y étant *positifs* ou *négatifs ;*

(*) *Recherches...*, p. 39.
(**) *Ibid.*, p. 41.
(***) *Loc. cit.*

2° Il est visible (et connu) (*) que

$$(6x + 1)^2 + (6y + 1)^2 = 2\left[(3x + 3y + 1)^2 + (3x - 3y)^2\right]$$

Donc l'équation (23) devient

$$12n + 1 = (3x + 3y + 1)^2 + (3x + 3y)^2,$$

ou, finalement,

$$12n + 1 = (3u + 1)^2 + (3v)^2;$$

u, v étant des *quantités entières, positives ou négatives* (**).

Par conséquent : $\frac{1}{2}$ L_n *égale l'excès du nombre des valeurs paires, sur le nombre des valeurs impaires, de* v.

X. *Remarque.* — Ce nouvel énoncé suppose que $12n + 1$ *n'est pas un carré parfait* (***). Lorsque $12n + 1$ a la forme λ^2, la valeur de L_n, déduite de la règle (25), doit être augmentée d'une unité.

XI. *Autre remarque.* — Si $12n + 1$ est un nombre premier, comme il a la forme $4\mu + 1$, il est décomposable, d'une seule manière, en une somme de deux carrés : l'un est $(3u + 1)^2$; l'autre, $(3v)^2$. On est donc conduit à ce petit théorème d'Arithmétique, à peu près évident :

Tout nombre premier, de la forme $12\mu + 1$, *est la somme des carrés d'un multiple de* 3, *et d'un multiple de* 3 *augmenté ou diminué de* 1 (ᴵⱽ).

(*) Voir, par exemple, le Mémoire de M. Genocchi (*Nouvelles Annales*, t. XIII).

(**) De

$$x + y = u, \qquad x - y = v,$$

on conclut que :

Si u et v sont *pairs*, x et y sont *de même parité*;

Si u et v sont *impairs*, x et y sont *de parités contraires* ;

etc.

(***) C'est le cas d'exception signalé plus haut.

(ᴵⱽ) Dans le cas considéré, $L_n = \pm 2$, selon que v est *pair* ou *impair*.

CCXCVI (*). — Sur le Problème de Pétersbourg (**).

(*Décembre* 1877.)

I. « *Pierre, se proposant de jeter en l'air une pièce de monnaie, promet de donner à Paul* 1 *ducat si, dès le* 1^{er} *coup, cette pièce étant tombée, montre la face;* 2, *si cela n'arrive qu'au* 2^e *coup;* 4, *si ce n'est qu'au* 3^e, *et ainsi de suite, en doublant à chaque coup. On demande le sort de Paul.* »

Les probabilités de l'arrivée de *face*, au 1er coup, au 2e, ..., au $n^{\text{ième}}$, sont

$$\frac{1}{2},\quad \left(\frac{1}{2}\right)^2,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^3,\quad \ldots,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Les gains correspondants sont

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad \ldots,\quad 2^{n-1} \text{ ducats.}$$

Par conséquent, le *sort* de Paul (ou son *espérance mathématique*), est

$$1.\frac{1}{2}+2.\left(\frac{1}{2}\right)^2+2^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n}{2}.$$

« Or (dit Lacroix), puisqu'il n'est pas impossible que *face*
» n'arrive qu'après un nombre de coups plus grand que tel
» nombre qu'il plaira d'assigner, ne s'ensuit-il pas qu'avant
» de commencer le jeu, il faut supposer ce nombre infini?
» La mise de Paul doit donc être infinie; mais quel homme
» sensé voudra risquer à ce jeu, non pas une somme infinie,
» ce qui est absurde, mais même une somme tant soit peu forte?
» Voilà le paradoxe que les géomètres ont cherché à expliquer. »

On n'a peut-être pas fait attention à ceci : Pierre, qui promet à Paul de lui donner 1f, 2f, 4f, 8f, ..., doit commencer par établir

(*) Extraite d'un *Traité* inédit.

(**) Proposé à Montmort, par Nicolas Bernoulli (*Mémoires de St-Pétersbourg*, vers 1720; *Analyse des jeux de hasard*).

qu'il est *en état de payer*. Si Pierre disait : « Voilà une somme » de 1024 francs, sur laquelle vous prélèverez 1^f, 2^f, 4^f, 8^f, ..., » si *face* arrive au 1^{er} coup, au $2^{ième}$, au $3^{ième}$, ... Si, au $11^{ième}$ coup, » je n'ai pas amené *face*, la partie sera nulle, et nous retirerons » nos mises »; il n'y aurait plus de paradoxe : l'enjeu de Paul devrait être $\left(\frac{11}{2}\right)^f$ (*).

II. *Variante. — Pierre promet, à Paul, de lui donner* 1^f, 2^f, 3^f, ..., n^f, *si* FACE *arrive au* 1^{er} *coup, au* $2^{ième}$, ..., *au* $n^{ième}$. *Quelle est l'espérance mathématique de Paul?*

$$E = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}.$$

Cette quantité E tend, très rapidement, vers 2. D'ailleurs, la probabilité que Paul gagnera (la partie s'arrêtant, au plus tard, au $n^{ième}$ coup) est

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n};$$

et la probabilité que Pierre gagnera est seulement $\frac{1}{2^n}$.

Si donc la mise de Pierre est n francs, la mise de Paul doit être, d'après la *règle des paris :*

$$m = n^f \frac{2^n}{2^{n-1}} < 2n^f.$$

Il n'y a plus rien d'*excessif*.

(*) Poisson a fait une remarque analogue à celle-ci (*Recherches sur la Probabilité des jugements*, p. 73).

CCXCVII. — Sur un cas particulier de la formule du binôme.

(*Août* 1888) (*).

I. Soit, en général,

$$S_n = \varphi(p) = 1 + C_{p,1}x + C_{p+1,2}x^2 + \cdots + C_{p+n-2,n-1}x^{n-1}, \qquad (1)$$

la somme des n premiers termes du développement de $(1-x)^{-p}$, p étant un *nombre entier*. La multiplication par $1-x$ donne, au moyen d'une propriété bien connue (**),

$$(1-x)\varphi(p) = \varphi(p-1) - C_{p+n-2,n-1}x^n; \qquad (2)$$

puis, par le changement de p en $p-1$, $p-2$, ... 3, 2 :

$$\begin{aligned}
(1-x)\varphi(p-1) &= \varphi(p-2) - C_{p+n-3,n-1}x^n,\\
(1-x)\varphi(p-2) &= \varphi(p-3) - C_{p+n-4,n-1}x^n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(1-x)\varphi(2) &= \varphi(1) \quad - C_{n,n-1}x^n.
\end{aligned}$$

Mais

$$\varphi(1) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x};$$

donc, par une élimination facile :

$$\left.\begin{aligned}
&(1-x)^{p-1}S_n + \left[C_{n,n-1} + C_{n+1,n-1}(1-x) + \cdots + C_{n+p-2,n-1}(1-x)^{p-2}\right]x^n\\
&= \frac{1-x^n}{1-x}.
\end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Cette relation, que nous croyons nouvelle, ramène le calcul de S_n, à celui d'un polynôme composé de $p-1$ termes : si n est beaucoup plus grand que p, le second calcul sera bien plus simple que le premier.

(*) Addition à la *Note* CCXCVI.

(**) $C_{m,q} - C_{m-1,q-1} = C_{m-1,q}$.

Soit, par exemple, $p = 3$, $n = 100$. On aura

$$(1-x)^2 S_{100} = \frac{1-x^{100}}{1-x} - \left[100 + 5\,050(1-x) + 171\,700(1-x)^2\right]x^{100}.$$

II. *Remarque. — L'équation*

$$\frac{1-x^n}{1-x} - \left[C_{n,n-1} + C_{n+1,n-1}(1-x) + \cdots + C_{n+p-2,n-1}(1-x)^{p-2}\right]x^n = 0 \quad (3)$$

a p — 1 *racines égales à* 1.

III. La relation (A) peut être mise sous une forme plus simple.

On a

$$S_n = (1-x)^{-p} - R_n,$$

R_n étant le *reste*. Donc, en supprimant, dans les deux membres, $\frac{1}{1-x}$:

$$(1-x)^p R_n = \left[C_{n-1,n-1} + C_{n,n-1}(1-x) + \cdots + C_{p+n-2,n-1}(1-x)^{p-1}\right]x^n \text{ (*)}. \quad \text{(B)}$$

IV. *Remarque.* — Le *reste* R_n *est le produit de la fonction proposée,* $(1-x)^{-p}$, *par un polynôme entier.*

V. *Autre remarque.* — On a

$$R_n = C_{p+n-1,p-1}x^n + C_{p+n,p-1}x^{n+1} + C_{p+n+1,p-1}x^{n+2} + \cdots;$$

donc la relation (B) peut être écrite ainsi :

$$\left.\begin{aligned}&(1-x)^p\left[C_{p+n-1,p-1} + C_{p+n,p-1}x + C_{p+n+1,p-1}x^2 + \cdots\right]\\ &= C_{n-1,n-1} + C_{n,n-1}(1-x) + \cdots + C_{p+n-2,n-1}(1-x)^{p-1} \text{ (**)}.\end{aligned}\right\} \quad \text{(C)}$$

(*) Si l'on observe que, pour $p = 1$,

$$R_n = x^n + x^{n+1} + \cdots = \frac{x^n}{1-x};$$

on peut démontrer, *directement,* l'égalité (B).

(**) Cette égalité (C) rappelle, jusqu'à un certain point, la formule (6) de la *Note* LV (t. I, p. 218).

Par exemple, comme il est facile de le vérifier :

$$(1-x)^3\left[15 + 21x + 28x^2 + 36x^3 + 45x^4 + \cdots\right] \\ = 1 + 4(1-x) + 10(1-x)^2.$$

VI. *Séries logarithmiques.* — Pour abréger, représentons par

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots,$$

la série contenue dans le premier membre de (C), et par

$$B_0 + B_1(1-x) + B_2(1-x)^2 + \cdots + B_{p-1}(1-x)^{p-1},$$

le second membre.

Nous aurons

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots \\ = B_0(1-x)^{-p} + B_1(1-x)^{-p+1} + \cdots + B_{p-2}(1-x)^{-2} + \frac{B_{p-1}}{1-x};$$

puis, par intégration,

$$A_0x + \frac{1}{2}A_1x^2 + \frac{1}{3}A_2x^2 + \cdots = \frac{B_0}{p-1}\left[\frac{1}{(1-x)^{p-1}} - 1\right] \\ + \frac{B_1}{p-2}\left[\frac{1}{(1-x)^{p-2}} - 1\right] + \cdots + \frac{B_{p-2}}{1}\left[\frac{1}{1-x} - 1\right] - B_{p-1}\,\mathcal{l}(1-x);$$

ou

$$\left.\begin{aligned} B_{p-1}\,\mathcal{l}(1-x) &= \frac{B_0}{p-1}\left[\frac{1}{(1-x)^{p-1}} - 1\right] + \frac{B_1}{p-2}\left[\frac{1}{(1-x)^{p-2}} - 1\right] + \cdots \\ &+ \frac{B_{p-2}}{1}\left[\frac{1}{1-x} - 1\right] - \left[A_0x + \frac{1}{2}A_1x^2 + \frac{1}{3}A_2x^3 + \frac{1}{4}A_4x^4 + \cdots\right]. \end{aligned}\right\} \text{(D)}$$

Voici donc une *infinité d'infinités* (*) de développements du logarithme népérien de $(1-x)$.

VII. *Application.* — Soient $n = 1$, $p = 2$, auquel cas :

$$A_0 = 2, \quad A_1 = 3, \quad A_2 = 4, \quad A_3 = 5, \quad A_4 = 6, \ldots; \quad B_0 = B_1 = 1.$$

(*) Les coefficients A_0, A_1, ..., B_0, B_1, ... sont fonctions de n et de p.

La relation (D) se réduit à

$$\mathcal{L}(1-x) = \frac{x}{1-x} - \left[2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^4 + \frac{6}{5}x^5 + \cdots\right]; \quad (3)$$

ce qui ne diffère, qu'en apparence, de la formule connue (*).

CCXCVIII. — Extraits d'une lettre à M. Hermite.

(16 *mai* 1880.)

... Je suis prédestiné, semble-t-il, à découvrir des théorèmes connus. Sans la chercher, je viens de trouver une démonstration, *simple,* du beau théorème que vous avez donné dans le *Journal de Borchart :*

$$C_{2n+1,\,p-1} + C_{2n+1,\,2p-2} + C_{2n+1,\,3p-3} + \cdots = \mathfrak{M}(p),$$

p *étant un nombre premier, impair.*

(Vous vous rappelez, peut-être, que je n'ai pas saisi votre démonstration; mais peu importe).

Depuis que j'ai démontré le théorème de Staudt, je m'évertue à en tirer des conséquences : vous allez voir que votre théorème en est une.

Du temps que..., j'ai donné cette relation :

$$2C_{2n+1,\,2}\,B_1 + 2^3C_{2n+1,\,4}\,B_3 + \cdots + 2^{2n-1}C_{2n+1,\,1}\,B_{2n-1} = n$$

(*Comptes rendus,* t. LIV). Était-elle *nouvelle?* Peu importe encore.

Considérons, dans le premier membre, les Nombres de Ber-

(*) Le second membre égale

$$(1-2)\,x + \left(1-\frac{3}{2}\right)x^2 + \left(1-\frac{4}{3}\right)x^3 + \left(1-\frac{5}{4}\right)x^4 + \cdots,$$

ou

$$-\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right].$$

noulli *admettant la fraction* $\frac{1}{p}$ (Passez-moi cette locution abréviative). Ce sont :

$$B_{p-1-1},\quad B_{2(p-1)-1},\quad B_{3(p-1)-1},\ \ldots$$

Ces quantités admettent, comme coefficients respectifs :

$$2^{p-1}C_{2n+1,\,p-1},\quad 2^{2(p-1)}C_{2n+1,\,2p-2},\quad 2^{3(p-1)}C_{2n+1,\,3p-3},\ \ldots$$

Ainsi, dans le premier membre, *la somme des fractions ayant* p *pour dénominateur* est

$$\frac{1}{p}\left[2^{p-1}C_{2n+1,\,p-1} + 2^{2(p-1)}C_{2n+1,\,2p-2} + 2^{3(p-1)}C_{2n+1,\,3p-3} + \cdots\right] = \frac{N}{p},$$

N étant un nombre entier.

Le second membre est entier. Or, *les fractions* $\frac{N}{p}$, $\frac{N'}{p'}$, $\frac{N''}{p''}$, ... *ne peuvent se réduire entre elles;* donc *chacune est réductible à un nombre entier.* Autrement dit :

$$2^{p-1}C_{2n+1,\,p-1} + 2^{2(p-1)}C_{2n+1,\,2p-2} + 2^{3(p-1)}C_{2n+1,\,3p-3} + \cdots = \mathfrak{M}(p);$$

ou, en négligeant des multiples de p (d'après le théorème de Fermat) :

$$C_{2n+1,\,p-1} + C_{2n+1,\,2p-2} + C_{2n+1,\,3p-3} + \cdots = \mathfrak{M}(p).$$

Notez que c'est seulement après être arrivé à ce résultat, que j'ai songé à votre théorème! ...

CCXCIX. — Sur une application du théorème de Bayes, faite par Laplace (*).

(*Août* 1888.)

I. Dans son Mémoire, le jeune et savant Professeur à l'École Militaire (**), énonce ainsi le théorème, sans nommer Bayes :

Principe. — *Si un événement peut être produit par un nombre* n *de causes différentes, les probabilités de ces causes prises de l'événement* (sic) *sont entre elles comme les probabilités de l'événement prises de ces causes, et la probabilité de l'existence de chacune d'elles est égale à la probabilité de l'événement prise de cette cause, divisée par la somme de toutes les probabilités de l'événement prises de chacune de ces causes.*

Il en fait l'application au problème suivant :

Si une urne renferme une infinité de billets blancs et noirs (sic) *dans un rapport inconnu, et que l'on en tire* p + q *billets dont* p *soient blancs et* q *soient noirs ; on demande la probabilité qu'en tirant un nouveau billet de cette urne, il sera blanc.*

Au moyen d'une méthode bien connue aujourd'hui, l'illustre Auteur trouve que « *la probabilité entière de tirer un billet blanc de l'urne* » est

$$E = \frac{p+1}{p+q+2}. \tag{1}$$

Ici, les réflexions et les questions se présentent en foule. Comment Laplace n'a-t-il pas été frappé de la simplicité de ce résultat? Comment ne s'est-il pas aperçu que son calcul, fort simple dans le cas d'une *infinité* de billets, deviendrait prolixe et

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences — Savants étrangers*, 1774.

(**) En 1774, Laplace, qui avait vingt-cinq ans, signait : *de la Place*.

fastidieux si l'on supposait le nombre des billets égal à dix mille, par exemple? Comment ne s'est-il pas demandé si la formule (1) ne subsisterait pas dans le cas d'un *nombre quelconque* de billets, supérieur à $p+q$? etc., etc. (*).

II. Quoi qu'il en soit, nous rappellerons, ici, la solution du problème général suivant :

Une urne A *contenait, primitivement,* s *boules. On en a tiré, au hasard,* m *boules blanches,* m′ *boules non blanches. Quelle est la probabilité d'extraire, de l'urne modifiée, une nouvelle boule blanche* (**)?

Après la sortie des $m+m'$ boules, l'urne renferme $s-m-m'$ boules, de diverses couleurs, en *proportion inconnue. L'événement attendu* est la sortie d'une boule blanche, de l'urne *modifiée.*

La probabilité P, *de cet événement, ne sera pas altérée, si les causes dont il dépend subissent des modifications inconnues* (***).

Nous pouvons donc *mettre à part, sans les regarder,* 1 boule, 2 boules, 3 boules, ..., et même $(s-m-m'-1)$ boules : P n'aura pas changé.

Mais alors l'urne A est remplacée par une urne auxiliaire ou *fictive* B, *contenant, primitivement,* m + m′ + 1 *boules, et d'où il est sorti* m *boules blanches,* m′ *boules non blanches.*

(*) On pourrait faire, aussi, beaucoup de remarques sur la rédaction. Le *futur* admirable écrivain s'énonce ainsi : « *la probabilité de tirer un billet blanc de l'urne en vertu du rapport* x. » — « *Si l'on intègre*

$$\int\left(1-\frac{p+q}{p}z\right)^p\left(1+\frac{p+q}{p}z\right)^q dz \text{ » :}$$

comme si l'on intégrait une intégrale! Etc., etc.

(**) *Problèmes et théorèmes de Probabilités; Mémoires de l'Académie de Belgique,* 1884, p. 7.

(***) *Journal de Liouville,* t. VI (1841), p. 78; *Un nouveau Principe de probabilités;* etc.

On ne peut faire, sur la composition de B, que *deux* hypothèses :

m *blanches,* $m'+1$ *non blanches;*	$m+1$ *blanches,* m' *non blanches.*

Les probabilités de ces hypothèses sont proportionnelles aux nombres

$$m(m-1)\ldots 1 \,.\, (m'+1)\,m'\ldots 2,$$

$$(m+1)m\ldots 2\ m'(m'-1)\ldots 1;$$

ou, plus simplement, proportionnelles à

$$m'+1,\quad m+1.$$

Ainsi, ϖ_1, ϖ_2 étant ces probabilités :

$$\varpi_1 = \frac{m'+1}{m+m'+2},\quad \varpi_2 = \frac{m+1}{m+m'+2}.$$

Mais, évidemment : la *première hypothèse est incompatible avec l'événement attendu; la seconde le rend nécessaire.*

En conséquence, *la probabilité cherchée,* P, *est égale à la probabilité* ϖ_2 *de cette seconde hypothèse.* Autrement dit :

$$P = \frac{m+1}{m+m'+2}; \tag{2}$$

et ce résultat s'accorde avec la formule (1).

III. *Remarque.* — Si l'on a tiré, de l'urne A, m boules blanches, m' boules noires, m'' boules rouges, etc.; les probabilités d'extraire, à un nouveau tirage, une boule blanche, *ou* une boule noire, *ou* une boule rouge, etc, sont :

$$\frac{m+1}{m+m'+m''+\cdots+k},\quad \frac{m'+1}{m+m'+m''+\cdots+k},$$

$$\frac{m''+1}{m+m'+m''+\cdots+k},\ \ldots;$$

k étant le nombre des *couleurs* (*).

(*) Ce mot est pris dans son acception *usuelle.*

IV. Dans son Mémoire, Laplace donne une démonstration du théorème de Jacques Bernoulli, absolument *inacceptable.* Du reste, les diverses démonstrations de ce beau théorème, que je connais, pèchent toutes en quelque point : sauf, peut-être, celle que m'a communiquée, autrefois, M. Mangon, Lieutenant d'Artillerie. Malheureusement, elle n'a pas été imprimée.

P. S. Une discontinuité. — *Soit une urne* A, *contenant* b *boules blanches et* n *boules noires. On les répartit, sans les voir ni les toucher, entre* k *urnes auxiliaires,* B, C, D, ... H. *Cela posé, la probabilité d'extraire une boule blanche, soit de* B, *soit de* C, etc., *égale* $\frac{b}{b+n}$, EXCEPTÉ si k *surpasse* b + n.

Spa, 30 août 1888.

Fin des *Mélanges mathématiques.*

ERRATA.

Tome I, page 254, *au lieu de* Alesséides, *lisez* Élassoïdes.

Tome III, page 64, ligne première, *au lieu de* $\dfrac{\pi}{\sin q\pi}$, *lisez* $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$.

— — 161, ligne pénultième, *au lieu de* vien, *lisez* vient.

— — 212, *Ajoutez* ceci :

Autre addition. — (*Juillet* 1888.)

VII. *Le produit* $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)(a''^2+b''^2)$ ... *est, généralement, la somme de quatre carrés* (*).

VIII. *Si un nombre impair,* N, *est la somme de deux carrés, chacun des nombres* N^2, N^3, ... *est la somme de quatre carrés.*

(*) Il *peut* y avoir exception, *si* $a=b$, ou *si* $a'=b'$, etc.

LISTE DES PUBLICATIONS DE L'AUTEUR.

Le Géomètre (*).

1. Question proposée au Concours général de 1833.
2. Analyse indéterminée, du premier degré.
3. Développements de $\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \cdots$, etc.

Journal de Liouville.

4. Solution d'un problème de Probabilité, relatif au *jeu de rencontre.* (T. II)
5. Note sur un problème de Combinaisons. (T. III.)
6. Note sur une équation aux différences finies. (*Ibid.*)
7. Addition à cette Note. (T. IV.)
8. Note sur la théorie des nombres. (*Ibid.*)
9. Solution nouvelle de cette question : Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le décomposer en triangles, au moyen de diagonales? (*Ibid.*)
10. Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples. (*Ibid.*)
11. Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{(1+x^2)^n}$. (T. V.)
12. Problème de Combinaisons. (*Ibid.*)
13. Solution d'un problème de Combinaisons. (T. VI.)
14. Deux problèmes de Probabilités. (*Ibid.*)
15. Théorème sur la réduction d'une intégrale multiple (*Ibid.*)
16. Problème de calcul intégral. (*Ibid.*)
17. Autres problèmes. (*Ibid.*)
18. Note sur la sommation de quelques séries. (T. VII.)
19. Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum. (*Ibid.*)
20. Note sur une formule de Combinaisons. (*Ibid.*)
21. Note sur une formule relative aux intégrales multiples. (T. VIII.)
22. Note sur une formule d'Euler. (T. IX.)
23. Note sur un problème de Mécanique. (T. XI.)
24. Sur les trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde (T. XII.)
25. Note sur la projection stéréographique. (T. XIX.)

Journal de Resal.

26. Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet. (T. I.)

(*) Ce Recueil, dont il n'a paru qu'un *fragment* de volume, était dirigé par GUILLARD.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences.

27. Théorème sur les surfaces développables. (T. XVII.)
28. Démonstration d'un nouveau théorème de Statique. (T. XXIV.)
29. Note sur une surface à courbure moyenne nulle. (T. XLI.)
30. Note sur deux surfaces à courbure moyenne nulle. (*Ibid.*)
31. Mémoire sur les surfaces à courbure moyenne nulle (extrait). (*Ibid.*)
32. Réponse à une réclamation (*). (*Ibid.*)
33. Sur le calcul de la latitude, par la méthode de M. Babinet. (T. XLII.)
34. Note à l'occasion d'un théorème de M. Serret. (*Ibid.*)
35. Sur quelques points de la théorie des séries. (T. XLIII.)
36. Sur la théorie des développées. (T. XLV.)
37. Sur un cas particulier de la formule du binôme. (*Ibid.*)
38. Sur une application de la formule du binôme aux intégrales eulériennes. (T. XLVII)
39. Note sur la théorie des équations. (*Ibid.*)
40. Note sur une fonction homogène entière. (*Ibid.*)
41. Note sur l'équation du troisième degré. (T. LIV.)
42. Sur les Nombres de Bernoulli, et sur quelques formules qui en dépendent. (*Ibid.*)
43. Remarques sur une communication de M. *Le Besgue*, relative aux Nombres de Bernoulli. (T. LVIII.)
44. Sur le calcul des Nombres de Bernoulli. (*Ibid.*)
45. Mémoire sur la transformation des séries, et sur quelques intégrales définies (extrait). (T. LIX.)
46. Sur les Nombres d'Euler. (T. LXVI.)
47. Remarques sur une Note de M. *Darboux*, relative à la surface des centres de courbure d'une surface algébrique. (T. LXXI.)
48. Sur une communication de M. *Didion*, concernant une expression du rapport de la circonférence au diamètre. (T. LXXIV)
49. Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet. (T. LXXVII.)
50. Sur la projection stéréographique. (T. LXXVIII.)
51. Sur l'addition des fonctions elliptiques. (*Ibid.*)
52. Note sur les surfaces orthogonales. (T. LXXIX.)
53. Note sur les Nombres de Bernoulli. (T. LXXXI.)

Société Philomathique de Paris.

54. Transformation des variables, dans les intégrales multiples (extrait). (Novembre 1839.)
55. Théorème sur la réduction d'une intégrale multiple. (Juin 1840.)
56. Problème de Combinaisons. (Août 1840.)

(*) Voir, dans l'*Appendice*, la *Lettre à M. Élie de Beaumont*.

57. Sur un cas particulier de la surface dont l'aire est un minimum. (Mai 1841.)
58. Sur certaines séries numériques. (Novembre 1841.)
59. De la surface réglée, dont l'aire est un minimum. (Juin 1842.)
60. Quelques propriétés de l'héliçoïde à plan directeur. (Novembre 1843.)
61. Théorèmes sur les fractions continues périodiques simples. (Novembre 1844.)
62. Sur la théorie des solutions singulières. (Février 1846.)
63. Théorème sur les surfaces gauches. (Février 1847.)
64. Théorèmes sur les surfaces gauches. (Novembre 1848.)
65. Nouvelle formule de quadratures. (Mars 1851.)
66. Sur le dernier Cahier du *Journal de l'École polytechnique*. (Avril 1854.)
67. Propositions sur la théorie des séries. (Mars 1858.)
68. Théorème sur les cycloïdes accourcies. (Mai 1858.)
69. Sur des suites récurrentes. (Avril 1861).
70. Sur l'article 757 du Code civil. (Mars 1862).
71. Sur les normales à certaines surfaces. (Février 1863.)

Nouvelles Annales de Mathématiques (1re série).

72. Lettre sur la parabole. (T. I.)
73. Note sur le rapport de la circonférence au diamètre. (*Ibid.*)
74. Sur les fractions décimales périodiques. (*Ibid.*)
75. Analyse indéterminée, du premier degré. (T. III.)
76. Note sur la toroïde. (*Ibid.*)
77. Rectification d'un article sur les séries trigonométriques. (*Ibid.*)
78. Fractions continues périodiques. (T. IV.)
79. Remarques sur un problème du Concours d'Agrégation. (*Ibid.*)
80. Problème de Malfatti. (T. V.)
81. Sur les sphères tangentes à quatre plans donnés. (T. VI.)
82. Sur un théorème de M. Serret. (*Ibid.*)
83. Théorème sur les pyramides. (*Ibid.*)
84. Sur les foyers des courbes d'intersection de deux surfaces du second degré. (*Ibid.*)
85. Addition à un théorème de M. Paul Serret. (*Ibid.*)
86. Conditions d'équilibre de quatre forces non appliquées en un même point. (T. VII.)
87. Sur la fonction $LX + MY + NZ$. (*Ibid.*)
88. Sur les normales aux coniques. (*Ibid.*)
89. Lettre sur un *postulatum*. (*Ibid.*)
90. Théorie des fractions continues. (T. VIII.)
91. Sur le problème de la sphère tangente à quatre plans donnés. (T. IX.)
92. Sur l'enveloppe d'une tangente à deux cercles variables. (T. X.)
93. Sur la formule de Simpson. (*Ibid.*)
94. Théorèmes sur les hexagones inscrits ou circonscrits à une conique. (T. XI.)
95. Trigonométrie sphérique. — Théorème de Legendre. (*Ibid.*)
96. Note sur la théorie des roulettes. (T. XV.)

97. Sur les sommes des puissances semblables des nombres naturels. (*Ibid.*)
98. Sur la sommation de certaines séries. (*Ibid.*)
99. Remarques sur une Note de M. *Allégret.* (T. XVI.)
100. Théorèmes sur les aires paraboliques. (*Ibid.*)
101. Sur des formules de *Wronski.* (*Ibid.*)
102. Extraction, abrégée, de la racine carrée. (T. XVII.)
103. Théorème sur la série harmonique. (*Ibid.*)
104. Note sur les séries divergentes. (T. XVIII.)
105. Sur les coefficients binômiaux. (T. XIX.)
106. Sur la sommation de certains coefficients binômiaux. (*Ibid.*)
107. Note sur la solution d'un problème. (*Ibid.*)
108. Une rectification. (*Ibid.*)

Nouvelles Annales (2e *série*).

109. Sur un problème d'Algèbre légale, et sur une transformation de série. (T. II.)
110. Théorème sur les équations dont toutes les racines sont réelles. (*Ibid.*)
111. Sur l'équation du quatrième degré. (*Ibid.*)
112. Lettre sur le problème des *huit dames*. (T. III.)
113. Autres lettres. (*Ibid.*)
114. Sur un problème d'Analyse indéterminée. (T. VI)
115. Lettre sur un théorème de M. Lemoine, et sur une Note de M. Vallès. (T. IX.)
116. Sur quelques développements en séries. (*Ibid.*)
117. Sur une lettre de M. Le Besgue. (*Ibid.*)
118. Lettre à M. Abel Transon. (T. XII.)
119. Sur l'intégration des différentielles rationnelles. (*Ibid.*)
120. Une démonstration de la formule du binôme. (T. XIII.)
121. Propositions relatives à la théorie des nombres. (*Ibid.*)
122. Lettre sur une Note de M. *Bourguet.* (T. XIV.)
123. Sur une question proposée par M. *Bourguet.* (T. XIV.)
124. Sur deux Notes de M. le capitaine *Moreau.* (T. XVII.)
125. Sur un théorème de *Miquel.* (*Ibid.*)
126. Lettre sur la *conique des neuf points,* et sur le nombre 10. (*Ibid.*)
127. Note sur les aires des courbes paraboliques. (T. XX.)

Nouvelles Annales (3e *série*).

128. Notes diverses. (T. I.)
129. Sur la circonférence des neuf points. (T. II.)
130. Sur quelques développements de sin x et de cos x.
131. Remarques sur une Note de M. *Ibach.* (T. III.)
132. Démonstrations de deux théorèmes d'Arithmétique. (*Ibid.*)
133. Note sur le théorème de Lambert. (*Ibid.*)
134. Démonstration d'un théorème d'Arithmétique. (T. IV.)
135. Savin Realis. (T. V.)

Journal de l'École polytechnique.

136. Mémoire sur les surfaces gauches, à plan directeur. (29[e] Cahier.)
137. Note sur la théorie des solutions singulières. (31[e] Cahier.)
138. Mémoire sur les surfaces dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires. (37[e] Cahier.)
139. Mémoire sur la théorie des polyèdres. (41[e] Cahier.)

Nouvelle Correspondance mathématique.

140. Remarques sur l'intégrale $\int_0^\pi \mathcal{L}(1 - 2a\cos x + a^2)dx$. (T. I.)
141. Bacchus et Silène. (*Ibid.*)
142. Sur le Programme de l'École vétérinaire de Cureghem. (*Ibid.*)
143. Sur un lieu géométrique. (*Ibid.*)
144. Sur la formule du binôme. (*Ibid.*)
145. Décompositions en carrés. (*Ibid.*)
146. Sur les asymptotes des courbes algébriques. (*Ibid.*)
147. Sur un Mémoire de Libri. (T. II.)
148. Sur un théorème d'Arithmétique. (*Ibid.*)
149. Remarques sur un Mémoire de M. *Édouard Lucas*. (*Ibid.*)
150. Sur un produit de sinus. (*Ibid.*)
151. Remarques sur une Note de M. *Laisant*. (*Ibid.*)
152. Sur la transformation des équations. (*Ibid.*)
153. Note sur un lieu géométrique. (*Ibid.*)
154. Solution d'un problème proposé par M. *Brocard*. (*Ibid.*)
155. Quelques théorèmes sur la courbure des lignes. (*Ibid.*)
156. Sur l'intégration de $xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0$. (*Ibid.*)
157. Solutions de trois questions proposées. (T. III.)
158. Sur le développement de $1 \pm \sin(2p + 1)x$.
159. Centre de gravité d'un arc de cercle. (*Ibid.*)
160. Solution d'un problème proposé pour l'admission à l'École polytechnique. (*Ibid.*)
161. Démonstration d'un théorème relatif à la parabole. (*Ibid.*)
162. Sur la représentation géométrique des intégrales elliptiques. (*Ibid.*)
163. Intégration de $(3 - x)y'' - (9 - 4x)y' + (6 - 3x)y = 0$. (*Ibid.*)
164. Remarques sur divers articles de M. *Mansion*. (*Ibid.*)
165. Sur deux théorèmes de Sturm. (*Ibid.*)
166. Formule combinatoire. (*Ibid.*)
167. Sur des séries analogues à la série de Lambert. (*Ibid.*)
168. L'enseignement des Mathématiques, en Belgique. (*Ibid.*)
169. Quelques questions d'examens. (*Ibid.*)
170. Sur le théorème de Fermat. (T. IV.)
171. Théorème de MM. Smith et Mansion. (*Ibid.*)

172. Une question anglaise. (*Ibid.*)
173. Sur un théorème de M. Postula. (*Ibid.*)
174. Démonstration des formules de M. Tchébychef. (*Ibid.*)
175. Décomposition d'un cube en quatre cubes. (*Ibid.*)
176. Sur la méthode des isopérimètres. (*Ibid.*)
177. Démonstration d'un théorème sur l'ellipse. (*Ibid.*)
178. Sur les Nombres de Bernoulli (*Ibid.*)
179. Remarques sur une Note de M. *Latars.* (*Ibid.*)
180. Sur le problème des partis. (*Ibid.*)
181. Quelques quadratures. (*Ibid.*)
182. Sur certaines locutions incorrectes. (*Ibid.*)
183. Sur les Nombres de Bernoulli. (*Ibid.*)
184. Quelques identités. (T. V.)
185. Sur une suite de nombres impairs (*Ibid.*)
186. Sur la série de Lamé. (*Ibid.*)
187. Solutions de quatorze questions proposées. (*Ibid.*)
188. Une propriété du nombre 365. (*Ibid.*)
189. Sur la décomposition d'un cube en quatre cubes. (*Ibid.*)
190. Sur la Géométrie de la sphère. (*Ibid.*)
191. Remarque sur une Note de M. *Haerens.* (*Ibid.*)
192. Sur une épure de Géométrie descriptive. (*Ibid.*)
193. Sur les triangles homologiques. (*Ibid.*)
194. Remarques sur une Note de M. *Mansion.* (*Ibid.*)
195. La Loterie de l'Exposition. (*Ibid.*)
196. Sur la notation des Nombres de Bernoulli. (*Ibid.*)
197. Démonstration d'un théorème de M. Hermite. (T. VI.)
198. Lettre à M. Laisant. (*Ibid.*)
199. Un nouveau théorème empirique. (*Ibid.*)
200. Sur un système d'équations linéaires. (*Ibid.*)
201. Sur quelques développements de cos mx et de sin mx. (*Ibid.*)
202. Solutions de sept questions proposées. (*Ibid.*)
203. Lettre à M. J. *Neuberg.* (*Ibid.*)
204. Sur les coniques satisfaisant à quatre conditions. (*Ibid.*)
205. Sur une propriété des surfaces du second degré. (*Ibid.*)
206. Sur la cyclide. (*Ibid.*)
207. Sur l'intégrale $\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$. (*Ibid.*)
208. Remarques sur une série. (*Ibid.*)
209. Sur deux Notes de MM. Radicke et Leinekugel. (*Ibid.*)
210. Sur la série harmonique. (*Ibid.*)
211. Sur une équation d'Abel. (*Ibid.*)
212. Sur la quadrature des courbes paraboliques. (*Ibid.*)
213. L'enseignement des Mathématiques élémentaires, en Belgique. (*Ibid.*)
214. Une nouvelle théorie des tangentes. (*Ibid.*)
215. Lettre à M. Hermite. (*Ibid.*)
216. Lettre à M. Laisant. (*Ibid.*)

Académie de Belgique.

Mémoires.

217. Mémoire sur la transformation des variables, dans les intégrales multiples. 1840. Mémoire couronné. (*Mém. des sav. étr.*, in-4°, t. XIV.)
218. Recherche des lignes de courbure d'une surface. (*Ibid.*, t. XXXII).
219. Sur la transformation des séries, et sur quelques intégrales définies. 1865. (*Ibid.*, t. XXXIII.)
220. Sur les Nombres de Bernouilli et d'Euler. 1867. (*Mém. des memb.*, t XXXVII.)
221. Mémoire sur une transformation géométrique, et sur la surface des ondes. 1868. (*Mém. des memb.*, t. XXXVIII.)
222. Recherches sur quelques produits indéfinis. 1872. (*Ibid.*, t. XL.)
223. Notes d'Algèbre et d'Analyse. 1877. (*Ibid.*, t. XLII.)
224. Sur quelques formules relatives aux intégrales eulériennes. 1877. (*Ibid.*)
225. Remarques sur la théorie des moindres carrés. 1878. (*Ibid.*, t. XLIII, 1re partie.)
226. Note sur la quadrature des courbes paraboliques. 1880. (*Ibid.*, t. XLIII, 2de partie.)
227. Note sur les fonctions X_n, de Legendre. 1880. (*Ibid.*)
228. Mémoire sur une suite de polynômes entiers, et sur quelques intégrales définies. 1880. (*Ibid.*)
229. Sur les fonctions X_n, de Legendre (2e Mém.). 1881. (*Ibid.*, t. XLIV.)
230. Sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce. 1882. (*Ibid.*, t. XLV.)
231. Notes sur la théorie des fractions continues, et sur certaines séries. 1883. (*Ibid.*, t. XLV.)
232. Quelques théorèmes d'Arithmétique. 1884. (*Mém. des memb.*, t XLVI.)
233. Problèmes et théorèmes de Probabilités. 1884. (*Ibid.*, t. XLVI.)
234. Sur un développement de l'intégrale elliptique... (*Ibid.*, t. XLVI.)
235. Sur les fonctions X_n (troisième Mémoire). 1885. (*Ibid.*)
236. Sur quelques intégrales définies. (*Ibid.*)
237. Recherches sur les surfaces gauches. 1866. (*Mém.* in-8°, t. XVIII.)
238. Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces. 1874. (*Ibid.*, t. XXIV.)
239. Mémoire sur les fonctions X_n, de Legendre. 1879. (*Ibid.*, t. XXXI.)
240. Sur les fonctions X_n (seconde Note). (*Mém.* in-4°.)
241. Sur un tableau numérique, et sur son application à certaines transcendantes. (T. XLVII.)
242. Remarques sur certaines intégrales définies. (*Ibid.*)
243. Propriétés nouvelles des fonctions X_n. (*Ibid.*)
244. Propriétés nouvelles des fonctions X_n (supplément). (*Ibid.*)

Bulletins. (*2e série.*)

245. Recherches sur les déterminants. (T. XIII.)
246. Note sur l'intégration d'un système d'équations homogènes. (T. XXI.)

247. Application d'un problème de Géométrie à une question d'Analyse indéterminée. (T. XXII.)
248. De l'intégrale définie qui représente la somme des $p+1$ premiers termes du développement de $(\alpha+\beta)^m$. (T. XXIII.)
249. Note sur les surfaces orthogonales. (T. XXVI.)
250. Sur les roulettes et les podaires. (XXVII.)
251. Sur l'addition des fonctions elliptiques, de première espèce. (*Ibid.*)
252. Rapport sur la quatrième période du Concours quinquennal (1864-1868, t. XXVIII.)
253. Remarques sur l'équation $x^m - 1 = 0$. (T. XXIX.)
254. Sur la détermination de l'aire de l'ellipsoïde. (T. XXX.)
255. Note sur l'équation de Riccati. (T. XXXI.)
256. Théorème de Géométrie. (T. XXXII.)
257. Note sur une formule de M. Botesu. (T. XXXIII.)
258. Rapport sur un Mémoire de M. Gilbert. (*Ibid.*)
259. Rapport sur un Mémoire de M. Gilbert. (T. XXXVI.)
260. Rapport sur un Mémoire de concours. (T. XXXVIII.)
261. Rapport sur une Note de M. Mansion. (*Ibid.*)
262. Note sur le problème de Malfatti. (*Ibid.*)
263. Rapport sur une Note de M. Reinemund. (T. XXXIX.)
264. Rapport sur deux Mémoires de M. Saltel (*Ibid.*)
265. Rapport sur un travail de M. Houzeau. (T. XXXIX.)
266. Rapport sur un travail de M. Houzeau. (T. XL.)
267. Rapport sur un travail de M. Houzeau. (*Ibid.*)
268. Rapport sur une Note de M. Havrez. (*Ibid.*)
269. Rapport sur un travail de M. Houzeau. (T XLI.)
270. Rapport sur une Note de M. Le Paige. (*Ibid.*)
271. Rapport sur les tables de Logarithmes de MM. Namur et Mansion. (*Ibid.*)
272. Note sur les Nombres de Bernoulli. (T. XLII.)
273. Rapport sur plusieurs Notes de M. Saltel. (*Ibid.*)
274. Rapport sur un Mémoire de concours. (*Ibid.*)
275. Rapport sur une Note de M. Ghysens. (T. XLIII.)
276. Rapport sur une Note de M. Reinemund. (*Ibid.*)
277. Rapport sur une Note de M. Le Paige. (*Ibid.*)
278. Rapport sur une Note de M. Bosel. (*Ibid.*)
279. Rapport sur une Note de M. Mansion. (T. XLIII.)
280. Remarques sur un Rapport de M. Folie. (T. XLIV.)
281. Rapport sur un Mémoire de M. Lagrange. (*Ibid.*)
282. Rapport sur une Note de M. Mansion. (*Ibid.*)
283. Rapport sur une Note de M. Le Paige. (*Ibid.*)
284. Rapport sur une Note de M. Ghysens. (*Ibid.*)
285. Théorème d'Algèbre. (*Ibid.*)
286. Nouveau principe de Probabilités. (*Ibid.*)
287. Rapport sur deux Notes de M. Mansion. (T. XLV.)
288. Note sur les hexagones de Pascal et de Brianchon. (*Ibid.*)

289. Rapports sur deux Notes de M. Mansion. (T. XLVI.)
290. Note sur les hexagones de Pascal et de Brianchon (*Ibid.*)
291. Rapports sur deux Notes de M. Mansion (T. XLVIII.)
292. Rapport sur un Mémoire de M. Souillart. (*Ibid.*)
293. Rapport sur une Note de M. Le Paige. (T. XLIX.)
294. Rapport sur une Note de M. Saltel. (*Ibid.*)
295. Rapport sur un Mémoire de concours. (T. L.)

(3e *série*).

296. Carré magique de la *Villa Albani.* (T. II.)
297. Rapports sur des Notes de MM. Folie, Le Paige, Texeira, Mansion. (T. III.)
298. Quelques théorèmes de Géométrie élémentaire. (T. IV.)
299. Rapport sur une Note de M. Boblin. (*Ibid.*)
300. Sommaire d'un Mémoire sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries. (T. V.)
301. Rapport sur un Mémoire de M. Mansion. (*Ibid.*)
302. Note sur une série double. (T. VI.)
303. Rapport sur une Note de M. Sautreaux. (*Ibid.*)
304. Rapport sur deux Mémoires de concours. (*Ibid.*)
305. Quelques théorèmes d'Arithmétique. (T. VII.)
306. Rapport sur un Mémoire de M. Neuberg. (*Ibid.*)
307. Application d'un nouveau Principe de Probabilités. (T. VIII.)
308. Rapport sur un Mémoire de concours. (T. VIII.)
309. Note sur un travail de M. Boncompagni. (*Ibid.*)
310. Rapport sur un travail de M. Deruyts. (T. IX.)
311. Question d'Analyse indéterminée. (T. IX.)
312. Une récréation arithmétique. (*Ibid.*)
313. Rapport sur un Mémoire de M. Ernest Cesàro. (T. XI.)
314. Rapport sur un Mémoire de M. Mansion. (*Ibid.*)
315. Sur une classe d'équation différentielles. (T. XII.)
316. Sur le dernier théorème de Fermat. (*Ibid.*)
317. Rapport sur un Mémoire de M. Ch. Lagrange. (*Ibid.*)
318. Lettre à M. De Tilly. (T. XIII.)
319. Remarques sur une équation trinôme. (*Ibid.*)
320. Sur les lignes géodésiques des surfaces de révolution. (*Ibid.*)
321. Rapport sur un Mémoire de M. Beaupain. (T. XV.)

Mémoires de la Société des sciences de Liège.

322. Mélanges mathématiques. (T. II.)
323. Théorie analytique des lignes à double courbure. (T. VI.)
324. Théorèmes d'Arithmétique. (*Ibid.*)
325. Problèmes et théorèmes d'Arithmétique. (T. X.)
326. Mélanges mathématiques. (T. I, 1885; t. II, 1887; t. III, 1888.)

Annali di matematica, pura ed applicata.

327. Sur les différences successives de 1^q, et sur les Nombres de Bernoulli. (T. II.)
328. Sur les équations simultanées homogènes. (T. VII.)

Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei.

329. Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques. (T. XX, 1867.)
330. Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques (2e Note.) (1873.)
331. Sur quelques sommations et transformations de séries. (T. XXIII.)
332. Extraits de trois lettres adressées au prince Boncompagni. (1881.)
333. Sur quelques décompositions en carrés. (1882.)
334. Mémoire sur certaines décompositions en carrés. (1883.)

Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg.

335. Recherches sur la constante G, et sur les intégrales eulériennes. (1883.)

Association française pour l'Avancement des Sciences.

336. 1872. **Bordeaux.** — Nouvelle formule d'intérêt composé.
337. — — Théorie des polyèdres semi-réguliers.
338. 1874. **Lille.** — Sur les surfaces orthogonales. — Sur la méthode des moindres carrés. — Lieu géométrique. — De l'hélice tracée sur un cylindre dont la base est une chaînette.
339. 1876. **Clermont-Ferrand.** — Sur les fonctions X_n, de Legendre.
340. 1877. **Le Havre.** — Sur la somme des diviseurs d'un nombre n. — Évaluation des nombres premiers compris entre des limites données. — Sur quelques développements de l'intégrale elliptique, de première espèce.
341. 1878. **Paris.** — Sur les lignes de courbure de la surface des ondes.
342. 1880. **Rheims.** — Sur une décomposition en facteurs.
343. 1883. **Rouen.** — Notes d'Algèbre et d'Arithmétique.

Bullettino du prince Boncompagni.

344. Sur un article du *Journal des savants.* (T. IV, 1871.)
345. Lettre relative à la tombe de Van Cölen (contenant l'extrait d'une lettre de Lakanal) (T. VII, 1874.)
346. Une polémique entre Goldbach et Daniel Bernoulli. (T. XVIII, 1885.)

Société mathématique de France.

347. Communication sur divers sujets. (T. XVI.)

Mathesis.

348. Carré magique de la *Villa Albani.* (T. I.)

349. Maximum et minimum d'une fraction. (T. II.)
350. Sur la méthode des isopérimètres. (*Ibid.*)
351. Sur un article des *Nouvelles Annales*. (*Ibid.*)
352. Une démonstration du théorème de Pythagore. (*Ibid.*)
353. Sur un théorème de M. *Cambier*. (*Ibid.*)
354. Sur le principe de l'homogénéité. (T. III.)
355. Quelques théorèmes de Géométrie élémentaire. (*Ibid.*)
356. Sur un théorème de M. Rocquigny (*Ibid.*)
357. Un curieux théorème. (*Ibid.*)
358. Généralisation de trois propriétés de la cycloïde. (*Ibid.*)
359. Sur un théorème d'Abel. (T. IV.)
360. Sur les ombilics des surfaces. (T. V.)
361. Sur la courbe de Watt. (*Ibid.*)
362. Lettre à M. Mansion. (T. VI.)
363. Lettre à M. Charles Brisse. (*Ibid.*)
364. Sur la divisibilité des nombres. (T. VII.)
365. Sur les nombres parfaits. (T. VII.)

Journal de M. de Longchamps.

366. Sur une limite supérieure des racines. (1880.)
367. Sur deux problèmes d'Arithmétique. (*Ibid.*)
368. Quelques théorèmes de Géométrie élémentaire. (1883.)
369. Remarques sur un travail de M. Calinon. (1885.)
370. Sur le pentagone d'Albert Dürer. (*Ibid.*)
371. Théorèmes sur les coniques. (*Ibid.*)
372. Lettre sur une trisectrice. (*Ibid.*)
373. Lettre sur le théorème de Fermat. (1886.)
374. Démonstration d'un théorème de M. *Delbœuf*. (1887.)
375. Extraits de plusieurs lettres. (*Ibid.*)

Bulletin des Sciences.

376. Théorème de Staudt et Clausen. (1880.)
377. Lettre au Rédacteur. (1882.)

Journal de Crelle.

378. Énoncé d'un théorème empirique. (T. XXVII.)

Revue de l'Instruction publique en Belgique.

379. Lettre au Rédacteur. (1869.)
380. Théorèmes empiriques. (1870.)
381. Analyse indéterminée, du premier degré. (1871.)

La Science, journal rédigé par Auguste Blum.

382. Arithmétique. — Théorie des Combinaisons. (Mars et avril 1855.)

L'Avenir, revue hebdomadaire (*).

383. Application de l'Algèbre... à la Théologie (**). (Mai 1855.)

Revue scientifique.

384. *Les dimensions de l'univers visible.* — Conférence donnée aux élèves des Écoles spéciales (Liège). (Juin 1882.)
385. Démonstration d'un théorème de M. *Delbœuf.* (Octobre 1886.)

OUVRAGES PARTICULIERS.

386. Éléments de Géométrie. (Paris, 1843; 2e édit.; Liège, 1865.)
387. Application de l'Algèbre à la Géométrie (Lycée Charlemagne, 1848, in-4°).
388. Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire. (Paris, 1852; Bruxelles, 1879.)
389. Manuel des candidats à l'École polytechnique. (Paris, 1857.)
390. Manuel du Baccalauréat ès-sciences. (Paris, 1852-1872.)
391. Traité élémentaire de Géométrie descriptive. (Paris, 1852-1882.)
392. Traité élémentaire des séries. (Paris, 1860; in-8°.)
393. Cours d'Analyse de l'Université de Liège. (Bruxelles, 1870. 2e édition, 1879; in-8°.)
394. Application de l'Algèbre au Code civil : l'article 757. (Paris, 1862.)
395. Histoire d'un concours. Liège, 1865; br. in-8°.
396. Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre.
397. Manuel de Géométrie. (9e édition.)
398. Manuel de Trigonométrie et de Géométrie descriptive. (13e édition.)
399. Manuel de Cosmographie. (13e édition.)
400. Manuel de Mécanique. (13e édition.)
401. Réhabilitation d'un pléonasme. Bruxelles, 1876; in-8°.
402. Notions d'Astronomie. (*Bibliothèque utile.*)
403. Solutions de problèmes proposés au Baccalauréat ès-sciences (Paris, 1855.
404. Notice sur Charles Boileau (*Œuvres choisies de Charles Boileau,* 1873).
405. Labyrinthe de Crète.
406. Quelques lettres. (*Appendice* aux *Mélanges mathématiques*).

(*) Créée et *tuée* en quelques mois.
(**) Analyse d'un ouvrage de l'abbé *Gratry*.

TABLE DES MATIÈRES.