Mémoires de la Société royale des sciences de Liège.
Liège [etc.],La Société.
http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/39398

2e sér.:t.13 (1886): http://www.biodiversitylibrary.org/item/87388

Article/Chapter Title: Mélanges mathématiques (Tome deuxième)
Author(s): Eugène Catalan
Page(s): Text, Text, Text, Page 2, Page 3, Page 4, Page 5, Page 6, Page 7, Page 8, Page 9, Page 10, Page 11, Page 12, Page 13, Page 14, Page 15, Page 16, Page 17, Page 18, Page 19, Page 20, Page 21, Page 22, Page 23, Page 24, Page 25, Page 26, Page 27, Page 28, Page 29, Page 30, Page 31, Page 32, Page 33, Page 34, Page 35, Page 36, Page 37, Page 38, Page 39, Page 40, Page 41, Page 42, Page 43, Page 44, Page 45, Page 46, Page 47, Page 48, Page 49, Page 50, Page 51, Page 52, Page 53, Page 54, Page 55, Page 56, Page 57, Page 58, Page 59, Page 60, Page 61, Page 62, Page 63, Page 64, Page 65, Page 66, Page 67, Page 68, Page 69, Page 70, Page 71, Page 72, Page 73, Page 74, Page 75, Page 76, Page 77, Page 78, Page 79, Page 80, Page 81, Page 82, Page 83, Page 84, Page 85, Page 86, Page 87, Page 88, Page 89, Page 90, Page 91, Page 92, Page 93, Page 94, Page 95, Page 96, Page 97, Page 98, Page 99, Page 100, Page 101, Page 102, Page 103, Page 104, Page 105, Page 106, Page 107, Page 108, Page 109, Page 110, Page 111, Page 112, Page 113, Page 114, Page 115, Page 116, Page 117, Page 118, Page 119, Page 120, Page 121, Page 122, Page 123, Page 124, Page 125, Page 126, Page 127, Page 128, Page 129, Page 130, Page 131, Page 132, Page 133, Page 134, Page 135, Page 136, Page 137, Page 138, Page 139, Page 140, Page 141, Page 142, Page 143, Page 144, Page 145, Page 146, Page 147, Page 148, Page 149, Page 150, Page 151, Page 152, Page 153, Page 154, Page 155, Page 156, Page 157, Page 158, Page 159, Page 160, Page 161, Page 162, Page 163, Page 164, Page 165, Page 166, Page 167, Page 168, Page 169, Page 170, Page 171, Page 172, Page 173, Page 174, Page 175, Page 176, Page 177, Page 178, Page 179, Page 180, Page 181, Page 182,

This page intentionally left blank.

MÉLANGES

MATHÉMATIQUES

PAR

Eugène-Charles CATALAN,

Ancien élève de l'École polytechnique, Professeur émérite à l'Université de Liège;
Associé de l'Académie de Belgique, de l'Académie des sciences de Toulouse
et de la Société des sciences de Lille;
Correspondant des Académies de St-Pétersbourg, de Turin, des *Nuovi Lincei;*
Membre de la Société des sciences de Liège,
de la Société mathématique de France et de la Société philomathique de Paris;
Correspondant de la Société mathématique d'Amsterdam,
de l'Institut national génevois, de la Société havraise d'études diverses
et de la Société d'agriculture de la Marne.

« Ceci est mon testament. »

TOME DEUXIÈME.

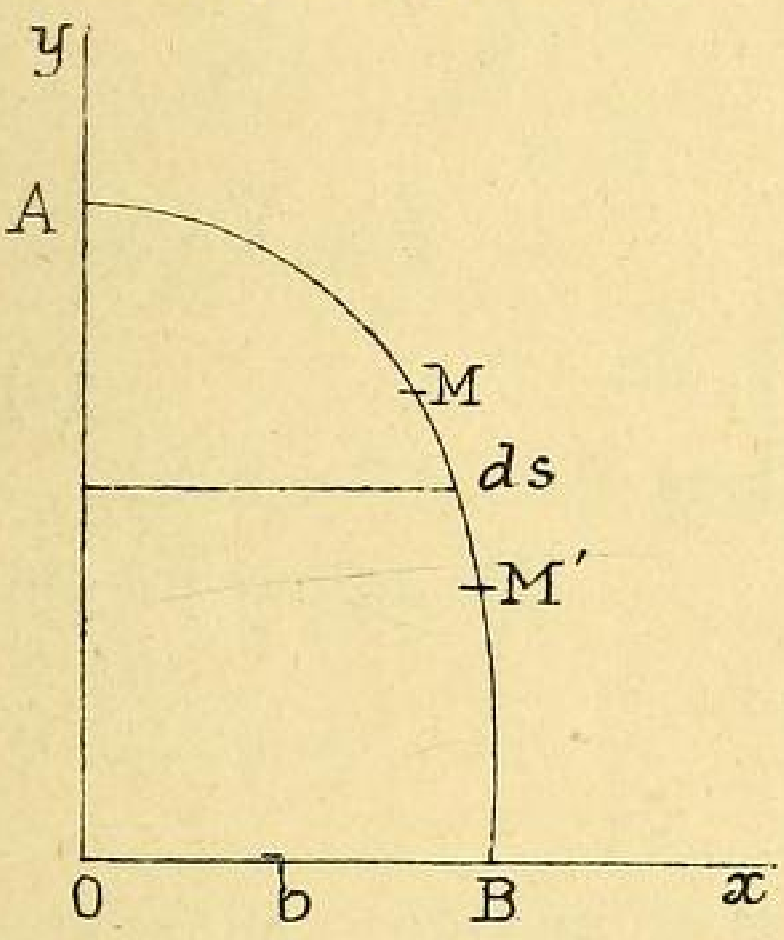
MÉLANGES

MATHÉMATIQUES.

XCIV. — Problème proposé par M. Steiner.

(*Juin* 1841) (*).

On donne deux plans parallèles. Quelle doit être la figure d'un corps touchant les deux plans, et dont la surface a une aire donnée, pour que le volume de ce corps soit maximum?



J'admets que cette surface est de révolution autour d'une perpendiculaire aux plans donnés, et qu'elle est symétrique par rapport au plan de symétrie de ces deux autres plans.

Soient O le centre de la courbe méridienne; Ox, Oy les axes coordonnés, Oy étant l'axe de rotation. On a

$$OA = a,$$

demi-distance des plans donnés.

L'aire de la surface est

$$2 \,.\, 2\pi \int_0^b x ds = 4\pi \int_0^b x dx \sqrt{1 + y'^2} = 4\pi l^2;$$

l représentant une longueur connue.

(*) A cette époque, Steiner était à Paris, et m'honorait de sa bienveillance. C'est, probablement, dans une conversation particulière qu'il m'a proposé ce problème.

Le volume est donné par la formule

$$V = 2\pi \int_0^a x^2 dy = 2\pi \int_0^b x^2 y' dx.$$

λ étant un facteur constant, on doit donc poser

$$\delta . \int_0^b \left[\lambda x \sqrt{1 + y'^2} + x^2 y'\right] dx = 0. \tag{1}$$

Ainsi, avec les notations ordinaires :

$$\left.\begin{aligned} &U = \lambda x \sqrt{1 + y'^2} + x^2 y', \quad M = \lambda \sqrt{1 + y'^2} + 2xy', \\ &N = 0, \quad P = \frac{\lambda x y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + x^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

L'équation

$$N - \frac{dP}{dx} = 0$$

se réduit à

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda x y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + x^2\right] = 0. \tag{3}$$

Il en résulte

$$\frac{\lambda x y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + x^2 = c^2;$$

puis

$$dy = \frac{c^2 - x^2}{\sqrt{\lambda^2 x^2 - (c^2 - x^2)^2}} dx. \tag{4}$$

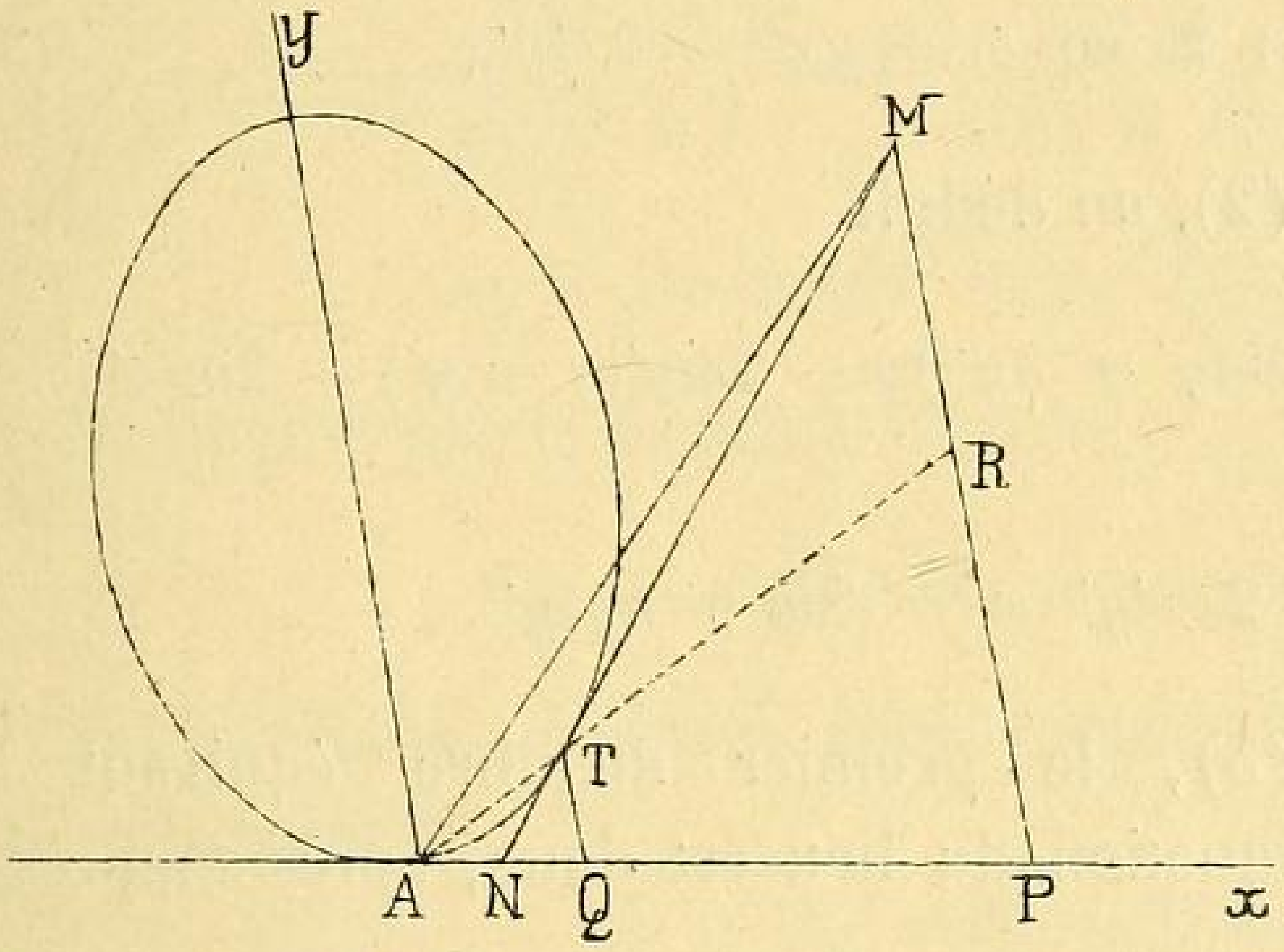
Telle est l'équation différentielle de la courbe méridienne.

. . . . (*).

(*) Je supprime les calculs suivants, devenus inutiles par suite des remarquables Notes de Delaunay et de Sturm, publiées dans le *Journal de Liouville* en cette même année 1841 (mais au mois d'*août*). D'après le théorème de mon infortuné Camarade, *la courbe méridienne est engendrée par un foyer d'une certaine conique roulant sur une droite.* (Mai 1885.)

XCV. — Question proposée au Concours général de 1841.

Par un point A, *donné sur une courbe du second degré, on mène une tangente fixe* AN *et une sécante mobile* AM. *On trace aussi la bissectrice* AT *de l'angle* MAN *et la tangente* MTN. *Quel est le lieu des points* M (*)?



Prenant pour axes la tangente ANx et le diamètre Ay, nous aurons, entre les coordonnées x', y' du point T, une relation de la forme

$$x'^2 = 2my' + ny'^2. \quad (1)$$

L'équation de la tangente en T est

$$xx' = m(y + y') + nyy'. \quad (2)$$

Menons TQ, MP parallèles au diamètre Ay; soit R le point où AT coupe MP.

On a
$$\frac{TQ}{AQ} = \frac{RP}{AP};$$

et, par la propriété de la bissectrice,

$$\frac{RP}{AP} = \frac{MP}{AM + AP}.$$

Donc

$$TQ(AM + AP) = AQ \,.\, MP \text{ (**)},$$

(*) J'ignore si une solution de ce problème a été publiée.

(**) Autrement dit :

AD *étant une bissectrice du triangle* ABC; *soient* CC′, DD′ *deux droites parallèles, limitées au côté* AB. *On a*

$$\frac{DD'}{AD'} = \frac{CC'}{AC + AC'}.$$

ou

$$(AM + x)y' = yx',$$

ou encore, θ étant l'angle des axes :

$$y'\sqrt{x^2 + 2xy\cos\theta + y^2} = yx' - xy'.$$

Si l'on élève au carré, cette équation devient

$$y'^2(y + 2x\cos\theta) = yx'^2 - 2x'y'x. \qquad (3)$$

Des équations (1), (2), on déduit

$$yx'^2 - 2y' . xx' = (2my' + ny'^2)y - 2my'(y + y') - 2nyy'^2,$$

ou

$$yx'^2 - 2xx'y' = -(2m + ny)y'^2.$$

D'après l'égalité (3), le premier membre équivaut à $y'^2(y + 2x\cos\theta)$. L'équation du lieu est donc, après suppression de y'^2,

$$(1 + n)y + 2x\cos\theta + 2m = 0. \qquad (4)$$

Elle représente une droite.

Addition. — (*Mai* 1885.)

On simplifie les calculs précédents si l'on prend, pour axes, la tangente et la normale en A.

x', y' étant les coordonnées du point T :

$$Ay'^2 + By' + x'^2 + Dy' = 0\ (^*). \qquad (5)$$

L'équation de la tangente MN, *polaire* de T, est, par la règle connue :

$$(2Ay + Bx + D)y' + (By + 2x)x' + Dy = 0. \qquad (6)$$

(*) *Note* LII. Cette Note renferme une faute de signe : à partir de l'équation (2), on doit lire + D au lieu de — D.

Soit

$$\frac{y'}{x'} = k;$$

et, par conséquent,

$$\frac{y}{x} = \frac{2k}{1-k^2}. \tag{7}$$

L'élimination de y' donne

$$x' = -\frac{Dk}{Ak^2 + Bk + 1} = -\frac{Dy}{(2Ay + Bx + 1)k + By + 2x};$$

puis

$$(Ay + Bx + D)k^2 + 2x \,.\, k - y = 0. \tag{8}$$

D'ailleurs, par la formule (7) :

$$-k^2y - 2kx + y = 0.$$

Si l'on ajoute, on obtient donc, comme équation de la droite A, lieu du point M :

$$(A - 1)y + Bx + D = 0. \tag{9}$$

Cette équation prouve que la droite Δ a une liaison remarquable avec le *point de Frégier* (*).

En effet, le *point de Frégier* a pour coordonnées :

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{D}{A+1} (^{**}).$$

L'équation de la polaire de ce point est donc

$$\left(-2A\frac{D}{A+1} + D\right)y - \frac{BD}{A+1}x - \frac{D^2}{A+1},$$

ou

$$(A - 1)y + Bx + D = 0. \tag{10}$$

Ainsi, *la droite Δ est la polaire du point de Frégier.* C'est ce que l'on peut vérifier par de simples considérations géométriques.

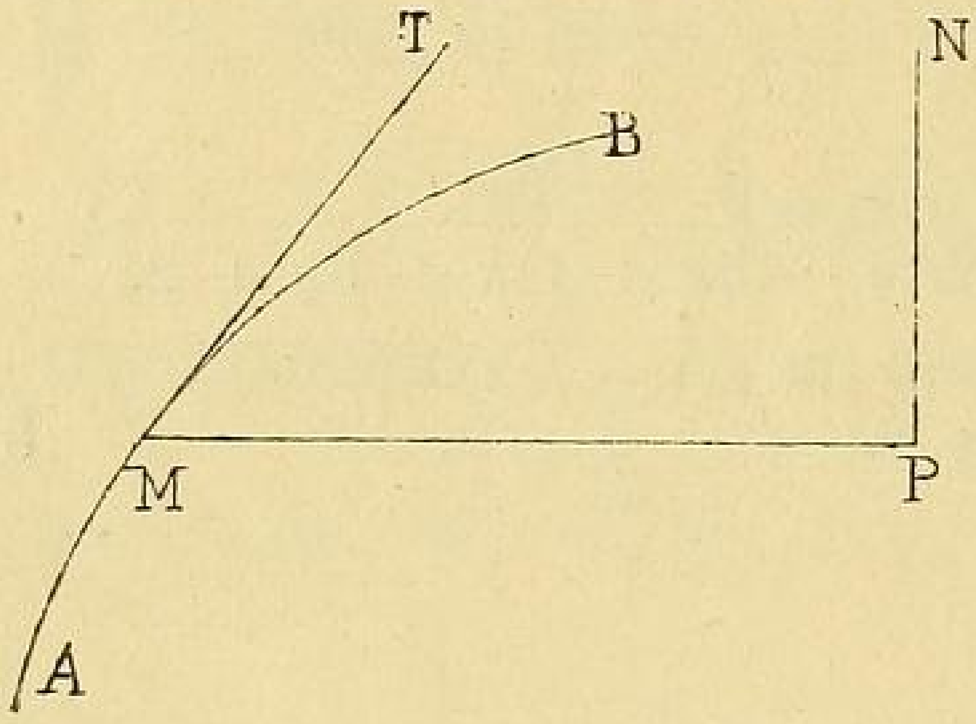
(*) J'appelle ainsi le point fixe déterminé par le *Théorème de Frégier* (Nouvelles Annales, t. II, p. 186. *Voyez* aussi la *Note* LII, déjà citée).

(**) *Note* LII.

XCVI. — Lignes de courbure d'une surface gauche.

(*Février* 1864.)

I. AMB étant la directrice, soit MP une génératrice quelconque.



Désignons par a, b, c les coordonnées de M ; par l, m, n les cosinus directifs de cette droite ; par v la distance MP. Il est clair que

$$\left.\begin{aligned} x &= a + lv,\\ y &= b + mv,\\ z &= c + nv. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dans ces formules, a, b, c, l, m, n sont des fonctions, connues, d'une certaine variable u (*).

Comme dans le Mémoire cité, nous représenterons, par des accents, les dérivées relatives à u, et nous emploierons les abréviations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &A = \sum a'^2, \quad B = \sum a'l', \quad C = \sum l'^2,\\ &U = \sum la', \quad D^2 = \sum (ny' - mz')^2, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$M = \sum (mn' - nm')a', \quad N = \sum (ny' - mz')x'', \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} &P = \sum (nm' - mn')l'', \quad Q = \sum (nm' - mn')a'' - \sum (nm'' - mn'')a',\\ &R = \sum (nb' - mc')a''. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

II. Il existe, entre les quantités N, P, Q, R, une relation simple (**) analogue à

$$D^2 = A + 2Bv + Cv^2 - U^2 \text{ (***)} \qquad (5)$$

(*) *Recherches sur les surfaces gauches*, p. 3.

(**) En 1865, je ne l'avais point remarquée. (Mai 1885.)

(***) *Recherches sur les surfaces gauches*, pp. 6 et 67.

D'après les valeurs (1), il est clair que :

$$x' = a' + l'v, \quad y' = b' + m'v, \quad z' = c' + n'v,$$
$$x'' = a'' + l''v, \quad y'' = b'' + m''v, \quad z'' = c'' + n''v.$$

Donc

$$(ny' - mz')x'' = \left[n(b' + m'v) - m(c' + n'v)\right](a'' + l''v)$$
$$= \left[(nb' - mc') + (nm' - mn')v\right](a'' + l''v;$$

puis

$$\mathrm{N} = \sum(nb' - mc')a'' + v\sum(nb' - mc')l'' + v\sum(nm' - mn')a''$$
$$+ v^2\sum(mn' - mn')l''.$$

Dans le deuxième terme du second membre, le coefficient de v est

$$(nb' - mc')l'' + (lc' - na')m'' + (ma' - lb')n''$$
$$= -\sum(nm'' - mn'')a'.$$

Si l'on compare la valeur de N aux formules (4), on a donc la relation annoncée :

$$\mathrm{N} = \mathrm{R} + \mathrm{Q}v + \mathrm{P}v^2. \tag{6}$$

III. Soient f, g, h les cosinus directifs de la normale PN à la surface S. On sait que (*)

$$f = \frac{ny' - mz'}{\mathrm{D}}, \quad g = \frac{lz' - nx'}{\mathrm{D}}, \quad h = \frac{mx' - ly'}{\mathrm{D}}. \tag{7}$$

D'un autre côté, les lignes de courbure qui se croisent en P sont représentées par les équations

$$\frac{dx}{df} = \frac{dy}{dg} = \frac{dz}{dh}. \tag{8}$$

Parmi les diverses combinaisons de ces formules, je choisirai celle-ci :

$$\frac{\sum l\,dx}{\sum l\,df} = \frac{\sum x'dx}{\sum x'df}. \tag{9}$$

(*) *Recherches sur les surfaces gauches*, p. 7.

La question se réduit à évaluer les quatre sommes indiquées.

1° $$\sum ldx = du \sum la' + vdu \sum ll' + dv.$$

Le troisième terme est évidemment nul. Quant au deuxième, il représente le cosinus de l'angle TMP, si, comme on peut le supposer, *la variable* u *est l'arc* AM. Admettons, en outre, que la directrice AMB soit une *trajectoire orthogonale des génératrices :* alors

$$U = \sum la' = 0, \quad \sum lx' = 0, \tag{10}$$

et

$$\sum ldx = dv. \tag{11}$$

2° $$\sum x'dx = \sum x'(x'du + ldv) = du \sum x'^2$$
$$= du \sum (a' + l'v)^2 = (A + 2Bv + Cv^2)\, du;$$

ou, à cause de $U = 0$:

$$\sum x'dx = D^2 du. \tag{12}$$

3° L'angle MPN étant droit, on a $\Sigma lf = 0$; et, par conséquent,

$$\sum ldf = -\sum fdl = -du \sum fl'.$$

$$fl' = \frac{1}{D}(ny' - mz')l' = \frac{1}{D}\left[(nb' - mc') + (nm' - mn')v\right]l'.$$

Donc

$$\sum fl' = \frac{1}{D}\sum (nb' - mc')l' \text{ (*)} = \frac{1}{D}\sum (mn' - nm')a' = \frac{M}{D};$$

puis

$$\sum ldf = -\frac{M}{D}du. \tag{13}$$

(*) Parce que

$$\Sigma\, (nm' - mn')l' = 0.$$

4° $$\sum x'df = d\sum fx' - du\sum fx'' - dv\sum fl'.$$

Dans le second membre, la première somme est nulle; la deuxième égale $\frac{M}{D}$. Ainsi déjà :

$$\sum x'df = -du\sum fx'' - \frac{M}{D}dv.$$

Par la formule (3),

$$\sum fx'' = \frac{N}{D}; \tag{14}$$

donc

$$\sum x'df = -\frac{1}{D}\left[Ndu + Mdv\right]. \tag{15}$$

Rassemblant ces différents résultats, j'obtiens, au lieu de l'équation (9) :

$$\frac{dv}{Mdu} = \frac{D^2du}{Ndu + Mdv},$$

ou

$$Mdv^2 + Ndudv - MD^2du^2 = 0. \tag{16}$$

Telle est l'*équation différentielle des lignes de courbure de la surface gauche.*

IV. Admettons que les génératrices, supposées orthogonales à la directrice AMB (III, 1°), soient les *normales principales* de cette courbe. Alors les cosinus l, m, n sont proportionnels à a'', b'', c'' (*).

De là résulte que

$$R = \sum (nb' - mc')a'' = 0.$$

(*) En effet, à cause de $u = AM = s$, les cosinus directifs de la tangente MT sont a', b', c'; les cosinus directifs de la tangente voisine sont

$$a' + a''du, \quad b' + b''du, \quad c' + c''du.$$

Donc les cosinus directifs de la *binormale* sont proportionnels aux binômes

$$b'c'' - c'b'', \quad c'a'' - a'c'', \quad a'b'' - b'a'';$$

etc.

Cela posé, considérons les deux lignes de courbure MC, MC′ qui se croisent en M. Pour ce point, $v = 0$; donc

$$D^2 = A = 1\ (^*),\quad N = 0.$$

L'équation (16) se réduit à

$$dv^2 - du^2 = 0.$$

Celle-ci exprime le théorème suivant, qui n'a peut-être pas été remarqué :

Les lignes de courbure de la surface gauche, lieu des normales principales d'une courbe C, *rencontrent la directrice sous un angle de* 45°.

La réciproque est vraie :

Si les lignes de courbure d'une surface gauche coupent, sous un angle de 45°, *une trajectoire orthogonale des génératrices, ces droites sont les normales principales de la courbe.*

En effet, ± 1 étant les racines de l'équation (16) (**), on doit avoir $R = 0$, ou

$$\sum (b'c'' - c'b'')l = 0.$$

D'ailleurs,

$$\sum a'l = 0.$$

Or, ces équations sont vérifiées par

$$l = ka'',\quad m = kb'',\quad n = kc''.$$

Donc les cosinus directifs de MP sont proportionnels à a'', b'', c''.

Addition. — (*Mai* 1885.)

V. Lorsque $v = 0$, $N = R$, $D = 1$; et l'équation (16) se réduit à

$$M dv^2 + R du\, dv - M du^2 = 0. \tag{17}$$

(*) A cause de

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1.$$

(**) Il est visible que, pour $v = 0$, $\frac{dv}{du}$ représente la tangente de l'angle formé par la tangente MT et la ligne MC.

On en conclut

$$dv = -\frac{R \pm \sqrt{R^2 + 4M^2}}{2M} du. \qquad (18)$$

R et M ne contiennent que u; donc le second membre est une différentielle exacte.

Si l'on fait

$$R = -2M \cot \varphi,$$

on trouve

$$\frac{du}{dv} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi, \quad \frac{du}{dv} = -\cot \frac{1}{2} \varphi. \qquad (19)$$

VI. Dans le Mémoire cité plusieurs fois, j'ai donné (p. 67), comme équation du lieu des points pour lesquels *la courbure moyenne est nulle :*

$$Pv^2 + Qv + R = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que AMB soit une de ces lignes, est donc $R = 0$. En conséquence (IV) :

Toute courbe C *est une ligne de courbure moyenne nulle, relativement à la surface engendrée par les normales principales de* C (*).

VII. *Remarque.* — Au moyen de cette proposition, le théorème démontré dans le paragraphe IV devient évident.

En effet, *la somme des courbures des sections principales en* M, égale à la somme des sections normales dirigées suivant MT et suivant MP (**), *est nulle.* Donc la formule d'Euler se réduit à

$$\frac{1}{R_1}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0;$$

et il en résulte

$$\operatorname{tg} \theta = \pm 1 \ (^{***}).$$

(*) Bertrand, *Journal de Liouville,* t. XV, p. 334.

(**) D'après la formule d'Euler.

(***) Cette démonstration est celle dont j'ai fait usage pour déterminer les lignes de courbure de l'*héliçoïde à plan directeur* (Journal de l'École polytechnique, 29e Cahier, p. 142). Par la considération de l'*indicatrice,* on peut encore abréger.

XCVII. — Lignes asymptotiques d'une surface gauche.

(*Mars* 1864.)

I. L'équation de ces lignes est, généralement,

$$tdy^2 + 2sdxdy + rdx^2 = 0 \text{ (*)}. \tag{1}$$

A cause de

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy,$$

elle équivaut à

$$dpdx + dqdy = 0.$$

Or,

$$d^2z = pd^2x + qd^2y + dpdx + dqdy;$$

donc on peut prendre, au lieu de l'équation (1) :

$$d^2z = pd^2x + qd^2y \tag{2}$$

II. Dans le cas où la surface est gauche :

$$p = \frac{ny' - mz'}{ly' - nz'}, \quad q = \frac{lz' - nx'}{ly' - nz'} \text{ (**)};$$

et l'équation (2) devient

$$\sum (ny' - mz')d^2z = 0. \tag{3}$$

De

$$x = a + lv \text{ (***)},$$

on tire

$$dx = x'du + ldv,$$
$$d^2x = x''du^2 + 2l'dudv;$$

(*) *Recherches sur les surfaces gauches*, p. 43.

(**) *Ibid.*, p. 6.

(***) Voir la Note précédente.

et, par conséquent,

$$\sum (ny' - mz')d^2x = du^2 \sum (ny' - mz')x'' + 2dudv \sum (ny' - mz')l'.$$

La première somme a pour valeur N. La seconde égale M (*). Donc, après suppression du facteur du (**), l'équation des lignes asymptotiques est

$$\mathrm{N}du + 2\mathrm{M}dv = 0, \qquad (4)$$

ou bien

$$(\mathrm{P}v^2 + \mathrm{Q}v + \mathrm{R})du + 2\mathrm{M}dv = 0 \; (^{***}). \qquad (5)$$

III. Pour simplifier celle-ci, posons

$$v = -\frac{\mathrm{Q}}{2\mathrm{P}} + w,$$

expression d'où résulte

$$dv = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}\right)' du + dw,$$

puis, au lieu de l'équation (5) :

$$\left[w^2 - \frac{\mathrm{Q}^2}{4\mathrm{P}^2} + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{P}} - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}\right)'\right] du + \frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{P}} dw = 0. \qquad (6)$$

IV. Si $v = 0$, l'équation se réduit à

$$\mathrm{R}du + 2\mathrm{M}dv = 0. \qquad (7)$$

Posons, comme ci-dessus (p. 11), $\mathrm{R} = -2\mathrm{M}\cot\varphi$. Alors,

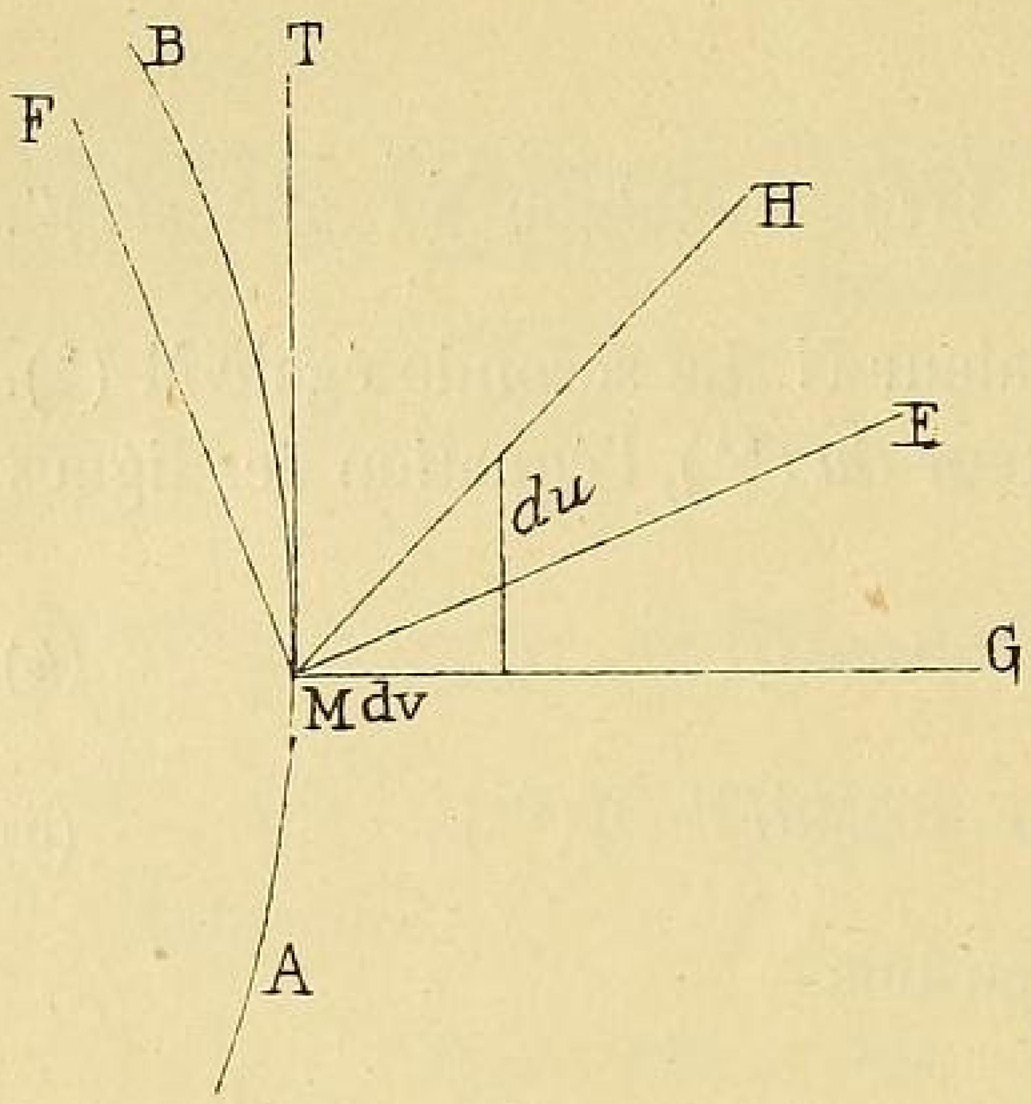
$$\frac{du}{dv} = \operatorname{tg}\varphi. \qquad (8)$$

AMB étant une *trajectoire orthogonale quelconque,* soit MG la génératrice qui passe en M. Considérons, dans le plan tangent

(*) Page 6, formules (3).

(**) $du = 0$, ou $u = const.$, représente une génératrice.

(***) Cette équation (5) n'est pas généralement intégrable; mais on la ramène à une équation linéaire : 1° lorsque $\mathrm{R} = 0$; 2° quand on en connaît une intégrale particulière. (Mai 1885.)



GMT, la tangente MH à la *seconde* ligne asymptotique, et les tangentes ME, MF aux sections principales : ces deux dernières droites sont les bissectrices de GMH et de son supplément.

A l'inspection de la figure, et d'après la formule (8), HMG $= \varphi$.

Quand il s'agissait des sections principales, nous avons trouvé (p. 11) :

$$\frac{du}{dv} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi, \quad \frac{du}{dv} = -\cot\frac{1}{2}\varphi.$$

Il est clair que ces trois résultats s'accordent.

En résumé, la recherche des lignes de courbure de S se réduit à l'intégration de l'équation (5), beaucoup plus simple que l'équation (16) de la Note précédente.

XCVIII. — Détermination d'une constante. (1876) (*).

I. Dans son célèbre *Mémoire sur les intégrales définies eulériennes* (**), Binet forme, très péniblement, l'équation

$$2\,\ell\,.\,\Gamma(2x) = (-1 + 4x)\,\ell\,.(2x) + \ell(2\pi) - 4x + 2\varpi(2x); \quad (1)$$

d'où il aurait pu conclure

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\ell\,.\,2. \qquad (2)$$

M. Bertrand, par un procédé tout autre, a déterminé cette

(*) Cette Note est tirée du Mémoire intitulé : *Recherches sur la constante* G, *et sur les intégrales eulériennes.*

(**) *Journal de l'École polytechnique,* 27e Cahier, pp. 240 et 241.

valeur; mais sa méthode est un peu longue. Voici celle que j'expose dans mon cours (*).

Soit, suivant une notation souvent employée,

$$\varphi(x) = \mathcal{L}.\,\Gamma(x). \tag{3}$$

On a, par une formule connue, dont la vérification est facile :

$$\varphi'(x+1) = \mathcal{L}.\,x + \frac{1}{2x} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha}-1} - \frac{1}{2}\right) e^{-\alpha x} d\alpha\,(^{**}); \tag{4}$$

et, en conséquence,

$$\varphi(x+1) = k + x\,\mathcal{L}.\,x - x + \frac{1}{2}\mathcal{L}.\,x + \varpi(x);$$

ou, plus simplement,

$$\varphi(x) = k + \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathcal{L}.\,x - x + \varpi(x): \tag{5}$$

k est la constante d'intégration, qu'il s'agit de déterminer.

La formule de Legendre :

$$\frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)} = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

équivaut à

$$\varphi(2x) - \varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{2}\right) = (2x-1)\,\mathcal{L}.\,2 - \frac{1}{2}\mathcal{L}.\,\pi. \tag{6}$$

Or :

$$\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right) = k + x\,\mathcal{L}.\left(x + \frac{1}{2}\right) - x - \frac{1}{2} + \varpi\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

$$\varphi(2x) = k + \left(2x - \frac{1}{2}\right)\mathcal{L}.\,(2x) - 2x + \varpi(2x);$$

donc le premier membre de l'égalité (6) a pour valeur :

$$-k + \left(2x - \frac{1}{2}\right)\mathcal{L}.\,2 + x\,\mathcal{L}\cdot\frac{x}{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + \varpi(2x) - \varpi(x) - \varpi\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

(*) Plus exactement : *que j'exposais*.

(**) A la page 17 du Mémoire cité, on a imprimé dx au lieu de $d\alpha$.

Après quelques réductions, cette égalité se transforme en

$$-k - x\,\mathfrak{L}\left(1+\frac{1}{2x}\right)+\frac{1}{2}+\varpi(2x)-\varpi(x)-\varpi\left(x+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\,\mathfrak{L}.(2\pi).$$

Si l'on fait croître x indéfiniment, le premier membre tend vers $(-k)$ (*).

Ainsi

$$k=\frac{1}{2}\,\mathfrak{L}(2\pi);$$

et enfin, au lieu des égalités (1) et (5) :

$$\mathfrak{L}.\Gamma(x)=\varphi(x)=\frac{1}{2}\,\mathfrak{L}(2\pi)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathfrak{L}.x-x+\varpi(x). \quad (7)$$

II. *Remarque.* — Au moyen de cette formule, l'égalité (6) se transforme en

$$\varpi(2x)-\varpi(x)-\varpi\left(x+\frac{1}{2}\right)=x\,\mathfrak{L}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2}\,(^{**}). \quad (8)$$

(*) A cause de

$$x\,\mathfrak{L}\left(1+\frac{1}{2x}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+\cdots$$

(**) A la page 224 du Mémoire de Binet, on lit :

$$\text{« } 2\mu\left(p+\frac{1}{2}\right)+2\mu(p)-2\mu(2p)=$$

$$\frac{1}{2(2p+1)}+\frac{1}{2.3(2p+1)^2}+\frac{1}{3.4(2p+1)^3}+\text{etc. »}$$

Avec notre notation, cette égalité devient

$$\varpi(2x)-\varpi(x)-\varpi\left(x+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(2x+1)}+\frac{1}{2.3(2x+1)^2}+\frac{1}{3.4(2x+1)^3}+\cdots\right].$$

La somme de la série est

$$1+2x\,\mathfrak{L}.\left(1-\frac{1}{2x+1}\right),$$

ou

$$1-2x\,\mathfrak{L}\left(1+\frac{1}{2x}\right).$$

Donc, la formule (8) ne diffère pas, au fond, de celle de Binet.

Addition. — (*Juin* 1885.)

II. La formule (8), que Binet n'a pas formellement indiquée, est donc une *traduction* du théorème de Legendre. Si l'on remplace la *fonction* $\varpi(x)$, *de Binet*, par sa valeur :

$$2\int_0^{\infty} \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta}-1} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{x} \text{ (*)},$$

le premier membre de l'égalité (8) devient

$$2\int_0^{\infty} \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta}-1}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{2x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{x+\frac{1}{2}}\right].$$

Au moyen d'une transformation bien connue, la quantité entre parenthèses se réduit à

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{(6x^2+x+2\beta^2)\beta}{4x^3+2x^2+\beta^2}\cdot$$

Conséquemment,

$$\int_0^{\infty} \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta}-1} \operatorname{arc\,tg}\frac{(6x^2+x+2\beta^2)\beta}{4x^3+2x^2+\beta^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x\,\mathfrak{L}\left(1+\frac{1}{2x}\right); \quad (9)$$

relation qui ne diffère, qu'en apparence, du théorème de Legendre.

IV. Elle est en défaut pour $x = 0$. En effet, d'après cette hypothèse, on aurait (**)

$$\int_0^{\infty} \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta}-1} \operatorname{arc\,tg}(2\beta) = \frac{1}{4}\cdot$$

(*) *Recherches sur la constante* G, *et sur les intégrales eulériennes*, p. 16.

(**) Si l'on fait $x = \frac{1}{z}$, le dernier terme devient

$$\frac{1}{2z}\mathfrak{L}\left(1+\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{\mathfrak{L}\left(1+\frac{z}{2}\right)}{\frac{z}{2}};$$

et il est visible que la fraction tend vers zéro, quand z croît indéfiniment.

Or, le premier membre égale

$$\int_0^\infty \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta}-1} \operatorname{arc\,tg} 2\beta = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\,\ell.\,2.$$

Voici, je pense, la raison de cette anomalie. x étant supposé *positif* (*), les formules

$$\varpi(x) = \varphi(x) - k - \left(x - \frac{1}{2}\right)\ell.\,x + x, \tag{5}$$

$$\varpi(x) = 2\int_0^\infty \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta}-1} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{x} \tag{10}$$

sont *équivalentes*. Pour $x = 0$, elles donnent, l'une et l'autre, $\varpi(x) = \infty$. Néanmoins, *elles ne s'accordent plus.*

En effet, il résulte, de la première,

$$\varpi(x) - \varpi(2x) = \varphi(x) - \varphi(2x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\ell.\,x + \left(2x - \frac{1}{2}\right)\ell(2x) - x;$$

puis

$$\begin{aligned}\lim\left[\varpi(x) - \varpi(2x)\right] &= \lim\left[\varphi(x) - \varphi(2x)\right] + x\,\ell.\,x + \left(2x - \frac{1}{2}\right)\ell.\,2 - x \\ &= \lim\left[\varphi(x) - \varphi(2x)\right] - \frac{1}{2}\,\ell.\,2 \ (^{**});\end{aligned}$$

ou, par la relation (6) :

$$\lim\left[\varpi(x) - \varpi(2x)\right] = \frac{1}{2}\,\ell.\,\pi + \frac{1}{2}\,\ell.\,2 - \varphi\left(\frac{1}{2}\right).$$

D'ailleurs,

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \ell.\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\ell.\,\pi;$$

donc enfin

$$\lim\left[\varpi(x) - \varpi(2x)\right] = \frac{1}{2}\,\ell.\,2. \tag{11}$$

(*) Cette hypothèse est celle de Binet.

(**) $x\,\ell.\,x = 0$ *pour* $x = 0$.

Prenons maintenant la formule (10). Elle donne

$$\varpi(x) - \varpi(2x) = \int_0^\infty \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{2x}\right),$$

ou

$$\varpi(x) - \varpi(2x) = 2\int_0^\infty \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta x}{2x^2 + \beta^2};$$

et, par conséquent,

$$\lim\left[\varpi(x) - \varpi(2x)\right] = 0; \tag{12}$$

ce qui est contradictoire avec la valeur (11).

Si l'on adopte celle-ci, on trouve, au lieu de l'égalité (9), dans laquelle on ferait $x = 0$:

$$-\frac{1}{2}\mathcal{l}.2 - \varpi\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2};$$

et ce résultat ne diffère pas de la formule (2) (*).

(*) Ce n'est pas tout. Pour passer de la première expression de $\varpi(x)$:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^\alpha - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\,d\alpha,$$

à la seconde :

$$2\int_0^\infty \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{x},$$

Binet emploie, très heureusement, la formule

$$\int_0^\infty \frac{\sin\beta\alpha}{e^{2\pi\beta} - 1}\,d\beta = \frac{1}{4}\frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{2\alpha},$$

due à Poisson; après quoi il met $\varpi(x)$ sous la forme d'une intégrale double; etc. Or, ces diverses transformations, légitimes tant que x est positif, *n'ont plus de sens* quand $x = 0$. Aussi, Binet a-t-il constamment écarté cette dernière hypothèse.

V (*). D'après la relation connue

$$\varphi'(x) - \varphi'(1) = \int_0^1 \frac{1 - t^{x-1}}{1 - t}\, dt,$$

il est clair que : *si* x *est commensurable, la différence* $\varphi'(\text{x}) - \varphi'(1)$ *est réductible à l'intégrale d'une différentielle rationnelle* (**).

XCIX. — Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde (***).

(*Août* 1868.)

I. Si λ et μ sont les paramètres des hyperboloïdes homofocaux avec un ellipsoïde donné, les lignes de courbure de cette surface sont représentées par $\lambda = const.$, $\mu = const.$ Si donc l'on part d'une équation de ces lignes, ayant la forme

$$\text{A}du^2 + \text{B}dudv + \text{C}dv^2 = 0, \tag{1}$$

et que l'on effectue le changement de variables, on devra trouver, comme transformée de l'équation (1),

$$d\lambda \,.\, d\mu = 0. \tag{2}$$

II. Supposons, par exemple, que u soit le *rayon vecteur* et v la *distance du centre au plan tangent*. L'équation est alors (IV) :

$$u^2v^4du^2 - uv^3(a^2 + b^2 + c^2 - u^2)\,dudv + a^2b^2c^2dv^2 = 0. \tag{3}$$

(*) *Supprimé*, en partie, dans le Mémoire de Saint-Pétersbourg.

(**) On lit, dans le *Calcul intégral* de Bertrand (p. 252) : « Gauss a montré » très élégamment que la fonction $\varphi(x)$ peut se calculer sous forme finie » toutes les fois que x est un nombre rationnel ». La proposition énoncée est *fausse*. Quant à la démonstration de Gauss, elle est *longue, difficile* et *obscure*.

(***) Complément des *Notes* LVIII et LXI.

(IV) Tome I, page 227.

De plus :

$$u^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \lambda^2 - \mu^2, \quad v = \frac{abc}{\lambda\mu} \text{ (*)}; \tag{4}$$

et, par conséquent :

$$udu = -(\lambda d\lambda + \mu d\mu), \quad dv = -\frac{abc}{\lambda^2\mu^2}(\mu d\lambda + \lambda d\mu).$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (3) devient

$$(\lambda d\lambda + \mu d\mu)^2 - \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda\mu}(\lambda d\lambda + \mu d\mu)(\mu d\lambda + \lambda d\mu) + (\mu d\lambda + \lambda d\mu)^2 = 0,$$

ou, après quelques réductions,

$$(\lambda^2 - \mu^2)^2 d\lambda d\mu = 0; \tag{5}$$

conformément à la remarque ci-dessus (1).

III. L'élimination de μ, entre les égalités (4), donne

$$u^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \lambda^2 - \frac{a^2b^2c^2}{\lambda^2 v^2}. \tag{6}$$

Telle est donc, inversement, l'intégrale de l'équation (3); λ étant la *constante arbitraire* (**).

C. — Problème de Géométrie.

(*Juillet* 1862.)

On donne une suite de courbes, AB, A'B', ..., *représentées par*

$$f(x, y) = c, \tag{1}$$

et l'on demande quel est le lieu du pied M *de la normale* MM' *commune à deux de ces lignes, infiniment voisines.*

(*) Tome I, page 235. On a fait un changement de lettres.
(**) Tome I, page 228.

I. *Solution.* — Soient x, y les coordonnées de M, et $x' = x + \delta x$, $y' = y + \delta y$ les coordonnées de M'. On doit avoir :

$$\frac{dy}{dx}\delta y + \delta x = 0, \quad \frac{dy'}{dx'}\delta y + \delta x = 0. \tag{2}$$

Mais

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{d\,.\,\frac{dy}{dx}}{dx}\delta x + \frac{d\,.\,\frac{dy}{dx}}{dy}\delta y;$$

donc

$$\frac{d\,.\,\frac{dy}{dx}}{dx}\delta x + \frac{d\,.\,\frac{dy}{dx}}{dy}\delta y = 0; \tag{3}$$

puis

$$\left(\frac{d\,.\,\frac{dy}{dx}}{dx}\right)dy = \left(\frac{d\,.\,\frac{dy}{dx}}{dy}\right)dx. \tag{4}$$

Pour développer cette équation, observons que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}};$$

et, par conséquent :

$$\frac{d\,.\,\frac{dy}{dx}}{dx} = -\frac{\frac{df}{dy}\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{df}{dx}\frac{d^2f}{dxdy}}{\left(\frac{df}{dy}\right)^2}, \quad \frac{d\,.\,\frac{dy}{dx}}{dy} = -\frac{\frac{df}{dy}\frac{d^2f}{dxdy} - \frac{df}{dx}\frac{d^2f}{dy^2}}{\left(\frac{df}{dy}\right)^2}.$$

Au moyen de ces valeurs, l'égalité (4) devient

$$\frac{df}{dx}\left[\frac{df}{dy}\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{df}{dx}\frac{d^2f}{dxdy}\right] + \frac{df}{dy}\left[\frac{df}{dy}\frac{d^2f}{dxdy} - \frac{df}{dx}\frac{d^2f}{dy^2}\right] = 0,$$

ou

$$\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}\left[\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{d^2f}{dy^2}\right] = \frac{d^2f}{dxdy}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 - \left(\frac{df}{dy}\right)^2\right]. \tag{5}$$

II. *Application.* $x^3 - y^3 + 3a^2x = c^3$.

Suppression faite du facteur 3 :

$$\frac{df}{dx} = x^2 + a^2, \quad \frac{df}{dy} = -y^2, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = 2x, \quad \frac{d^2f}{dxdy} = 0, \quad \frac{d^2f}{dy^2} = -2y.$$

Donc l'équation (5) se réduit à

$$y^2(x^2 + a^2)(x + y) = 0.$$

Celle-ci représente l'axe des abscisses et la bissectrice de l'angle yOx'. En effet, pour tous les points de la courbe donnée, situés sur Ox, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est infinie ; et, d'un autre côté, la bissectrice dont il s'agit est un *axe* de la courbe (*).

III. *Remarque.* — Si la quantité $f(x, y)$ est *homogène*, l'équation (5) l'est pareillement; et *le lieu* demandé *se compose*, comme dans le cas précédent, *de droites passant à l'origine.*

IV. *Autre remarque.* — Considérons la surface S représentée par

$$z = f(x, y). \tag{6}$$

Alors le problème peut être énoncé ainsi :

Trouver, sur la surface S, *le lieu* C *du pied* M *de la normale à deux lignes de niveau consécutives.*

La projection horizontale de C est donnée par l'équation (5), ou plutôt par celle-ci :

$$pq(r - t) = s(p^2 - q^2); \tag{7}$$

p, q, r, s, t représentent, bien entendu, les dérivées partielles de z.

(*) Faisant

$$x = (x' - y')\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad y = (x' + y')\sqrt{\frac{1}{2}},$$

on trouve, comme transformée,

$$x'\sqrt{2}\left[x'^2 + y'^2 + \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2)\right] = c^3.$$

V. *Application.* — Soit

$$z = x^3 + y^3 - 3axy \text{ (*)}.$$

L'équation (7) est, dans ce cas,

$$2(x^2-ay)(y^2-ax)(x-y)+a(x^2+y^2-ay-ax)(x^2-y^2-ay+ax)=0.$$

Elle se décompose en

$$x - y = 0, \tag{8}$$

$$2(x^2 - ay)(y^2 - ax) + a(x^2 + y^2 - ay - ax)(x + y + a) = 0. \tag{9}$$

L'équation (8) représente le plan bissecteur de l'angle formé par zOx, zOy : solution évidente. Quant à l'équation (9), si l'on fait :

$$x = u \cos \omega, \quad y = u \sin \omega,$$

on la réduit à celle-ci :

$$\frac{1}{2} u^3 \sin^2 2\omega + au^2(\sin\omega + \cos\omega)(-1 + \sin 2\omega) - a^3(\sin\omega + \cos\omega) = 0, \tag{10}$$

dont la discussion paraît assez simple.

Addition. — (*Juin* 1883.)

VI. Si l'on fait

$$u = \frac{a^2}{v}, \quad \omega = \theta - \frac{\pi}{4},$$

l'équation (10) devient

$$v^3 - 2a^2 v \cos^2 \theta - \frac{a^3}{2\sqrt{2}} \frac{\cos^2 2\theta}{\sin \theta} = 0. \tag{11}$$

Celle-ci représente une courbe, *réciproque* de la précédente, et très facile à discuter.

(*) Les lignes de niveau sont des variétés du *folium* de Descartes.

CI. — Sur une équation différentielle.

(*Juin* 1870.)

I. Soit

$$(xdx - ydy)^2 = a^2(dx^2 + dy^2). \qquad (1)$$

Posant

$$x = (x' + y')\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad y = (x' - y')\sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad (2)$$

on trouve

$$(x'dy' + y'dx')^2 = a^2(dx'^2 + dy'^2), \qquad (3)$$

ou

$$(a^2 - x'^2)dy'^2 - 2x'y'dx'dy' + (a^2 - y'^2)dx'^2 = 0. \qquad (4)$$

Soient, comme dans ma Note sur l'*addition des fonctions elliptiques de première espèce* (*) :

$$x' = a\cos u, \quad y' = a\cos v.$$

L'équation (4) devient

$$\sin^2 u \sin^2 v dv^2 - 2\sin u\cos u\sin v\cos v du dv + \sin^2 v\sin^2 u du^2 = 0,$$

ou

$$\sin u\sin v(du^2 + dv^2) - 2\cos u\cos v du dv = 0. \qquad (5)$$

Soient encore (**) :

$$u + v = \theta, \quad u - v = \omega;$$

d'où :

$$\sin u\sin v = \frac{1}{2}(\cos\omega - \cos\theta), \quad \cos u\cos v = \frac{1}{2}(\cos\omega + \cos\theta),$$

$$du^2 + dv^2 = \frac{1}{2}(d\theta^2 + d\omega^2), \quad 2du dv = \frac{1}{2}(d\theta^2 - d\omega^2);$$

puis

$$\cos\theta \,.\, d\theta^2 - \cos\omega d\omega^2 = 0,$$

ou

$$d\theta\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\theta} \pm d\omega\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\omega} = 0 \qquad (6)$$

(*) *Bulletin de l'Académie de Belgique*, 2e série, t. XXVII, p. 149.
(**) *Loc. cit.*, p. 146.

II. Si l'on pouvait trouver une intégrale algébrique de l'équation (1), on aurait donc, pour les fonctions de deuxième espèce $\left(\text{à module } \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, un théorème analogue à celui d'Euler. Le problème, s'il est possible, paraît difficile.

III. L'équation (3) représente les trajectoires orthogonales des courbes (1). D'après la manière dont cette transformée a été obtenue, il s'ensuit que : *si l'on fait exécuter un huitième de révolution aux courbes* (1), *on obtient leurs trajectoires orthogonales.* Autrement dit : *les courbes* (1) *sont égales, respectivement, à leurs trajectoires orthogonales.*

Addition. — (*Novembre* 1871.)

IV. On tire, de l'équation (3) (en supprimant les accents) :

$$y = -px + a\sqrt{1+p^2}; \tag{7}$$

puis, en différenciant,

$$2pdx + xdp = a\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}},$$

ou

$$\frac{dx}{dp} + \frac{x}{2p} = \frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{8}$$

L'intégrale de cette équation linéaire est

$$x = \frac{1}{\sqrt{p}}\left[c + \frac{a}{2}\int dp\sqrt{\frac{p}{1+p^2}}\right]. \tag{9}$$

Je fais

$$p = \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi};$$

formule d'où résulte :

$$1+p^2 = 2\frac{1+\cos^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} = 4\frac{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2},$$

$$\frac{p}{1+p^2} = \frac{\sin^2\varphi}{4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)}, \quad dp = 2\frac{\sin\varphi d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2};$$

puis

$$\int dp\sqrt{\frac{p}{1+p^2}} = \int \frac{(1-\cos)d\varphi}{(1+\cos\varphi)\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}. \quad (10)$$

Ainsi, la valeur (9), de x, est réductible aux intégrales elliptiques.

CII. — Une application de la théorie des solutions singulières (*).

(*Avril* 1870.)

I. Soit

$$a^2 + Pa + Q = 0 \quad (1)$$

une *équation intégrale;* P, Q étant des fonctions de x et de y. La *solution singulière* est

$$P^2 - 4Q = 0\ (^{**}). \quad (2)$$

Pour trouver l'*équation différentielle,* on élimine a entre la proposée et

$$adP + dQ = 0; \quad (3)$$

ce qui donne

$$dQ^2 - PdPdQ + QdP^2 = 0,$$

ou

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{dQ}{dx} + y'\frac{dQ}{dy}\right)^2 - P\left(\frac{dP}{dx} + y'\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{dQ}{dx} + y'\frac{dQ}{dy}\right) \\ &+ Q\left(\frac{dP}{dx} + y'\frac{dP}{dy}\right)^2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

(*) Cette Note a paru, en partie, dans les *Comptes rendus* (t. LXXI, p. 50).

(**) Proposition contestée par M. Darboux (*Comptes rendus,* t. LXX, p. 1331); mais les cas où elle est en défaut sont excessivement rares : je crois n'en avoir jamais rencontré.

Cette équation, ordonnée par rapport à y', devient

$$Ay'^2 + By' + C = 0; \tag{5}$$

en supposant :

$$\left.\begin{aligned} A &= \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2 - P\frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dy} + Q\left(\frac{dP}{dy}\right)^2, \\ B &= 2\left(\frac{dQ}{dx}\frac{dQ}{dy} + Q\frac{dP}{dx}\frac{dP}{dy}\right) - P\left(\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dy} + \frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dx}\right), \\ C &= \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 - P\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dx} + P\left(\frac{dP}{dx}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

II. Au moyen de ces valeurs, on peut former le binôme $B^2 - 4AC$, qui entrerait dans l'expression de y', tirée de l'équation (5) (*).

Toutes réductions faites, on trouve

$$B^2 - 4AC = (P^2 - 4Q)\left(\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dx}\right)^2. \tag{7}$$

III. Au lieu des formules (6), écrivons

$$\left.\begin{aligned} A &= \beta'^2 - P\alpha'\beta' + Q\alpha'^2, \\ B &= 2(\beta\beta' + Q\alpha\alpha') - P(\alpha\beta' + \alpha'\beta), \\ C &= \beta^2 - P\alpha\beta + Q\alpha^2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

La relation (7) deviendra

$$B^2 - 4AC = (P^2 - 4Q)(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2. \tag{9}$$

(*) Évidemment, il est plus court de résoudre l'équation (4), par rapport à

$$\frac{\dfrac{dQ}{dx} + y'\dfrac{dQ}{dy}}{\dfrac{dP}{dx} + y'\dfrac{dP}{dy}}.$$

Néanmoins, eu égard à l'objet que nous avons en vue, le premier procédé est préférable au second. (Juin 1885.)

Cette fois, α, α', β, β', P, Q sont des quantités quelconques, numériques si l'on veut (*).

IV. Soient α, β des entiers quelconques, positifs ou négatifs, mais premiers entre eux. Si l'on détermine α', β' par la condition

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \pm 1,$$

on aura

$$B^2 - 4AC = P^2 - 4Q. \tag{10}$$

Soient, par exemple, $\alpha = 13$, $\beta = 8$: on peut prendre $\alpha' = 5$, $\beta' = 3$. Les formules (8) donnent :

$$A = 9 - 15P + 25Q, \quad B = 48 - 79P + 130Q,$$
$$C = 64 - 104P + 169Q.$$

Donc, quelles que soient les quantités P, Q, l'égalité (10) sera vérifiée.

Addition. — (*Juin* 1885.)

V. Si $P^2 - 4Q = 1$, la relation (9) se réduit à

$$B^2 - 4AC = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2. \tag{11}$$

Pour satisfaire, de la manière la plus générale, à la condition indiquée, il suffit de prendre

$$P = 2t + 1, \quad Q = t(t + 1). \tag{12}$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si l'on fait :

$$A = \alpha'^2 t^2 + (\alpha' - 2\beta')\alpha' t - (\alpha' - \beta')\beta',$$
$$B = 2\alpha\alpha' t^2 + 2(\alpha\alpha' - \alpha\beta' - \alpha'\beta)t + 2\beta\beta' - \alpha\beta' - \alpha'\beta,$$
$$C = \alpha^2 t^2 + (\alpha - 2\beta)\alpha t - (\alpha - \beta)\beta,$$

on aura

$$B^2 - 4AC = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2.$$

(*) Ainsi, *le rapport des deux* FORMES *semblables*, $B^2 - 4AC$, $P^2 - 4Q$, *est un carré.* (Juin 1885.)

VI. *Application.* — Soient, comme ci-dessus :

$$\alpha = 13, \quad \beta = 8, \quad \alpha' = 5, \quad \beta' = 3.$$

On doit trouver

$$(130t^2 - 28t - 31)^2 - 4(25t^2 - 5t - 6)(169t^2 - 39t - 40) = 1 ;$$

ce qui est exact (*).

CIII. — Enveloppe d'un cylindre de révolution (**).

(*Avril* 1873.)

I. Problème. — *Si l'axe* MT *d'un cylindre de révolution roule sur une courbe donnée,* AMB, *quelle est l'enveloppe de la surface cylindrique?*

Par les considérations les plus élémentaires, on reconnaît que :

1° *L'intersection de deux cylindres de révolution, égaux entre eux, et dont les axes se rencontrent, est composée de deux ellipses;*

2° *Si les axes viennent à coïncider, l'une des ellipses se réduit à la section droite; l'autre se transforme en deux génératrices, parallèles à l'axe commun, et passant par les extrémités du diamètre* 2R *de la section droite parallèle au plan des deux axes* (***).

Par conséquent, l'enveloppe cherchée se compose de deux parties :

1° *Une surface-canal* Σ, *enveloppe d'une sphère inscrite au cylindre donné, et dont le centre décrirait* AMB;

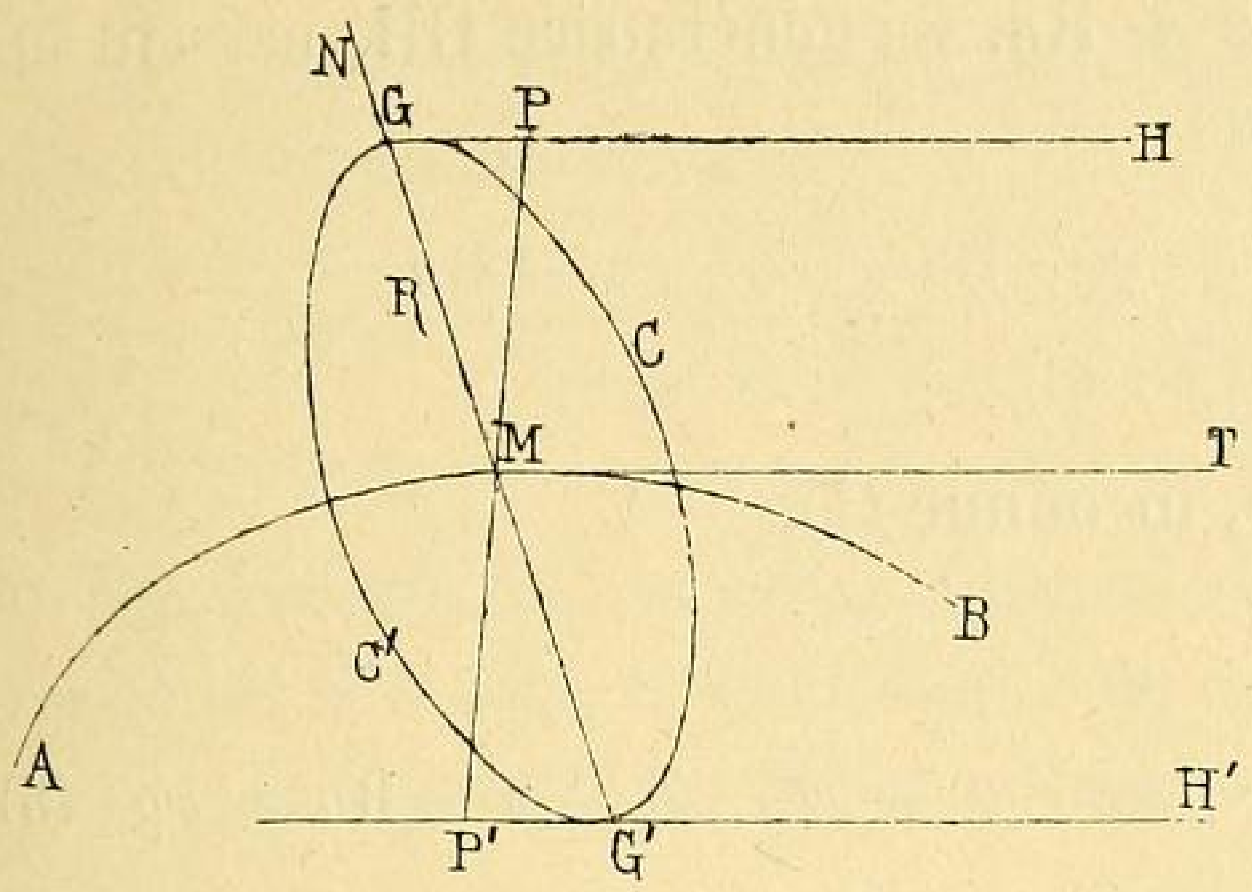
(*) Les formules précédentes sont applicables à la résolution, en nombres entiers, de l'équation

$$X^2 - 4YZ = U^2;$$

mais il est clair que la solution directe (absolument évidente) est préférable à l'autre.

(**) Reproduite, en partie, dans les *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces* (Mémoires de l'Académie de Belgique, collection in-8°, 1875).

(***) Plus exactement, *le diamètre* dont il s'agit *est la limite de cette perpendiculaire :* dans le problème actuel, ce diamètre coïncide avec la *binormale* de AMB.



2° *Une surface réglée* S, *dont on trouve deux génératrices* GH, G'H' *en prenant, sur la binormale* GMG', MG = M'G' = R, *et menant, par les points* G, G', *des parallèles à* MP.

II. Soient :

x, y, z les coordonnées du point de contact M ;
a, b, c les cosinus directifs de la tangente MT ;
l, m, n les cosinus directifs de la binormale MN ;
ρ, r les rayons de courbure et de torsion de la ligne AMB.

On a, par des formules connues (*) :

$$\frac{l}{bc' - cb'} = \frac{m}{ca' - ac'} = \frac{n}{ab' - ba'} = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} = \rho, \quad (1)$$

$$\frac{l'}{a'} = \frac{m'}{b'} = \frac{n'}{c'} = -\frac{\rho}{r}, \quad (2)$$

$$al' + bm' + cn' = 0, \quad (3)$$

$$a'l' + b'm' + c'n' = -\frac{1}{r\rho}, \quad (4)$$

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = \frac{1}{r^2} (^{**}). \quad (5)$$

Considérons, en particulier, le point G, dont les coordonnées

(*) Voir, par exemple, notre *Théorie analytique des lignes à double courbure.*

(**) Dans ces égalités, les accents désignent des dérivées relatives à l'arc AM = s, pris pour variable indépendante. Pour la discussion des signes, voir le travail cité.

sont $x + \mathrm{R}l$, $y + \mathrm{R}m$, $z + \mathrm{R}n$. La génératrice GH, passant en ce point, a pour équations

$$\frac{\mathrm{X} - x - \mathrm{R}l}{a} = \frac{\mathrm{Y} - y - \mathrm{R}m}{b} = \frac{\mathrm{Z} - z - \mathrm{R}n}{c} = \varphi,$$

φ étant une fonction de s, inconnue (*).

Écrivons-les ainsi :

$$\mathrm{X} - x - \mathrm{R}l = a\varphi, \quad \mathrm{Y} - y - \mathrm{R}m = b\varphi, \quad \mathrm{Z} - z - \mathrm{R}n = c\varphi. \quad (6)$$

III. *Si la surface* s *est développable,* on doit avoir, avec ces équations (6), les relations

$$\left.\begin{aligned} -a - \mathrm{R}l' &= a\varphi' + a'\varphi, \\ -b - \mathrm{R}m' &= b\varphi' + b'\varphi, \\ -c - \mathrm{R}n' &= c\varphi' + c'\varphi; \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

dérivées des premières.

Comme

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad aa' + bb' + cc' = 0,$$

on conclut, des équations (7) :

$$-1 - \mathrm{R}\sum al' = \varphi', \quad -\mathrm{R}\sum a'l' = \varphi\sum a'^2,$$
$$1 + \mathrm{R}^2\sum l'^2 = \varphi'^2 + \varphi^2\sum a'^2;$$

ou, à cause des relations (2) et (3) :

$$-1 = \varphi', \quad \mathrm{R}\frac{\rho}{r} = \varphi, \quad 1 + \frac{\mathrm{R}^2}{r^2} = \varphi'^2 + \frac{\varphi^2}{\rho^2}. \quad (8)$$

La troisième égalité est une conséquence des deux premières; donc deux génératrices consécutives se rencontrent; ou, ce qui est équivalent, *la surface* S *est développable* (**).

(*) Cette fonction représente la distance comprise entre le point G et le point où la génératrice GH touche son enveloppe, *si la surface* s *est développable.*

(**) On arrive au même résultat, mais moins simplement, en considérant GH comme l'intersection du *plan rectifiant* avec un plan parallèle au plan osculateur.

IV. Soit P le point où la génératrice GH touche son enveloppe. D'après la valeur de φ (8) :

$$GP = R\frac{\rho}{r}, \quad \text{tg PMT} = \frac{r}{\rho}\cdot$$

Or, $\frac{r}{\rho}$ représente aussi la tangente de l'angle H formé par la tangente MT avec la *rectifiante* (*); donc *le point* P *est l'intersection de la rectifiante* MR *avec la génératrice* GH.

V. PP′P″ ... étant l'arête de rebroussement de la surface S, soient PM, P′M′, P″M″, ... les *rectifiantes* passant en P, P′, P″, ... Si l'on développe la surface rectifiante, *la courbe* AMB *devient une ligne droite* amb (**). Les *rabattements* des binormales MG, M′G′, ... seront les droites *mg*, *m′g′*, ... perpendiculaires à *ab*, et égales à R; donc *la transformée de l'arête de rebroussement est une droite,* parallèle à *ab*. Conséquemment, *cette arête est une ligne géodésique de la surface rectifiante.*

CIV. — Quelques identités.

(*Mai* 1872.)

I. Des expressions de $\frac{1}{\rho^2}$, $\frac{1}{r\rho}$, $\frac{1}{r^2}$ (1), (4), (5) (***), on conclut

$$(a'^2 + b'^2 + c'^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2) = (a'l' + b'm' + c'n')^2; \quad (9)$$

ou, par un changement de notation :

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = (xx' + yy' + zz')^2. \quad (A)$$

Dans cette identité, *les quantités* x, y, z, *sont proportionnelles à* x′, y′, z′.

(*) *Théorie analytique des lignes à double courbure*, p. 27.

(**) C'est à cette propriété que la rectifiante doit son nom.

(***) Voir la *Note* CIII.

Cette condition, évidemment suffisante, est *nécessaire*. En effet, l'égalité (A) peut être remplacée par

$$(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2 = 0 \; (^*).$$

II. De

$$l\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2} = bc' - cb', \tag{1}$$

on déduit

$$l\frac{a'a'' + b'b'' + c'c''}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} + l'\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2} = bc'' - cb''; \tag{10}$$

puis, en prenant les deux autres relations de même forme que celle-ci, et faisant la somme des carrés :

$$(l'^2 + m'^2 + n'^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) = \sum(bc'' - cb'')^2 - \frac{(a'a'' + b'b'' + c'c'')^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2}. \tag{11}$$

L'égalité (10) donne encore, en vertu de la condition

$$la' + mb' + nc' = 0,$$

conséquence des formules (1) :

$$\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}\sum l'a' = \sum(bc'' - cb'')a' = -\sum(ab' - ba')c'',$$

ou

$$\sum l'a' = -\frac{\sum(ab' - ab')c''}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}. \tag{12}$$

Au moyen des valeurs (11) et (12), la relation (9) devient

$$\left[\sum a'^2\right]\sum(bc'' - cb'')^2 = \left[\sum a'a''\right]^2 + \left[\sum(bc'' - cb'')a'\right]^2; \tag{13}$$

ou, par le changement de notation déjà employé :

$$\left.\begin{aligned}&(x'^2 + y'^2 + z'^2)\left[(yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' - yx'')^2\right] = \\ &(x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 + \left[(yz'' - zy'')x' + (zx'' - xz'')y' + (xy'' - yx'')z'\right]^2.\end{aligned}\right\}\text{(B)}$$

(*) La relation (9) est une conséquence des *formules* (2) *de Frenet*. Inversement, si elle était connue *a priori*, ces formules en résulteraient. (Juin 1885.)

III. *Remarques.* — 1° Dans cette identité (B), les quantités $x, y, z, x', \ldots$ sont assujetties, seulement, aux conditions

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad xx' + yy' + zz' = 0. \qquad (14)$$

Effectivement, si l'on fait passer tous les termes dans un seul membre, et qu'on ordonne suivant les puissances et les produits de x'', y'', z''; on trouve, en ayant égard à ces deux conditions,

$$0 = 0.$$

2° La relation (B) permet, dans certains cas, de *transformer, en une somme de deux carrés, le produit d'une somme de trois carrés par une somme de trois carrés.*

IV. *Application.* — Soient :

$$x = \frac{9}{25}, \quad y = \frac{12}{25}, \quad z = \frac{20}{25}; \quad x' = \frac{24}{25}, \quad y' = \frac{7}{25}, \quad z' = -\frac{15}{25};$$

$$x'' = 2, \quad y'' = 1, \quad z'' = 3.$$

Les conditions énoncées étant remplies, on doit trouver

$$\frac{24^2 + 7^2 + 15^2}{25^2}\left[\left(\frac{16}{25}\right)^2 + \left(\frac{13}{25}\right)^2 + \left(\frac{15}{25}\right)^2\right]$$
$$= \left(\frac{10}{25}\right)^2 + \left[\frac{16.24}{25^2} + \frac{13.7}{25^2} + \frac{15^2}{25^2}\right]^2,$$

ou

$$(24^2 + 7^2 + 15^2)(16^2 + 13^2 + 15^2)$$
$$= 250^2 + (6\,.\,24 + 13\,.\,7 + 225)^2 = 250^2 + 700^2;$$

ce qui est exact.

V. *Autre identité.* — *Soient*

$$\left.\begin{aligned} x &= y'\gamma - z'\beta, \\ y &= z'\alpha - x'\gamma, \\ z &= x'\beta - y'\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Soient x″, y″, z″ *trois quantités quelconques. On a, identiquement,*

$$\left.\begin{aligned}&(x'^2+y'^2+z'^2)[(yz''-zy'')^2+(zx''-xz'')^2+(xy''-yx'')]^2\\&\quad=(x^2+y^2+z^2)(x'x''+y'y''+z'z'')^2\\&\quad+[x(y'z''-z'y'')+y(z'x''-x'z'')+z(x'y''-yx'')]^2\,(^*).\end{aligned}\right\}\text{(C)}$$

Si, par exemple :

$$\alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=3;\quad x'=3,\ y'=4,\ z'=2;\quad x''=1,\ y''=1,\ z''=2;$$

puis

$$x=8,\quad y=7,\quad z=2;$$

on doit trouver

$$(3^2+4^2+2^2)(15^2+16^2+14^2)=(8^2+7^2+4^2)\,11^2+(48+28-2)^2,$$

ou

$$(3^2+4^2+2^2)(15^2+16^2+14^2)=88^2+77^2+44^2+74^2.$$

C'est ce qui a lieu.

VI. *Remarque.* — *L'identité* (C) *réduit, à une somme de quatre carrés, le produit d'une somme de trois carrés par une somme de trois carrés.*

Addition. — (*Mars* 1878.)

VII. La solution d'un problème sur le triangle (**) conduit à l'identité

$$\left.\begin{aligned}&4a^2b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=\\&(b^2+c^2-a^2)^2a^2+(c^2+a^2-b^2)^2b^2+(a^2+b^2-c^2)^2c^2,\end{aligned}\right\}\text{(D)}$$

(*) Cette relation (C) ne diffère, qu'en apparence, de l'identité (A) démontrée à la page 22 de la *Théorie analytique des lignes à double courbure.* (Juin 1885.)

(**) *Évaluer, en fonction des côtés, la distance comprise entre le centre du cercle circonscrit et le point de concours des hauteurs* (Théorèmes et Problèmes, p. 151).

dans laquelle *le second membre est une somme de trois carrés*, et dont la vérification est facile.

VIII. En voici deux autres, d'après lesquelles *le cube d'une somme de trois carrés est, au moins de deux manières, une somme de neuf carrés :*

$$\left.\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^3 &= (ab^2)^2+(bc^2)^2+(ca^2)^2+\left[a(a^2+b^2)\right]^2+\left[c(a^2+b^2)\right]^2\\ &\quad+\left[b(b^2+c^2)\right]^2+\left[a(b^2+c^2)\right]^2+\left[c(c^2+a^2)^2\right]^2+\left[b(c^2+a^2)\right]^2\\ &= (ba^2)^2+(cb^2)^2+(ac^2)^2+\left[b(b^2+a^2)\right]^2+\left[c(b^2+a^2)\right]^2+\left[a(a^2+c^2)\right]^2\\ &\quad+\left[b(a^2+c^2)\right]^2+\left[c(c^2+b^2)\right]^2+\left[a(c^2+b^2)\right]^2 \ (*).\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{E})$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}(1+4+16)^3 &= 4^2+32^2+\ 4^2+\ 5^2+20^2+40^2+20^2+68^2+34^2\\ &= 2^2+16^2+16^2+10^2+20^2+17^2+34^2+80^2+20^2.\end{aligned}$$

IX. *Décomposition en bi-carrés.* — On a, identiquement,

$$\begin{aligned}(-x+y+z+u)^4+(x-y+z+u)^4+(x+y-z+u)^4+(x+y+z-u)^4\\ =4\left[\sum x^4+6\sum x^2y^2-24xyzu\right];\end{aligned}$$

et, si $u=0$:

$$\begin{aligned}(-x+y+z)^4+(x-y+z)^4+(x+y-z)^4+(x+y+z)^4=\\ 4\left[\sum x^4+6\sum x^2y^2\right].\end{aligned}$$

On a aussi

$$4(x^2+y^2+z^2)^2=4\left[\sum x^4+2\sum x^2y^2\right].$$

Donc, par soustraction,

$$\begin{aligned}(-x+y+z)^4+(x-y+z)^4+(x+y-z)^4+(x+y+z)\\ =4(x^2+y^2+z^2)+16\sum x^2y^2.\end{aligned}$$

Le second membre égale

$$(2x^2+2y^2+2z^2)^2+(4xy)^2+(4yz)^2+(4zx)^2;$$

(*) On sait que $(a^2+b^2+c^2)^n$ *est réductible à une somme de trois carrés* (MÉMOIRE SUR CERTAINES DÉCOMPOSITIONS EN CARRÉS, p. 9).

en sorte que l'identité devient

$$\left.\begin{array}{c}(-x+y+z)^4+(x-y+z)^4+(x+y-z)^4+(x+y+z)^4=\\ (2x^2+2y^2+2z^2)^2+(4xy)^2+(4yz)^2+(4zx)^2.\end{array}\right\}\quad (F)$$

Ainsi, *la somme de quatre carrés peut être égale à la somme de quatre bi-carrés* (*).

X. *Suite.* — Soient

$$a=2(x^2+y^2+z^2),\quad b=4xy,\quad c=4yz,\quad d=4zx.$$

On tire, des trois dernières équations,

$$4x^2=\frac{bd}{c},\quad 4y^2=\frac{bc}{d},\quad 4z^2=\frac{cd}{b};$$

puis, en substituant dans la première :

$$2abcd=b^2d^2+b^2c^2+c^2d^2.$$

Si donc *cette condition est remplie, et que les fractions*

$$\frac{bd}{c},\quad \frac{bc}{d},\quad \frac{cd}{b}$$

se réduisent à des carrés pairs, la quantité $a^2+b^2+c^2+d^2$ *est la somme de quatre bi-carrés.*

Autre addition. — (*Juin* 1885.)

XI. Si l'on prend

$$\alpha=y'z''-z'y'',\quad \beta=z'x''-x'z'',\quad \gamma=x'y''-y'x'',$$

les formules (15) donnent

$$\left.\begin{array}{l}x=x'(x'x''+y'y''+z'z'')-x''(x'^2+y'^2+z'^2),\\ y=y'(x'x''+y'y''+z'z'')-y''(x'^2+y'^2+z'^2),\\ z=z'(x'x''+y'y''+z'z'')-z''(x'^2+y'^2+z'^2);\end{array}\right\}\quad (16)$$

(*) On ne compte pas la solution *insignifiante* :

$$(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2+(d^2)^4=a^4+b^4+c^4+d^4.$$

et le déterminant

$$x(y'z'' - z'y'') + y(z'x'' - x'z'') + z(x'y'' - y'x'')$$

se réduit à zéro (*).

Donc l'identité (C) devient

$$\left.\begin{aligned}&(x^2 + y^2 + z^2)(x'x'' + y'y'' + z'z'')^2\\ =&(x'^2 + y'^2 + z'^2)[(yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' + yx'')^2].\end{aligned}\right\}\text{(G)}$$

Celle-ci réduit, à une somme de trois carrés, le produit de deux facteurs égaux, chacun, à une somme de trois carrés.

XII. *Application.* — Soient

$$x' = 1,\quad y' = 2,\quad z' = 3;\quad x'' = 2,\quad y'' = 5,\quad z'' = 1;$$

et, par conséquent :

$$x = -13,\quad y = -40,\quad z = 31.$$

On a, en supprimant un facteur commun,

$$(1^2 + 2^2 + 3^2)(1^2 + 13^2 + 5^2) = 13^2 + 40^2 + 31^2.$$

XIII. *Autre identité.* — Supposons

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 1. \tag{17}$$

Alors, en vertu des formules (16) :

$$\left.\begin{aligned}x = x' - x''(x'^2 + y'^2 + z'^2),\quad y = y' - y''(x'^2 + y'^2 + z'^2),\\ z = z' - z''(x'^2 + y'^2 + z'^2);\end{aligned}\right\}\text{(18)}$$

puis, au lieu de (G) :

$$\left.\begin{aligned}(x'^2 + y'^2 + z'^2)[(yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' - yx'')^2]\\ = x^2 + y^2 + z^2.\end{aligned}\right\}\text{(H)}$$

On peut donc, d'une infinité de manières, *trouver un produit*

(*) A cause de

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

égal à une somme de trois carrés, et dont les deux facteurs soient égaux, chacun, à une somme de trois carrés.

Par exemple,

$$(1^2 + 2^2 + 3^2)(29^2 + 13^2 + 37^2) = 169^2 + 68^2 + 11^2.$$

XIV. *Remarques.* — 1° *Le premier facteur est arbitraire* (*).

2° D'après les valeurs (18), on a

$$yz'' - zy'' = y'z'' - z'y'', \quad zx'' - xz'' = z'x'' - x'z'',$$
$$xy'' - yx'' = x'y'' - y'x'';$$

donc l'identité (H) est la même chose que

$$\left.\begin{aligned}(x'^2+y'^2+z'^2)\left[(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2\right]\\ = x^2+y^2+z^2\ (^{**}).\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{K})$$

3° Celle-ci est, pour ainsi dire, *conjuguée* de la relation connue :

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2)$$
$$= (y'z'' - zy'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2,$$

laquelle suppose

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0.$$

(*) Soient

$$x' = y' = z' = 1;$$

et, par conséquent,

$$z'' = 1 - (x'' + y'').$$

On trouve :

$$x = 1 - 3x'', \quad y = 1 - 3y'', \quad z = -2 + 3(x'' + y'');$$
$$y'z'' - z'y'' = 1 - x'' - 2y'', \quad z'x'' - x'z'' = -1 + 2x'' + y'',$$
$$x'y'' - y'x'' = y'' - x'';$$

puis, en vertu de la seconde Remarque,

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)\left[(1 - x'' - 2y'')^2 + (-1 + 2x'' + y'')^2 + (x'' - y'')^2\right]$$
$$= (1 - 3x'')^2 + (1 - 3y'')^2 + \left[-2 + 3(x'' + y'')\right]^2,$$

quels que soient x'', y''.

(**) Cette petite transformation a pour effet de simplifier les calculs.

Autre addition. — (*Mai* 1886.)

XV. En discutant l'identité (F), on trouve ces deux-ci :

$$(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+(a+d-b-c)^2$$
$$= 4(a^2+b^2+c^2+d^2),$$
$$(-a+b+c+d)^2+(a-b+c+d)^2+(a+b-c+d)^2+(a+b+c-d)^2$$
$$= 4(a^2+b^2+c^2+d^2),$$

évidentes et connues (*).

On en conclut les identités :

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2}\right)^2\\ \qquad +\left(\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2}\right)^2=a^4+b^4+c^4+d^4,\end{array}\right\}\ (\mathrm{L})$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{-a^2+b^2+c^2+d^2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a^2-b^2+c^2+d^2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2+d^2}{2}\right)^2\\ \qquad +\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2-d^2}{2}\right)^2=a^4+b^4+c^4+d^4,\end{array}\right\}\ (\mathrm{M})$$

qui permettent de *décomposer, en carrés, une somme de deux, trois, quatre bi-carrés.*

Soit, par exemple, le nombre $N = 3\,108 = 1^4+3^4+5^4+7^4$. On trouve

$$N = 42^2+64^2+22^2+16^2 = 42^2+52^2+16^2+8^2.$$

XVI. Ce n'est pas tout : la relation (M) est un cas particulier de l'identité *évidente* :

$$\sum\left(\frac{2S_k}{n}-a^k\right)^2 = S_{2k},$$

dans laquelle

$$S_k = a^k + b^k + \cdots + g^k,$$
$$S_{2k} = a^{2k} + b^{2k} + \cdots + g^{2k}.$$

(*) Realis s'est servi de la première pour établir de remarquables théorèmes d'arithmétique (*Nouvelles Annales*, 1873, p. 219).

CV. — Développements de l'intégrale elliptique de première espèce.

(*Mai* 1872) (*).

I. Pour transformer

$$F_1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}}, \tag{1}$$

je pose

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{tg}\theta. \tag{2}$$

Cette formule donne

$$\sin^2\varphi = \frac{\sin^2\theta}{b\cos^2\theta + \sin^2\theta}, \quad \cos^2\varphi = \frac{b\cos^2\theta}{b\cos^2\theta + \sin^2\theta},$$

$$1 - c^2\sin^2\varphi = b\,\frac{\cos^2\theta + b\sin^2\theta}{b\cos^2\theta + \sin^2\theta}, \quad d\varphi = \sqrt{b}\,\frac{d\theta}{b\cos^2\theta + \sin^2\theta};$$

puis

$$F_1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{[1 - (1-b)\cos^2\theta][1 - (1-b)\sin^2\theta]}} \;(^{**}). \tag{3}$$

On a, par la formule du binôme :

$$[1 - (1-b)\cos^2\theta]^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \frac{\Gamma(2n+1)}{4^n[\Gamma(n+1)]^2}(1-b)^n\cos^{2n}\theta,$$

$$[1 - (1-b)\sin^2\theta]^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \frac{\Gamma(2p+1)}{4^p[\Gamma(p+1)]^2}(1-b)^p\sin^{2p}\theta;$$

(*) Un extrait de cette Note a été communiqué au Congrès du Havre, en 1877.

(**) A cause de

$$\cos^2\theta + b\sin^2\theta = 1 - (1-b)\sin^2\theta, \quad b\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 - (1-b)\cos^2\theta.$$

donc

$$F_1(c)=\sum_0^\infty\sum_0^\infty\frac{\Gamma(2n+1)\Gamma(2p+1)}{4^{n+p}\left[\Gamma(n+1)\Gamma(p+1)\right]^2}(1-b)^{n+p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\sin^{2p}\theta d\theta.$$

La valeur de l'intégrale est

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+p+1)}.$$

Par conséquent,

$$F_1(c)=\frac{1}{2}\sum_0^\infty\sum_0^\infty\frac{\Gamma(2n+1)\Gamma(2p+1)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\left[\Gamma(n+1)\Gamma(p+1)\right]^2\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{1-b}{4}\right)^{n+p}. \quad (4)$$

II. La fraction

$$\frac{\Gamma(2n+1)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left[\Gamma(n+1)\right]^2}$$

égale

$$\frac{1.2.3...2n}{(1.2.3...n)^2}\sqrt{\pi}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}=\frac{(n+1)(n+2)...2n}{1.2.3...n}\sqrt{\pi}\frac{2.6.10...(4n-2)}{4^n}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{4^n}\frac{\left[(n+1)(n+2)...2n\right]^2}{1.2.3...n} \text{ (*)}.$$

De même,

$$\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\left[\Gamma(p+1)\right]^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4^p}\frac{\left[(p+1)(p+2)...(2p)\right]^2}{1.2.3...p}.$$

Donc, si l'on suppose $n+p=s$, et qu'on fasse

$$P_s=\frac{1}{1.2.3...s}\sum\frac{\left[(n+1)(n+2)...2n.(p+1)(p+2)...2p\right]^2}{1.2.3...n.1.2...p}, \quad (5)$$

(*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 56. La transformation précédente peut être effectuée de diverses manières ; par exemple, au moyen de la formule de Legendre.

on aura, au lieu de la formule (4),

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty P_s \left(\frac{1-b}{16}\right)^s. \tag{6}$$

On verra, tout à l'heure, que P_s *est un nombre entier* (*).

III. Le développement de $F_1(c)$, ordonné suivant les puissances du module, est

$$\frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 c^4 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 c^6 + \cdots\right].$$

Si l'on fait $1 - b = 2x$, il devient

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty [C_{2n,n}]^2 \left[\frac{x(1-x)}{4}\right]^n. \tag{7}$$

Dans le développement de $(1-x)^n$, le coefficient de x^p est

$$(-1)^p C_{n,p}.$$

Donc si l'on suppose encore $n + p = s$, et que l'on fasse

$$Q_s = \sum_0^\infty [C_{2s-2p,\,s-p}]^2 C_{s-p,\,p} (-1)^p \left(\frac{1}{4}\right)^{s-p}, \quad \left(0 \overline{\overline{<}}\, p \,\overline{\overline{<}}\, \frac{s}{2}\right) \tag{8}$$

on aura

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty Q_s x^s. \tag{9}$$

D'ailleurs, la formule (6) peut être écrite ainsi :

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty P_s \left(\frac{x}{8}\right)^s. \tag{10}$$

Conséquemment,

$$P_s = 2^s\,.\,4^s Q_s. \tag{11}$$

(*) Cette propriété résulte, aussi, du théorème suivant :

$$\frac{(a+1)(a+2)\ldots 2a\,.\,(b+1)(b+2)\ldots 2b}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(a+b)} = \textit{entier},$$

si a *et* b *sont des nombres entiers* (*Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques*. Seconde Note, p. 14.)

Et comme $4^s Q_s$ est un nombre entier, P_s *est* aussi *un nombre entier, divisible par* 2^s.

IV. Soit, pour abréger,

$$F_1(c) = \sum_0^\infty A_n (1 - b)^n; \tag{12}$$

et, par conséquent :

$$\frac{dF_1(c)}{dc} = \frac{c}{b} \sum_0^\infty n A_n (1 - b)^{n-1} \text{ (*)}, \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2F_1(c)}{dc^2} &= \frac{c^2}{b^2} \sum_0^\infty n(n-1) A_n (1 - b)^{n-2} \\ &+ \frac{1}{b^3} \sum_0^\infty n A_n (1 - b)^{n-1} \text{ (**)}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

On sait que

$$b^2 \frac{d^2F_1}{dc^2} + \frac{1 - 3c^2}{c} \frac{dF_1}{dc} - F_1 = 0 \text{ (***)}.$$

Cette relation devient, d'après les valeurs précédentes,

$$bc^2 \sum_0^\infty n(n-1) A_n (1 - b)^{n-2} + (2 - 3c^2) \sum_0^\infty n A_n (1 - b)^{n-1}$$
$$- b \sum_0^\infty A_n (1 - b)^n = 0.$$

Soit encore $1 - b = t$; et, par conséquent :

$$b = 1 - t, \quad c^2 = (2 - t)t, \quad 2 - 3c^2 = 2 - 6t + 3t^2;$$

(*) A cause de

$$\frac{db}{dc} = -\frac{c}{b}.$$

(**) La dérivée de $\frac{c}{b}$ est

$$\frac{b + \frac{c^2}{b}}{b^2} = \frac{1}{b^3}.$$

(***) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 63.

puis, au lieu de la dernière égalité,

$$\left.\begin{array}{c}(2-3t+t^2)\sum_0^\infty n(n-1)A_n t^{n-1}+(2-6t+3t^2)\sum_0^\infty nA_n t^{n-1}\\ -(1-t)\sum_0^\infty A_n t^n=0.\end{array}\right\}\quad(15)$$

V. Dans le premier membre, qui doit être nul quelle que soit la valeur attribuée au nombre entier n, le coefficient de t^0 est $2A_1 - A_0$; le coefficient de t est

$$4A_2 + 4A_2 - 6A_1 - A_1 + A_0.$$

Donc

$$A_1 = \frac{1}{2} A_0, \quad A_2 = \frac{5}{16} A_0.$$

Dès que n surpasse 2, le coefficient A_n est donné par la *loi de récurrence :*

$$2n^2 A_n - (3n^2 - 3n + 1) A_{n-1} + (n-1)^2 A_{n-2} = 0. \quad (16)$$

La comparaison des formules (6), (12) donne

$$A_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{P_n}{16^n}.$$

Donc

$$n^2 P_n - 8(3n^2 - 3n + 1) P_{n-1} + 128(n-1)^2 P_{n-2} = 0. \quad (17)$$

Par la formule (5), on trouve

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 8;$$

après quoi l'équation (17) donne, successivement :

$$P_2 = 80, \quad P_3 = 896, \quad P_4 = 10\,816, \ldots$$

On a donc le théorème suivant, qu'il serait, croyons-nous, très difficile de démontrer directement :

Soient une suite de nombres P_0, P_1, P_2, ..., *dont les deux* *premiers sont* 1 *et* 8, *et dont les autres, à partir de* n = 2, *sont déterminés par la formule :*

$$P_n = \frac{8}{n^2}\left[(3n^2 - 3n + 1)P_{n-1} - 16(n-1)^2 P_{n-2}\right].$$

Tous ces nombres sont entiers (*).

VI. La comparaison des formules

$$Q_n = \sum [C_{2n-2p,\,n-p}]^2 C_{n-p,\,p}(-1)^p \left(\frac{1}{4}\right)^{n-p}, \qquad (8)$$

$$P_n = 2^n \, . \, 4^n Q_n \qquad (11)$$

prouve que

$$P_n = 2^n \sum (-4)^p [C_{2n-2p,\,n-p}]^2 C_{n-p,\,p}, \qquad \left(0 \overline{\gtrless} p \overline{\gtrless} \frac{n}{2}\right)$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{P_n}{2^n} = [C_{2n,\,n}]^2 - 4\,.\,[C_{2n-2,\,n-1}]^2 C_{n-1,\,1} + 4^2[C_{2n-4,\,n-2}]^2 C_{n-2,\,2} \\ \quad - 4^3[C_{2n-6,\,n-3}]^2 C_{n-3,\,3} + \cdots \end{array}\right\} \qquad (18)$$

Nous avons ainsi l'expression générale de P_n, ou de l'*intégrale*

(*) M. de Jonquières, à qui j'avais indiqué quelques-uns des résultats précédents, a eu la patience de calculer les valeurs de P_n, jusqu'à $n = 17$. Les voici :

$P_1 = 2^3$, $P_2 = 2^4.5$, $P_3 = 2^7.7$, $P_4 = 2^6.169$, $P_5 = 2^9.269$, $P_6 = 2^{10}.1\,781$,

$P_7 = 2^{13}.3\,035$, $P_8 = 2^{10}.338\,377$, $P_9 = 2^{13}.599\,369$, $P_{10} = 2^{14}.4\,306\,645$,

$P_{11} = 2^{17}.7\,816\,895$, $P_{12} = 2^{16}.229\,011\,025$, $P_{13} = 2^{19}.412\,401\,885$,

$P_{14} = 2^{20}.3\,135\,675\,605$, $P_{15} = 2^{23}.5\,850\,156\,227$, $P_{16} = 2^{18}.2\,806\,908\,617\,417$,

$P_{17} = 2^{21}.5\,281\,843\,126\,105$.

Les recherches de ce savant Géomètre sont l'objet d'une Note communiquée à l'Académie des sciences, et publiée dans les *Comptes rendus* (séance du 10 août 1885).

particulière de l'équation (17), relative à $P_0 = 1$, $P_1 = 8$. Si, dans cette formule, on prend $n = 4$, on trouve

$$\frac{P_4}{16} = \left(\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\right)^2 - 4.\left(\frac{6.5.4}{1.2.3}\right)^2 3 + 16\left(\frac{4.3}{1.2}\right)^2$$

$$= 70^2 - 4.20^2.3 + 16.6^2 = 4\,900 - 4\,800 + 576 = 676;$$

puis $P_4 = 10\,816$, comme ci-dessus.

VII. Le second membre de la formule

$$F_1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\left[1 - (1-b)\cos^2\theta\right]\left[1 - (1-b)\sin^2\theta\right]}} \tag{3}$$

égale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{b + (1-b)^2 \sin^2\theta\cos^2\theta}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{4b + (1-b)^2\sin^2 2\theta}}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{4b + (1-b)^2\sin^2 x}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1+b)^2 - (1-b)\cos^2 x}}$$

$$= \frac{2}{1+b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2 \sin^2\varphi}} \;(^*).$$

Ainsi

$$F_1(c) = \frac{2}{1+b} F_1\left(\frac{1-b}{1+b}\right); \tag{19}$$

relation connue (**).

(*) On fait

$$2\theta = x,$$

puis

$$x = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

(**) Legendre, t. I, p. 79.

VIII. *Remarque.* — Si, dans la même formule (3), on change b en $-b$, on obtient, semble-t-il :

$$F_1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{[1-(1+b)\cos^2\theta][1-(1+b)\sin^2\theta]}}.$$

Mais le second membre n'est réel que pour les valeurs de θ satisfaisant aux conditions :

$$\cos^2\theta < \frac{1}{1+b}, \quad \sin^2\theta < \frac{1}{1+b}. \tag{20}$$

La première équivaut à

$$\sin^2\theta > \frac{b}{1+b}.$$

Par conséquent, si l'on fait

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{b}{1+b}}, \quad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1+b}},$$

on doit substituer, à l'égalité ci-dessus :

$$F_1(c) = \int_\alpha^\beta \frac{d\theta}{\sqrt{[1-(1+b)\cos^2\theta][1-(1+b)\sin^2\theta]}}. \tag{21}$$

Moyennant ce *changement de limites,* l'intégrale $F_1(c)$ est développée suivant les puissances de $1 + b$ (*).

(*) Les conditions de convergence, relatives à la nouvelle série, sont celles qui viennent d'être écrites.

Addition. — (Juillet 1877.)

IX. Reprenons la formule

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{tg} \theta, \tag{2}$$

plus simple que celle de Lagrange :

$$\operatorname{tg} (\varphi_1 - \varphi) = b \operatorname{tg} \varphi.$$

En l'écrivant ainsi :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \sqrt{b} \operatorname{tg} \varphi, \tag{22}$$

et en supposant

$$c_1 = \frac{1 - b}{1 + b}, \tag{23}$$

valeur d'où résulte, comme on sait,

$$b_1 = \frac{2\sqrt{b}}{1 + b}, \tag{24}$$

on trouve aisément

$$F_1(c_1) = \frac{\sqrt{b}}{b_1} F_1(c), \tag{25}$$

puis

$$F_1(c_n) = \frac{\sqrt{b}}{b_n} \sqrt{b_1 \cdot b_2 \ldots b_{n-1}}\, F_1(c). \tag{26}$$

Quand n augmente indéfiniment, le premier membre tend vers $\frac{\pi}{2}$. La limite de b_n est 1. Donc

$$\left[F_1(c)\right]^2 = \frac{\pi^2}{4b} \lim (b_1 b_2 b_3 \ldots). \tag{27}$$

X. Soit $b = \frac{p}{q}$. La formule (24) devient

$$b_1 = \frac{\sqrt{pq}}{\frac{1}{2}(p + q)}. \tag{28}$$

Faisons, comme Gauss :

$$p_1 = \sqrt{pq}, \quad q_1 = \frac{1}{2}(p + q), \quad p_2 = \sqrt{p_1 q_1}, \quad q_2 = \frac{1}{2}(p_1 + q_1). \quad (29)$$

De là résulte, au lieu de l'égalité (27),

$$4\frac{p}{q}\left[\frac{F_1(c)}{\pi}\right]^2 = \lim\left(\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\cdot\frac{p_3}{q_3}\cdots\right). \quad (30)$$

Les nombres p_n, q_n, *toujours compris entre* p *et* q, *tendent, évidemment, vers une limite commune* λ. Pour déterminer cette limite, trouvée par Gauss, écrivons ainsi les équations (29), de *rang impair :*

$$p_1^2 = pq, \quad p_2^2 = p_1 q_1, \quad p_n^2 = p_{n-1} q_{n-1}.$$

Il résulte, de celles-ci et de la relation (30) :

$$\lambda = \frac{q}{2}\frac{\pi}{F_1(c)}. \quad (31)$$

XI. Les valeurs de q_1, q_2, ... q_n (29) donnent, par un calcul aussi simple que le premier :

$$q_n = \frac{1}{2}\left[p + q + (p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) + \cdots + (p_{n-1} - q_{n-1})\right].$$

La limite du premier membre est λ; donc

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[p + q + (p_1 - q_1) + p_2 - q_2) + \cdots + (p_{n-1} - q_{n-1}) + \cdots\right]. \quad (32)$$

Conséquemment :

La quantité λ, *donnée par la formule* (31), *est la limite commune :* 1° *de* p_n ; 2° *de* q_n ; 3° *de* $\sqrt{pq}\sqrt{\frac{q_1}{p_1}}\sqrt{\frac{q_2}{p_2}}\ldots$; 4° *de* $\frac{1}{2}[p + q + (p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) + \ldots]$

XII. Des formules (31), (32), on conclut

$$\frac{\pi}{F_1(c)} = \frac{1}{q}\left[p + q + (p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) + \cdots\right]. \quad (33)$$

La fonction $\frac{\pi}{F_1(c)}$, déjà décomposée en produit indéfini (30), est donc développée en série. En outre, les deux termes des facteurs de ce produit, ou plutôt leurs carrés, sont les termes mêmes de la série; ce qui est assez remarquable (*).

CVI. — Sur la méthode des isopérimètres.

(*Juillet* 1877) (**).

I. Des formules connues :

$$r_1 = \frac{1}{2}(r + R), \quad R_1 = \sqrt{Rr_1}, \quad r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + R_1), \quad R_2 = \sqrt{R_1 r_2}, \ldots$$

$$r_n = \frac{1}{2}(r_{n-1} + R_{n-1}), \quad R_n = \sqrt{R_{n-1} r_n},$$

on conclut les deux systèmes :

$$2r_1 = R + R, \quad 2r_1 = r_1 + R_1, \ldots, 2r_n = r_{n-1} + R_{n-1},$$

$$R_1^2 = Rr_1, \qquad R_2^2 = R_1 r_2, \ldots, R_n^2 = R_{n-1} r_n;$$

puis

$$r_1 + r_2 + \cdots + 2r_n = r + R_1 + \cdots + R_{n-1},$$

$$R_1 R_2 \ldots R_{n-1} . R_n^2 = Rr_1 r_2 \ldots r_{n-1} r_n;$$

ou

$$r_n = \frac{1}{2}(r + R) + \frac{1}{2}\left[(R_1 - r_1) + (R_2 - r_2) + \cdots + (R_{n-1} - r_{n-1})\right], \quad (1)$$

$$R_n = R . \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdots \frac{r_n}{R_n}. \quad (2)$$

Si n croît indéfiniment, les rayons r_n, R_n tendent vers *le rayon d'une circonférence égale à* 4 (***). Donc la série (1) et le pro-

(*) Abstraction faite, bien entendu, des facteurs 2 et q.

(**) Cette Note peut être considérée comme un complément de la précédente.

(***) Pourvu que l'on suppose $r = 0$, $R = 1$. (*Éléments de Géométrie*, p. 184).

duit (2) ont une limite commune, dont la valeur est $\frac{2}{\pi}$. En d'autres termes :

$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{4}(r+\mathrm{R})+\frac{1}{4}\left[(\mathrm{R}_1-r_1)+(\mathrm{R}_2-r_2)+\cdots+(\mathrm{R}_{n-1}-r_{n-1})+\cdots\right], \quad (3)$$

$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{2}\mathrm{R}\frac{r_1}{\mathrm{R}_1}\frac{r_2}{\mathrm{R}_2}\cdots\frac{r_n}{\mathrm{R}_n}\cdots \text{ (*)}. \quad (4)$$

Addition. — (*Mai* 1886.)

II. Si l'on suppose toujours $r=0$, $\mathrm{R}=1$; r_{n-1} et R_{n-1} sont l'apothème et le rayon d'un polygone régulier de 2^n côtés, dont le périmètre égale 4. Soit c_{n-1} le côté de ce polygone; soit α_{n-1} le *demi-angle* au centre. Il est visible que :

$$c_{n-1}=\frac{1}{2^{n-2}}, \quad \alpha_{n-1}=\frac{\pi}{2^n}, \quad r_{n-1}=\frac{\frac{1}{2}c_{n-1}}{\operatorname{tg}\alpha_{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)},$$

$$\mathrm{R}_{n-1}=\frac{\frac{1}{2}c_{n-1}}{\sin\alpha_{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{R}_{n-1}-r_{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right);$$

puis, au lieu de l'égalité (3) :

$$\frac{4}{\pi}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{\pi}{32}+\cdots \text{ (**)}. \quad (5)$$

(*) On conclut, de cette égalité (4) :

$$\log\pi=\log\frac{2}{\mathrm{R}}+\log\frac{\mathrm{R}_1}{r_1}+\cdots+\log\frac{\mathrm{R}_n}{r_n}+\cdots$$

(**) Cette formule, peu connue, est un cas particulier de celle-ci :

$$\frac{1}{x}=\cot x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{x}{8}+\cdots,$$

conséquence de celle d'Euler :

$$\frac{\sin x}{x}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots$$

CVII. — Sur les Nombres de Segner.

(*Juillet* 1870.)

I. Divers Géomètres se sont occupés de ce problème : *De combien de manières un polygone convexe, de* n *côtés, peut-il être décomposé en triangles, au moyen de diagonales?* (*) Soit T_n ce nombre de manières. On sait que

$$T_4 = 2,\quad T_5 = 5,\quad T_6 = 14,\quad T_7 = 42, \ldots$$

Les nombres T_n, considérés par *Segner* (**), satisfont aux relations suivantes :

$$T_{n+1} = T_2 T_n + T_3 T_{n-1} + \cdots + T_{n-1} T_3 + T_n T_2 \text{ (***)}, \tag{1}$$

$$T_{n+1} = \frac{4n-6}{n} T_n. \tag{2}$$

D'après celle-ci, T_n *est divisible par* n, *au moins quand* n *est premier avec* 6.

De plus, comme l'a trouvé Binet (IV), la *fonction génératrice* de T_n est $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. En effet, dans le développement de cette quantité, le coefficient de x^n est

$$C_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots \overline{2n-1}}{4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots \overline{2n+2}} 4^n. \tag{3}$$

Il résulte, de cette formule,

$$C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} C_n. \tag{4}$$

La fraction ne diffère, de la précédente, que par le changement de n en $n+2$. Et comme $T_3 = C_1 = 1$, on a $T_{n+1} = C_{n-1}$.

(*) *Journal de Liouville*, t. III et IV.
(**) *Ibid.*, t. III, p. 505.
(***) On suppose $T_3 = 1$.
(IV) *Journal de Liouville*, t. IV, p. 83.

En outre,

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + T_3 x + T_4 x^2 + \cdots + T_{n+2} x^n + \cdots; \qquad (5)$$

conformément à la remarque de Binet.

II. On peut vérifier, directement, que C_n *est un nombre entier.*

En premier lieu, d'après la formule (3) :

$$C_n = \frac{2 \,.\, 6 \,.\, 10 \ldots \overline{4n-2}}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots \overline{n+1}}.$$

Or,

$$2 \,.\, 6 \,.\, 10 \ldots \overline{4n-2} = (n+1)(n+2)\ldots 2n \text{ (*)};$$

donc

$$C_n = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots \overline{n+1}} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 2n}{1 \,.\, 2 \ldots n \times 1 \,.\, 2 \ldots \overline{n+1}} = \textit{entier} \text{ (**)}. \qquad (6)$$

De plus,

$$T_{n+2} = \frac{1}{n+1} C_{2n,\,n},$$

ou

$$n T_{n+1} = C_{2n-2,\,n-1}. \qquad (7)$$

III. D'après la génération des Nombres de Segner, ils doivent se rencontrer dans les développements qui proviennent de la formule du binôme. Par exemple, comme

$$\operatorname{arc\,sin} x = \sum_0^\infty \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots \overline{2n-1}}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ (***)},$$

on peut écrire :

$$\operatorname{arc\,sin} x = \sum_0^\infty \frac{n+1}{2n+1} C_n \frac{x^{2n+1}}{4^n},$$

(*) *Voir* ci-dessus, p. 43.

(**) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 48.

(***) Pour $n = 0$, la fraction est remplacée par 1.

ou bien

$$\text{arc sin } x = \sum_0^\infty \frac{n+1}{2n+1} \mathrm{T}_{n+2} \frac{x^{2n+1}}{4^n} \ (*). \tag{8}$$

IV. Dans l'égalité (5), changeons x en x^2, puis x en $\frac{x}{2}$. Nous aurons

$$2\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \sum_0^\infty \mathrm{T}_{n+2} \frac{x^{2n}}{4^n};$$

puis

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \sum_0^\infty \mathrm{T}_{n+2} \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+1}}; \tag{9}$$

développement par lequel nous aurions pu commencer.

V. Soit

$$y = \sqrt{1-x^2}\,\text{arc sin } x; \tag{10}$$

et, par conséquent,

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{arc sin } x. \tag{11}$$

Il est très facile, non seulement de développer la fonction y, mais de découvrir de nouvelles relations entre les Nombres de Segner.

Posons, en effet :

$$y = \sum_0^\infty \mathrm{A}_n x^{2n+1}, \quad y' = \sum_0^\infty (2n+1)\mathrm{A}_n x^{2n}. \tag{12}$$

Des relations (9) et (10), on déduit

$$\frac{y}{y'-1} = -\frac{1-x^2}{x};$$

(*) De même, la formule

$$\mathrm{F}_1(c) = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty \left(\frac{1.3\ldots\overline{2n-1}}{2.4\ldots 2n}\right)^2 c^{2n}$$

peut être remplacée par celle-ci :

$$\mathrm{F}_1(c) = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty \left(\frac{c}{4}\right)^{2n} (n+1)^2 \mathrm{T}_{n+2}^2.$$

(Août 1885.)

puis, à cause de $A_0 = 1$:

$$x[x + A_1x^3 + A_2x^5 + A_3x^7 + \cdots + A_nx^{2n+1} + \cdots]$$
$$+ (1 - x^2)[3A_1x^2 + 5A_2x^4 + 7A_3x^6 + \cdots$$
$$+ (2n+1)A_nx^{2n} + \cdots] = 0.$$

Cette égalité donne, successivement :

$$A_1 = -\frac{1}{3}, \quad A_2 = -\frac{2}{3.5}, \quad A_3 = -\frac{2.4}{3.5.7}, \; \cdots;$$

et, en général,

$$A_n = -\frac{2.4.6\ldots\overline{2n-2}}{3.5.7\ldots\overline{2n+1}}. \tag{13}$$

La fraction

$$\frac{2.4.6\ldots\overline{2n-2}}{3.5.7\ldots\overline{2n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\frac{(2.4\ldots\overline{2n-2})^2}{1.2.3\ldots\overline{2n-2}}$$
$$= \frac{4^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}\frac{1}{C_{2n-2,\,n-1}}.$$

Donc, par les formules (7) et (2) :

$$A_n = -\frac{4^{n-1}}{n(2n-1)(2n+1)}\frac{1}{T_{n+1}} = -\frac{2^{2n-1}}{n(n+1)(2n+1)}\frac{1}{T_{n+2}}. \tag{14}$$

Dans le produit des fonctions (8), (9), le coefficient de x^{2n+1} est

$$\frac{n+1}{(2n+1)4^n}T_{n+2}$$
$$-\frac{1}{2^{2n-1}}\left[T_2T_{n+1} + \frac{2}{3}T_3T_n + \frac{3}{5}T_4T_{n-1} + \cdots + \frac{n}{2n-1}T_{n+1}T_2\right],$$

ou

$$\frac{2n-1}{(2n+1)2^{2n-1}}T_{n+1}$$
$$-\frac{1}{2^{2n-1}}\left[T_2T_{n+1} + \frac{2}{3}T_3T_n + \frac{3}{5}T_4T_{n-1} + \cdots + \frac{n}{2n-1}T_{n+1}T_2\right].$$

Ce coefficient égale aussi A_n. Conséquemment

$$\left.\begin{aligned} &T_2T_{n+1} + \frac{2}{3}T_3T_n + \frac{3}{5}T_4T_{n-1} + \cdots + \frac{n}{2n-1}T_{n+1}T_2 \\ &\quad = \frac{2n-1}{2n+1}T_{n+1} + \frac{4^{2n-1}}{n(n+1)(2n+1)}\frac{1}{T_{n+2}}. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Telle est la relation annoncée.

En la combinant avec l'égalité

$$T_2T_{n+1} + T_3T_n + T_4T_{n+1} + \cdots + T_nT_3 + T_{n+1}T_2 = \frac{4n-2}{n+1}T_{n+1}, \quad (1)$$

on trouve

$$\left.\begin{aligned} &T_2T_{n+1} + \frac{1}{3}T_3T_n + \frac{1}{5}T_4T_{n-1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}T_{n+1}T_2 \\ &\quad + \frac{2n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)}T_{n+1} = \frac{2^{4n-1}}{n(n+1)(2n+1)}\frac{1}{T_{n+2}}; \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

ce qui est un peu plus simple.

VI. La méthode précédente peut être généralisée. Soient u, v, y trois fonctions de x, telles que l'on ait

$$y = uv, \quad u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{v}, \quad (17)$$

$$u = \sum_0^\infty B_n x^n, \quad v = \sum_0^\infty C_n x^n. \quad (18)$$

A cause de

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v},$$

on a

$$\frac{y'-1}{y} = \frac{v'}{v}. \quad (19)$$

Soit encore

$$y = \sum_0^\infty A_n x^n. \quad (20)$$

Si la quantité $\frac{v'}{v}$ est algébrique, l'égalité (19) fera connaître, de la manière la plus simple, les coefficients $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ En outre, si l'on fait varier la fonction v, *on obtiendra des sommations, en nombre indéfini.*

VII. *Exemple :*

$$v = \sqrt{1 - x^4}, \quad u' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}, \quad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

La formule du binôme donne

$$u = x + \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^9}{9} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^{13}}{13} + \cdots,$$

$$v = 1 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2.4}x^8 - \frac{1.3}{2.4.6}x^{12} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{16} - \cdots$$

Soit maintenant

$$y = x + A_5 x^5 + A_9 x^9 + \cdots + A_{4n+1}x^{4n+1} + \cdots;$$

et, par conséquent,

$$\frac{y' - 1}{y} = \frac{5A_5 x^3 + 9A_9 x^7 + \cdots + (4n+1)A_{4n+1}x^{4n-1} + \cdots}{1 + A_5 x^4 + A_9 x^8 + \cdots + A_{4n+1}x^{4n} + \cdots}.$$

On a

$$\frac{v'}{v} = -\frac{2x^3}{1 - x^4};$$

donc l'équation (19) devient

$$(1 - x^4)[5A_5 + 9A_9 x^4 + 13A_{13}x^{12} + \cdots + (4n+1)A_{4n+1}x^{4(n-1)} + \cdots]$$
$$+ 2[1 + A_5 x^4 + A_9 x^8 + \cdots + A_{4n+1}x^{4n} + \cdots] = 0.$$

Il résulte, de celle-ci :

$$5A_5 + 2 = 0, \quad 9A_9 - 3A_5 = 0, \quad 13A_{13} - 7A_9 = 0, \cdots$$
$$(4n+1)A_{4n+1} - (4n-5)A_{4n-3} = 0, \cdots;$$

puis

$$A_5 = -\frac{2}{5}, \quad A_9 = -\frac{2.3}{5.9}, \quad A_{13} = -\frac{2.3.7}{5.9.13}, \ldots$$

$$A_{4n+1} = -\frac{2.3.7.11\ldots\overline{4n-5}}{5.9.13.17\ldots\overline{4n+1}}.$$

Par conséquent

$$y=\sqrt{1-x^4}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x - \frac{2}{5}x^5 - 2\sum_2^\infty \frac{3.7.11\ldots\overline{4n-5}}{5.9.13\ldots\overline{4n+1}}x^{4n+1}. \quad (21)$$

On trouve, de la même manière,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\int_0^x dx\sqrt{1-x^4} = x + \frac{2}{5}x^5 + 2\sum_2^\infty \frac{7.11.15\ldots\overline{4n-1}}{5.9.13\ldots\overline{4n+1}}x^{4n+1}. \quad (22)$$

VIII. *Développement d'une intégrale elliptique.* — Considérons la fonction

$$z = \int_0^x dx\sqrt{1-x^4}\,.\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

La dérivée est

$$z' = \sqrt{1-x^4}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\int_0^x dx\sqrt{1-x^4}.$$

Par les formules (21), (22) :

$$z' = 2x + 2\sum_0^\infty \left[\frac{7.11.15\ldots\overline{4n-1}}{5.9.13\ldots\overline{4n+1}} - \frac{3.7.11\ldots\overline{4n-5}}{5.9.13\ldots\overline{4n+1}}\right]x^{4n+1},$$

ou

$$z' = 2x + 2\frac{4}{5.9}x^9 + 2\sum_3^\infty \frac{7.11.15\ldots\overline{4n-5}}{5.9.13\ldots\overline{4n+1}}(4n-4)x^{4n+1}.$$

Donc

$$z = x^2 + \frac{4}{5.9}\frac{x^{10}}{5} + \sum_3^\infty \frac{7.11.15\ldots\overline{4n-5}}{5.9.13\ldots\overline{4n+1}}(4n-4)\frac{x^{4n+2}}{2n+1}; \quad (23)$$

et, en particulier,

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 dx\sqrt{1-x^4}.\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\\&=1+\frac{1}{5.9}\frac{4}{5}+\sum_3^\infty\frac{7.11.15\ldots\overline{4n-5}}{5.\ 9.13\ldots\overline{4n+1}}\frac{4n-4}{2n+1}.\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

L'intégration par parties donne

$$\int_0^1 dx\sqrt{1-x^4}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$+\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^4}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\sqrt{1-x^4};$$

puis

$$\int_0^1 dx\sqrt{1-x^4}=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Si l'on fait $x=\cos\varphi$, on a

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{2-\sin^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{2}}F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

La relation (24) devient

$$\frac{1}{3}\left[F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right]^2=1+\frac{1}{5.9}\frac{4}{5}+\sum_3^\infty\frac{7.11.15\ldots\overline{4n-5}}{5.\ 9.13..\overline{4n+1}}\frac{4n-4}{2n+1}.\quad(25)$$

D'ailleurs,

$$F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{1}{2^2}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{1}{2^3}+\cdots\right]$$

Donc, finalement,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\pi^2}{12}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{1}{2^2}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{1}{2^3}+\cdots\right]^2=\\&1+\frac{1}{5.9}\frac{4}{5}+\sum_3^\infty\frac{7.11\ \ 15\ldots\overline{4n-5}}{5.\ 9.13\ldots\overline{4n+1}}\frac{4n-4}{2n+1}.\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

Addition. — (*Avril* 1876.)

IX. D'après la formule de Lagrange, appliquée à l'équation

$$y = a + \frac{x}{y}, \tag{27}$$

$$y^{-k} = a^{-k} - \frac{k}{1} a^{-k-2} x + \frac{k(k+3)}{1\,.\,2} a^{-k-4} x^2 - \frac{k(k+4)(k+5)}{1\,.\,2\,.\,3} a^{-k-6} x^3 + \cdots \text{ (*)} \tag{28}$$

Si l'on suppose $a = 2$, et que l'on change x en $-4x$, on a, par l'équation (27) :

$$y = 1 + \sqrt{1-4x}\ (^{**}),\quad \frac{1}{y} = 1 - \sqrt{1-4x},\quad y^{-k} = \frac{1}{(2x)^k}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^k;$$

puis, par la formule (5) :

$$y^{-k} = \frac{1}{(2x)^k}\left[x + T_3 x^2 + T_4 x^3 + T_5 x^4 + \cdots\right]^k.$$

Le second membre de l'égalité (28) est, en vertu des hypothèses précédentes,

$$2^{-k}\left[1 + \frac{k}{1} x + \frac{k(k+3)}{1\,.\,2} x^2 + \frac{k(k+4)(k+5)}{1\,.\,2\,.\,3} x^3 + \cdots\right].$$

Par conséquent,

$$[T_2 x + T_3 x^2 + T_4 x^3 + T_5 x^4 + \cdots]^k = x^k + \frac{k}{1} x^{k+1} + \frac{k(k+3)}{1\,.\,2} x^{k+2} + \cdots \tag{29}$$

X. *Remarques.* — 1° Lorsque $k = 2$, le second membre se réduit à

$$x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + \cdots = T_3 x^2 + T^4 x^3 + T_5 x^4 + \cdots;$$

et l'on retrouve la relation (1).

(*) Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 320.

(**) On prend la racine qui donne

$$\lim (y^{-k}) = 2^{-k},$$

pour $x = 0$.

2° En général, le coefficient de x^{k+n}, dans le second membre, est

$$\frac{k(k+n+1)(k+n+2)\ldots(k+2n-1)}{1.2.3\ldots n},$$

ou

$$C_{k+2n-1,\,n} - C_{k+2n-1,\,n-1}.$$

Dans cette expression, n est supposé *positif*. Si $n=0$, x^{n+k} devient x^k, terme dont le coefficient est 1.

XI. *Relation nouvelle entre les nombres* T. — Pour l'obtenir, prenons l'égalité

$$(a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots)^k = A_0z^k + A_1z^{k+1} + \cdots + A_nz^{k+n} + \cdots$$

Le premier membre est le produit de k facteurs, dont les termes généraux peuvent être représentés, respectivement, par

$$a_\alpha z^\alpha, \quad a_\beta z^\beta, \quad \ldots a_\lambda z^\lambda.$$

Par conséquent, *si*

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda = k + n, \tag{30}$$

on a

$$A_n = \sum a_\alpha . a_\beta \ldots a_\lambda. \tag{31}$$

En particulier :

$$\sum T_{\alpha+1} . T_{\beta+1} \ldots T_{\lambda+1} = C_{k+2n-1,\,n} - C_{k+2n-1,\,n-1}. \tag{32}$$

Telle est la relation cherchée.

XII. *Remarque. — Le nombre des termes,* dans le premier membre, *est celui des solutions, entières et positives, de l'équation* (30), *laquelle renferme* k *inconnues.* On sait que ce nombre égale $C_{k+n-1,\,n}$ (*).

XIII. *Application.* — Soient $k=3$, $n=4$. Si l'on développe, directement,

$$(x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5)^3,$$

(*) *Note* I.

on trouve, comme coefficient de x^7 :

$$\begin{aligned}&14.1.1+5.1.1+2.2.1+1.5.1+1.14.1\\&+5.1.1+2.1.1+1.2.1+1.5.1+2.1.2\\&+1.1.2+1.2.2+1.1.5+1.1.5+1.1.14=90.\end{aligned}$$

Le nombre des termes de cette somme est $15 = C_{6,4}$. D'un autre côté,

$$\begin{aligned}\sum T_{\alpha+1}T_{\beta+1}T_{\lambda+1} &= T_2T_2T_6 + T_2T_3T_5 + T_2T_4T_4 + T_2T_5T_3 + T_2T_6T_2\\&+ T_3T_2T_5 + T_3T_3T_4 + T_3T_4T_3 + T_3T_5T_2 + T_4T_2T_4 + T_4T_3T_3\\&+ T_4T_4T_2 + T_5T_2T_3 + T_5T_3T_2 + T_6T_2T_2\\&= 14 + 5 + 2.2 + 5 + 14 + 5 + 2 + 2 + 5 + 2.2 + 5 + 5\\&+ 14 = 90 = C_{10,4} - C_{10,3}.\end{aligned}$$

Autre addition. — (*Juillet* 1885.)

XIV. L'égalité (32) exprime ce théorème :

La différence entre les nombres de combinaisons de $k + 2n - 1$ *lettres, prises* n *à* n, *puis* $n - 1$ *à* $n - 1$, *est égale à la somme de produits composés de* k *facteurs, pris parmi les Nombres de Segner :*

$$1,\quad 1,\quad 2,\quad 5,\quad 14,\quad 42,\ldots$$

Le nombre de ces produits est celui des combinaisons de $k + n - 1$ *lettres,* n *à* n.

XV. D'après les égalités

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + T_3x + T_4x^2 + T_5x_3 + \cdots \tag{5}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{4x},$$

on a

$$T_2x + T_3x^2 + T_4x^3 + \cdots = \frac{2x}{y} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2},$$

quantité comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$. Conséquemment,

$$1+\frac{2x}{y}+\left(\frac{2x}{y}\right)^2+\left(\frac{2x}{y}\right)^3+\cdots=\frac{1}{1-\frac{2x}{y}}=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\cdot$$

ou

$$1+\frac{2x}{y}+\left(\frac{2x}{y}\right)^2+\left(\frac{2x}{y}\right)^3+\cdots=1+T_3x+T_4x^2+T_5x^3+\cdots$$

Si donc, dans le premier membre de l'égalité

$$[T_2x+T_3x^2+T_4x^3+T_5x^4+\cdots]^k=x^k+\frac{k}{1}x^{k+1}+\frac{k(k+5)}{1\,.\,2}x^{k+2}+\cdots,\quad (29)$$

on fait varier k, de zéro à l'infini, *la limite de la somme est*

$$1+T_3x+T_4x^2+T_5x^3+\cdots\text{ (*)}.$$

XVI. On a vu que, dans le second membre, le coefficient de x^{k+n} est $C_{k+2n-1,\,n}-C_{k+2n-1,\,n-1}$. Si donc $k+n=s$, la somme de tous ces binômes doit se réduire à T_{s+2}.

Autrement dit :

$$\sum_{k=0}^{k=s}C_{2s-k-1,\,s-1}-\sum_{k=0}^{k=s}C_{2s-k-1,\,s}=T_{s+2}\,.\quad (33)$$

En effet, la première somme égale $C_{2s,\,s}$ (**); la seconde est, pareillement, $C_{2s,\,s+1}=C_{2s,\,s-1}$; en sorte que l'égalité précédente se réduit à

$$T_{s+2}=C_{2s,\,s}-C_{2s,\,s-1};\quad (34)$$

relation connue, facile à vérifier.

XVII. *Conséquences de la formule*

$$T_{n+1}=\frac{4n-6}{n}T_n.\quad (2)$$

(*) Cette propriété, que l'on n'a peut-être point remarquée, ne diffère pas, au fond, de celle qui est exprimée par la relation (1).

(**) *Cours d'Analyse*, p. 46.

1° *Si* n *est premier avec* 6, $T_n = \mathfrak{M}(n)$ (*).

2° On a

$$T_n = \frac{4n - 10}{n - 1} T_{n-1}.$$

Donc, *si* n — 1 *est premier avec* 6, $T_n = \mathfrak{M}(4n - 10)$.

3° *Si* T_n *est divisible par un nombre premier* p, *supérieur à* 3, *sans que* T_{n-1} *le soit,* p *divise* 2n — 5.

4° *La plus petite valeur de* n, *qui rende* 2n — 5 *divisible par* p, *est* $\frac{1}{2}(p + 5)$.

5° Soit T_{n+k} *le dernier* des nombres T_n, T_{n+1}, ... divisibles par p, de manière que T_{n+k+1} ne soit pas divisible par p. A cause de

$$T_{n+k+1} = \frac{4n + 4k - 6}{n + k} T_{n+k}, \tag{35}$$

p *divise* n + k.

6° *On a*

$$T_p = \frac{2 \,.\, 6 \,.\, 10 \ldots \overline{4p - 10}}{2 \,.\, 3 \, 4 \ldots \overline{p - 1}} = \mathfrak{M} p,$$

mais non $\mathfrak{M}(p^2)$.

En effet, dans la suite

$$1, \;\; 3, \;\; 5, \; \ldots, \; 2p - 5,$$

un seul terme est divisible par p : c'est le nombre p.

7° La plus petite valeur de $n + k$ est p ; ainsi

$$k = p - n = p - \frac{1}{2}(p + 5) = \frac{1}{2}(p - 5). \tag{36}$$

8° On a donc ce théorème :

Soit p *un nombre premier, supérieur à* 3. *Dans la suite*

(*) Remarque déjà faite (I).

T_4, T_5, ... T_n, ... T_{n+k}, *il y a toujours* $\frac{p-3}{2}$ *termes consécutifs divisibles, une seule fois, par* p. *L'indice du premier de ces termes est* $\frac{1}{2}(p+5)$; *l'indice du dernier est* p.

Autrement dit :

T_p, *et les* $\frac{p-5}{2}$ *termes qui précèdent* T_p, *sont divisibles par* p (*).

9° *Les Nombres de Segner, prolongés suffisamment, contiennent, comme facteurs, tous les nombres premiers* (**).

10° Après T_p, le premier terme divisible par p est déterminé par l'équation

$$2n - 5 = 3p;$$

d'où

$$n = \frac{1}{2}(3p + 5).$$

11° *Le groupe des multiples de* p, *commençant par* $T_{\frac{1}{2}(3p+5)}$, *est composé, comme le premier groupe, de* $\frac{p-3}{2}$ *termes. Il se termine à* T_{2p}.

Soit, par exemple, $p = 11$. Le premier groupe est

$$T_8,\quad T_9,\quad T_{10},\quad T_{11}.$$

Le deuxième :

$$T_{19},\quad T_{20},\quad T_{21},\quad T_{22}.$$

Le troisième groupe serait

$$T_{30},\quad T_{31},\quad T_{32},\quad T_{33};$$

etc.

(*) *Vérification :*

$T_5 = 5$, $T_6 = 2.7$, $T_7 = 2.3.7$, $T_8 = 2^2.3.11$, $T_9 = 3.11.13$, $T_{10} = 2.5.11.13$, $T_{11} = 2.11.13.17$, $T_{12} = 2^2.13.17.19$, $T_{13} = 2.7.13.17.19$, $T_{14} = 2^2.7.17.19.23$, $T_{15} = 2^2.5^2.17.19.23$, $T_{16} = 2^3.3^2.5.17.19.23$, $T_{17} = 3^2.5.17.19.23.29$, $T_{18} = 2.3^2.5.19.23.29.31$, $T_{19} = 2.3.5.11.19.23.29.31$, $T_{20} = 2^2.3.5^2.7.11.23.29.31$, $T_{21} = 2.3.5.7.11.23.29.31.37$, $T_{22} = 2^2.3.5.11.13.23.29.31.37$, $T_{23} = 2^2.3^2.5^2.13.23.29.31.37$, ...

(**) On ne doit pas oublier que $T_6 = \mathfrak{M}\,2$, et que $T_7 = \mathfrak{M}\,3$.

CVIII. — Problème de Géométrie analytique.

(*Décembre* 1871.)

Tracer, sur une sphère donnée, une courbe dont les tangentes fassent, avec une droite donnée, un angle de 45°.

I. Si l'on prend pour unité le rayon de la sphère, l'équation du problème est

$$dx^2 + dy^2 = dz^2. \tag{1}$$

Soient :

$$x = \cos\varphi \cos\omega, \quad y = \cos\varphi \sin\omega, \quad z = \sin\varphi;$$

et, par conséquent :

$$dx = -\cos\varphi \sin\omega d\omega - \cos\omega \sin\varphi d\varphi,$$
$$dy = \cos\varphi \cos\omega d\omega - \sin\omega \sin\varphi d\varphi,$$
$$dz = \cos\varphi d\varphi.$$

L'équation devient

$$d\omega = \frac{\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}}{\cos\varphi} d\varphi. \tag{2}$$

L'intégrale de celle-ci est, comme on le trouve sans peine,

$$\omega - \alpha = \sqrt{2} \text{ arc sin } \left(\sqrt{2} \sin\varphi\right) - \text{arc sin } (\text{tg } \varphi). \tag{3}$$

II. *Remarque.* — Le second membre devient imaginaire si l'on suppose φ supérieur à 45°. Des considérations géométriques aboutissent à la même conclusion.

CIX. — Une relation combinatoire.

(*Juillet* 1881.)

Par la formule de Clausen (*), ou par les propriétés des *Nombres de Segner* (**), on a

$$\frac{\arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_0^\infty \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots \overline{2n+1}} x^{2n+1}. \tag{1}$$

Or :

$$\arc\sin x = \arc\operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^5 + \cdots,$$

ou

$$\frac{\arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1-x^2} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{(1-x^2)^3} - \cdots \tag{2}$$

Le terme général du second membre a la forme

$$\pm \frac{1}{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(1-x^2)^{k+1}}.$$

Développé suivant les puissances ascendantes de x, il devient

$$\pm \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\left[1 + \frac{k+1}{1}x^2 + \frac{(k+1)(k+2)}{1.2}x^4 + \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{1.2.3}x^6 + \ldots\right].$$

Dans la parenthèse, le coefficient de x^{2n-2k} est

$$\frac{(k+1)(k+2)\ldots n}{1.2.\ldots \overline{n-k}} = C_{n,k}.$$

Par suite,

$$\frac{\arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_0^\infty \left[1 - \frac{1}{3}C_{n,1} + \frac{1}{5}C_{n,2} - \cdots \pm \frac{1}{2n-1}C_{n,1} \pm \frac{1}{2n+1}\right]. \tag{3}$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 103.

(**) Voir ci-dessus, p. 56.

La comparaison avec la formule (1) donne cette *sommation :*

$$\left.\begin{array}{l} 1-\frac{1}{3}C_{n,1}+\frac{1}{5}C_{n,2}-\frac{1}{7}C_{n,3}+\cdots\pm\frac{1}{2n-1}C_{n,1}\mp\frac{1}{2n+1} \\ =\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots\overline{2n+1}}, \end{array}\right\} \quad (4)$$

qu'il est facile de prouver directement.

Addition. — (Août 1885.)

II. Soit, en général,

$$A=\int_0^1 (1-x^k)^n dx,$$

n étant un nombre entier.

Il est clair que

$$A=1-\frac{1}{k+1}C_{n,1}+\frac{1}{2k+1}C_{n,2}-\cdots\pm\frac{1}{nk+1}. \quad (5)$$

Si l'on pose

$$x^k=\theta,$$

on trouve

$$A=\frac{1}{k}\int_0^1 (1-\theta)^n\,\theta^{\frac{1}{k}-1}d\theta,$$

c'est-à-dire

$$A=\frac{1}{k}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{k}\right)}=\frac{1}{k}\frac{\Gamma(n+1)}{\left(n+\frac{1}{k}\right)\left(n-1+\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{1}{k}},$$

ou

$$A=k^n\frac{1.2.3\ldots n}{(1+k)(1+2k)\ldots(1+nk)}. \quad (6)$$

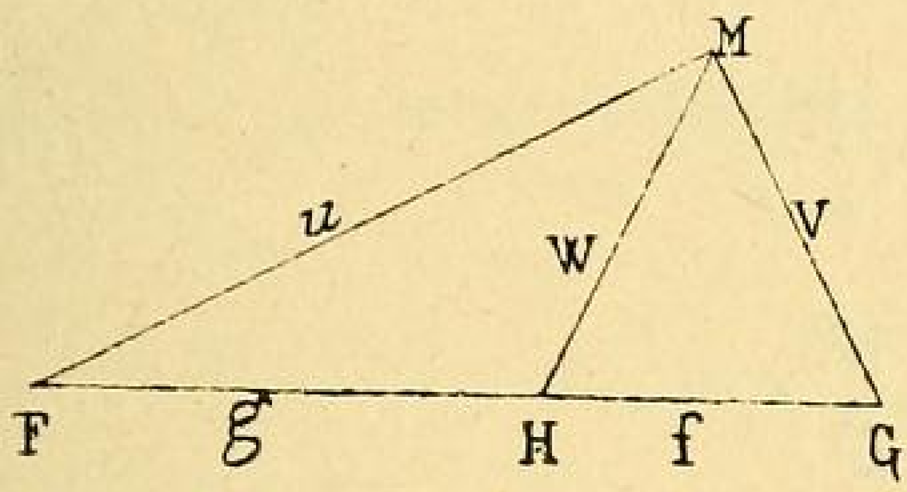
La comparaison avec la valeur (5) donne

$$1-\frac{1}{k+1}C_{n,1}+\frac{1}{2k+1}C_{n,2}-\cdots\pm\frac{1}{nk+1}=k^n\frac{1.2.3\ldots n}{(k+1)(2k+1)\ldots(nk+1)}. \quad (7)$$

CX. — Sur les ovales de Descartes.

(*Juin* 1870.)

1. On doit, à M. Chasles, ce beau théorème : *au lieu de deux foyers seulement, elles en ont toujours trois.* (APERÇU HISTORIQUE.) Voici comment on peut le démontrer.



F, G étant les deux foyers *connus*, dont la distance est h, soit M un point de la courbe. Par *définition :*

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = 1. \tag{1}$$

S'il existe, sur FG, un troisième foyer H, l'équation de l'ovale, rapportée aux foyers G, H, sera

$$\frac{v}{a'} + \frac{w}{b'} = 1\,; \tag{2}$$

a', b' étant des longueurs *inconnues*.

Soient f, g les segments GH, FH de la droite FG. Par un théorème d'Euler :

$$fu^2 + gv^2 = h(w^2 + fg). \tag{3}$$

L'élimination de u et de w, entre les équations (1), (2), (3), conduit à celle-ci :

$$fa^2\left(1 - \frac{v}{b}\right)^2 + gv^2 = hb'^2\left(1 - \frac{v}{a'}\right)^2 + hfg, \tag{4}$$

laquelle doit être *identique*, si les inconnues f, g, a', b', ont des valeurs convenables. Autrement dit, l'égalité (4) se décompose en

$$fa^2 = h(b'^2 + fg), \tag{5}$$

$$\frac{fa^2}{b} = h\frac{b'^2}{a'}, \tag{6}$$

$$\frac{fa^2}{b^2} + g = h\frac{b'^2}{a'^2}. \tag{7}$$

On tire, de l'équation (5),

$$b'^2 = \frac{f}{h}(a^2 - gh); \tag{8}$$

puis, de l'équation (6),

$$a' = \frac{b}{a^2}(a^2 - gh). \tag{9}$$

Ces valeurs, substituées dans la relation (7), donnent celle-ci :

$$\frac{f}{b^2} + \frac{g}{a^2} = \frac{1}{h}. \tag{10}$$

On en conclut

$$a^2 - gh = \frac{a^2}{b^2} f;$$

de sorte que les formules (9), (8) deviennent :

$$a' = \frac{fh}{b}, \tag{10}$$

$$b' = \pm \frac{a}{b} f \text{ (*)}. \tag{11}$$

Enfin, comme $f + g = h$, on a encore

$$f = \frac{b^2(a^2 - h^2)}{h(a^2 - b^2)}, \quad g = \frac{a^2(h^2 - b^2)}{h(a^2 - b^2)}. \tag{12}$$

Les valeurs de f, g, a', b' étant réelles et finies (**), le théorème de M. Chasles est démontré.

II. *Remarque.* — Les calculs que nous venons de développer démontrent, en outre, la propriété suivante :

(*) Pour fixer les idées, supposons a et b *positifs*. Alors, d'après l'équation (1), chacune des branches de l'ovale est une courbe *fermée*. Donc, dans l'équation (2), a' et b' doivent être *positifs*. Alors, si a surpasse b, le segment f est *positif*. Dès lors, dans la formule (11), on doit adopter le signe supérieur.

Nous omettons la discussion complète, un peu longue.

(**) Excepté si $a = \pm b$; mais alors la courbe donnée est une ellipse ou une hyperbole.

Étant donnés trois nombres a, b, h, *on décompose le troisième en deux parties* f, g, *satisfaisant à la condition*

$$\frac{f}{b^2}+\frac{g}{a^2}=h.$$

On fait, ensuite :

$$a'=\frac{fh}{b},\quad b'=\pm\frac{af}{b}.$$

Cela posé, toutes les solutions des équations

$$\frac{u}{a}+\frac{v}{b}=1,\quad \frac{v}{a'}+\frac{w}{b'}=1,$$

rendent identique l'équation

$$fu^2+gv^2=h(w^2+fg).$$

CXI. — Intégration d'une équation.

(*Octobre* 1871.)

I. Soit l'équation homogène

$$xdy^2+2(x+y)dxdy+ydx^2\ (^*). \tag{1}$$

$y=tx$ donne

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{-2t-1\pm\sqrt{t^2+t+1}}. \tag{2}$$

(*) On la rencontre en cherchant les surfaces orthogonales entre elles et orthogonales aux surfaces représentées par

$$xyz=c^3.$$

La proposée, dans laquelle x et y seraient remplacés par α et β, exprime la condition d'orthogonalité des surfaces inconnues. Voyez le Mémoire intitulé : *Recherche des lignes de courbure de la surface...*, p. 8.

Le problème a été résolu, d'une autre manière, par M. Serret (*Journal de Liouville*, 1840).

Pour rendre la différentielle rationnelle, je pose

$$\sqrt{t^2+t+1} = t + \frac{1}{2}(u+1); \qquad (3)$$

ou

$$t = -\frac{u^2+2u-3}{4u}. \qquad (4)$$

Il résulte, de cette expression, la transformée :

$$-3\frac{dx}{x} = \frac{(u^2+3)}{u(u^2-1)}du. \qquad (5)$$

La fraction égale

$$-\frac{3}{u} + \frac{2}{u-1} + \frac{2}{u+1}.$$

L'intégrale de l'équation (5) est donc

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{(u^2-1)^2}{u^3}; \qquad (6)$$

ou, si l'on remplace u par sa valeur

$$2\sqrt{t^2+t+1} - 2t - 1:$$

$$b^3(2R-2y-x)^3 = x^2(R-y-x)^2(R-y)^2. \qquad (7)$$

Dans cette équation, b^3 remplace $\frac{a^3}{16}$, et

$$R = \sqrt{x^2+xy+y^2}.$$

Il s'agit de la rendre rationnelle.

A cet effet, je multiplie les deux membres par

$$(2R+2y+x)^3.$$

A cause de

$$4R^2-(2y+x)^2 = 3x^2,$$

j'obtiens

$$b^3x^4 = (R-y-x)^2(R-y)^2(2R+2y+x)^3. \qquad (8)$$

Le produit des deux carrés est, moyennant quelques réductions,

$$2x^4+9x^3y+17x^2y^2+16xy^3+8y^4-2R(x^3+4x^2y+6xy^2+4y^3).$$

D'autre part,

$$(2R+2y+x)^3=13x^3+42x^2y+48xy^2+32y^3+2R(7x^2+16xy+16y^2).$$

L'intégrale (7) devient donc

$$\left.\begin{aligned}b^3x^4= & (2x^4+9x^3y+17x^2y^2+16xy^3+8y^4)(13x^3+42x^2y+48xy^2+32y^3)\\ & -4(x^2+xy+y^2)(x^3+4x^2y+6xy^2+4y^3)(7x^2+16xy+16y^2)\\ & +2R(2x^4+9x^3y+17x^2y^2+16xy^3+8y^4)(7x^2+16xy+16y^2)\\ & -2R(13x^3+42x^2y+48xy^2+32y^3)(x^3+4x^2y+6xy^2+4y^3).\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

L'ensemble des deux premières parties du second membre étant représenté par P — 4P′, on a :

$$\begin{aligned}P = {} & 26x^7+201x^6y+695x^5y^2+1\,418x^4y^3+1\,880x^3y^4+1\,648x^2y^5\\ & +896xy^6+256y^7,\\ P' = {} & 7x^7+51x^6y+173x^5y^2+354x^4y^3+470x^3y^4+412x^2y^5+224xy^6\\ & +64y^7,\\ P-4P' = {} & -x^4(2x^3+3x^2y-3xy^2-2y^3)=-x^4(x-y)(2x^2+5xy+2y^2).\end{aligned}$$

De même, les deux dernières lignes se réduisent à

$$\begin{aligned}& 2R(14x^6+95x^5y+295x^4y^2+528x^3y^3+584x^2y^4+384xy^5+128y^6)\\ & -2R(13x^6+94x^5y+294x^4y^2+528x^3y^3+584x^2y^4+384xy^5+128y^6)\\ & \qquad = 2Rx^4(x^2+xy+y^2).\end{aligned}$$

Par suite, l'égalité (9) est transformée en

$$b^3=-(x-y)(2x^2+5xy+2y^2)+2R(x^2+xy+y^2),$$

ou

$$\left.\begin{aligned}b^6+2b^3(2x^3+3x^2y-3xy^2-2y^3)+(2x^3+3x^2y-3xy^2-2y^3)^2\\ =4(x^2+xy+y^2)^3.\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

On a :

$$\begin{aligned}& 4(x^2+xy+y^2)^3\\ & =4x^6+12x^5y+24x^4y^2+28x^3y^3+24x^2y^4+12xy^5+4y^6,\\ & (2x^3+3x^2y-3xy^2-2y^3)^2\\ & =4x^6+12x^5y-3x^4y^2-26x^3y^3-3x^2y^4+12xy^5+4y^6;\end{aligned}$$

donc

$$4(x^2+xy+y^2)^3-(2x^3+3x^2y-3xy^2-2y^3)^2=27x^2y^2(x+y)^2; \quad (10)$$

et, finalement,

$$b^6+2b^3(x-y)(2x^2+5xy+2y^2)=27x^2y^2(x+y)^2. \quad (A)$$

Telle est l'intégrale de l'équation (1).

II. *Autre méthode* (*). — Si l'on pose, suivant l'usage, $\frac{dy}{dx}=p$, l'équation

$$xdy^2+2(x+y)dxdy+ydx^2=0 \quad (1)$$

prend la forme

$$y=-\frac{p^2+2p}{2p+1}x. \quad (12)$$

Celle-ci est un cas particulier de l'*équation de Clairaut* (**). Il en résulte

$$3\frac{dx}{x}+2\frac{p^2+p+1}{p(p+1)(2p+1)}dp=0. \quad (13)$$

La fraction

$$\frac{p^2+p+1}{p(p+1)(2p+1)}$$

se décompose en

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-\frac{3}{2p+1}.$$

Donc l'intégrale de l'équation (13) est

$$\frac{x}{c}=(2p+1)(p^2+p)^{-\frac{2}{3}}, \quad (14)$$

et l'intégrale de l'équation (1) est le *système* des formules (12), (14).

(*) On vient de voir que le procédé *classique* entraîne à des longueurs de calcul.

(**) Il y a quelques années, M. Mansion, mon savant Confrère, a démontré ce beau théorème : *Toute équation du premier ordre est réductible à l'équation de Clairaut.* (Octobre 1885.)

On tire, de l'équation (12), ou de la proposée :

$$p = \frac{R - x - y}{x}, \quad p + 1 = \frac{R - y}{x}, \quad 2p + 1 = \frac{2R - x - 2y}{x},$$

$$p(p+1) = \frac{x^2 + 2xy + 2y^2 - (x + 2y)R}{x^2}.$$

Par suite, l'équation (14) devient

$$x^2[x^2 + 2xy + 2y^2 - (x + 2y)R]^2 = c^3[2R - x - 2y]^3.$$

Multipliant les deux membres par $(2R + x + 2y)^3$, on trouve, successivement :

$$x^2(2R + x + 2y)[(x^2 + 2xy + 2y^2)(x + 2y) + x^2R - 2(x + 2y)R^2]^2$$
$$= 27c^3x^6,$$
$$(2R + x + 2y)(R - x - 2y)^2 = const,$$
$$(2R + x + 2y)[2x^2 + 5xy + 5y^2 - 2(x + 2y)R] = const,$$
$$(x + 2y)(-2x^2 + xy + y^2) + 2R^3 = const,$$
$$k^3 + (y - x)(x + 2y)(y + 2x) = 2(x^2 + xy + y^2)^{\frac{3}{2}}. \tag{B}$$

Cette intégrale (B) ne diffère, qu'en apparence, de l'intégrale (A).

III. Si, dans la proposée (1), on remplace x par α, y par β, puis que l'on fasse

$$\alpha = z^2 - y^2, \quad \beta = y^2 - x^2,$$

on trouve que le *système triplement orthogonal,* déterminé par l'équation donnée,

$$xyz = c^3, \tag{15}$$

se compose des surfaces représentées par cette équation, jointes à celles dont les équations seraient :

$$\left.\begin{aligned} &a^6 + (2y^2 - z^2 - x^2)(2z^2 - x^2 - y^2)(2x^2 - y^2 - z^2) \\ &\quad - (x^4 + y^4 + z^4 - y^2z^2 - z^2x^2 - x^2y^2)^{\frac{3}{2}} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &b^6 + (2y^2 - z^2 - x^2)(2z^2 - x^2 - y^2)(2x^2 - y^2 - z^2) \\ &\quad + (x^4 + y^4 + z^4 - y^2z^2 - z^2x^2 - x^2y^2)^{\frac{3}{2}} = 0\ (*). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

(*) Serret, *Journal de Mathématiques,* t. XII, p. 249.

Addition. — (*Octobre* 1885.)

IV. L'équation (1) est un cas particulier de celle-ci :

$$(ax + by)dy^2 + 2(a'x + b'y)dxdy + (a''x + b''y)dx^2 = 0, \quad (18)$$

laquelle est *linéaire et homogène*. La transformation déjà employée donne

$$y = -\frac{ap^2 + 2a'p + a''}{bp^2 + 2b'p + b''}x;$$

ou, pour abréger,

$$y = -\mathrm{P}x. \quad (19)$$

Différenciant (*), on trouve

$$\frac{dx}{x} = -\frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P} + p},$$

ou

$$\frac{dx}{x} = -\frac{d(\mathrm{P} + p)}{\mathrm{P} + p} + \frac{dp}{\mathrm{P} + p},$$

équation dont l'intégrale est

$$\mathcal{L}\frac{(\mathrm{P} + p)x}{c} = \int \frac{dp}{\mathrm{P} + p}. \quad (20)$$

Dans chaque cas particulier, la question se réduira donc à *former l'intégrale d'une différentielle rationnelle.*

(*) C'est le procédé de Clairaut.

CXII. — Une application numérique.

(*Juin* 1871.)

Problème. — *Décomposer, en une somme de deux carrés, le nombre* $N = 17^3 . 73^5 = 10\,185\,000\,736\,409$.

I. Je trouve :

$$N = 2\,610\,685^2 + 16 . 458\,893^2,$$
$$N = (73 . 10\,411)^2 + 16(73 . 10\,615)^2,$$
$$N = (73^2 . 275)^2 + 16(73^2 . 133)^2,$$
$$N = (17 . 84\,691)^2 + 16(17 . 41\,835)^2,$$
$$N = (17 . 73 . 635)^2 + 16(17 . 73 . 623)^2,$$
$$N = (17 . 73^2 . 29)^2 + 16(17 . 73^2 . 5)^2,$$
$$N = (17 . 4\,115)^2 + 16(17 . 46\,921)^2,$$
$$N = (17 . 73 . 1\,733)^2 + 16(17 . 73 . 475)^2,$$
$$N = (17 . 73^2 . 35)^2 + 16(17 . 73^2)^2,$$
$$N = 1\,563\,197^2 + 16 . 695\,585^2,$$
$$N = (73 . 41\,195)^2 + 16(3\,659 . 73)^2,$$
$$N = (73^2 . 557)^2 + 16(73^2 . 55)^2.$$

II. *Remarque.* — Les facteurs premiers de N ont la forme $4\mu + 1$.

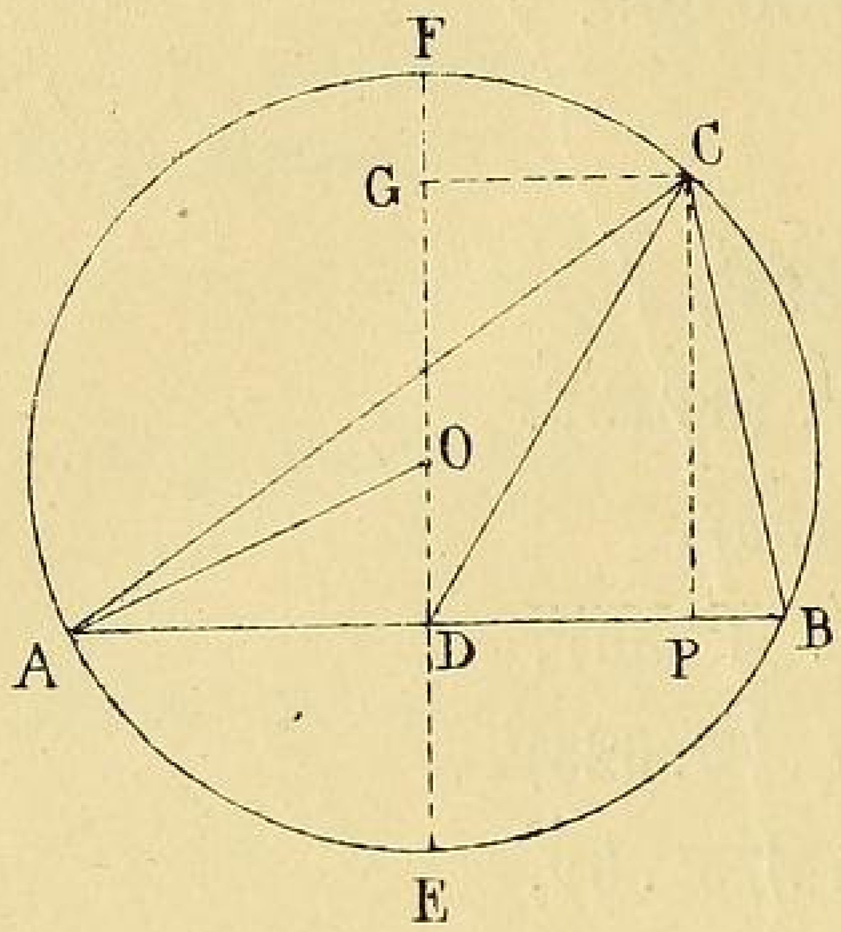
D'après un beau théorème de Gauss (*), le nombre des décompositions de N doit être $\frac{1}{2}(3 + 1)(5 + 1) = 12$. C'est ce qui a lieu.

(*) Genocchi (*Nouvelles Annales*, 1854, p. 158).

CXIII. — Problème de Glenie (*).

(*Janvier* 1871.)

A un cercle donné, inscrire un triangle ABC, *connaissant la base* AB, *et tel que l'on ait*



$$\overline{AC}^3 + \overline{BC}^3 = 3\overline{AB}^3.$$

I. Soient :

$$AB = 2a, \quad AO = R,$$
$$OD = b, \quad AC = x,$$
$$BC = y.$$

Soit, en outre, z la hauteur CP.

Les équations du problème sont

$$x^3 + y^3 = 24a^3, \tag{1}$$
$$a^2 + b^2 = R^2, \tag{2}$$
$$xy = 2Rz. \tag{3}$$

Pour en obtenir une quatrième, qui soit simple, je m'appuie sur le lemme suivant, facile à démontrer :

Le carré de la médiane CD *égale le carré de la moitié de la base, plus* (**) *deux fois le rectangle de la hauteur par la distance du centre à la base.*

On sait que

$$x^2 + y^2 = 2\left(\overline{CD}^2 + a^2\right);$$

(*) *Scriptores logarithmici*, t. IV, pp. 335 à 412. Suivant *Maseres*, *Glenie* était, « en son vivant », Lieutenant au Corps des Ingénieurs. A la fin de sa longue dissertation, l'Éditeur des *Scriptores* annonce que le problème a été proposé, en 1794, dans *The Ladies' Diary*, et que la solution de Glenie a paru, dans le même journal, en 1795.

(**) Il faudrait *moins*, si le sommet C et le centre O n'étaient pas du même côté de AB.

et l'on tire, des équations (3), (4) :

$$(x+y)^2 = 4[a^2 + (R+b)z],$$
$$x^2 - xy + y^2 = 2[2a^2 - (R-2b)z].$$

Donc l'équation (1) devient, après élévation au carré,

$$[a^2 + (R+b)z][2a^2 - (R-2b)z]^2 = 36a^6. \qquad (5)$$

Celle-ci est du troisième degré, complète, même quand on la simplifie au moyen de la relation (2).

II. La construction donnée par Glenie se rapporte au cas, très particulier, où l'on aurait

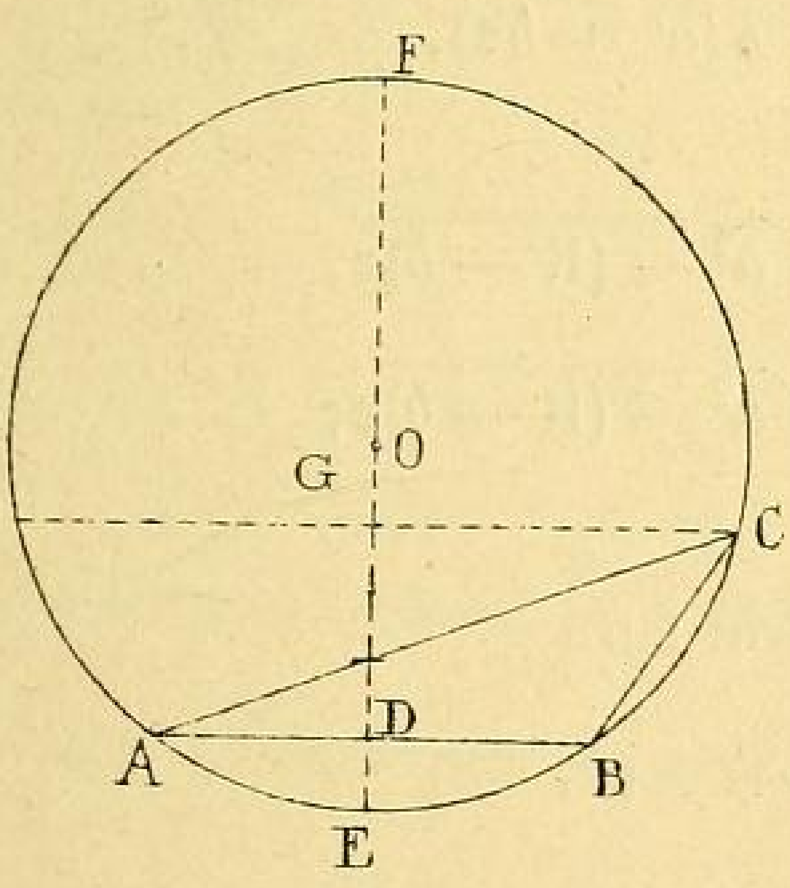
$$R = \frac{5}{3}a, \quad b = \frac{4}{3}a.$$

Quand il en est ainsi, l'équation (5) est vérifiée par $z = a$. Il résulte, de cette valeur,

$$x = a\left(2 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad y = a\left(2 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right);$$

puis la proposition suivante, qui résume les quatre premières pages de la Note de Maseres :

On prend, sur le rayon OE, OG = ED = $\frac{1}{5}$ OE. *Par les points* D, G, *on mène, à ce rayon, les perpendiculaires* GC, AB. *Le triangle* ACB *satisfait à la condition*



$$\overline{AC}^3 + \overline{BC}^3 = 3\overline{AB}^3.$$

III. Si l'on veut un problème analogue à celui de Glenie, et conduisant à une équation du deuxième degré, on peut prendre celui-ci :

A un cercle donné, inscrire un triangle ABC, *connaissant la base* AB, *et tel que*

$$\overline{AC}^3 + \overline{BC}^3 = \overline{AB}^3.$$

Si, dans l'équation (5), on divise par 9 le second membre, on obtient celle-ci :

$$[a^2 + (b + \mathrm{R})z][2a^2 - (\mathrm{R} - 2b)z]^2 = 4a^6, \tag{6}$$

laquelle est vérifiée par $z = 0$.

Suppression faite de cette racine, l'équation (6), développée, devient

$$(\mathrm{R} + b)(\mathrm{R} - 2b)^2 z^2 - 3a^2(\mathrm{R}^2 - 4b^2)z + 12a^4 b = 0. \tag{7}$$

Par suite,

$$z = \frac{a^2}{2(\mathrm{R} + b)(\mathrm{R} - 2b)}\left[3(\mathrm{R} + 2b) \pm \sqrt{3(\mathrm{R} - 2b)(3\mathrm{R} + 2b)}\right]. \tag{8}$$

Addition. — (*Octobre* 1885.)

IV. A cause de $a^2 = \mathrm{R}^2 - b^2$, la dernière formule se réduit à

$$z = \frac{\mathrm{R} - b}{2(\mathrm{R} - 2b)}\left[3(\mathrm{R} + 2b) \pm \sqrt{3(\mathrm{R} - 2b)(3\mathrm{R} + 2b)}\right] (^*). \tag{9}$$

Des équations

$$xy = 2\mathrm{R}z, \quad x^2 + y^2 = 4(a^2 + bz),$$

on conclut

$$x = \sqrt{a^2 + (\mathrm{R} + b)z} + \sqrt{a^2 - (\mathrm{R} - b)z},$$

$$y = \sqrt{a^2 + (\mathrm{R} + b)z} - \sqrt{a^2 - (\mathrm{R} - b)z};$$

(*) Pour faire disparaître le radical, on peut faire

$$\mathrm{R} - 2b = 3f^2, \quad 3\mathrm{R} + 2b = g^2;$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{R} = \frac{1}{4}(3f^2 + g^2), \quad b = \frac{1}{8}(g^2 - 9f^2), \quad a^2 = \frac{3}{64}(g^2 - f^2)(15f^2 + g^2), \text{ etc.}$$

Mais la simplification est plus apparente que réelle.

ou, sous une forme un peu plus simple :

$$x = \sqrt{(R+b)(R-b+z)} + \sqrt{(R-b)(R+b-z)}, \quad (10)$$

$$y = \sqrt{(R+b)(R-b+z)} - \sqrt{(R-b)(R+b-z)}. \quad (11)$$

Dans chaque cas particulier, les formules (9), (10), (11) détermineront le triangle cherché.

V. *Application.* — Soient $R = 7$, $b = 1$; et, par conséquent, $a = 4\sqrt{3}$.

On trouve

$$z = \frac{3}{5}(27 \pm \sqrt{345});$$

puis, en rejetant un système imaginaire :

$$x = \sqrt{\frac{6}{5}}\left[2\sqrt{37-\sqrt{345}} + \sqrt{-41+3\sqrt{345}}\right],$$

$$y = \sqrt{\frac{6}{5}}\left[2\sqrt{37-\sqrt{345}} - \sqrt{-41+3\sqrt{345}}\right].$$

La somme des cubes est

$$\frac{12}{5}\sqrt{\frac{6}{5}}\sqrt{37-\sqrt{345}}\left[8(37-\sqrt{345})+6(-41+3\sqrt{345})\right]$$

$$= 24\sqrt{\frac{6}{5}}\sqrt{37-\sqrt{345}}\left(5+\sqrt{345}\right)$$

$$= 24\sqrt{12}\sqrt{37^2-345} = 48.32.\sqrt{3}.$$

Elle doit égaler $8a^3 = 8.48\sqrt{48}$: c'est ce qui a lieu.

VI. *Remarque.* — Dans le cas traité par Glenie,

$$x + y = AC + BC = 4a = 2AB.$$

Conséquemment :

Si une ellipse a pour foyers les milieux F, F′ *des demi-axes* OA, OA′, *et que l'ordonnée d'un point* M *de la courbe soit égale à* OF, *on aura*

$$\overline{FM}^3 + \overline{F'M}^3 = 3\overline{FF'}^3.$$

VII. *Autre remarque.* — Les formules (10), (11) donnent lieu à ce petit théorème de Géométrie :

Le triangle ABC *étant inscrit à un cercle donné; soient* EDF *le diamètre perpendiculaire au côté* AB, G *la projection de* C *sur* EDF :

1° *La demi-somme des côtés* AC, BC *est moyenne proportionnelle entre les segments* DF, EG;

2° *La demi-différence de ces côtés est moyenne proportionnelle entre les segments* DE, FG.

CXIV. — Problème d'Arithmétique.

(*Septembre* 1871.)

Combien un nombre donné, n, *admet-il de diviseurs ayant la forme* $4\mu - 1$?

I. Si n est divisible par 2^λ, la réponse à la question est la même pour n et pour $\frac{n}{2^\lambda}$: on peut donc supposer n *impair*.

Cela étant, décomposons n en trois facteurs P, Q, R; le premier, composé de facteurs premiers ayant la forme $4\mu - 1$, affectés d'exposants *pairs* (*); le deuxième, composé de facteurs premiers, de cette même forme, affectés d'exposants *impairs;* le troisième, composé de facteurs premiers ayant la forme $4\mu + 1$.

II. Soit, pour fixer les idées,

$$P = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon. \tag{1}$$

Désignons par $F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$, le nombre des diviseurs de P, ayant la forme $4\mu - 1$.

(*) Par conséquent, P est un carré.

Soit

$$\Delta = a^{\alpha'}b^{\beta'}c^{\gamma'}d^{\delta'}e^{\varepsilon'},$$

l'un de ces diviseurs : la somme $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \varepsilon'$ doit être *impaire*. Elle résulte d'une valeur *paire* de $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta'$, jointe à une valeur impaire de ε' ; ou inversement.

Dans la suite

$$0, 1, 2, \ldots, \varepsilon,$$

il y a $\frac{\varepsilon}{2} + 1$ nombres *pairs* et $\frac{\varepsilon}{2}$ nombres *impairs*.

Donc

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\left(\frac{\varepsilon}{2} + 1\right)$$
$$+ \left[(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)(\delta + 1) - \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\right]\frac{\varepsilon}{2},$$

ou

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + \frac{1}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)(\delta + 1)\varepsilon. \quad (2)$$

De même,

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{1}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\delta,$$

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathrm{F}(\alpha, \beta) + \frac{1}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1)\gamma,$$

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta) = \mathrm{F}(\alpha) + \frac{1}{2}(\alpha + 1)\beta.$$

D'ailleurs,

$$\mathrm{F}(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha.$$

Donc

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = \frac{1}{2}[\alpha + (\alpha + 1)\beta + (\alpha + 1)(\beta + 1)\gamma$$
$$+ (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\delta + (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)(\delta + 1)\varepsilon];$$

ou

$$1 + 2\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)(\delta + 1)(\varepsilon + 1),$$

ou enfin

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = \frac{1}{2}(N - 1); \tag{3}$$

N désignant le nombre des diviseurs de P.

III. Soit

$$Q = a'^{\alpha'} b'^{\beta'} c'^{\gamma'} d'^{\delta'} e'^{\varepsilon'}; \tag{4}$$

les exposants étant *impairs*.

Dans la suite

$$0, 1, 2, \ldots \varepsilon',$$

il y a $\frac{\varepsilon'+1}{2}$ nombres *pairs*, $\frac{\varepsilon'+1}{2}$ nombres *impairs*. La relation (3) est remplacée par celle-ci :

$$F(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon') = \frac{1}{2} N'; \tag{5}$$

N′ désignant le nombre des diviseurs de Q.

IV. D'après ce qui précède : 1° *le nombre des diviseurs de* P, *ayant la forme* $4\mu + 1$, *est* $\frac{1}{2}(N + 1)$; 2° *le nombre des diviseurs de* Q, *ayant cette même forme, est* $\frac{1}{2}$ N′ (*).

Donc :

3° *Le nombre des diviseurs de* PQ, *ayant la forme* $4\mu - 1$, *est*

$$\frac{1}{4}\left[(N - 1)N' + (N + 1)N'\right] = \frac{1}{2}NN';$$

4° *Le nombre des autres diviseurs de* n *est* $\frac{1}{2}$ NN′.

V. Si nous appelons N″ le nombre des diviseurs de R, lesquels

(*) Si, comme dans les *Recherches sur quelques produits indéfinis*, nous appelons ε_n l'*excès* du nombre des diviseurs de n, ayant cette forme, sur le nombre des diviseurs de n, ayant la forme $4\mu - 1$, il s'ensuit que

$$\varepsilon_P = 1, \quad \varepsilon_Q = 0.$$

(Octobre 1885.)

ont tous la forme $4\mu + 1$, la réponse à la question proposée est, en conséquence,

$$x = \frac{1}{2} NN'N''. \tag{6}$$

Ainsi, *ordinairement, un nombre impair a autant de diviseurs ayant la forme* $4\mu - 1$, *que de diviseurs ayant la forme* $4\mu + 1$ (*).

VI. *Remarque. — Il y a exception si tous les facteurs premiers de* n, *ayant la première forme, sont affectés d'exposants pairs.*

En effet, quand il en est ainsi,

$$x = \frac{1}{2}(N - 1)N''; \tag{7}$$

et le nombre des diviseurs de n, ayant la forme $4\mu + 1$, est

$$y = \frac{1}{2}(N + 1)N'' \text{ (**)}. \tag{8}$$

Addition. — (*Octobre* 1885.)

VII. La démonstration contenue dans le paragraphe II est trop longue : nous l'aurions supprimée, si elle ne se basait sur l'identité

$$\left.\begin{aligned} &\alpha + (\alpha+1)\beta + (\alpha+1)(\beta+1)\gamma + (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\delta \\ &\quad + (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1)\varepsilon \\ &\quad = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\varepsilon) - 1, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

à laquelle nous reviendrons bientôt (***).

(*) Par suite,

$$\varepsilon_n = 0.$$

(**) Conséquemment,

$$\varepsilon_n = N''.$$

(***) Cette identité, que je croyais *nouvelle*, est due à Euler. Mon illustre ami Genocchi l'a rattachée à une *formule de Nicole.* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, années 1867 et 1869.) — Voyez aussi, dans le *Journal de M. Hoppe* (t. LXI, 1876), les *Éclaircissements sur une Note relative à la fonction* $\int^{\text{P}}.\Gamma(x)$; par M. *Genocchi.*

Si l'on fait abstraction des facteurs premiers ayant la forme $4\mu + 1$, il y a deux cas à distinguer.

1° n *a la forme* $4\mu - 1$. Alors, à chaque diviseur ayant cette forme, il en correspond un ayant la forme contraire. Donc $\varepsilon_n = 0$.

2° n *a la forme* $4\mu + 1$. Comme

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots,$$

la somme des exposants est paire. Dans le produit qui sert à former les diviseurs de n,

$$(1+a+a^2+\cdots+a^\alpha)(1+b+b^2+\cdots+b^\beta)(1+c+c^2+\cdots+c^\gamma)\ldots,$$

substituons, à chaque terme, son *résidu par* 4. Nous aurons

$$(1-1+1-\cdots\pm 1)(1-1+1-\cdots\pm 1)(1-1+\cdots\pm 1)\cdots = 1.$$

Le produit a autant de termes égaux à $+1$ que n admet de diviseurs ayant la forme $4\mu+1$, et autant de termes égaux à -1 que n admet de diviseurs ayant la forme contraire. Donc $\varepsilon_n = 1$ (*).

VIII. *Remarque.* — Soit, comme ci-dessus (1),

$$\Delta = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots$$

un diviseur de n. Les facteurs premiers $a, b, c, \ldots$, ayant tous la forme $4\mu - 1$, Δ aura cette forme, ou la forme contraire, selon que la somme

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \cdots$$

sera *impaire* ou *paire*. D'après cela, on est conduit au Problème suivant :

Soient les k *suites*

$$0, 1, 2, \ldots, \alpha;$$
$$0, 1, 2, \ldots, \beta;$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$0, 1, 2, \ldots, \theta.$$

(*) Cette démonstration se trouve déjà, en partie, dans les *Recherches*..., pp. 75 et 76.

On forme les $(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\theta+1)$ sommes contenant, chacune, un terme pris dans chacune des k *lignes. Combien y aura-t-il de sommes impaires et de sommes paires?*

En représentant par ε l'excès du premier nombre sur le second, on aura, d'après le paragraphe précédent,

$$\varepsilon=1, \quad \varepsilon=0,$$

selon que les nombres α, β, γ, ..., θ sont, ou ne sont pas, tous pairs.

CXV. — Comparaison entre deux séries.

(*Octobre* 1885.)

I. Posons :

$$u_n=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_{n-1})\alpha_n, \tag{1}$$

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n, \tag{2}$$

$$P_n=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n). \tag{3}$$

Il est visible que

$$S_n=P_n-1\ (^*). \tag{4}$$

Par conséquent, *la somme* S_n *converge ou diverge en même temps que le produit* P_n; ou, ce qui est équivalent :

La somme S_n *converge ou diverge en même temps que log.* P_n.

II. Soient, d'après cela :

$$v_n=\mathcal{L}(1+\alpha_n)\ (^{**}), \tag{5}$$

$$S'_n=v_1+v_2+\cdots+v_n: \tag{6}$$

les sommes S_n, S'_n *sont, simultanément, convergentes ou divergentes.*

(*) Voir l'identité (9), p. 87. Pour vérifier cette relation (4), évidente lorsque $n=1$, il suffit d'ajouter u_{n+1} à chacun des deux membres.

(**) Pour plus de simplicité, nous prenons des logarithmes népériens; mais les propositions sont indépendantes de ce choix.

Ainsi, les conditions de convergence de la série proposée :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

se réduisent à celles de la série auxiliaire :

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

Si les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sont positives, il en sera de même pour $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Les deux premières conditions *nécessaires* sont donc

$$\lim \mathcal{L}(1 + \alpha_n) = 0, \quad \lim [n \mathcal{L}(1 + \alpha_n)] = 0 \text{ (*)}.$$

La première équivaut à *lim* $\alpha_n = 0$ (**). Pour satisfaire à la seconde, il suffit de prendre

$$\alpha_n = \frac{1}{n^{1+k}}, \tag{7}$$

k étant une *constante positive.*

En effet,

$$n \mathcal{L}\left(1 + \frac{1}{n^{1+k}}\right) \text{ est compris entre } \frac{1}{n^k} \text{ et } \frac{1}{n^k} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{1+2k}}.$$

Ces deux conditions sont d'ailleurs *suffisantes*; car la série dont le terme général

$$v_n = \mathcal{L}\left(1 + \frac{1}{n^{1+k}}\right),$$

est convergente (***).

En résumé : *la série, déterminée par les formules* (1), (7), *est convergente.*

III. Supposons, en second lieu, que les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, soient *négatives,* mais comprises entre 0 et — 1. Posons

$$\alpha_n = -\beta_n;$$

(*) *Traité élémentaire des séries,* pp. 3 et 17.

(**) Condition évidente *a priori.*

(***) Propriété connue, dont la démonstration résulte de la dernière remarque.

et, afin d'avoir encore des séries à termes positifs, prenons

$$u_n = (1-\beta_1)(1-\beta_2)\,..\,(1-\beta_{n-1})\beta_n, \qquad (8)$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \qquad (9)$$

$$P_n = (1-\beta_1)(1-\beta_2)\ldots(1-\beta_{n-1})(1-\beta_n), \qquad (10)$$

$$-v_n = \mathfrak{L}(1-\beta_n). \qquad (11)$$

Si l'on fait

$$\beta_n = \frac{1}{n^{1+k}}, \qquad (12)$$

la série auxiliaire :

$$-v_1 - v_2 - \cdots - v_n - \cdots$$

sera convergente. En effet,

$$\mathfrak{L}\left(1-\beta_n\right) = \mathfrak{L}\left(1-\frac{1}{n^{1+k}}\right) = \mathfrak{L}\left(\frac{n^{1+k}-1}{n^{1+k}}\right) = -\mathfrak{L}\left(\frac{n^{1+k}}{n^{1+k}-1}\right)$$
$$= -\mathfrak{L}\left(1+\frac{1}{n^{1+k}-1}\right);$$

et cette dernière quantité est comprise entre

$$-\frac{1}{n^{1+k}-1} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}\frac{1}{(n^{1+k}-1)^2}.$$

Etc. (*).

IV. De tout ce qui précède résulte la proposition suivante :

1° *Les séries ayant, comme termes généraux :*

$$u_n = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_{n-1})\alpha_n,$$
$$v_n = \mathfrak{L}(1+\alpha_n)$$

sont, simultanément, convergentes ou divergentes;

(*) En général,

$$-\mathfrak{L}(1-x) = \mathfrak{L}\frac{1}{1-x} = \mathfrak{L}\left(1+\frac{1}{1-x}\right);$$

donc, *si* x *ne surpasse pas* $\frac{1}{2}$:

$-\mathfrak{L}(1-x)$ *est compris entre* $\dfrac{x}{1-x}$ *et* $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$.

Je crois n'avoir vu, nulle part, cette remarque si simple et si utile.

2° *Elles sont convergentes lorsque*

$$\alpha_n = \pm \frac{1}{n^{1+k}},$$

k *étant une constante positive;*

3° *Elles sont divergentes si cette constante est nulle.*

CXVI. — Problème sur l'ellipse (*).

(*Mars* 1854.)

Parmi toutes les ellipses circonscrites à un quadrilatère, quelle est celle qui diffère, le moins possible, d'un cercle; c'est-à-dire :

Quelle est l'ellipse, passant par quatre points donnés, dans laquelle le rapport des axes soit maximum ou minimum?

I. L'équation de toutes les coniques passant en A, B, C, D est

$$2\lambda xy + ab(y-c)(y-d) + cd(x-a)(x-b) - abcd = 0 \text{ (**)}, \quad (1)$$

λ étant un paramètre arbitraire.

Si nous transportons l'origine au centre I, cette équation devient

$$2\lambda xy + aby^2 + cdx^2 = \mathrm{F}. \quad (2)$$

Les équations du centre sont, comme on sait :

$$2\lambda\beta + cd(2\alpha - a - b) = 0, \quad 2\lambda\alpha + ab(2\beta - c - d) = 0. \quad (3)$$

La distance u, d'un point de la courbe, au centre I, est donnée par la formule

$$u^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta. \quad (4)$$

Pour exprimer que le rayon u est maximum ou minimum, on doit joindre, aux équations (2), (4), l'égalité

$$\frac{x + y\cos\theta}{\lambda y + cdx} = \frac{y + x\cos\theta}{\lambda x + aby}. \quad (5)$$

(*) Proposé dans les *Annales de Gergonne* (t. XVII, p. 284); résolu par Steiner (*Journal de Crelle*, t. II, p. 123).

(**) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. I, p. 477.

Celle-ci représente deux droites, menées par l'origine, parallèlement aux axes principaux de la conique.

Chacun des rapports (5) égale

$$\frac{x^2 + 2xy\cos\theta + y^2}{2\lambda xy + cdx^2 + aby^2} = \frac{u^2}{F}. \tag{6}$$

Donc

$$(F - u^2cd)x = (u^2\lambda - F\cos\theta)y, \quad (F - u^2ab)y = (u^2\lambda - F\cos\theta)x;$$

puis

$$(F - u^2ab)(F - u^2cd) = (u^2\lambda - F\cos\theta)^2, \tag{7}$$

ou

$$(abcd - \lambda^2)u^4 - F(ab + cd - 2\lambda\cos\theta)u^2 + F^2\sin^2\theta = 0. \tag{8}$$

Telle est l'équation qui donne, pour chaque valeur de λ, les carrés des demi-axes de la conique correspondante.

II. Admettons que les deux valeurs de u^2 soient positives; désignons par μ la plus grande, par ν la plus petite. Le rapport $\frac{\mu}{\nu}$ devant être minimum, on doit avoir $\nu\mu' - \mu\nu' = 0$, ou

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\nu'}{\nu};$$

μ', ν' désignant les dérivées relatives à λ.

On a

$$\mu + \nu = F\frac{ab + cd - 2\lambda\cos\theta}{abcd - \lambda^2}, \quad \mu\nu = \frac{F^2\sin^2\theta}{abcd - \lambda^2};$$

et, par conséquent,

$$\frac{(\mu + \nu)^2}{\mu\nu} = \frac{(ab + cd - 2\lambda\cos\theta)^2}{(abcd - \lambda^2)\sin^2\theta},$$

ou

$$\frac{\mu}{\nu} + \frac{\nu}{\mu} = \frac{(ab + cd - 2\lambda\cos\theta)^2}{(abcd - \lambda^2)\sin^2\theta}. \tag{9}$$

La dérivée du premier membre étant

$$\left(\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}\right)(\nu\mu' - \mu\nu') = 0,$$

il en est de même pour celle du second membre. Ainsi, après suppression du facteur $ab + cd - 2\lambda \cos\theta$ (*) :

$$\lambda = 2\frac{abcd\cos\theta}{ab + cd}. \qquad (10)$$

III. Quand l'angle θ est droit, l'équation (1) devient, à cause de $\lambda = 0$,

$$ab(y - c)(y - d) + cd(x - a)(x - b) - abcd = 0.$$

Le centre I est l'intersection de la perpendiculaire au milieu de AB, avec la perpendiculaire au milieu de CD.

Dans le cas général, la détermination de l'ellipse cherchée repose sur les remarques suivantes, dues, en grande partie, à l'illustre Steiner.

1° D'après les équations (3), *le lieu des centres* de toutes les coniques passant en A, B, C, D, est l'*hyperbole* H représentée par

$$\frac{y}{x} = \frac{cd(x - a - b)}{ab(y - c - d)}. \qquad (11)$$

2° Les asymptotes de H sont déterminées, en direction, par la formule

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{cd}{ab}}. \qquad (12)$$

3° D'après (6), les carrés des demi-diamètres de l'ellipse E, parallèles, respectivement, à ces asymptotes, sont donnés, eux-mêmes, par cette autre formule :

$$\frac{u^2}{F} = \frac{cd \pm 2\cos\theta\sqrt{abcd} + ab}{abcd \pm 4\dfrac{abcd\cos\theta}{ab + cd}\sqrt{abcd} + abcd} = \frac{ab + cd}{2abcd}. \qquad (13)$$

Ainsi, *ces demi-diamètres sont égaux entre eux* (**).

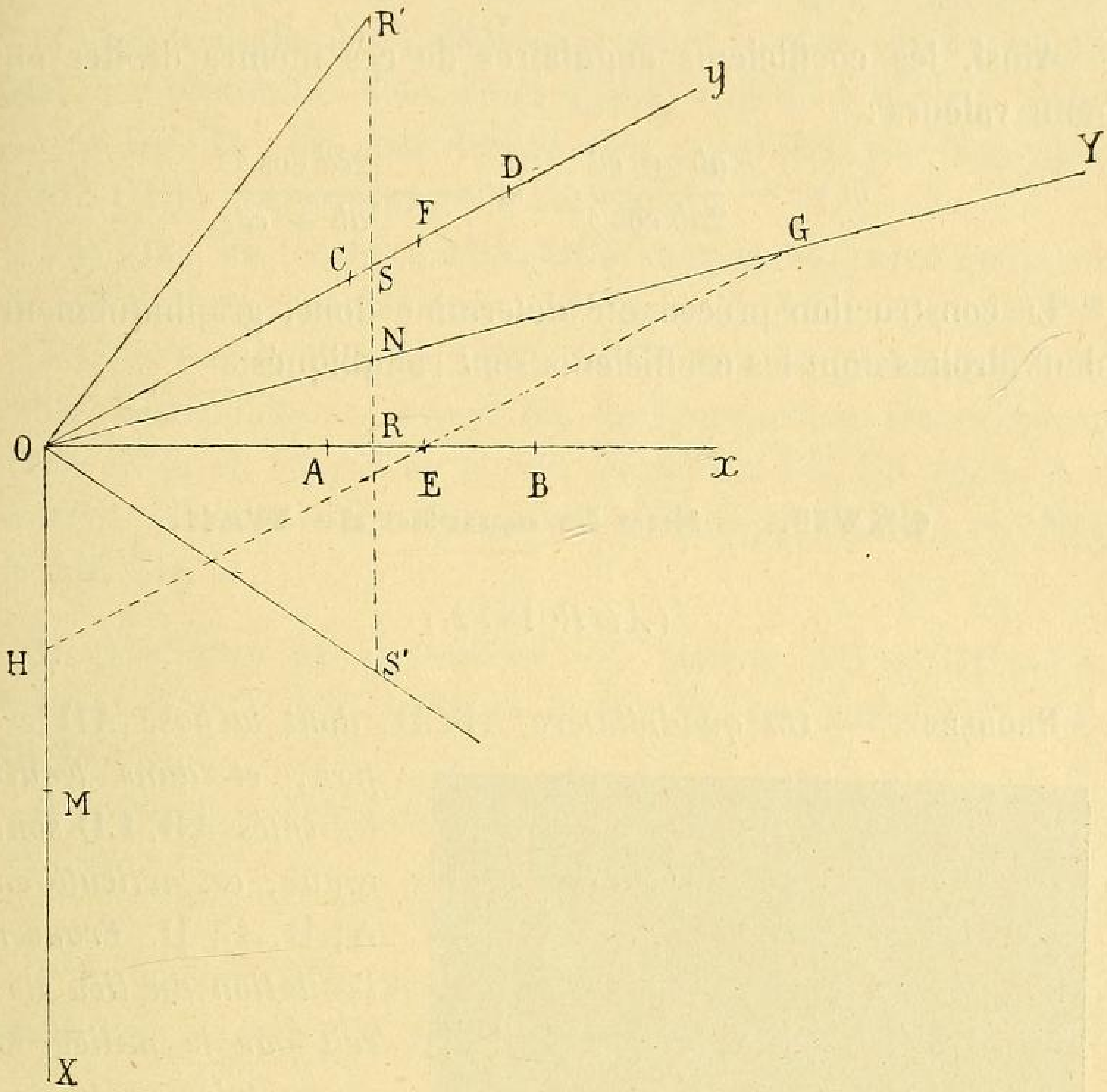
(*) Ce facteur ne peut être supposé nul; car il résulterait, de cette hypothèse,

$$\mu^2 + \nu^2 = 0.$$

(**) Théorème de Steiner (*Nouvelles Annales*, t. IV, p. 481).

4° Les axes de E sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les asymptotes de H.

IV. De tout cela résulte la construction suivante, assez simple :



Soit pris, sur Ox, $OE = \sqrt{ab}$; et, sur Oy, $OF = \sqrt{cd}$. Par le point E, on mène la parallèle à Oy; on prend, sur cette droite, $EG = EH = OF$; on trace OGY, OHX; et l'on prend arbitrairement, sur ces deux directions, $ON = OM$.

Sur la parallèle à OX, menée par le point N, et qui rencontre Ox en R, Oy en S, on prend $NR' = \frac{\overline{ON}^2}{NR}$, $NS' = \frac{\overline{ON}^2}{OS}$.

Si, par le milieu de AB, on tire la parallèle à OR' ; et, par le milieu de CD, la parallèle à OS', l'intersection de ces deux dernières droites est le centre de E.

V. *Remarque.* — D'après les formules (3), les équations de OR', OS' sont, respectivement :

$$2\frac{ab\cos\theta}{ab+cd}y+x=0,\quad 2\frac{cd\cos\theta}{ab+cd}x+y=0.$$

Ainsi, les coefficients angulaires de ces mêmes droites ont pour valeurs :

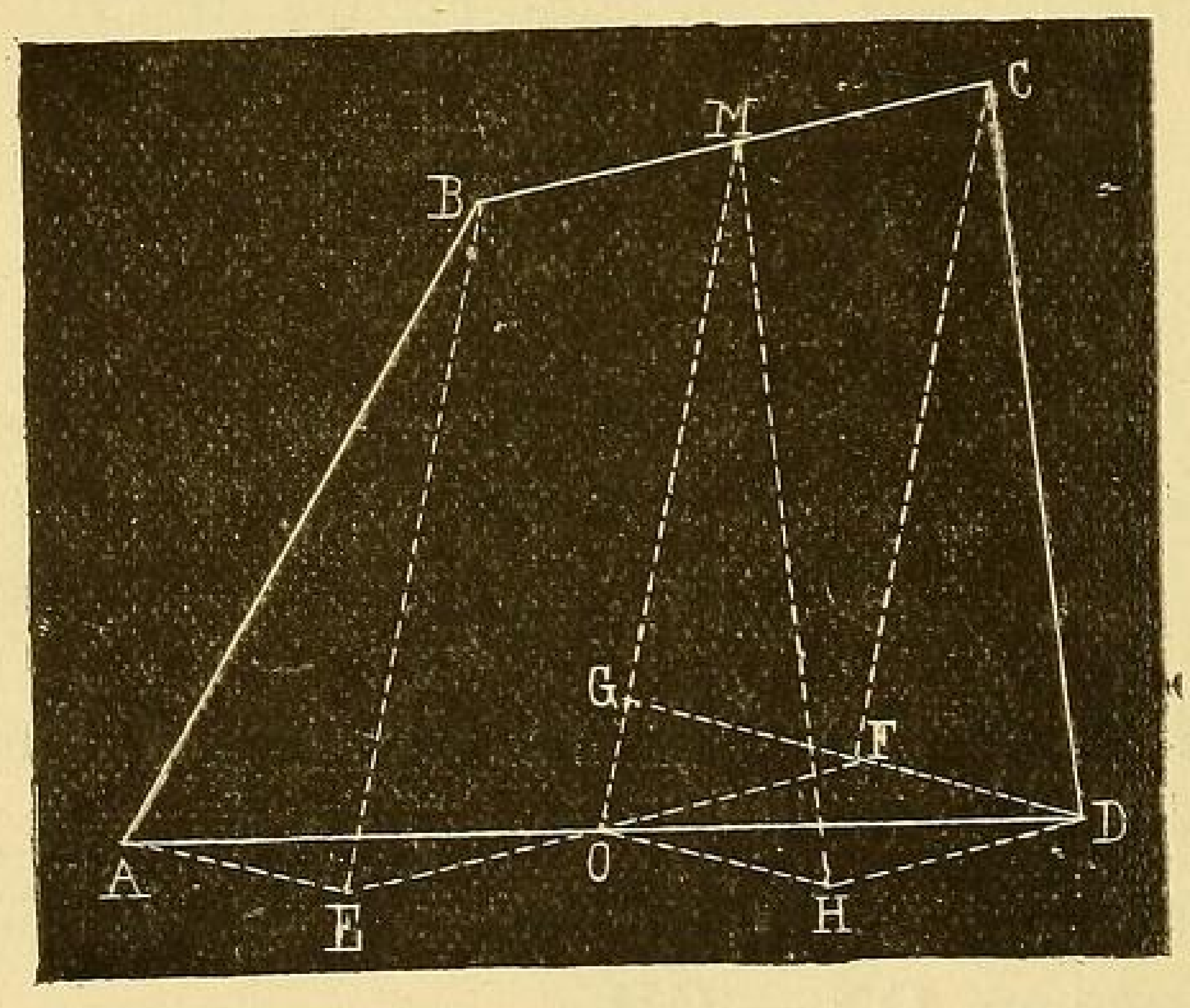
$$m=-\frac{ab+cd}{2ab\cos\theta},\quad m'=-\frac{2cd\cos\theta}{ab+cd}.$$

La construction précédente détermine donc, graphiquement, deux droites dont les coefficients sont compliqués.

CXVII. — Sur la courbe de Watt.

(*Avril* 1872.)

Problème. — *Un quadrilatère* ABCD, *dont la base* AD *est fixe, et dans lequel les côtés* AB, CD *sont égaux, est articulé en* A, B, C, D. *Trouver l'équation du lieu décrit par le milieu* M *du quatrième côté.*



I. Lemme (*). — *Si un quadrilatère a deux côtés opposés égaux : 1° ces côtés sont également inclinés sur la médiane des deux autres côtés; 2° la projection de chacun d'eux, sur la médiane, est égale à la médiane.*

(*) Énoncé et démontré dans le premier volume de la *Nouvelle Correspondance mathématique* (1874, pp. 31, 63, 161).

Menons les droites BE, CF parallèles à la médiane MO. Par le point O, menons EOF parallèle à BC. Enfin, traçons les droites AE, DF.

1° D'après la construction, BEOM, MOFC sont des parallélogrammes ; donc BE = OM = CF, OE = BM = MC = OF.

2° Les triangles AOE, DOF sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun. Ainsi AE = DF. De plus, ces droites sont *parallèles;* car les angles OAE, ODF, *alternes-internes,* sont égaux.

Par suite, les triangles ABE, DCF sont égaux, parce qu'ils ont les côtés égaux, chacun à chacun. Donc *angle* ABE = *angle* DCF.

3° Les angles égaux, AEB, DFC, sont *supplémentaires,* à cause des situations respectives de leurs côtés. Donc *chacun d'eux est droit.* En même temps, *les droites* BE, CF, *égales à la médiane* (1°), *sont égales et parallèles aux projections, sur* MO, *de* AB, CD.

II. Équation de la courbe. — Soient $AO = OD = a$, $AB = CD = b$, $BM = CM = c$. Soient, en outre, $OM = u$, $MOD = \omega$.

A cause du triangle rectangle CFD,

$$u^2 = b^2 - \overline{FD}^2.$$

Pour évaluer FD, prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre, en G, avec OM. Il est clair que :

$$FD = DG - FG = a \sin\omega - FG, \quad FG = \sqrt{c^2 - a^2\cos^2\omega}.$$

L'équation demandée est donc

$$u^2 = b^2 - \left[a \sin\omega - \sqrt{c^2 - a^2\cos^2\omega}\right]^2,$$

ou

$$u^2 + c^2 - b^2 = a^2 \cos 2\omega + 2a \sin\omega \sqrt{c^2 - a^2\cos^2\omega}. \qquad (1)$$

Addition. — (*Juin* 1885.)

III. *Remarques.* — 1° Cette équation (1) peut encore être écrite sous les trois formes suivantes :

$$(u^2 + c^2 - a^2 - b^2)^2 = 4a^2(b^2 - u^2)\sin^2\omega, \tag{2}$$

$$(b^2 - u^2)^2 - 2c^2(b^2 - u^2) + (a^2 - c^2)^2 + 2a^2(b^2 - u^2)\cos 2\omega = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}^2\omega = \frac{(u^2 + c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2c^2 - (u^2 + a^2 + c^2 - b^2)^2}. \tag{4}$$

2° Considérons le parallélogramme MCDH, dans lequel MH $= b$, DH $= c$. Si nous menons la droite OH, elle est perpendiculaire à OM (I, 3°). De là résulte le *dispositif* suivant, probablement *connu* et *peu pratique :*

La tige DH, *qui tourne librement autour du point fixe* D, *est articulée, en* H, *avec une seconde tige* HM. *Si les côtés d'un angle droit* HOM, *dont le sommet est fixe, glissent dans des ouvertures placées en* H, M, *l'extrémité* M *de la tige* HM *décrira la courbe de Watt.*

Autre addition. — (*Août* 1885.)

IV. Dans le triangle DOH,

$$\overline{DH}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OD}^2 - 2OH \,.\, OD \sin\omega,$$

ou

$$c^2 = \overline{OH}^2 + a^2 - 2OH \,.\, a\sin\omega,$$

ou

$$\left(\overline{OH}^2 + a^2 - c^2\right)^2 = 4\overline{OH}^2 a^2 \sin^2\omega.$$

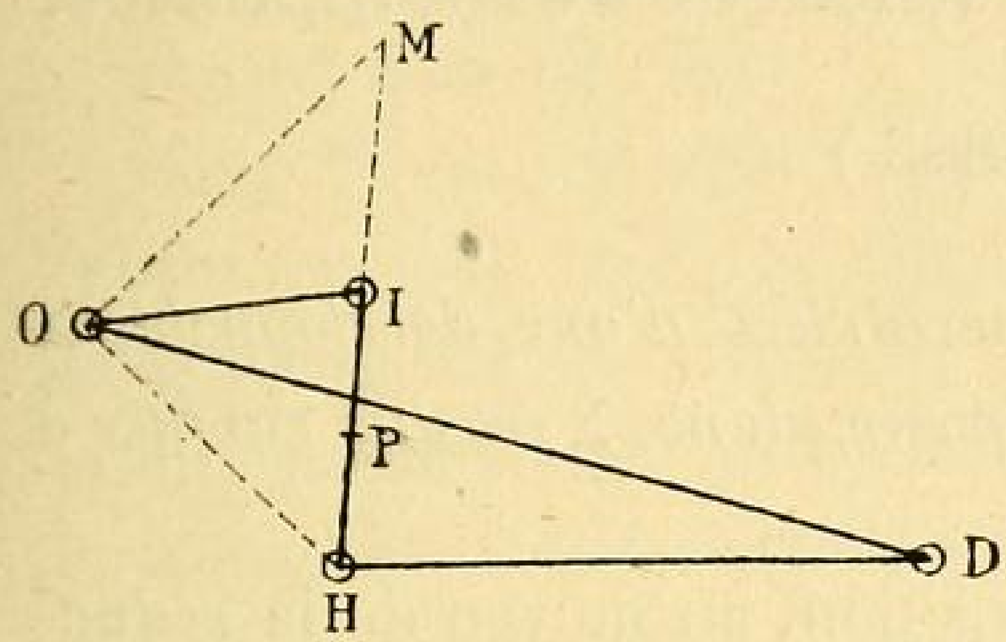
Et comme

$$\overline{OH}^2 = \overline{FD}^2 = b^2 - u^2,$$

on a, sans calcul, l'équation (2).

V. Soit I le milieu de l'hypoténuse du triangle HOM (III, 2°).

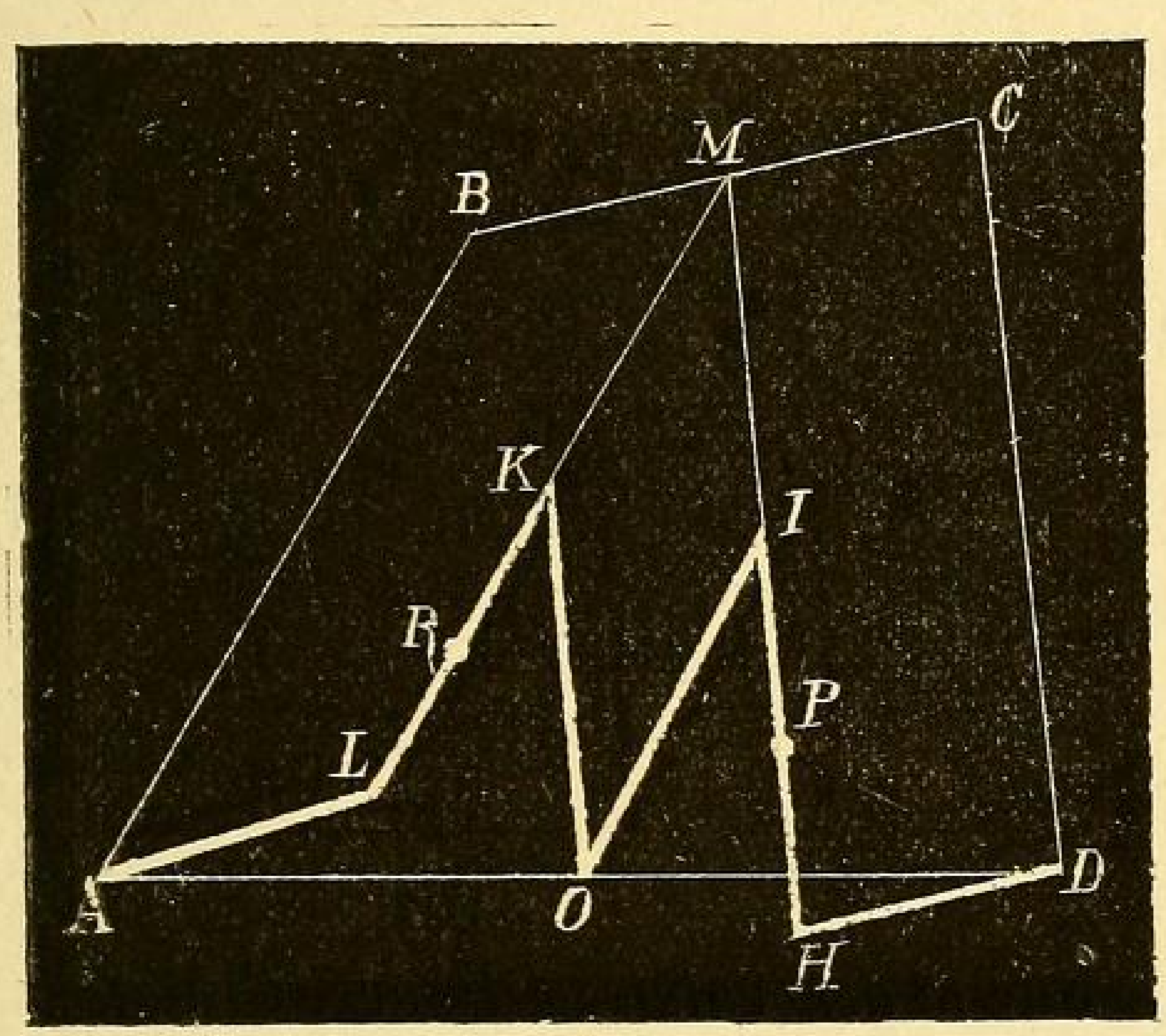
La droite OI = IH = $\frac{1}{2}b$. Par conséquent, le mécanisme indiqué ci-dessus peut être simplifié comme il suit :



Soient trois tiges OI, IH, HD, *articulées en* O, I, H, D, *et dont les deux premières aient même longueur; soient* O, D *deux points fixes. Si la tige* IH *est prolongée en* IM, *de manière que* IM = IH, *le point* M *décrit la courbe de Watt* (*).

VI. Supposons OI = IH = HD (**). Alors OIHD est un quadrilatère dans lequel deux côtés opposés sont égaux. Donc *le point* P, *milieu de* IH, *décrit une courbe de Watt.*

VII. Enfin, si l'on considère la figure formée de l'*heptagone articulé* AEKOIHD (***) et du *losange articulé* OKMI, les points A, O, D étant fixes, on voit que *le point* M, *et les milieux* P, R, *de* IH, KL, *décrivent des courbes de Watt.* De plus, *les deux dernières lignes, égales entre elles, sont semblables à la première.*



En effet, pour passer de ABCD à chacun des quadrilatères ALKO, OIHD, il suffit de changer a en $\frac{a}{2}$, b en $\frac{b}{2}$.

(*) Contrairement à l'opinion émise dans le paragraphe III, M. Dwelshauwers, mon savant Collègue à l'Université de Liège, pense que ce petit mécanisme est *nouveau* et *utile*.

(**) C'est-à-dire $\frac{b}{2} = c$.

(***) Tous les côtés de cet heptagone, excepté AD, sont égaux.

CXVIII. — Développées, et surfaces développables.

(1871-1885.)

I. Théorème (*). — *Si les génératrices d'une développable Σ sont normales à la directrice, supposée plane, Σ est une surface à pente constante.*

On prouve aisément cette proposition, au moyen de la *réduction à l'absurde.*

On peut, aussi, la démontrer par le calcul suivant :

Le plan de la directrice étant pris pour celui de xy, une génératrice est représentée par les équations

$$x - \alpha = az, \quad y - \beta = bz, \tag{1}$$

dans lesquelles $\beta = \varphi(\alpha)$, et

$$b\varphi'(\alpha) + a = 0. \tag{2}$$

Les dérivées des équations (1) sont

$$-1 = a'z, \quad -\varphi'(\alpha) = b'z.$$

Donc, pour que deux génératrices consécutives se rencontrent,

$$\varphi'(\alpha) = \frac{b'}{a'}; \tag{3}$$

ou, par l'équation (2)

$$bb' + aa' = 0;$$

puis

$$b^2 + a^2 = const. \tag{4}$$

Cette condition exprime que *la génératrice fait, avec le plan* xy, *un angle constant;* etc.

II. La *généralisation* du théorème précédent semble être celui-ci :

Si les génératrices d'une développable Σ sont normales à la

(*) Réciproque d'un théorème connu.

directrice, elles font, avec les plans osculateurs correspondants, des angles constants.

Mais *il n'en est rien.*

Considérons, en effet, une courbe gauche AMB (*), arête de rebroussement de Σ, et dont une développante soit BPC : la *génératrice* MP est normale, en P, à la *directrice* BPC. Soit PN la binormale à cette directrice. D'après un théorème connu (**) : la *binormale* PN, *à la développante, est parallèle à la rectifiante* MG *de la développée*. Or, *l'angle* GMP *est variable;* donc, etc.

III. Ce théorème ayant été peu remarqué (***), nous allons en rappeler la démonstration.

Soit $\mathrm{MP} = u$. D'après la définition de la développante,

$$\mathit{arc}\,\mathrm{AM} + \mathrm{MP} = \mathit{const},$$

ou

$$s + u = \mathit{const}. \tag{5}$$

Donc, s étant prise pour variable indépendante, $u' = -1$.

Soient x, y, z les coordonnées de M; X, Y, Z les coordonnées de P; a, b, c les cosinus directifs de MP; etc.

Nous aurons :

$$\mathrm{X} = x + au, \quad \mathrm{Y} = y + bu, \quad \mathrm{Z} = z + cu; \tag{6}$$

$$\mathrm{X}' = a'u, \quad \mathrm{Y}' = b'u, \quad \mathrm{Z}' = c'u; \tag{7}$$

$$\mathrm{X}'' = a''u - a', \quad \mathrm{Y}'' = b''u - b', \quad \mathrm{Z}'' = c''u - c'; \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{Y'Z''} - \mathrm{Z'Y''}}{b'c'' - c'b''} = \frac{\mathrm{Z'X''} - \mathrm{X'Z''}}{c'a'' - a'c''} = \frac{\mathrm{X'Y''} - \mathrm{Y'X''}}{a'b'' - b'a''} = u. \tag{9}$$

Les cosinus directifs de PN sont, comme on sait, proportionnels à

$$\mathrm{Y'Z''} - \mathrm{Z'Y''}, \quad \mathrm{Z'X''} - \mathrm{X'Z''}, \quad \mathrm{X'Y''} - \mathrm{Y'X''}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

(**) *Théorie analytique des lignes à double courbure*, p. 63.

(***) Il avait même, jusque dans ces derniers temps (octobre 1885), été oublié par l'Auteur.

Donc λ, μ, ν étant les angles formés, avec les trois axes, par la binormale :

$$\frac{\cos\lambda}{b'c''-c'b''}=\frac{\cos\mu}{c'a''-a'c''}=\frac{\cos\nu}{a'b''-b'a''}. \qquad (10)$$

Soit encore θ l'angle MPN : chacun des trois rapports égale

$$\frac{\cos\theta}{\sum a(b'c''-c'b'')}.$$

On sait que (*) :

$$b'c''-c'b''=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{a}{r}+\frac{l}{\rho}\right),\quad c'a''-a'c''=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{b}{r}+\frac{m}{\rho}\right),$$

$$a'b''-b'a''=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{c}{r}+\frac{n}{\rho}\right),\quad \sum a(b'c''-c'b'')=\frac{1}{\rho^2 r}.$$

Conséquemment

$$\cos\lambda=\left(a+\frac{r}{\rho}l\right)\cos\theta,\quad \cos\mu=\left(b+\frac{r}{\rho}m\right)\cos\theta,\quad \cos\nu=\left(c+\frac{r}{\rho}n\right)\cos\theta. \quad (11)$$

Or, les premiers facteurs sont proportionnels aux cosinus directifs de la rectifiante (**); donc le théorème est démontré.

IV. *Remarque.* — Il résulte, des dernières formules,

$$\cos^2\theta=\frac{\rho^2}{r^2+\rho^2}.$$

Si l'on veut que l'angle θ soit constant, on doit avoir

$$\frac{\rho}{r}=const:$$

la développée est une hélice, et la développante est plane (***).

V. Corollaire. — AMB *étant une courbe donnée, dont les développantes sont* CPD, C'P'D', ...; *les binormales* PN, P'N', ... *aux points situés sur une même tangente* MPP'P'' ... *à la première courbe, sont parallèles entre elles.*

(*) *Théorie analytique...*, pp. 14 et 16.

(**) *Loc. cit.*, p. 27.

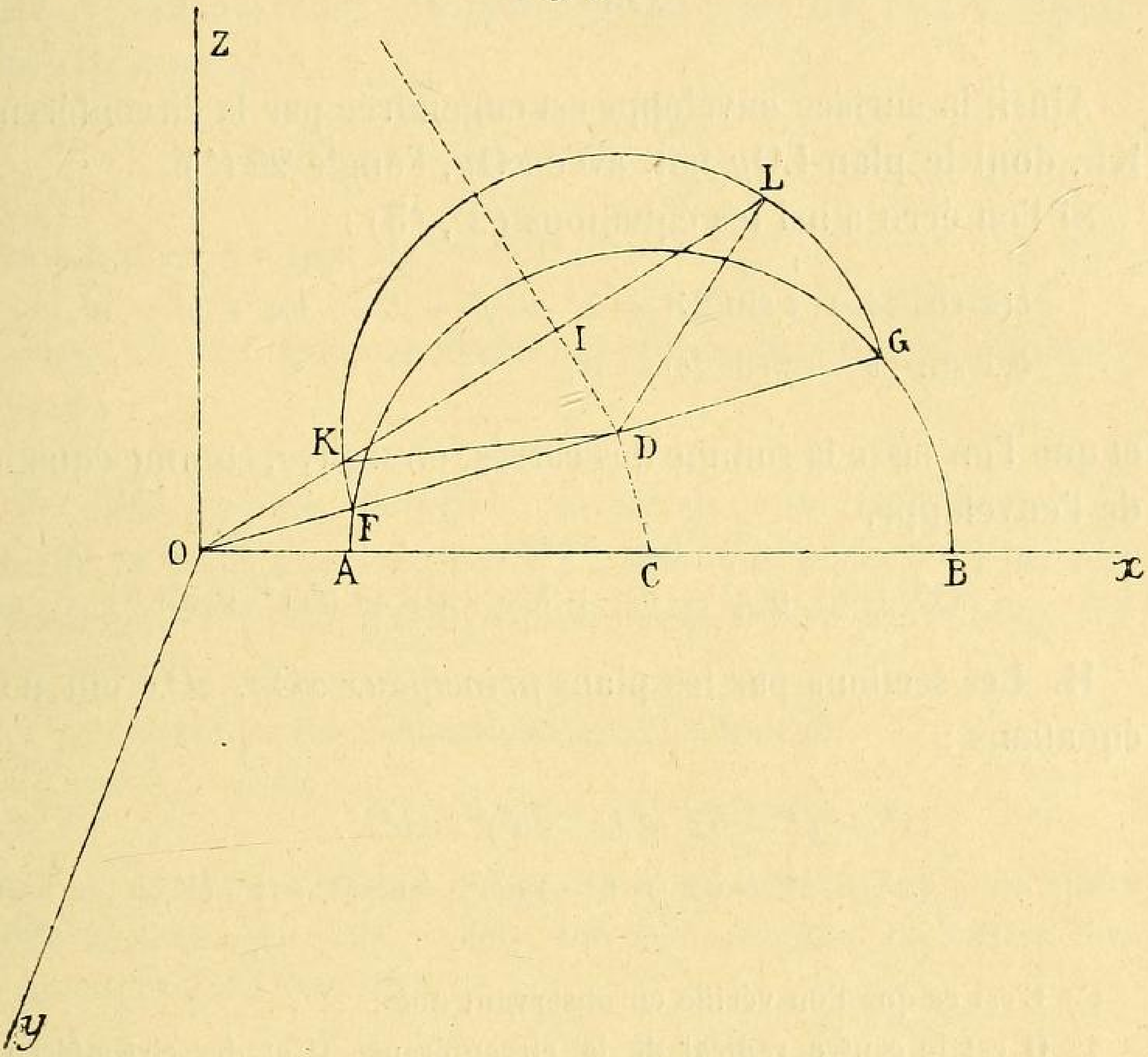
(***) Voir les paragraphes IV et V du petit Mémoire intitulé : *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces.*

CXIX. — Discussion d'une surface.

(*Mars* 1870.)

Problème. — *Une sphère* C *est coupée, par un plan* GFOy, *sui-*

Fig. 1.



vant une circonférence FG. *Sur* FG, *prise comme circonférence de grand cercle, on construit une sphère* D. *Quelle est l'enveloppe* (*)?

I. Soient OC $= b$, AC $= a$, GO$x = \theta$. Les coordonnées du centre D sont

$$\alpha = b\cos^2\theta,\quad \beta = 0,\quad \gamma = b\sin\theta\cos\theta. \tag{1}$$

(*) La question a été traitée, en partie, par *Houtain* (*Des solutions singulières.* Bruxelles, 1854).

L'équation de la sphère variable est donc

$$(x - b\cos^2\theta)^2 + y^2 + (z - b\sin\theta\cos\theta)^2 = a^2 - b^2\sin^2\theta,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - bx - b(x\cos 2\theta + z\sin 2\theta) + b^2 - a^2 = 0. \quad (2)$$

Prenant la dérivée, on a

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{z}{x}. \quad (3)$$

Ainsi, la surface enveloppe est engendrée par la circonférence KL, dont le plan LOy fait, avec xOy, l'angle 2θ (*).

Si l'on écrit ainsi les équations (2), (3) :

$$b(x\cos 2\theta + z\sin 2\theta) = x^2 + y^2 + z^2 - bx + b^2 - a^2,$$
$$b(x\sin 2\theta - z\cos 2\theta) = 0,$$

et que l'on fasse la somme des carrés, on trouve, comme équation de l'enveloppe,

$$(x^2 + y^2 + z^2 - bx + b^2 - a^2)^2 = b^2(x^2 + z^2). \quad (4)$$

II. Les sections par les plans *principaux* xOy, zOx ont pour équations :

$$(x^2 + y^2 - bx + b^2 - a^2)^2 = b^2x^2, \quad (5)$$
$$(x^2 + z^2 - bx + b^2 - a^2)^2 = b^2(x^2 + z^2) \text{ (**)}. \quad (6)$$

(*) C'est ce que l'on vérifie en observant que :

1° O est le centre radical de la circonférence C et des circonférences *consécutives* FG, F'G';

2° La corde commune, KL, est perpendiculaire à la ligne des centres, DD';

3° Ces centres, D, D', appartiennent à la circonférence décrite sur OC comme diamètre;

4° A la limite, DD' est tangente à cette circonférence;

5° Le rayon DI, parallèle à LK, fait, avec Ox, un angle double de O.

(**) Au lieu de celle-ci, Houtain a trouvé :

$$(x^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 = b^2(x^2 + z^2).$$

Ainsi, la section par le plan zx se composerait de *deux circonférences ayant, pour centre commun, l'origine;* résultat inadmissible.

La première, qui se décompose en

$$(x - b)^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 + b^2 - a^2 = 0,$$

représente la circonférence *horizontale* ACB, puis une circonférence *imaginaire*, si, comme le suppose la figure, b surpasse a.

L'équation (6), du quatrième degré, est irréductible (*).

III. I étant le centre du cercle générateur LK (situé dans le plan LOy), on a

$$OI = OD \cos\theta = b\cos^2\theta = \frac{b}{2}(1 + \cos 2\theta);$$

équation d'un *limaçon de Pascal*.

Donc, au lieu de la construction précédente, on peut employer celle-ci :

Sur OC, *comme diamètre, on décrit une circonférence, à laquelle on mène une tangente* TT′ ; *puis l'on abaisse* OI *perpendiculaire à* TT′ : I *est le centre de la circonférence génératrice* (**).

(*) Au moyen des coordonnées polaires, elle devient

$$u^2 - b(1 \pm \cos\omega)\,u + b^2 - a^2 = 0.$$

Soient u_1, u_2 les deux racines. A cause de $u_1 u_2 = b^2 a^2$, la courbe ne diffère pas de sa réciproque : elle est donc une *anallagmatique*. La surface S en est également une. (Nov. 1885.)

(**) On vient de voir que l'équation de la section principale est

$$u^2 - b(1 + \cos 2\theta)\,u + b^2 - a^2 = 0,$$

et que

$$v = OI = \frac{b}{2}(1 + \cos 2\theta).$$

Par conséquent, si l'on suppose

$$u = v \pm \rho,$$

on a

$$\rho^2 = v^2 - (b^2 - a^2).$$

D'après cela, *soit pris, dans la circonférence* OC, *la corde* CP = a. *Sur* OI, *comme diamètre, décrivez une demi-circonférence. Soit* R *le point où elle est*

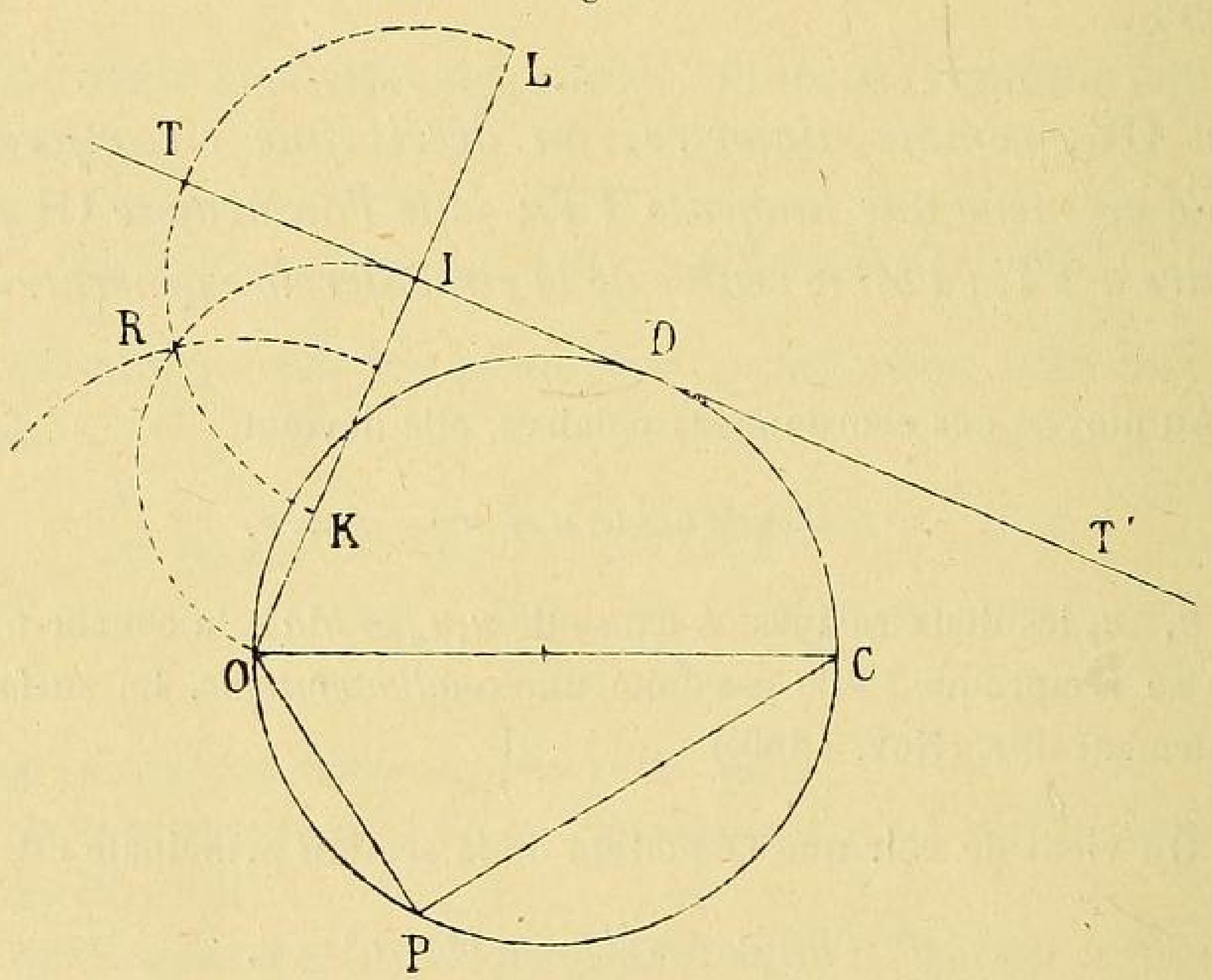
IV. La circonférence KL (fig. 1), *caractéristique* de la sphère D, est une ligne de courbure de S. Ainsi, *le premier système de lignes de courbure se compose de cercles, dont les plans passent tous par la droite* Oy (*). *Le cône de révolution* KDL *est normal à* S, *en tous les points de la circonférence* KL. De plus, le lieu du sommet D est la circonférence décrite sur OC comme diamètre (**).

V. On a trouvé $OI = b\cos^2\theta$. D'ailleurs la figure 2 prouve que

$$\overline{IK}^2 = \overline{OI}^2 - (b^2 - a^2).$$

coupée par la circonférence décrite du point O *comme centre, avec* OP *pour rayon. Si, du point* I *comme centre, vous tracez une dernière circonférence*

Fig. 2.



passant en R, *les points* K, L, *où elle coupe* OI, *appartiennent à la section principale cherchée.*

De plus, *la circonférence* KRL *est le rabattement, autour de son diamètre* KL, *de la génératrice.* (Novembre 1885.)

(*) Conformément à un théorème connu.

(**) D'après la figure 2, la droite DI est tangente, en D, à *cette circonférence,* laquelle *est,* par conséquent, *l'enveloppe des axes des cônes normaux.* (Novembre 1885.)

Si l'on suppose que le cercle générateur, projeté suivant KL, soit rabattu autour de Oy, dans le plan Xy, l'équation du rabattement sera

$$(x - b\cos^2\theta)^2 + y^2 = b^2\cos^4\theta + a^2 - b^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2bx\cos^2\theta = a^2 - b^2. \qquad (7)$$

$x = 0$ donne $y = \pm\sqrt{b^2 - a^2}\sqrt{-1}$. Ainsi *tous les cercles de courbure, après qu'ils ont été rabattus autour de* Oy, *passent par deux points fixes, imaginaires.*

L'équation des cercles C', orthogonaux à ceux-ci, est

$$x^2 + y^2 + b\lambda y = b^2 - a^2 \ (^*), \qquad (8)$$

λ étant un paramètre variable. Chacun de ces nouveaux cercles rencontre Ox en deux points fixes, déterminés par

$$y = 0, \quad x = \pm\sqrt{b^2 - a^2}.$$

Faisons tourner C' autour de Oy : il engendre une sphère, dont l'intersection avec S détermine une *trajectoire orthogonale des premières lignes de courbure* (**), c'est-à-dire une ligne de courbure appartenant au second système. Celui-ci est donc composé de courbes sphériques (***).

VI. *Remarque.* — L'équation (4), étant écrite ainsi :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - bx + c^2)^2 = b^2(x^2 + z^2), \qquad (8)$$

a une grande analogie avec celle de la *Cyclide de Dupin :*

$$(x^2 + y^2 + z^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 = 4(\alpha x + \beta\gamma)^2 + 4(\gamma^2 - \alpha^2)z^2 \ (^{\text{IV}}). \qquad (9)$$

(*) *Note sur la projection stéréographique* (JOURNAL DE LIOUVILLE, t. XIX, p. 153).

(**) Voir, dans les *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces*, le paragraphe VI, relatif aux *surfaces d'enroulement*.

(***) Propriété connue.

(IV) Voir la *Note* LXXXVI (t. I, p. 372). Pour éviter toute confusion, nous avons fait un changement de lettres.

Mais la surface S n'est pas la Cyclide (*). Pour le faire voir, changeons x en $x + a$, dans l'équation (8), et posons

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

En développant, on trouve les deux transformées :

$$\left.\begin{aligned} &u^4 + 4a(a-b)x^2 + (a^2+c^2)^2 - a^2b^2 + 2(2a-b)u^2x + 2(a^2+c^2)u^2 \\ &\quad + 2\left[(2a-b)(a^2+c^2) - ab^2\right]x - b^2z^2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (8')$$

$$\left.\begin{aligned} &u^4 - 4\gamma^2x^2 + (\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 + 2(\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)u^2 \\ &\quad - 8\alpha\beta\gamma x - 4(\gamma^2 - \alpha^2)z^2 = 0; \end{aligned}\right\} \quad (9')$$

puis, en identifiant :

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0, \quad a = 0, \quad b = 0, \quad c^2 = -\beta^2.$$

Pour ces valeurs, chacune des équations (8), (9) représente deux sphères égales, confondues.

CXX. — Sur les lignes de courbure (**).

(*Novembre* 1885.)

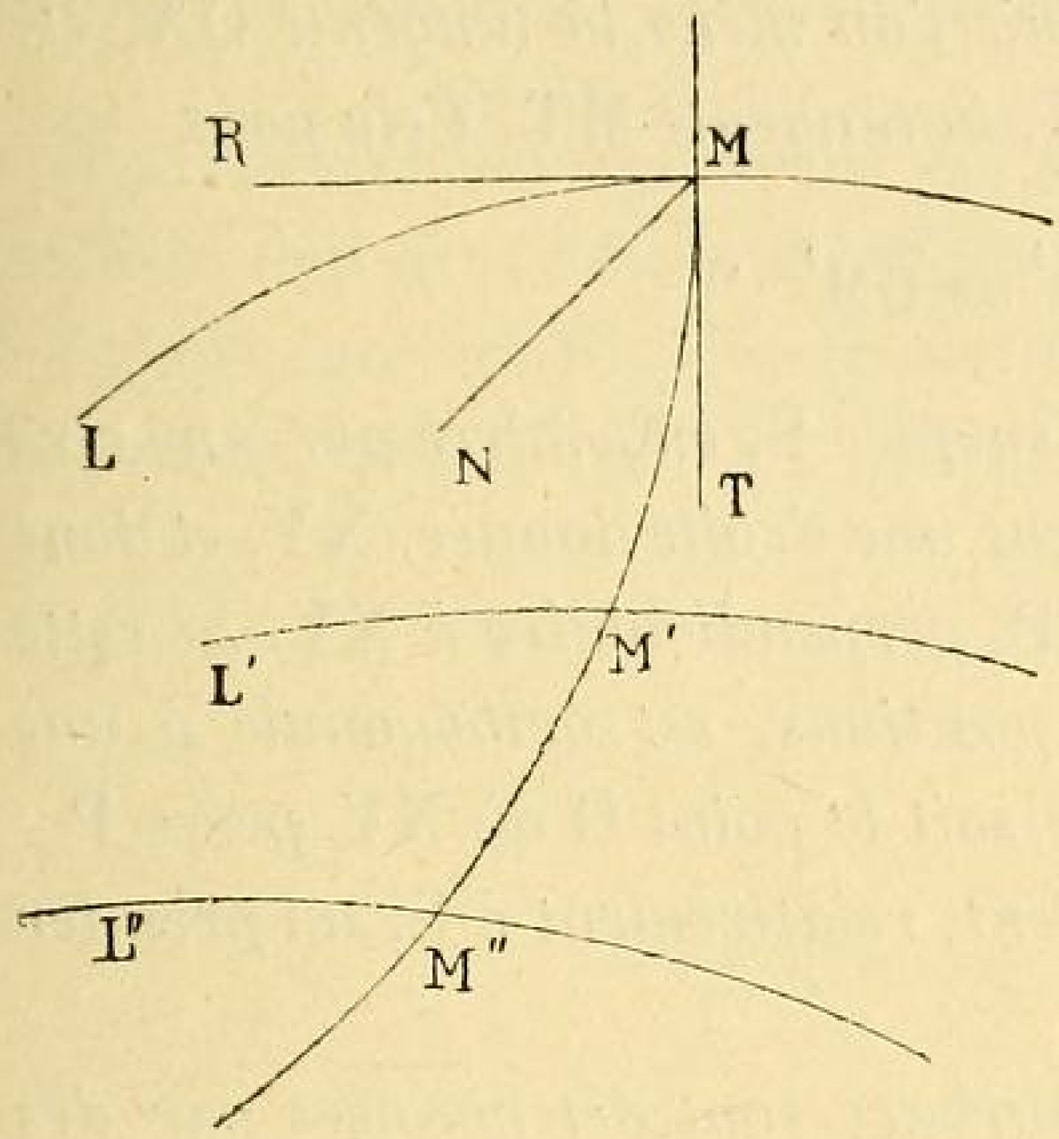
I. Lemme I. — *Si les lignes de courbure d'une surface* S, *appartenant à un même système, sont orthogonales à une surface* Σ, *l'intersection de* S *et de* Σ *est une ligne de courbure de* S.

Soient L, L′, L″ ... les premières lignes de courbure. Soit MM′M″ ... l'intersection des deux surfaces. Menons MR tangente à L, MT tangente à MM′M″ ... D'après l'hypothèse, MR est normale à Σ. Conséquemment, la droite MT, située dans

(*) Cette proposition résulte, déjà, de l'équation (6), laquelle ne représente pas deux circonférences.

(**) Note complétive de la précédente.

le plan tangent à Σ, est perpendiculaire à MR. Donc MM'M'' ... *est une trajectoire orthogonale de* L, L', L'' ... ou une *ligne de courbure appartenant au second système* (*).



II. *Remarques.* — 1° Le plan RMT est tangent à S; donc la normale MN à cette surface est perpendiculaire à RM : *les deux surfaces sont orthogonales en tous les points de* MM'M''... Et comme *cette courbe* est une ligne de courbure de S, elle *est* aussi *une ligne de courbure de* Σ, conformément à un théorème connu.

2° Si les lignes L, L', L'', ... sont planes, leurs plans enveloppent une développable Δ. Pour avoir des surfaces Σ, il suffit de considérer les *surfaces d'enroulement,* engendrées par L, L', L'', ... quand leurs plans roulent, sans glisser, sur Δ; puis les trajectoires orthogonales G, G', G'', ... de ces lignes, après qu'elles sont venues se placer dans un même plan P, puis les surfaces d'enroulement engendrées par G, G', G'' ... : ce sont les surfaces demandées (**).

3° On peut adopter, comme surfaces Σ, les *normalies* à S, passant par les secondes lignes de courbure.

III. Lemme II. — *Si une sphère* Σ *coupe, orthogonalement, un système de lignes* L, L', L'', ... *tracées sur une surface* S, *l'intersection est une ligne de courbure de* S.

En effet, l'intersection est une ligne de courbure de la sphère, et les deux surfaces sont orthogonales en tous les points de cette ligne. (Lemme I.)

(*) Cette démonstration sera, peut-être, jugée inutile; mais je crois qu'on ne saurait être trop clair.

(**) *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces,* p. 15.

IV. Lemme III. — *Étant donnés un cercle* C *et une droite* XY, *on projette le centre* C *en* O; *puis l'on mène la tangente* OA, *et, d'un point quelconque* M *de* XY, *la tangente* MT. *Cela posé,*

$$\overline{MT}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 \ (^*).$$

V. Théorème I. — *Soit une surface* S, *engendrée par une circonférence* C, *dont le plan contient une droite donnée,* XY, *et dont le centre se meut dans un plan* P, *perpendiculaire à* XY. *Si cette circonférence, dans toutes ses positions, est orthogonale à une sphère donnée,* Σ, *dont le centre soit le point* O *où* XY *perce* P :

1° *Les circonférences* C *forment, relativement à* S, *un premier système de lignes de courbure;*

2° *Les secondes lignes de courbure sont déterminées par des sphères ayant leurs centres sur* XY (**).

Démonstration. — 1° Représentons par R le rayon de la sphère Σ, par ρ le rayon (variable) de la circonférence C. La condition d'*orthogonalité* est, évidemment,

$$\rho^2 = \overline{OC}^2 - R^2;$$

C désignant le centre de la circonférence génératrice (***). Si, comme on le suppose, cette condition est remplie, l'intersection de S et de Σ est une ligne de courbure de S. (Lemme II.)

2° Soit Σ' une sphère ayant son centre M sur XY, et dont le rayon R' soit donné par la formule

$$R'^2 = R^2 + \overline{OM}^2.$$

D'après la réciproque du Lemme III, *cette sphère* Σ', *dont le rayon ne varie qu'avec la position du centre, est orthogonale à toutes les circonférences* C.

3° Les intersections de S, par les sphères Σ, Σ'..., sont donc

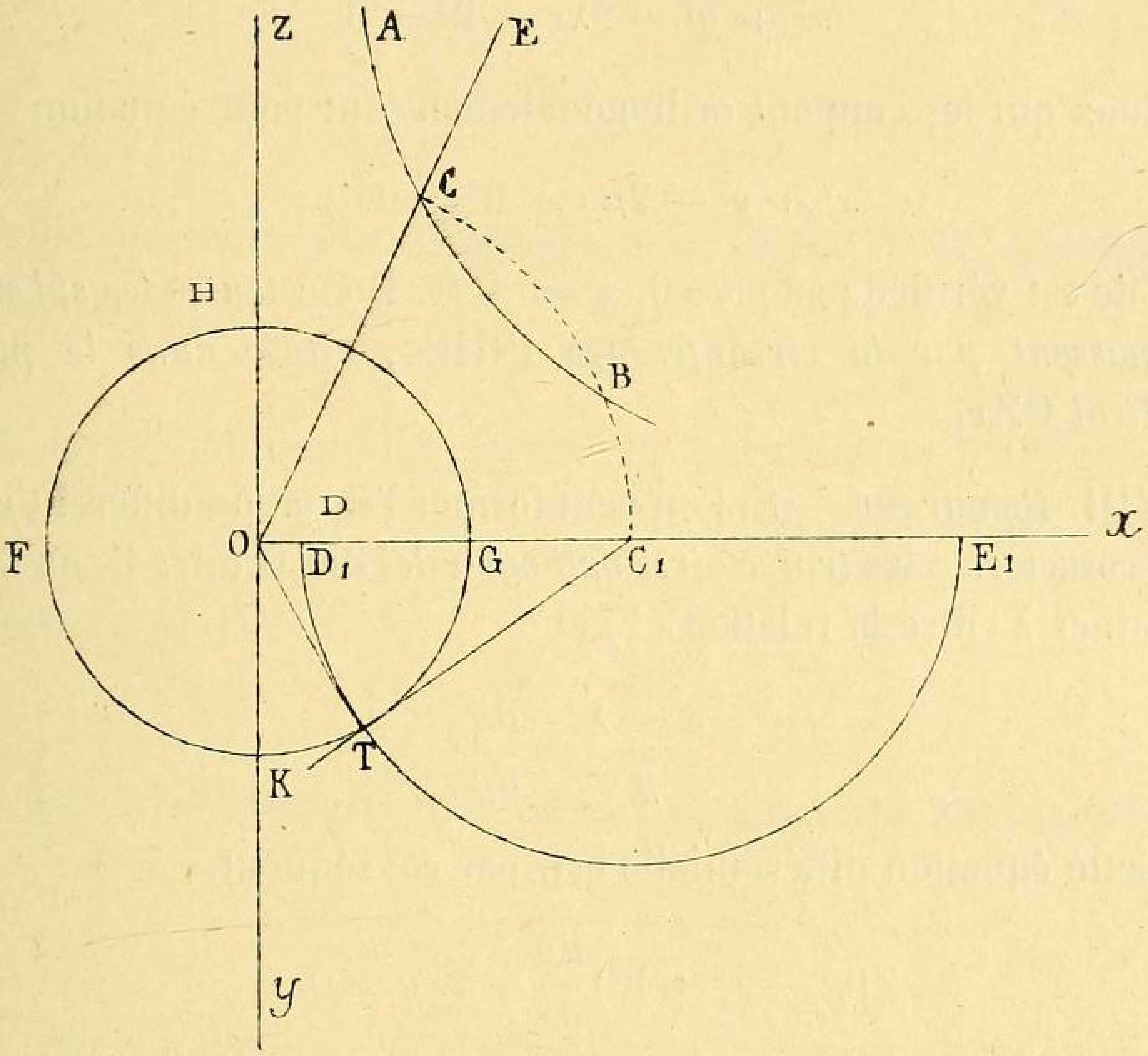
(*) Cette fois, nous supprimons la démonstration.

(**) Ce théorème renferme, comme cas particuliers, diverses propositions connues.

(***) Ainsi, le *lieu des centres est arbitraire.*

les *secondes lignes de courbure de* S; et, en conséquence, *les premières lignes de courbure sont les circonférences génératrices.*

VI. *Cercles orthogonaux.* — Soit, dans le plan *vertical* Zx, ACB le lieu des centres des lignes de courbure circulaires, dont les plans contiennent l'*horizontale* Oy (*). Soit FKGH la sphère donnée Σ, qui doit couper orthogonalement toutes ces lignes. Si



nous rabattons le centre C en C_1; que nous menions la tangente C_1T au grand cercle O; que, du point C_1 comme centre, avec C_1T pour rayon, nous décrivions la circonférence D_1E_1, cette ligne est le rabattement de la ligne de courbure circulaire, projetée en DC; etc.

Les rabattements des *cercles de courbure* sont donc les *cercles orthogonaux à* FHGK, *ayant leurs centres sur* Ox.

Les traces horizontales des sphères Σ', orthogonales à ces

(*) Dans cette petite épure, Ox est la *ligne de terre*.

lignes de courbure, sont, par ce qui précède, les cercles orthogonaux à C_1, et dont les centres sont situés sur Oy. Ces deux systèmes de cercles orthogonaux, situés sur le plan xy, déterminent donc, de la manière la plus simple, les deux systèmes de lignes de courbure.

VII. *Suite.* — Si l'on fait $OC_1 = OC = \lambda$, les cercles C_1 sont représentés par

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + R^2 = 0. \tag{1}$$

Ceux qui les coupent orthogonalement ont pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\mu y - R^2 = 0 \ (^*). \tag{2}$$

Elle est vérifiée par $y = 0$, $x = \pm R$. Donc *toutes les sphères* Σ' *passent par la circonférence* FGHK, *située dans le plan vertical* OZx.

VIII. *Remarque.* — Si l'on veut former l'équation différentielle qui caractérise les *trajectoires orthogonales* des cercles C, on doit éliminer λ entre la relation (1) et

$$\frac{x-\lambda}{y} = \frac{dx}{dy}.$$

Cette équation différentielle est, par conséquent,

$$(y^2 - x^2 + R^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0. \tag{3}$$

L'équation (2), des cercles orthogonaux, satisfait à celle-ci. De plus, elle contient une constante arbitraire. Ainsi, l'*équation* (2) *est l'intégrale générale de l'équation* (3) (**).

IX. *Une anallagmatique.* — La *section principale* de la surface S, ou le lieu des points D, E, est une *anallagmatique*.

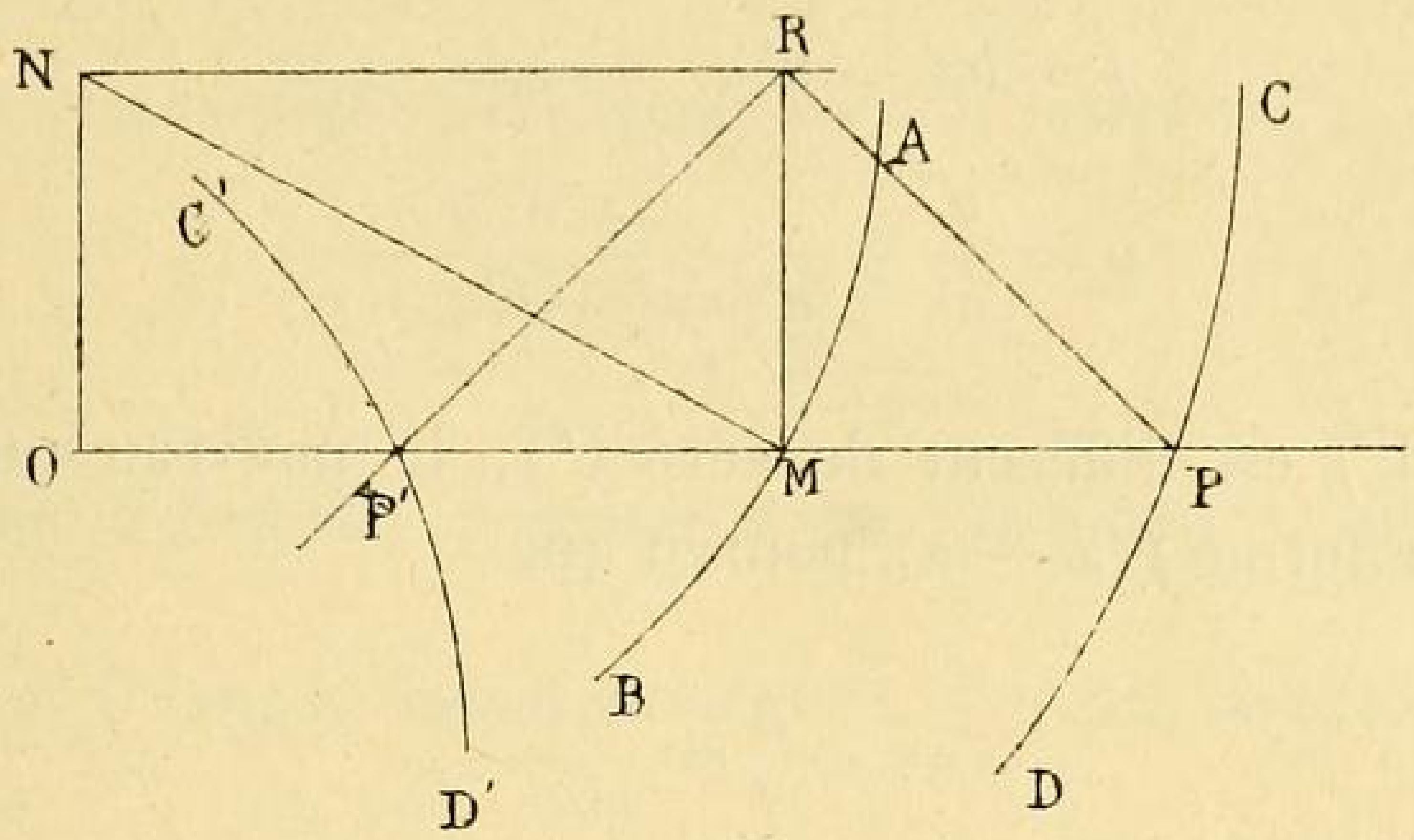
En effet,

$$OD \, . \, OE = \overline{OC}^2 - \overline{CD}^2 = R^2 = const.$$

(*) Page 109.

(**) Dans ma *Note sur la projection stéréographique*, j'ai omis cette Remarque.

Soit, en général, un pôle O, et une courbe AMB, plane ou à



double courbure; puis l'anallagmatique CPD, C'P'D', déterminée par la condition

$$\overline{MP}^2 = \overline{OM}^2 - k^2.$$

D'après une propriété connue, les normales en P, P' se coupent sur la perpendiculaire MR au rayon vecteur. On trouve aisément que, ON étant la *sous-normale polaire*, relative à la directrice AMB,

$$MR = ON.$$

CXXI (*). — **Maximum et minimum de la fonction**

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \text{ (**)}.$$

I. En supposant a' différent de zéro (***), on a

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{\left(b - \frac{ab'}{a'}\right)x + \left(c - \frac{ac'}{a'}\right)}{a'x^2 + b'x + c'};$$

(*) Publiée dans *Mathesis* (janvier 1882).

(**) Cette question, bien connue, a été traitée récemment dans divers recueils; mais avec des développements et des complications que le sujet ne comporte guère.

(***) Lorsque a' est nul, on applique la discussion suivante à la fonction

$$\frac{1}{y} = \frac{b'x + c'}{ax^2 + bx + c}.$$

puis, si l'on fait, pour abréger,

$$f = ba' - ab', \quad g = ca' - ac' : \tag{1}$$

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{fx + g}{a'(a'x^2 + b'x + c')}. \tag{2}$$

II. Si f est différent de zéro (*), le nouveau numérateur prend la forme $f(x - \alpha)$, pourvu que

$$\alpha = -\frac{g}{f} = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}. \tag{3}$$

Soient alors :

$$y = \frac{a}{a'} + \mathrm{Y}, \quad x = \alpha + \mathrm{X}. \tag{4}$$

Au moyen de ces abréviations, l'égalité (2) devient

$$\frac{a'}{f}\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{X}}{a'(\mathrm{X} + \alpha)^2 + b'(\mathrm{X} + \alpha) + c'},$$

ou

$$\frac{a'}{f}\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{AX}^2 + \mathrm{BX} + \mathrm{C}},$$

ou encore

$$\frac{f}{a'}\frac{1}{\mathrm{Y}} = \mathrm{AX} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{X}} + \mathrm{B}. \tag{5}$$

III. Il est visible que les maximums ou les minimums de y répondent à ceux de Y, puis à ceux de $\frac{1}{\mathrm{Y}}$; etc. (**). Le problème se réduit donc à la *détermination du maximum et du minimum de*

$$\mathrm{S} = \mathrm{AX} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{X}}. \tag{6}$$

(*) Dans le cas contraire, le problème se ramène à la discussion de

$$\frac{g}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

(**) Pour ne pas confondre un maximum avec un minimum, on pourrait désigner ces deux quantités, à la fois, sous le nom de *valeurs-limites*.

Le produit des deux parties de S est égal à AC. Donc :

1° *Si* A *et* C *sont de même signe, on doit prendre* (*)

$$X = \pm\sqrt{\frac{C}{A}}; \qquad (7)$$

en sorte que la fraction proposée a un maximum et un minimum (**);

2° *Si* A *et* C *sont de signes contraires,* y *n'a ni maximum ni minimum.*

IV. Dans les formules (5), (6) :

$$A = a', \quad C = a'(ac' - ca')^2 + b'(ac' - ca')(ba' - ab') + c'(ba' - ab')^2$$
$$= a'c\left[a'^2c + b'(ab' - ba')\right] + a'c'\left[a^2c' - b(ab' - ba')\right] - 2aa'^2cc'.$$

Donc la relation $\frac{C}{A} > 0$ devient

$$c^2a'^2 + c'^2a^2 - 2aa'cc' + (ab' - ba')(cb' - bc') > 0,$$

ou

$$(ac' - ca')^2 > (ab' - ba')(bc' - cb'). \qquad (8)$$

Ainsi, *quand la condition* (8) *est remplie, la fraction* y *a un maximum et un minimum.*

V. *Remarques.* — 1° On ne peut pas supposer

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb');$$

car alors, d'après une propriété connue, les équations

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

auraient une racine commune; et la fraction donnée serait *réductible.*

(*) *Si deux facteurs positifs forment un produit constant, leur somme est la plus petite possible quand ils sont égaux.*

(**) Il y a un cas exceptionnel, sur lequel nous allons revenir.

2° Si, dans la formule (7), $C = \frac{B^2}{4A}$, on trouve

$$X = \pm \frac{B}{2A}.$$

De ces deux valeurs, la seconde annule $AX^2 + BX + \frac{B^2}{4A}$; et, par conséquent, rend infini Y (II) : elle ne correspond donc ni à un maximum ni à un minimum (*). Dans ce cas, la formule (7) doit être remplacée par

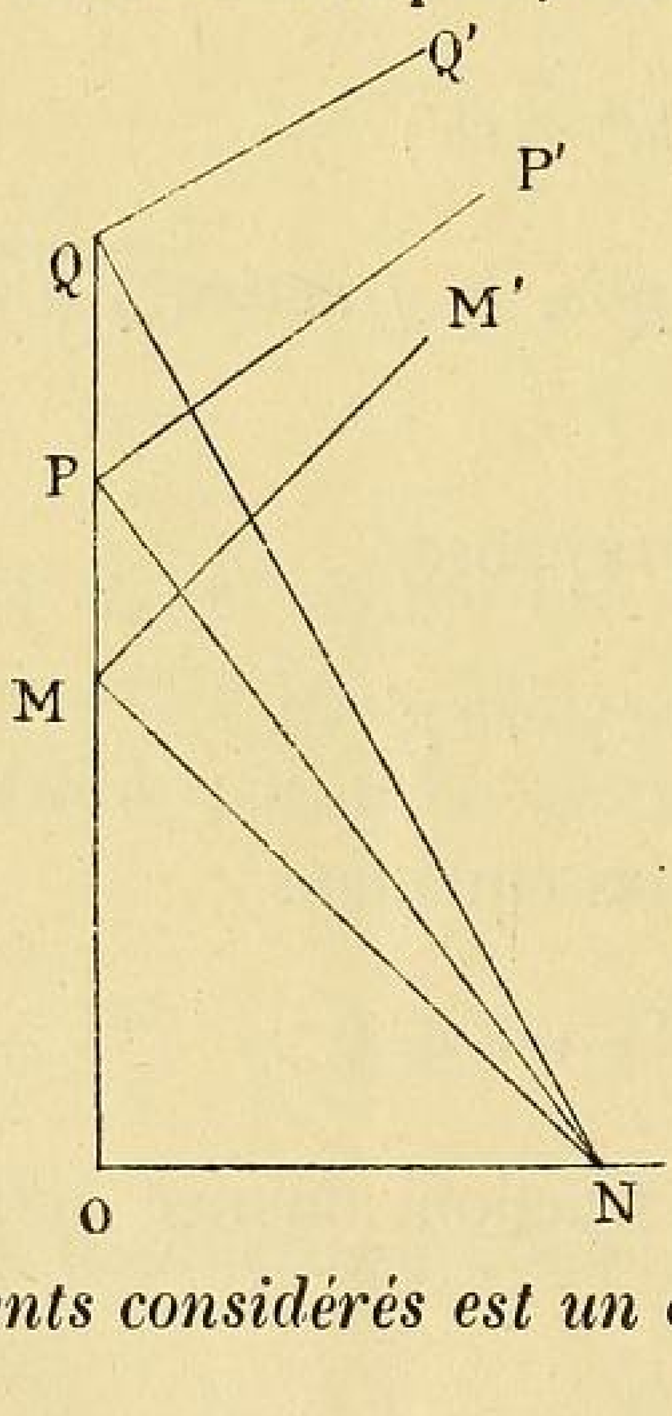
$$X = \frac{B}{2A}: \tag{7'}$$

la fraction donnée, dont le dénominateur est un carré, a un maximum ou un minimum.

CXXII. — Une propriété des surfaces conchoïdales (**).

(*Février* 1872.)

I. O étant le pôle, soit OMPQ ... un rayon vecteur quelconque, rencontrant, en M, P, Q, ... des surfaces conchoïdales, déduites d'une surface directrice donnée. D'après un théorème connu (***), *les normales en* M, P, Q, ... *percent, en un même point* N, *le plan mené par le pôle, perpendiculairement au rayon vecteur.*



Soient, sur le *plan des normales*, MM', PP', QQ', ... les traces des plans tangents. On sait que l'enveloppe de ces droites est une parabole ayant O pour sommet et N pour foyer. Donc *l'enveloppe des plans tangents considérés est un cylindre parabolique.*

(*) Exception indiquée précédemment.

(**) Omise dans le paragraphe IX des *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces.*

(***) *Loc. cit.*, p. 25.

II. *Remarques.* — 1° *A chaque rayon vecteur correspond un cylindre parabolique ;*

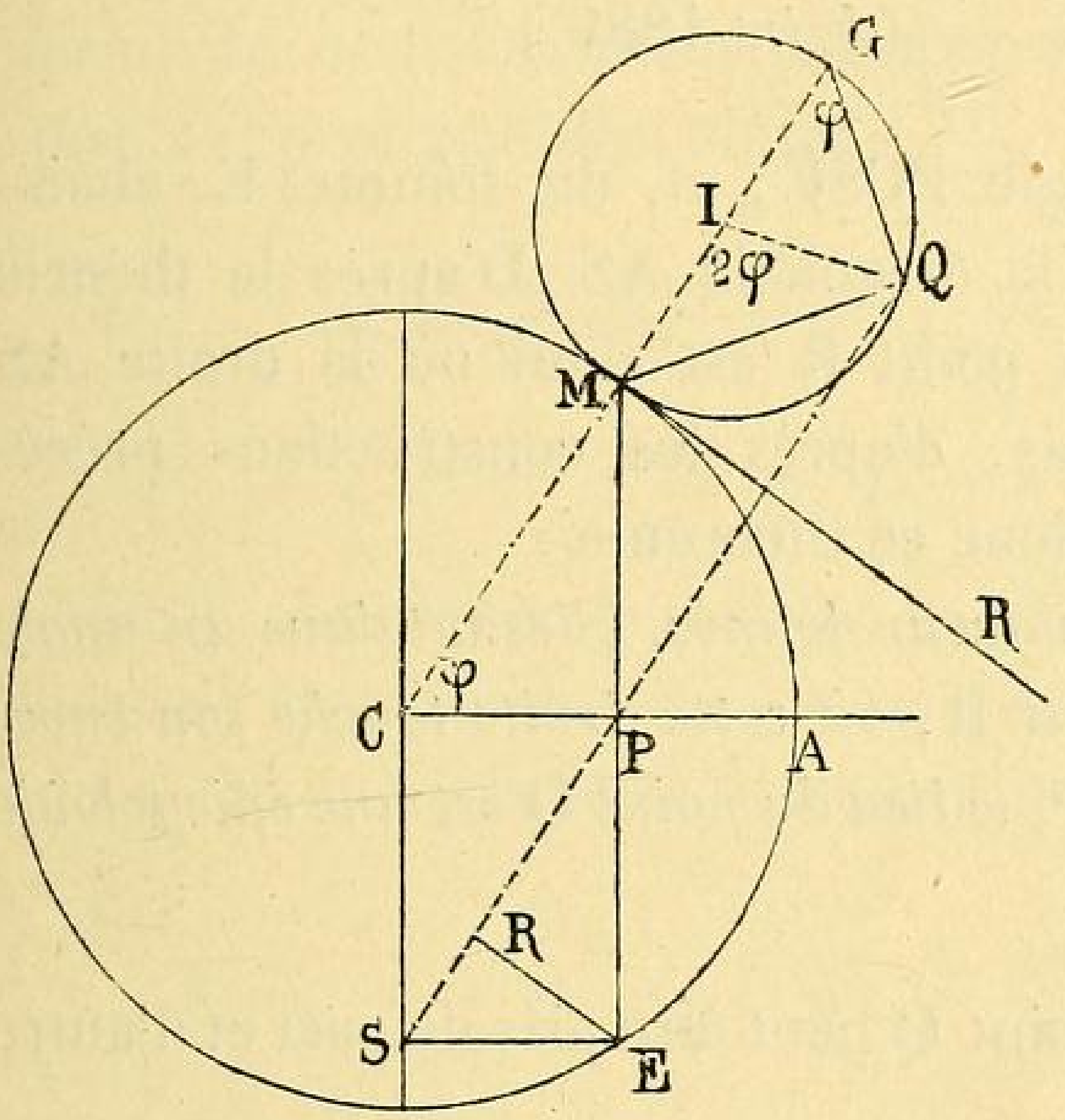
2° *Le rayon vecteur est la podaire du cylindre, relativement au point* N ;

3° *L'antipodaire d'un cylindre parabolique, par rapport au foyer d'une section droite, est la génératrice située dans le plan principal.*

CXXIII. — Relation entre deux épicycloïdes.

(*Janvier* 1872.)

I. Soit la circonférence I, roulant sur la circonférence C, double de la première. Le point Q, d'abord situé en A, décrit une *épicycloïde à deux rebroussements.*



MG étant le diamètre de I, passant au point de contact M, menons l'ordonnée MP, la tangente commune MR, les cordes MQ, GQ.

Il est visible (et connu) que

$$\textit{angle}\ \mathrm{MGQ} = \frac{1}{2}\,\textit{angle}\ \mathrm{MIQ} = \textit{angle}\ \mathrm{MCP} = \varphi.$$

Donc les triangles rectangles CPM, GMQ sont égaux; et MP = MQ.

D'après un théorème connu (*), MQ est normale à l'épicycloïde.

Ainsi, *la circonférence* M, *décrite du point* M *comme centre, avec* MP *pour rayon, touche, au point* Q, *l'épicycloïde.* Par con-

(*) Attribué à Descartes.

séquent, *cette courbe est l'enveloppe de la circonférence* M, *variable de grandeur et de position.*

II. La tangente MR est bissectrice de l'angle PMQ. Et comme MP = MQ, la droite PQ est perpendiculaire à MR, c'est-à-dire parallèle à CMG.

Prolongeons cette droite PQ jusqu'à sa rencontre, en S, avec le diamètre perpendiculaire à CA; nous aurons PS = CM = a.

Ainsi :

Pendant que la circonférence M *enveloppe l'épicycloïde à deux rebroussements, la corde* PQ *enveloppe l'hypocycloïde, à quatre rebroussements,* déterminée par une circonférence roulant à l'intérieur de la circonférence C.

Addition. — (*Juin* 1886.)

III. Achevons le rectangle PCSE; et, du sommet E, abaissons ER perpendiculaire à la diagonale AS. D'après la théorie des *centres instantanés,* le point R est celui où la droite AS touche l'hypocycloïde. Mais, d'après les constructions précédentes, PQ = 2PR. On a donc ce théorème :

Soit une droite PS, *de longueur donnée, glissant dans un angle droit. Si, à partir du point* R, *où cette droite touche son enveloppe, on prend* RQ = 3RP, *le lieu du point* Q *est une épicycloïde à deux rebroussements* (*).

IV. *Remarque.* — Le point Q peut être pris de part et d'autre du point R.

(*) Si l'on conserve les notations précédentes, on trouve que les coordonnées du point Q sont

$$x = \frac{a}{2}(3\cos\varphi - \cos 3\varphi), \quad y = \frac{a}{2}(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi);$$

équations qui sont bien celles de l'épicycloïde.

CXXIV. — Séries et intégrales elliptiques (*).

1. *Un développement de la fonction $f(q)$.*

Soit, comme aux pages 73 à 75 du Mémoire cité :

$$f(q)=\frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi}-1\right)=\frac{q}{1-q}-\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}-\cdots=\sum_1^\infty \varepsilon_n q^n. \quad (1)$$

Dans la série

$$\frac{q}{1-q}-\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}-\cdots,$$

chaque terme positif peut être représenté par $\frac{q^a}{1-q^a}$, a ayant la forme $4\mu+1$. De même, chaque terme négatif, pris en valeur absolue, peut être désigné par $\frac{q^b}{1-q^b}$, b ayant la forme $4\mu-1$.

1° $$\frac{q^a}{1-q^a}=q^a+q^{2a}+q^{3a}+q^{4a}+q^{5a}+q^{6a}+q^{7a}+\cdots$$
$$=q^a+q^{2a}+(q^{3a}+q^{7a}+q^{11a}+q^{15a}+\cdots)+\mathrm{S}:$$

S est (abstraction faite de q^a+q^{2a}) l'ensemble des termes dans lesquels *les exposants de* q *n'ont pas la forme* $4\mu-1$.

La somme de la série entre parenthèses est $\frac{q^{3a}}{1-q^{4a}}$. Donc

$$\mathrm{S}=\frac{q^a}{1-q^a}-q^a(1+q^a)-\frac{q^{3a}}{1-q^{4a}}=\frac{q^{4a}+q^{5a}+q^{6a}}{1-q^{4a}}. \quad (2)$$

2° Semblablement,

$$\frac{q^b}{1-q^b}=(q^b+q^{5b}+q^{9b}+q^{13b}+\cdots)+\mathrm{S}';$$

puis

$$\mathrm{S}'=\frac{q^{2b}+q^{3b}+q^{4b}}{1-q^{4b}}. \quad (3)$$

(*) Cette Note est un complément aux *Recherches sur quelques produits indéfinis.*

Si l'on fait $a = 1, 5, 9, 13, \ldots$ $b = 3, 7, 11, 15, \ldots$ on trouve

$$f(q) = q + q^2 + q^5 + q^{10} + q^9 + q^{18} + q^{13} + q^{26} + \cdots$$
$$+ \frac{q^4 + q^5 + q^6}{1 - q^4} - \frac{q^6 + q^9 + q^{12}}{1 - q^{12}} + \frac{q^{20} + q^{25} + q^{30}}{1 - q^{20}} - \frac{q^{14} + q^{21} + q^{28}}{1 - q^{28}}$$
$$+ \frac{q^{36} + q^{45} + q^{54}}{1 - q^{36}} - \frac{q^{22} + q^{33} + q^{44}}{1 - q^{44}} + \cdots;$$

ou, plus simplement :

$$\left.\begin{aligned} f(q) = \frac{q}{1-q^4} + \frac{q^2}{1-q^8} + \frac{q^4+q^5+q^6}{1 - q^4} - \frac{q^6+q^9+q^{12}}{1 - q^{12}} + \frac{q^{20}+q^{25}+q^{30}}{1 - q^{20}} \\ - \frac{q^{14} + q^{21} + q^{28}}{1 - q^{28}} + \frac{q^{36} + q^{45} + q^{54}}{1 - q^{36}} - \cdots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Tel est le développement, très convergent, de la quantité

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi} - 1\right).$$

II. *Remarque.* — Une considération bien simple permet d'abréger le calcul précédent. Revenons à la double égalité

$$f(q) = \frac{q}{1 - q} - \frac{q^3}{1 - q^3} + \frac{q^5}{1 - q^5} - \cdots = \sum_1^\infty \varepsilon_n q^n. \qquad (1)$$

Si $q = 4\mu - 1$, $\varepsilon_n = 0$ (*). Il est donc inutile de conserver, dans les développements des diverses fractions, les termes ayant la forme $q^{4\mu-1}$. Cette *suppression faite,* on a

$$\frac{q}{1 - q} = q + q^2 + (q^4 + q^5 + q^6) + (q^8 + q^9 + q^{10}) + (q^{12} + q^{13} + q^{14}) + \cdots,$$

$$\frac{q^3}{1 - q^3} = (q^6 + q^9 + q^{12}) + (q^{18} + q^{21} + q^{24}) + (q^{30} + q^{33} + q^{36}) + \cdots,$$

$$\frac{q^5}{1 - q^5} = q^5 + q^{10} + (q^{20} + q^{25} + q^{30}) + (q^{40} + q^{45} + q^{50}) + \cdots,$$

(*) *Recherches...*, p. 74.

$$\frac{q^7}{1-q^7} = (q^{14}+q^{21}+q^{28})+(q^{42}+q^{49}+q^{56})+(q^{70}+q^{77}+q^{84})+\cdots,$$

$$\frac{q^9}{1-q^9} = q^9+q^{18}+(q^{36}+q^{45}+q^{54})+(q^{72}+q^{81}+q^{90})+\cdots,$$

. . . .

ou

$$\frac{q}{1-q} = q+q^2+\frac{q^4+q^5+q^6}{1-q^4}, \quad \frac{q^3}{1-q^3} = \frac{q^6+q^9+q^{12}}{1-q^{12}},$$

$$\frac{q^5}{1-q^5} = q^5+q^{10}+\frac{q^{20}+q^{25}+q^{30}}{1-q^{20}}, \ldots;$$

. . . .

puis, au moyen d'une réduction évidente,

$$f(q) = \frac{q}{1-q^4}+\frac{q^2}{1-q^8}+\frac{q^4+q^5+q^4}{1-q^4}-\frac{q^6+q^9+q^{12}}{1-q^{12}}$$
$$+\frac{q^{20}+q^{25}+q^{30}}{1-q^{20}}-\frac{q^{14}+q^{21}+q^{28}}{1-q^{28}}+\cdots;$$

comme ci-dessus.

III. *Remarque.* — Soit

$$\sum = \frac{q^4+q^5+q^6}{1-q^4}-\frac{q^6+q^9+q^{12}}{1-q^{12}}+\frac{q^{20}+q^{25}+q^{30}}{1-q^{20}}-\frac{q^{14}+q^{21}+q^{28}}{1-q^{28}}+\cdots$$

A cause de

$$f(q) = \frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi}-1\right):$$

$$\sum = \frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi}-1\right)-\frac{q}{1-q^4}-\frac{q^2}{1-q^8}. \tag{5}$$

IV. *Sommation par intégrale définie.* — On sait que

$$\frac{2\omega}{\pi} = 1+4\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}} \text{ (*)}, \tag{6}$$

(*) *Fundamenta nova*, p. 103.

et que

$$\frac{1-q^n}{1+q^n} = -4\int_0^\infty \frac{\sin n(\alpha\,\ell\,.\,q)}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}}\,d\alpha\ (^*);$$

ou, par le changement de q en q^2 :

$$-1+\frac{2}{1+q^{2n}} = -4\int_0^\infty \frac{\sin n(2\alpha\,\ell\,.\,q)}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}}\,d\alpha. \tag{7}$$

Cette dernière égalité donne

$$-\frac{q}{1-q}+2\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}} = -4\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}}\sum_1^\infty q^n \sin n(2\alpha\,\ell\,.\,q). \tag{8}$$

On a aussi

$$\sum_1^\infty q^n \sin n(2\alpha\,\ell\,.\,q) = \frac{q\sin(2\alpha\,\ell\,.\,q)}{1-2q\cos(2\alpha\,\ell\,.\,q)+q^2}\ (^{**}).$$

Par conséquent,

$$-\frac{q}{1-q}+2\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}} = -4q\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}}\,\frac{\sin(2\alpha\,\ell\,.\,q)}{1-2q\cos(2\alpha\,\ell\,.\,q)+q^2};$$

puis, au lieu de la formule (6) :

$$\frac{2\omega}{\pi} = \frac{1+q}{1-q} - 8q\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}}\,\frac{\sin(2\alpha\,\ell\,.\,q)}{1-2q\cos(2\alpha\,\ell\,.\,q)+q^2}. \tag{9}$$

Ce développement de la fonction $\frac{2\omega}{\pi}$ est un peu plus simple que celui qui se trouve à la page 125 des *Recherches ;* savoir :

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\omega}{\pi} &= 1+2\frac{q}{1+q^2}-4\frac{\operatorname{arc\,tg} q}{\ell\,.\,q} \\ -8q(1-q^2)&\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}\,\frac{\sin(\alpha\,\ell\,.\,q)}{1+2q^2\cos(2\alpha\,\ell\,.\,q)+q^4}\ (^{***}). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(*) *Recherches...*, p. 123.

(**) *Ibid.*, p. 121.

(***) A la page 124 du Mémoire, le premier membre de l'égalité (432) doit être lu ainsi :

$$\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots+\frac{q^n}{1-q^{2n}}+\cdots$$

V. *Identités remarquables.* — Les formules connues :

$$q^{\frac{1}{2}}(1+q+q^3+q^6+\cdots)^4=\frac{k\omega^2}{\pi^2}\ (^*),$$

$$\frac{q}{1-q^2}+2^3\frac{q^2}{1-q^4}+3^3\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots=\frac{k^2\omega^4}{\pi^4}\ (^{**}),$$

donnent :

$$q(1+q+q^3+q^6+\cdots)^8=\frac{q}{1-q^2}+2^3\frac{q^2}{1-q^4}+3^3\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots, \tag{11}$$

$$q(1-q-q^3+q^6+\cdots)^8=\frac{q}{1-q^2}-2^3\frac{q^2}{1-q^4}+3^3\frac{q^3}{1-q^6}-\cdots \tag{12}$$

On conclut, de ces deux égalités :

$$\left.\begin{array}{l} q\left[(1+q+q^3+q^6+\cdots)^8+(1-q-q^3+q^6+\cdots)^8\right] \\ =2\left[\dfrac{q}{1-q^2}+3^3\dfrac{q^3}{1-q^6}+5^3\dfrac{q^5}{1-q^{10}}+\cdots\right](^{***}). \end{array}\right\} \tag{13}$$

A cause de :

$$q(1+q+q^3+q^6+\cdots)^8=\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 k^2,$$

$$q(1-q-q^3+q^6+\cdots)^8=\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 k^2k'^2\ (^{\text{IV}}),$$

(*) *Recherches...*, p. 2.

(**) *Fundamenta...*, p. 111.

(***) En passant, rappelons que :

$$(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots)^8=\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^4\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{4}\right)^8,$$

$$(q-q^9-q^{25}+q^{49}+\cdots)^8=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)^4(1+\sqrt{k'})^2\sqrt{1+k'}\sqrt[4]{k'}\left[\sqrt{1+k'}-\sqrt{2\sqrt{k'}}\right]^2.$$

(*Recherches...*, p. 102.)

(IV) *Recherches...*, p. 2.

le premier membre a pour valeur

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 k^2(2-k^2)=\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4\frac{k^2}{2}\left[(1+k')^2+(1-k')^2\right]$$

$$=2\left(\frac{\omega k}{2\pi}\right)^2\left[\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2(1+k')^2+\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2(1-k')^2\right].$$

Or :

$$\left(\frac{\omega k}{2\pi}\right)^2=q(1+q^2+q^6+\cdots)^4,$$

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2(1+k')^2=(1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots)^4,$$

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2(1-k')^2=16q^2(1+q^4+q^{12}+q^{24}+\cdots)^4\ (^*).$$

Donc l'égalité (13) devient

$$\left.\begin{aligned}&q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4\\ &\times\left[(1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots)^4+16q^2(1+q^4+q^{12}+q^{24}\right]\\ &=\frac{q}{1-q^2}+3^3\frac{q^3}{1-q^6}+5^3\frac{q^5}{1-q^{10}}+\cdots\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

On sait que :

1° $q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4=\dfrac{q}{1-q^2}+3\dfrac{q^3}{1-q^6}+5\dfrac{q^5}{1-q^{10}}+\cdots;$

2° $(1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots)^4=1+8\left[\dfrac{q^2}{1-q^2}+2\dfrac{q^4}{1+q^4}+3\dfrac{q^6}{1-q^6}+\cdots\right];$

3° $16q^2(1+q^2+q^4+q^{12}+\cdots)^4=16\left[\dfrac{q^2}{1-q^4}+3\dfrac{q^6}{1-q^{12}}+5\dfrac{q^{10}}{1-q^{20}}+\cdots(^{**})\right].$

Donc le premier membre de la relation (14) peut être remplacé par

$$A[1+8B+16C],$$

en supposant

$$A=\frac{q}{1-q^2}+3\frac{q^3}{1-q^6}+5\frac{q^5}{1-q^{10}}+\cdots,$$

(*) *Recherches...*, pp. 2 et 3.

(**) LEGENDRE, pp. 133 et 134.

$$B = \frac{q^2}{1-q^2} + 2\frac{q^4}{1+q^4} + 3\frac{q^6}{1-q^6} + 4\frac{q^8}{1+q^8} + \cdots,$$

$$C = \frac{q^2}{1-q^4} + 3\frac{q^6}{1-q^{12}} + 5\frac{q^{10}}{1-q^{20}} + 7\frac{q^{14}}{1-q^{28}} + \cdots$$

Par suite,

$$8A(B+2C) = (3^3-3)\frac{q^3}{1-q^6} + (5^3-5)\frac{q^5}{1-q^{10}} + (7^3-7)\frac{q^7}{1-q^{14}} + \cdots \quad (15)$$

Il reste à développer, suivant les puissances de q, chacun des deux membres.

Or, il est connu que (*) :

$$A = \sum_1^\infty q^i \int i, \quad B = \sum_1^\infty (q^{2i} + 3q^{4i} + 3q^{8i} + 3q^{16i} + \cdots) \int i,$$

$$C = \sum_1^\infty q^{2i} \int i;$$

donc

$$B + 2C = 3\sum_1^\infty (q^{2i} + q^{4i} + q^{8i} + q^{16i} + \cdots) \int i;$$

ou, plus simplement,

$$B + 2C = 3\sum_1^\infty q^p \int i' \text{ (**)}.$$

Ainsi, au lieu de l'égalité (15), nous avons :

$$\left.\begin{aligned} &24\left(\sum_1^\infty q^i \int i\right)\cdot\left(\sum_1^\infty q^p \int i'\right) \\ &= (3^3-3)\frac{q^3}{1-q^6} + (5^3-5)\frac{q^5}{1-q^{10}} + (7^3-7)\frac{q^7}{1-q^{14}} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Et comme le second membre a pour développement

$$\sum_1^\infty q^n\left[\zeta_3(n) - \zeta_1(n)\right] \text{ (***)},$$

(*) *Recherches...*, p. 79.

(**) Dans cette nouvelle formule, p est supposé *pair*, et i' représente *le plus grand diviseur impair de* p (*Recherches...*, pp. 113 et suiv.).

(***) *Recherches...*, p. 117.

l'équation *finale* cherchée est

$$24\left(\sum_1^\infty q^i \int i\right)\cdot\left(\sum_1^\infty q^{i'} \int i'\right)=\sum_1^\infty q^n\left[\zeta_3(n)-\zeta_1(n)\right], \quad (17)$$

n étant *impair*.

En outre, la relation (15) peut être écrite ainsi :

$$\frac{1}{2}q\left[(1+q+q^3+q^6+\cdots)^8+(1-q-q^3+q^6+\cdots)^8\right]=\sum_1^\infty q^n\zeta_3(n); \quad (18)$$

ou, par le changement de q en q^8 :

$$\frac{1}{2}\left[(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots)^8+(q-q^9-q^{25}+q^{49}+\cdots)^8\right]=\sum_1^\infty q^{8n}\zeta_3(n), \quad (19)$$

n étant *impair*.

VI. *Théorèmes d'Arithmétique* (*) :

1° *Tout multiple de* 8 *est la somme de huit carrés impairs* (**);

2° *Si l'on fait* $n = di$, *le nombre des solutions de l'équation*

$$i_1^2+i_2^2+\cdots+i_8^2=8n$$

est égal à la somme des cubes des diviseurs d (***);

3° *Soit* $n = 2^x i + i'$, i *et* i' *étant impairs. Soient* $\xi_1(n) = \int n$, $\xi_3(n)$ *la somme des cubes des diviseurs de* n. *On a*

$$\sum_1^\infty\left[\zeta_1(i)\,.\,\zeta_1(i')\right]=\frac{\zeta_3(n)-\zeta_1(n)}{24} \text{ (iv)};$$

4° L'*identité*

$$\frac{q}{1+q}+2\frac{q^2}{1+q^2}+3\frac{q^3}{1+q^3}+\cdots=\frac{q}{1-q}+3\frac{q^3}{1-q^3}+5\frac{q^5}{1-q^5}+\cdots \text{ (v)} \quad (20)$$

(*) Démontrés dans les *Recherches...*, pp. 100 et 117.
(**) Résulte de l'identité (11).
(***) Même identité (11).
(iv) Identité (17).
(v) *Recherches...*, p. 79.

entraîne celle-ci :

$$\sum \frac{n}{i} - \sum \frac{n}{p} = \int i, \tag{21}$$

dans laquelle i est un diviseur *impair* de n, et p un diviseur *pair*. En conséquence :

La somme des diviseurs d'un nombre entier n, *qui donnent des quotients impairs, se compose de la somme des diviseurs impairs, augmentée de la somme des diviseurs qui donnent des quotients pairs ;*

proposition assez visible (*).

VII. *Remarques.* — 1° Si l'on développe, suivant les puissances de q, chacune des fractions composant le premier membre de l'égalité (20), on trouve que ce premier membre équivaut à

$$\frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} - \frac{q^4}{(1-q^4)^2} + \cdots$$

Par suite,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{q^2}{(1-q)^2} - \frac{2q^3-3q^6}{(1-q^3)^2} - \frac{4q^5-5q^{10}}{(1-q^5)^2} - \frac{6q^7-7q^{14}}{(1-q^7)^2} + \cdots \\ &= \frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{q^4}{(1-q^4)^2} + \frac{q^6}{(1-q^6)^2} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

2° Cette identité en donne une autre, assez remarquable. D'abord, on peut l'écrire sous la forme abrégée :

$$\frac{q^2}{(1-q)^2} = \sum_3^\infty \frac{(n-1)q^n - nq^{2n}}{(1-q^n)^2} + F(q^2),$$

n étant *impair*.

Changeant q en $-q$, et retranchant, on a donc

$$4\frac{q^3}{(1-q^2)^2} = \sum_3^\infty \left[\frac{(n-1)q^n - nq^{2n}}{(1-q^n)^2} + \frac{(n-1)q^n + nq^{2n}}{(1+q^n)^2}\right],$$

(*) Il n'en est pas de même du théorème 1°, implicitement contenu dans le *Traité* de Legendre (t. III, p. 133). La démonstration *directe*, si elle n'a pas été faite, est désirable.

ou

$$\frac{q^3}{(1-q^2)^2}=\sum_3^\infty \frac{\frac{n-1}{2}q^n-\frac{n+1}{2}q^{3n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

Si l'on fait $n=3+2n'$, et que l'on remplace q^2 par q, on trouve, finalement,

$$\sum_0^\infty \frac{(n'+1)q^{n'}-(n'+2)q^{3(n'+1)}}{(1-q^{3+2n'})^2}=\frac{1}{(1-q)^2}. \tag{23}$$

Ainsi, la série

$$\frac{1-2q^3}{(1-q^3)^2}+\frac{2q-3q^6}{(1-q^5)^2}+\frac{3q^2-4q^9}{(1-q^7)^2}+\frac{4q^3-5q^{12}}{(1-q^9)^2}+\cdots,$$

dont la génération est assez compliquée, a une limite fort simple.

En outre, le développement, suivant les puissances de q, est

$$1+2q+3q^2+4q^3+\cdots$$

3° Par la transposition des termes négatifs, on a encore :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{(1-q^3)^2}+\frac{2q}{(1-q^5)^2}+\frac{3q^2}{(1-q^7)^2}+\frac{4q^3}{(1-q^9)^2}+\cdots\\ =&\frac{1}{(1-q)^2}+\frac{2q^3}{(1-q^3)^2}+\frac{3q^6}{(1-q^5)^2}+\frac{4q^9}{(1-q^7)^2}+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

4° Cette égalité (24) présente une particularité curieuse. Si l'on développe les deux membres, suivant les puissances de q, les coefficients de q^n sont composés des *mêmes parties, disposées en ordres contraires*. Par exemple, dans le premier membre, le coefficient de q^{12} est $5+4.2+13$; et, dans le second. $13+2.4+5$. On vérifie cette propriété en s'appuyant sur celle-ci, laquelle est presque évidente :

Les valeurs entières et positives (ou nulles) *de* x, y, *qui satisfont à l'équation*

$$(2x+3)(2y+1)=2n+3,$$

satisfont à celle-ci :

$$\sum(x-y+1)=n+1.$$

VIII. *Autre développement.* — 1° Reprenons la formule

$$f(q) = \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \cdots \tag{1}$$

Il en résulte :

$$\frac{1}{2}[f(q) - f(-q)] = \frac{q}{1-q^4} + \frac{q^5}{1-q^4} - \frac{q^9}{1-q^{12}} + \frac{q^{25}}{1-q^{20}} - \frac{q^{21}}{1-q^{28}} + \cdots$$

Pour évaluer le premier membre, j'observe que l'on a, simultanément (*) :

$$f(q) = (q + q^4 + q^9 + \cdots)(1 + q + q^4 + q^9 + \cdots)$$

$$q - q^4 + q^9 - \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}}\right),$$

$$1 - q + q^4 - q^9 + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}}\right);$$

donc

$$f(-q) = \frac{1}{4}\left(-1 + \frac{2\omega k'}{\pi}\right);$$

puis

$$\frac{1}{2}[f(q) - f(-q)] = \frac{1}{4}\frac{\omega(1-k')}{\pi};$$

et, par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4}\frac{\omega(1-k')}{\pi} = \frac{q}{1-q^4} + \frac{q^5}{1-q^4} - \frac{q^9}{1-q^{12}} + \frac{q^{25}}{1-q^{20}} - \frac{q^{21}}{1-q^{28}} + \cdots \\ + \frac{q^{45}}{1-q^{36}} + \frac{q^{33}}{1-q^{44}} + \cdots (^{**}).\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

IX. *Remarque.* — Il est connu que

$$\frac{1}{4}\frac{\omega(1-k')}{\pi} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} + \cdots (^{***}).$$

(*) *Recherches...*, pp. 2 et 74.

(**) Les exposants 5, 25, 45, ...; 4, 20, 36, ...; 9, 21, 33, ...; 12, 28, 44, ...; forment quatre progressions.

(***) LEGENDRE, t. III, p. 132.

On a donc cette *identité* :

$$\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^3}{1-q^6}+\frac{q^5}{1-q^{10}}-\frac{q^7}{1-q^{14}}+\cdots=\frac{q}{1-q^4}+\frac{q^5}{1-q^4}-\frac{q^9}{1-q^{12}},$$

réductible à

$$\left.\begin{aligned}\frac{q^3}{1-q^4}&=\frac{q^5}{1-q^4}-\frac{q^5}{1-q^{10}}+\frac{q^3}{1-q^{12}}-\frac{q^9}{1-q^{18}}+\frac{q^{25}}{1-q^{20}}-\frac{q^{13}}{1-q^{26}}\\&+\frac{q^7}{1-q^{28}}-\frac{q^{17}}{1-q^{34}}+\frac{q^{45}}{1-q^{36}}-\cdots\ (^*).\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

X (**). *Sur une formule d'Eisenstein.* — On doit à ce profond Géomètre, mort beaucoup trop tôt, la relation suivante, qui donne une transformation de la *série de Lambert* :

$$\left.\begin{aligned}&E\left[\frac{z}{1-z}+\frac{z^2}{1-z^2}+\frac{z^3}{1-z^3}+\cdots\right]\\&=\frac{z}{1-z}-2\frac{z^3}{(1-z)(1-z^2)}+3\frac{z^6}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}\\&-4\frac{z^{10}}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)}+\cdots\ (^{***}).\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

Dans le premier membre, E représente la remarquable fonction d'Euler :

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)\cdots=1-z-z^2+z^5+z^7-z^{12}-\cdots$$

On peut écrire autrement le second membre. En général,

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)\ldots(1-z^p)}=\sum_{n=0}^{n=\infty}F(n,p)z^n: \qquad (28)$$

$F(n, p)$ est le *nombre des décompositions de* n, *en parties égales ou inégales, non supérieures à* p (IV). Donc

$$(-1)^{p-1}p\frac{z^{\frac{p(p+1)}{2}}}{(1-z)(1-z^2)\ldots(1-z^p)}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{p-1}pF(n,p)z^{n+\frac{p(p+1)}{2}}. \quad (29)$$

(*) Nous arrêtons ici cette Note, sauf à y revenir plus tard. Le sujet est inépuisable; mais il faut *savoir se borner*. (Décembre 1885.)

(**) Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. (Juin 1886.)

(***) *Journal de Crelle*, t. XXVII.

(IV) *Recherches...*, p. 47.

Soit

$$N = n + \frac{p(p+1)}{2},$$

ou

$$n = N - \frac{p(p+1)}{2}.$$

Alors

$$F(n, p) = F\left[N - \frac{p(p+1)}{2}, p\right]$$

= *nombre des décompositions de* N *en* p *parties inégales* = (N, p) (*).

Ainsi, le coefficient de z^N est

$$(N, 1) - 2(N, 2) + 3(N, 3) - 4(N, 4) + \cdots$$

Soit maintenant G(N) le *nombre des diviseurs de* N. Il est visible que, dans le premier membre de l'égalité (27), le coefficient de z^N est

$$G(N) - G(N-1) - G(N-2) + G(N-5) + G(N-7) - G(N-12) - \cdots$$

On a donc cette relation entre deux fonctions numériques, bien différentes :

$$\left.\begin{aligned} &(N, 1) - 2(N, 2) + 3(N, 3) - 4(N, 4) + \cdots \\ &= G(N) - G(N-1) - G(N-2) + G(N-5) + G(N-7) - G(N-12) - \cdots \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Est-elle connue?

XI. *Application*. — Soit N = 19. On doit trouver

$$\begin{aligned} &(19, 1) - 2(19, 2) + 3(19, 3) - 4(19, 4) + \cdots \\ &= G(19) - G(18) - G(17) + G(14) + G(12) - G(7) - G(4); \end{aligned}$$

ou (**)

$$1 - 2.9 + 3.21 - 4.18 + 5.5 = 2 - 6 - 2 + 4 + 6 - 2 - 3;$$

ce qui est exact.

(*) *Introduction à l'Analyse*, p. 245; *Recherches...*, p. 54.

(**) *Recherches...*, Table I.

CXXV. — Application de la Géométrie à l'Algèbre et à l'Arithmétique.

(*Mars* 1877.)

I. On doit, à Liouville, un beau théorème dont un cas particulier peut être énoncé ainsi :

Si l'on représente par ρ *le rayon de courbure d'une courbe algébrique, en un de ses points d'intersection avec l'axe des abscisses, et par* α *l'axe que la tangente en ce point fait avec le même axe, on aura*

$$\sum \frac{1}{\rho \sin^3 \alpha} = 0\ (^*); \tag{1}$$

le signe sommatoire s'étendant à tous les points d'intersection, réels ou imaginaires.

Au moyen des formules

$$\operatorname{tg} \alpha = y', \quad \rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{1}{y'' \cos^3 \alpha},$$

l'égalité (1) se transforme en celle-ci :

$$\sum \frac{y''}{y'^3} = 0. \tag{2}$$

On a donc ce curieux théorème d'Algèbre :

Soit $f(x, y) = 0$; *soient* $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$: *la somme des fractions* $\frac{y''}{y'^3}$, *étendue à toutes les racines de l'équation* $f(0, x) = 0$, *est nulle.*

En particulier, *la somme des fractions* $\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$, *étendue à toutes les racines* (supposées inégales) *de l'équation* $f(x) = 0$, *est nulle.*

(*) *Rapport sur un Mémoire de M. Émile Ghysens* (Bulletin de l'Académie, mai 1877).

II. Considérant d'abord ce dernier cas, supposons

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-g)(x-h); \tag{3}$$

et, par conséquent :

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \cdots + \frac{1}{x-h}\right], \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} f''(x) &= f'(x)\left[\frac{1}{x-a} + \cdots + \frac{1}{x-h}\right] - f(x)\left[\frac{1}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{1}{(x-h)^2}\right] \\ &= 2f(x)\left[\frac{1}{(x-a)(x-b)} + \cdots + \frac{1}{(x-a)(x-h)}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(x-b)(x-c)} + \cdots + \frac{1}{(x-g)(x-h)}\right]; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

puis

$$f'(a) = (a-b)(a-c)\ldots(a-h), \tag{6}$$

$$f''(a) = 2(a-b)(a-c)\ldots(a-h)\left[\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \cdots + \frac{1}{a-h}\right], \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\frac{f''(a)}{[f'(a)]^3} = \frac{1}{[(a-b)(a-c)\ldots(a-h)]^2}\left[\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \cdots + \frac{1}{a-h}\right]. \tag{8}$$

Le théorème énoncé ci-dessus peut donc l'être ainsi :

a, b, c, ... h *étant des quantités inégales, on a*

$$\sum \frac{1}{[(a-b)(a-c)\ldots(a-h)]^2}\left[\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \cdots + \frac{1}{a-h}\right] = 0\ (^*).$$

III. *Exemple :*

$$a = 2, \quad b = 5, \quad c = 7, \quad d = 11.$$

On doit trouver :

$$\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right)\frac{1}{(3 \cdot 5 \cdot 9)^2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)\frac{1}{(3 \cdot 2 \cdot 6)^2}$$
$$+ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{(5 \cdot 2 \cdot 4)^2} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{(9 \cdot 6 \cdot 4)^2} = 0;$$

(*) *Nouvelles Annales* (1877, p. 335).

ou, successivement :

$$-\frac{29}{45}.4.36.16-\frac{1}{5}.25.81.16+\frac{9}{20}.81.9.36+\frac{19}{36}.4.25.9=0,$$

$$-\frac{29}{5}.256-25.27.16+\frac{9}{5}.81.81+19.25=0,$$

$$\frac{1}{5}(729.81-29.256)=25(27.16-19),$$

$$51\,625=125.413;$$

ce qui est exact.

IV. *Remarque.* — D'après les formules (7), (8) :

$$\frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-c}+\cdots+\frac{1}{a-h}. \tag{9}$$

Soient α, β, γ, ..., η les racines de $f'(a)=0$. On a

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\cdots+\frac{1}{x-\eta};$$

et, pour $x=a$:

$$\frac{f''(a)}{f'(a)}=\frac{1}{a-\alpha}+\frac{1}{a-\beta}+\cdots+\frac{1}{a-\eta}. \tag{10}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-c}+\cdots+\frac{1}{a-h}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a-\alpha}+\frac{1}{a-\beta}+\cdots+\frac{1}{a-\eta}\right]. \tag{11}$$

En d'autres termes :

Si une courbe parabolique, représentée par

$$y=(x-a)(x-b)\ldots(x-h),$$

rencontre en A, B, ... H *l'axe des abscisses, et que* A', B', ... G' *soient les pieds des ordonnées des points pour lesquels la tangente est parallèle à cet axe, on a*

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\cdots+\frac{1}{AH}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{AA'}+\frac{1}{AB'}+\cdots+\frac{1}{AG'}\right].$$

V. *Autre remarque.* — De la relation (11), on déduit, par un changement de lettres et une sommation :

$$\left(\frac{1}{a-\alpha}+\frac{1}{a-\beta}+\cdots+\frac{1}{a-\eta}\right)+\left(\frac{1}{b-\alpha}+\frac{1}{b-\beta}+\cdots+\frac{1}{b-\eta}\right)+\cdots=0; \quad (12)$$

égalité presque évidente.

VI. Venons au théorème général (1), et prenons

$$f(x, y) = X_0 y^m + X_1 y^{m-1} + \cdots + X_{m-2} y^2 + X_{m-1} y + X_m = 0. \quad (13)$$

Dans cette équation : X_0 est une constante, X_1 est un binôme, ...

$$X_m = (x-a)(x-b)\ldots(x-g)(x-h).$$

Les valeurs de y', y'', répondant à $y=0$, sont, évidemment, indépendantes de X_0, X_1, ... X_{m-3}. Nous pouvons donc, à l'équation (13), substituer celle-ci :

$$X_{m-2} y^2 + X_{m-1} y + X_m = 0\ (^*). \quad (14)$$

Prenant les dérivées, on a

$$2X_{m-2} yy' + X_{m-1} y' + X'_{m-2} y^2 + X'_{m-1} y + X'_m = 0,$$

$$2X_{m-2}(yy'' + y'^2) + X_{m-1} y'' + 2X'_{m-2} yy' + X'_{m-1} y'$$
$$+ 2X'_{m-2} yy' + X'_{m-1} y' + X''_{m-2} y^2 + X''_{m-1} y + X''_m = 0;$$

(*) De là résulte la proposition suivante :

Soient les courbes C, *représentées par l'équation*

$$X_m + X_{m-1} y + X_{m-2} y^2 + y^3 \varphi(x, y) = 0,$$

dans laquelle la fonction $y^3\varphi(x, y)$ *est assujettie à la seule condition de s'annuler avec* y.

Soit, d'autre part, la courbe D, *représentée par*

$$X_m + X_{m-1} y + X_{m-2} y^2 = 0.$$

1° *Les courbes* C *et la courbe* D *ont les mêmes intersections avec l'axe des abscisses ;*

2° *En ces points d'intersection, les lignes* C, D *ont mêmes centres de courbure.* (Novembre 1885.)

et, *pour* y = 0 :

$$X_{m-1}y' + X'_m = 0, \tag{15}$$

$$X_{m-1}y'' + 2X_{m-2}y'^2 + 2X'_{m-1}y' + X''_m = 0. \tag{16}$$

On tire, de ces deux équations :

$$y' = -\frac{X'_m}{X_{m-1}}, \quad y'' = -\frac{2X_{m-2}(X'_m)^2 - 2X_{m-1}X'_mX'_{m-1} + (X_{m-1})^2X''_m}{(X_{m-1})^3},$$

$$\frac{y''}{y'^3} = \frac{2X_{m-2}(X'_m)^2 - 2X_{m-1}X'_mX'_{m-1} + (X_{m-1})^2X''_m}{(X'_m)^3}. \tag{17}$$

En conséquence :

La somme des fractions (17), *étendue aux* m *racines de* $X_m = 0$, *est nulle.*

VII. *Application.* — Soient : $m = 3$, $X_3 = x^3 - x$, $X_2 = x^2$, $X_1 = x + 1$.

Au moyen de ces valeurs,

$$\frac{y''}{y'^3} = \frac{2(x+1)(3x^2-1)^2 - 4x^3(3x^2-1) + 6x^5}{(3x^2-1)^3}.$$

Les racines de $X_3 = 0$ sont 0, + 1, — 1. Ainsi :

$$\frac{2}{-1} + \frac{16 - 8 + 6}{8} + \frac{8 - 6}{8} = 0;$$

ce qui est exact.

CXXVI. — Sur la décomposition d'un cube en quatre cubes.

(*Février* 1873) (*).

I. Au moyen de l'*identité d'Euler* :

$$a^3 - b^3 = \frac{a^3(a^3 - 2b^3)^3}{(a^3 + b^3)^3} + \frac{b^3(2a^3 - b^3)^3}{(a^3 + b^3)^3}, \tag{1}$$

l'*identité de Le Besgue* :

$$6(c-1)^2 = c^3 + (2-c)^3 - 1 - 1 \text{ (**)} \tag{2}$$

devient

$$6(c-1)^2 = c^3\left(\frac{c^2 - 2}{c^3 + 1}\right)^3 + \left(\frac{2c^3 - 1}{c^3 + 1}\right)^3 + (2-c)^3 - 1\,; \tag{3}$$

à cause de

$$c^3 - 1 = c^3\left(\frac{c^3 - 2}{c^3 + 1}\right)^3 + \left(\frac{2c^3 - 1}{c^3 + 1}\right)^3.$$

II. Si l'on suppose c compris entre $\sqrt[3]{2}$ et 2, les trois premiers termes du second membre, dans l'identité (3), sont positifs. Afin de remplacer, par une somme de deux *cubes positifs*, le binôme $\left(\frac{2c^3-1}{c^3+1}\right)^3 - 1$, prenons

$$a = \frac{2c^3 - 1}{c^3 + 1}, \quad b = 1.$$

Alors

$$\left(\frac{2c^3 - 1}{c^3 + 1}\right)^3 - 1$$

$$= \left(\frac{2c^3 - 1}{c^3 + 1}\right)^3 \left[\frac{(2c^3-1)^3 - 2(c^3+1)^3}{(2c^3-1)^3 + (c^3+1)^3}\right]^3 + \left[\frac{2(2c^3-1)^3 - (c^3+1)^3}{(2c^3-1)^3 + (c^3+1)^3}\right]^3;$$

(*) Note publiée, en partie, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. IV et V).

(**) *Exercices d'Analyse numérique*, p. 148.

ou, après quelques réductions,

$$\left(\frac{2c^3-1}{c^3+1}\right)^3-1=\left[\frac{2c^3-1}{c^3+1}\,\frac{2c^9-6c^6-1}{3c^3(c^6-c^3+1)}\right]^3+\left[\frac{3c^9-9c^6+3c^3-1}{3c^3(c^6-c^3+1)}\right]^3. \quad (4)$$

Par conséquent, l'identité (3) est transformée en

$$\left.\begin{aligned} &6(c-1)^2-c^3\left(\frac{c^3-2}{c^3+1}\right)^3-(2-c)^3\\ =&\left[\frac{2c^3-1}{c^3+1}\,\frac{2c^9-6c^6-1}{3c^3(c^6-c^3+1)}\right]^3+\left[\frac{3c^9-9c^6+3c^3-1}{3c^3(c^6-c^3+1)}\right]^3.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Chassant les dénominateurs, puis écrivant x au lieu de c, on trouve

$$\left.\begin{aligned} &27x^{12}(x^3-2)^3(x^6-x^3+1)^3+27x^9(2-x)^3(x^9+1)^3\\ &+(2x^3-1)^3(2x^9-6x^6-1)^3+(3x^9-9x^6+3x^3-1)^3(x^3+1)^3\\ &=162(x-1)^2x^9(x^9+1)^3.\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Dans cette nouvelle identité, tous les cubes sont positifs, dès que x est compris entre $\sqrt[3]{3,1}$ et 2 (*).

III. *Remarques.* — 1° Posant

$$A=(2x^3-1)(2x^9-6x^6-1),\quad B=(3x^9-9x^6+3x^3-1)(x^3+1),$$

on trouve

$$A^3+B^3=27x^9(7x^{27}-36x^{24}+90x^{21}-150x^{18}+171x^{15}-144x^{12}$$
$$+84x^9-36x^6+9x^3-2).$$

2° Le polynôme entre parenthèses doit être divisible par $(x^6-x^3+1)^3$; ce qui a lieu. Le quotient est

$$(x^3-2)(7x^6-x^3+1).$$

3° Par conséquent, le premier membre de l'équation

$$7z^9-36z^8+90z^7-150z^6+171z^5-144z^4+84z^3$$
$$-36z^2+9z-2=0$$

égale

$$(z^2-z+1)^3(7z^2-z+1)(z-2).$$

(*) 3,1 surpasse la racine positive de l'équation

$$2z^3-6z^2-1=0.$$

IV. D'après la deuxième Remarque,

$$(2x^3-1)^3(2x^9-6x^6-1)^3+(5x^9-9x^6+3x^3-1)^3(x^3+1)^3$$
$$=27x^9(x^6-x^3+1)^3(7x^9-15x^6+3x^3-2).$$

Le dernier facteur est la même chose que

$$(2x^3-1)^3-(x^3+1)^3.$$

Changeant x^3 en x, on a donc, *identiquement :*

$$\left.\begin{array}{l}(2x-1)^3(2x^3-6x^2-1)^3+(5x^3-9x^2+3x-1)^3(x+1)^3\\+27x^3(x^2-x+1)^3(x+1)^3=27x^3(x^2-x+1)^3(2x-1)^3.\end{array}\right\}\ \text{(B)}$$

V. L'identité (B) permet de *trouver un cube égal à la somme de trois cubes.* On en conclut, par exemple, les décompositions suivantes :

$$6^3=3^3+4^3+5^3,$$
$$364^3=273^3+40^3+303^3,$$
$$40\,290^3=30\,810^3+2\,941^3+33\,059^3.$$

VI. Dans (A), tous les facteurs sont des cubes, excepté $162(x-1)^2=27.6\,(x-1)^2$. Pour que cette quantité devienne un cube (entier ou fractionnaire), il suffit de prendre

$$x=1+6\left(\frac{p}{q}\right),$$

la fraction étant comprise entre des limites convenables. Si, par exemple, $x=\frac{7}{4}$, on trouve

$$N^3=A^3+B^3+C^3+D^3,$$

en supposant :

$$\begin{array}{llll}N= & 18.343.40\,615\,751 & = & 250\,761\,646\,674,\\ A= & 3.215.2\,401.99\,793 & = & 154\,543\,930\,485,\\ B= & 3.343.\ \ 40\,615\,751 & = & 41\,793\,607\,779,\\ C= & 8.311.\ \ 33\,267\,854 & = & 87\,746\,420\,752,\\ D= & 4.407.137\,954\,851 & = & 224\,590\,497\,428.\end{array}$$

Vérification :

$$\begin{array}{rr}
N^3 = & 15\,768\,244\,272\,452\,554\,919\,319\,605\,753\,070\,024. \\
\hline
A^3 = & 3\,691\,100\,414\,566\,356\,611\,789\,117\,416\,834\,125, \\
B^3 = & 73\,001\,130\,890\,984\,050\,552\,405\,582\,190\,139, \\
C^3 = & 675\,597\,806\,447\,545\,172\,824\,655\,312\,299\,008, \\
D^3 = & 11\,328\,544\,920\,547\,669\,084\,153\,429\,441\,746\,752. \\
\hline
\textit{Somme :} = & 15\,768\,244\,272\,452\,554\,919\,319\,605\,755\,070\,024.
\end{array}$$

VII. Au moyen de la substitution indiquée, l'identité (A) devient

$$\left.\begin{aligned}
&(6p^2q)^3\left[(6p^3+q^3)^3+q^9\right]^3+(q^3)^3\left[(6p^3+q^3)^3+q^9\right]^3 \\
&=(6p^3+q^3)^3\left[(6p^3+q^3)^3-2q^9\right]^3+(q^3-6p^3)^3\left[(6p^3+q^3)^3+q^9\right]^3 \\
&+(q^3)^3\left[2(6p^3+q^3)^3-q^9\right]^3.
\end{aligned}\right\}\quad (C)$$

Celle-ci détermine *une infinité de nombres égaux, chacun, à la somme de deux cubes et à la somme de trois cubes.*

Par exemple :

$$2\,442^3+1\,628^3=1\,505^3+407^3+2\,488^3,$$

$$5\,714\,705^3+235\,297^3=2\,823\,600^3+117\,650^3+5\,529\,550^3.$$

Addition. — (*Juillet* 1878.)

VIII. Si, dans l'*identité*, à peu près évidente :

$$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)=24\,abc,\quad \text{(D)}$$

on fait

$$a=3\alpha^3,\quad b=3\beta^3,\quad c=\gamma^3,$$

elle devient

$$\left.\begin{aligned}
(3\alpha^3+3\beta^3+\gamma^3)^3&=(3\beta^3+\gamma^3-3\alpha^3)^3+(\gamma^3+3\alpha^3-3\beta^3)^3 \\
&+(3\alpha^3+3\beta^3-\gamma^3)^3+(6\alpha\beta\gamma)^3.
\end{aligned}\right\}\quad (D)$$

De celle-ci, on tire une infinité de solutions de

$$t^3=x^3+y^3+z^3+u^3.$$

Soient, par exemple :

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 4;$$

alors :

$$x = 7, \quad y = 121, \quad z = 41, \quad u = 144, \quad t = 169.$$

En effet,

$$169^3 = 7^3 + 121^3 + 41^3 + 144^3.$$

CXXVII. — Sur un déterminant.

(*Février* 1873.)

Dans le tome XIII du *Bulletin de l'Académie de Belgique* (*), j'ai donné cette proposition :

$$\left.\begin{array}{l} \textit{dét}\,(A + M,\ B + N,\ C + P, \ldots) = \textit{dét}\,(A, B, C, D, \ldots) \\ + \textit{dét}\,(M, B, C, D, \ldots) + \cdots + \textit{dét}\,(A, N, C, D, \ldots) \\ + \textit{dét}\,(M, N, P, Q, \ldots). \end{array}\right\} \quad (1)$$

Soient, comme cas particulier :

$$M = 0, \quad N = -A, \quad P = -A, \quad Q = -A, \ldots$$

A cause des déterminants nuls, l'égalité (1) se réduit à

$$\textit{dét}\,(A,\ B - A,\ C - A, \ldots) = \textit{dét}\,(A, B, C, \ldots)\ (^{**}). \quad (2)$$

(*) Vers 1850.

(**) Le Mémoire intitulé : *Remarques sur la méthode des moindres carrés* contient diverses applications de ce théorème. (Décembre 1885.)

CXXVIII. — Remarque sur une identité connue.

(*Août* 1873.)

Cette identité, cas particulier de celle que l'on doit à Euler (*), est

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) = (aa' + bb' + cc')^2$$
$$+ (ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2.$$

Si les nombres a, b sont proportionnels aux nombres a', b', le second membre est composé de trois termes seulement. Ainsi, *dans ce cas, le produit d'une somme de trois carrés, par une somme de trois carrés, est une somme de trois carrés.*

Par exemple,

$$(3^2 + 5^2 + 4^2)(6^2 + 10^2 + 7^2) = 96^2 + 5^2 + 3^2 = 9\,250\ (^{**}).$$

(*) Voir les *Nouvelles Annales*, 1874, p. 522.

(**) Notre *Théorie analytique des lignes à double courbure* contient (p. 24) une identité plus générale que celle d'Euler; savoir :

$$\sum a^2 \sum (b\gamma - c\beta)^2 \sum a'^2$$
$$= \left[a \sum a'(b\gamma - c\beta) + (b\gamma - c\beta) \sum aa'\right]^2$$
$$+ \left[b \sum a'(b\gamma - c\beta) + (c\alpha - a\gamma) \sum aa'\right]^2$$
$$+ \left[c \sum a'(b\gamma - c\beta) + (a\beta - b\alpha) \sum aa'\right]^2$$
$$+ \left[\sum aa' \sum a\alpha - \sum \alpha a' \sum a^2\right]^2.$$

Les neuf quantités a, b, c, a', b', c', α, β, γ sont, par exemple, des nombres entiers quelconques.

Cette relation permet de *décomposer, en quatre carrés, le produit de trois facteurs égaux, chacun, à la somme de trois carrés.*

CXXIX. — Sur les lignes de courbure planes.

(*Juillet* 1873.)

I. Je rappellerai, d'abord, ce théorème général (*) :

Soient ab, a′b′, a″b″, ... *les sections faites, dans une surface* S, *par des plans* P, P′, P″, ... *ayant une enveloppe* E. *Soient* AB, A′B′ ... *ce que deviennent ces lignes lorsque les plans mobiles, ayant roulé sur* E, *viennent se confondre avec un même plan* π, *tangent à* E. *Soient enfin* CD, C′D′, C″D″, ... *les trajectoires orthogonales de* AB, A′B′, A″B″, ... *Si le plan* π *s'enroule autour de* E, *de manière à prendre les positions* P, P′, P″, ..., *les* SURFACES D'ENROULEMENT Σ, Σ', Σ'', ..., *engendrées par* CD, C′D′, C″D″, ... *coupent* S *suivant des lignes* cd, c′d′, c″d″, ..., *trajectoires orthogonales de* ab, a′b′, a″b″, ...

II. Supposons que les courbes planes *ab*, *a′b′*, *a″b″*, ... soient des lignes de courbure de S. Alors les secondes lignes de courbure sont les trajectoires *cd*, *c′d′*, *c″d″*, ..., dont il vient d'être question. Comme je l'ai fait observer dans le petit Mémoire cité, la détermination de ces nouvelles courbes se réduit à la recherche des lignes planes CD, C′D′, C″D″, ... : le premier problème, appartenant à la *Géométrie de l'espace,* est ramené à un problème de *Géométrie plane.*

Si l'équation différentielle des courbes AB, A′B′, ..., rabattements des premières lignes de courbure, *dans le plan* π, est

$$\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0,$$

et que l'on puisse intégrer

$$\mathrm{M}dy - \mathrm{N}dx = 0,$$

les *surfaces d'enroulement,* contenant les secondes lignes de courbure, seront connues.

(*) *Bulletin de l'Académie* (février 1872). Voir aussi les *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces* (MÉM. in-8°, 1875).

Addition. — (*Janvier* 1886.)

III. *Remarque.* — La solution précédente est en défaut lorsque S est une *surface d'enroulement.* En effet, dans ce cas, les lignes de courbure ab, $a'b'$, ..., *égales entre elles* (*), ont pour rabattement, sur le plan π, une courbe *unique* AB.

Mais, quand il en est ainsi, les *secondes lignes de courbure* cd, c'd', ..., *sont des trajectoires orthogonales des plans* P, P', P'', ... (**).

IV. Supposons que l'enveloppe E se réduise à un cylindre. Alors *chacune des courbes* cd, cd', ... *est la développante d'une section droite de ce cylindre. Les plans de ces lignes,* au lieu d'être tangents à un cylindre, *sont parallèles entre eux,* contrairement à un théorème connu.

V. *Une proposition de Monge.* — On lit, dans l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* (***) :

« Mais un plan ne peut être susceptible d'une seule série de » positions, et être mobile d'une manière plus générale que de » rouler sur une surface développable quelconque : donc il n'y » a point d'autre surface qui jouisse de la même propriété ; » donc la surface engendrée est définie d'une manière complète » lorsque l'on énonce qu'une de ses lignes de courbure est » constamment plane. »

Le sens naturel de la dernière phrase est, semble-t-il, celui-ci : *Toute surface qui admet un système de lignes de courbure planes est une surface d'enroulement.* Mais cette proposition est fausse. L'illustre auteur a-t-il supposé, tacitement, que les lignes de courbure considérées sont égales? Alors son théorème équivaudrait à celui-ci, dont la démonstration, si elle est possible, est peut-être difficile :

Toute surface qui admet un système de lignes de courbure planes, égales entre elles, est une surface d'enroulement.

(*) *Remarques sur la théorie...*, p. 15.

(**) *Loc. cit.*

(***) Édition de Liouville, p. 330. Il s'agit *de la surface dont toutes les normales sont tangentes à une même développable,* c'est-à-dire d'*une surface d'enroulement.*

CXXX. — Sur l'Analyse indéterminée du second degré.

(*Avril* 1873.)

I. En supposant

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad xx' + yy' + zz' = 0,$$

nous avons trouvé (*) l'*identité :*

$$\begin{aligned}&(x'^2 + y'^2 + z'^2)\left[(yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' - yx'')^2\right]\\ &= (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 + \left[(yz'' - zy'')x' + (zx'' - xz'')y' + (xy'' - yx'')z'\right]^2.\end{aligned}$$

Afin qu'elle soit homogène, posons :

$$x = \frac{f}{k}, \quad y = \frac{g}{k}, \quad z = \frac{h}{k};$$

c'est-à-dire

$$f^2 + g^2 + h^2 = k^2; \tag{1}$$

puis, en changeant de notation :

$$ff' + gg' + hh' = 0, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}&(f'^2 + g'^2 + h'^2)\left[(gh'' - hg'')^2 + (hf'' - fh'')^2 + (fg'' - gf'')^2\right]\\ &= k^2(f'f'' + g'g'' + h'h'')^2\\ &+ \left[f(g'h'' - h'g'') + g(h'f'' - f'h'') + h(f'g'' - g'f'')\right]^2.\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

De là résulte le théorème suivant :

Lorsque dix quantités entières satisfont aux conditions (1), (2), *elles rendent identique l'égalité* (A), *dans laquelle le produit d'une somme de trois carrés, par une somme de trois carrés, se réduit à la somme de deux carrés.*

Soient, par exemple :

$f = 6$, $g = 3$, $h = 2$, $k = 7$, $f' = 1$, $g' = 2$, $h' = -6$, $f'' = -5$, $g'' = -3$, $h'' = -1$.

(*) Page 34.

On doit avoir

$$(1^2 + 2^2 + 6^2)(3^2 + 3^2 + 4^2) = 35^2 + 13^2,$$

ou

$$41 \,.\, 34 = 1\,225 + 169 = 1\,394;$$

ce qui est exact.

II. L'identité (A) a la forme

$$(f'^2 + g'^2 + h'^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) = U^2 + V^2. \tag{B}$$

D'après une proposition connue, *si les nombres* U, V *sont premiers entre eux, chacun des trinômes* $f'^2 + g'^2 + h'^2$, $X^2 + Y^2 + Z^2$ *est une somme de deux carrés.* Nous avons donc ce théorème remarquable :

Si sept entiers f, g, h, k, f', g', h' *satisfont aux conditions :*

$$f^2 + g^2 + h^2 = k^2, \quad ff' + gg' + hh' = 0,$$

le trinôme $f'^2 + g'^2 + h'^2$ *est, ordinairement, la somme de deux carrés* (*).

III. Dans ce qui va suivre, nous pouvons supposer f, g, h premiers entre eux, et f', g', h' également premiers entre eux.

En effet, si f, g, h ont un facteur commun, ce facteur doit diviser k; et alors on peut remplacer f, g, h, k par des sous-multiples de ces nombres. De même pour f', g', h', à cause de la condition (2).

IV. De l'équation (2), on tire, successivement :

$$g^2g'^2 + h^2h'^2 = f^2f'^2 - 2ghg'h',$$

$$(g^2 + h^2)(g'^2 + h'^2) = f^2f'^2 + (hg' - gh')^2,$$

$$(g^2 + h^2)P = k^2f'^2 + (hg' - gh')^2; \tag{C}$$

P représentant $f'^2 + g'^2 + h'^2$.

(*) On verra, tout à l'heure, que la propriété énoncée *peut subsister*, même quand U et V ont des facteurs communs.

Le premier théorème peut donc être remplacé par celui-ci : $f'^2 + g'^2 + h'^2$ *est une somme de deux carrés, au moins lorsque* kf' *et* $hg' - gh'$ *sont premiers entre eux* (*).

V. *Remarques.* — 1° On a, simultanément :

$$(g^2 + h^2)P = k^2f'^2 + (hg' - gh')^2,$$
$$(h^2 + f^2)P = k^2g'^2 + (fh' - hf')^2,$$
$$(f^2 + g^2)P = k^2h'^2 + (gf' - fg')^2.$$

Ainsi :

P *est une somme de deux carrés, au moins lorsque* kg' *et* $fh' - hf'$ *sont premiers entre eux; etc.*

2° Le théorème ci-dessus (II) peut encore être énoncé comme il suit :

Soient six entiers, f, g, h, f', g', h' *satisfaisant à la condition*

$$ff' + gg' + hh' = 0.$$

Si l'une des sommes

$$f^2 + g^2 + h^2, \quad f'^2 + g'^2 + h'^2$$

est un carré, l'autre est, ordinairement, une somme de deux carrés.

3° Pour satisfaire à la condition (2), f, g, h étant donnés, il suffit, comme on sait, de prendre

$$f' = g\gamma - h\beta, \quad g' = h\alpha - f\gamma, \quad h' = f\beta - g\alpha; \qquad (3)$$

α, β, γ étant des entiers quelconques.

(*) Soient

$$f = -1, \quad g = 2, \quad h = 2, \quad k = 3,$$
$$f' = 2, \quad g' = 3, \quad h' = -2;$$

valeurs qui satisfont aux égalités (1), (2). Il en résulte

$$kf' = 6, \quad hg' - gh' = 10;$$

puis

$$8P = 6^2 + 10^2, \quad P = 17 = 4^2 + 1^2.$$

Ainsi, comme nous l'avons annoncé, P *peut être une somme de deux carrés, même quand* $hg' - gh'$ *et* kf' *ont un facteur commun.*

Il résulte, de ces formules,

$$P = k^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (f\alpha + g\beta + h\gamma)^2. \qquad \text{(D)}$$

Ainsi, sauf les cas d'exception signalés (s'ils existent), *le second membre, somme de trois carrés, est aussi une somme de deux carrés.*

VI. *Interprétation géométrique.* — Soient α, β, γ les coordonnées rectangulaires d'un point M; $\frac{f}{k}$, $\frac{g}{k}$, $\frac{h}{k}$ les cosinus directifs d'une droite OA, passant par l'origine O. Il est visible que

$$\frac{P}{k^2} = \overline{MP}^2,$$

P étant la projection de M sur OA.

Soit $P = A^2 + B^2$, ou

$$\frac{P}{k^2} = \left(\frac{A}{k}\right)^2 + \left(\frac{B}{k}\right)^2,$$

puis

$$\overline{MP}^2 = \left(\frac{A}{k}\right)^2 + \left(\frac{B}{k}\right)^2. \qquad (16)$$

Cette égalité, dans laquelle A, B, k sont des nombres entiers, exprime que :

La distance MP *est l'hypoténuse d'un triangle dont les côtés de l'angle droit sont rationnels.*

VII. *Applications :*

1° $\quad f = 43, \quad g = 46, \quad h = 2, \quad k = 63;$

$\quad \alpha = 5, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 1;$

$\quad f' = 38, \quad g' = -33, \quad h' = -58.$

$$P = 38^2 + 33^2 + 58^2 = 1\,444 + 1089 + 3364 = 5\,897.$$

Le nombre 5 897, qui est premier, a la forme $4\mu + 1$: il est dans la somme de deux carrés. On trouve $P = 76^2 + 11^2$; puis, au moyen de la formule (16) :

$$\overline{MP}^2 = \left(\frac{76}{63}\right)^2 + \left(\frac{11}{63}\right)^2.$$

2° $f = 43$, $g = 46$, $h = 2$, $k = 63$;

$\alpha = -1$, $\beta = 5$, $\gamma = 2$;

$$P = 63^2(1^2 + 5^2 + 2^2) - (-43 + 230 + 4)^2$$
$$= 63^2 . 30 - 191^2 = 82\,589 = 13 . 6353$$
$$= (3^2 + 2^2)(73^2 + 32^2) = 155^2 + 242^2 = 283^2 + 50^2;$$

$$\overline{MP}^2 = \left(\frac{155}{63}\right)^2 + \left(\frac{242}{63}\right)^2 = \left(\frac{283}{63}\right)^2 + \left(\frac{50}{63}\right)^2;$$

etc. (*).

VIII. *Remarque.* — *Les entiers* f, g, h, f′, g′, h′ *étant supposés différents de zéro :*

1° *La quantité* $(hg' - gh')^2 + k^2f'^2$, *égale à*

$$(f'^2 + g'^2 + h'^2)(g^2 + h^2),$$

est un nombre composé;

2° *Ce nombre est une somme de quatre carrés :* $(hg' - gh')^2$, $(ff')^2$, $(gf')^2$, $(hf')^2$;

3° *Il se réduit à une somme de trois carrés si* $\frac{g'}{g} = \frac{h'}{h}$;

4° *Il est décomposable en six carrés.*

IX. *Autre Remarque.* — Plus généralement :

Soient six entiers x, y, z, x′, y′, z′, *satisfaisant à la condition* $xx' + yy' + zz' = 0$.

1° *Le nombre* $(zy' - yz')^2 + (x^2 + y^2 + z^2)x'^2$ *est composé;*

2° *Ce nombre, égal à* $(x'^2 + y'^2 + z'^2)(y^2 + z^2)$, *est la somme de six carrés.*

(*) A chaque décomposition de P, en deux carrés, correspond un triangle rectangle.

Addition. — (*Octobre* 1885.)

X. *Théorèmes d'Arithmétique.* — 1° L'identité

$$(x + y + 1)^2 + (x - y)^2 + 1 = x^2 + (x + 1)^2 + y^2 + (y + 1)^2 \quad \text{(E)}$$

prouve que :

Si un nombre impair, n, *est la somme de deux carrés non consécutifs,* n + 1 *est la somme de quatre carrés, consécutifs deux à deux.*

2° Si l'on suppose $y = x + 2$, cette identité devient

$$(2x + 3)^2 + 5 = x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2. \quad \text{(F)}$$

Par conséquent :

Tout carré impair (supérieur à 9), *augmenté de* 5, *est la somme de quatre carrés consécutifs; et réciproquement* (*).

(*) Dans le petit Mémoire intitulé : *Sur un développement de l'intégrale elliptique de première espèce...* (1886), on trouve divers théorèmes sur les progressions. Par exemple, celui-ci :

Dans toute progression arithmétique, la somme des carrés de cinq termes consécutifs est une somme de quatre carrés.

CXXXI. — Sur un produit indéfini.

(*Novembre* 1873.)

I. Soit

$$y = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(^*), \tag{1}$$

ou

$$-\mathcal{L}.y = -\mathcal{L}.(1-x) - \mathcal{L}(1-x^2) - \mathcal{L}(1-x^3) - \cdots$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

$$+ x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{4}x^8 + \cdots$$

$$+ x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3}x^9 + \frac{1}{4}x^{12} + \cdots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ou encore, par la sommation des séries *verticales* :

$$-\mathcal{L}.y = \frac{x}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{1-x^3} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{1-x^4} + \cdots \tag{2}$$

On tire, de cette égalité (2), en prenant les dérivées :

$$-\frac{y'}{y} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{x^3}{(1-x^3)^2} + \frac{x^3}{(1-x^4)^2} + \cdots \tag{3}$$

On a aussi

$$-\frac{y'}{y} = \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \frac{4x^3}{1-x^4} + \cdots \tag{4}$$

(*) Ce produit, considéré par Euler, donne lieu, comme on sait, à la série, très remarquable,

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots,$$

développement de y (*Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 7). L'expression de cette série, rapportée dans le *Calcul différentiel* de M. Bertrand, est inexacte.

Conséquemment,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}+\frac{3x^2}{1-x^3}+\frac{4x^3}{1-2^4}+\cdots\\&=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{x}{(1-x^2)^2}+\frac{x^2}{(1-x^3)^2}+\frac{x^3}{(1-x^4)^2}+\cdots;\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

ou, ce qui est équivalent :

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x(1-2x^2)}{(1-x^2)^2}+\frac{x^2(2-3x^3)}{(1-x^3)^2}+\frac{x^3(3-4x^4)}{(1-x^4)^2}+\cdots\quad(6)$$

Pour vérifier l'égalité (5), il suffit de remplacer chaque fraction par son développement en série.

Addition. — (Janvier 1886.)

II. Si l'on suppose, avec Jacobi,

$$x=q=e^{-\pi\frac{\omega'}{\omega}},$$

on trouve

$$-\frac{y'}{y}=\frac{1}{24}+\frac{2}{3}\frac{k^2\omega^2}{\pi^2}+\frac{5}{6}\frac{k'^2\omega^2}{\pi^2}-\frac{E_1(k)\omega}{\pi^4}\text{(*)}.\quad(7)$$

III. L'identité (6) peut être remplacée par celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1-2q^2}{(1+q)^2}+\frac{q(2-3q^3)}{(1+q+q^2)^2}+\frac{q^3(4-5q^5)}{(1+q+q^2+q^3)^2}\\&+\frac{q^3(4-5q^5)}{(1+q+q^2+q^3+q^4)^2}+\cdots=1.\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Soit u_n le terme général du premier membre ; savoir

$$\frac{q^{n-1}[n-(n+1)q^{n+1}]}{(1+q+q^2+\cdots+q^n)^2}.$$

En le développant suivant les puissances de q, on parvient aisément à l'*identité :*

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty\left\{q^{n-1}+(n-1)q^{2n}+(n-2)q^{3n+1}+(n-3)q^{4n+2}+(n-4)q^{5n+3}+\cdots\right\}\\&=1+2q+3q^2+4q^3+\cdots\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

(*) *Recherches sur quelques produits...*, p. 92.

IV. On vient de voir que

$$\frac{1-2q^2}{(1-q^2)^2}+\frac{2q-3q^4}{(1-q^3)^2}+\frac{3q^2-4q^6}{(1-q^4)^2}+\frac{4q^3-5q^8}{(1-q^5)^2}+\cdots=\frac{1}{(1-q)^2}.$$

D'autre part (*) :

$$\frac{1-2q^3}{(1-q^3)^2}+\frac{2q-3q^6}{(1-q^5)^2}+\frac{3q^2-4q^9}{(1-q^7)^2}+\frac{4q^3-5q^{12}}{(1-q^9)^2}+\cdots=\frac{1}{(1-q)^2}.$$

Par conséquent, il y a équivalence entre les séries composant les premiers membres.

CXXXII. — Deux leçons de Probabilités (1877) (**).

I. *Règle de la moyenne arithmétique.* — Supposons que l'on ait mesuré deux fois, trois fois, ... n fois une longueur inconnue, x, et que les résultats obtenus, k_1, k_2, ... k_n, soient *très peu différents les uns des autres* (***). Si toutes ces mesures sont *également probables,* c'est-à-dire si l'on n'a aucune raison d'en préférer une aux autres, on doit prendre

$$x=\frac{k_1+k_2+\cdots+k_n}{n}. \tag{1}$$

Soit d'abord le cas de deux observations, et, pour fixer les idées, $k_1 < k_2$. L'*hypothèse* la plus naturelle est que x est comprise entre k_1 et k_2, et également éloignée de ces limites. Ainsi $k_2 - x = x - k_1$; d'où

$$x=\frac{k_1+k_2}{2}.$$

(*) *Note* CXXIV, p. 128.

(**) Elles font partie d'un Traité inédit.

(***) Cette condition préliminaire, sur laquelle les Auteurs n'insistent pas assez, est absolument indispensable. Si trois observations, par exemple, ont donné environ 1 mètre, et une quatrième observation, 2 mètres, celle-ci doit être *annulée*.

S'il y a trois observations, on peut les combiner deux à deux, en prenant

$$x = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad x = \frac{k_2 + k_3}{2}, \quad x = \frac{k_3 + k_1}{2}.$$

Les erreurs correspondantes seront

$$\varepsilon_3 = x - \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \varepsilon_2 = x - \frac{k_3 + k_1}{2}, \quad \varepsilon_1 = x - \frac{k_2 + k_3}{2}.$$

Si l'on veut que *la somme de ces erreurs soit nulle*, on a l'équation

$$3x - (k_1 + k_2 + k_3) = 0,$$

ou

$$x = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3};$$

etc.

En général, d'après la formule (1),

$$(x - k_1) + (x - k_2) + \cdots + (x - k_n) = 0.$$

Ainsi, *le principe de la moyenne suppose nulle la somme des erreurs.*

II. *Remarque.* — Cette démonstration, très élémentaire, est peu rigoureuse. On l'acceptera, je l'espère, après l'énumération suivante :

1° Dans la *Théorie des moindres carrés* (*), Gauss, avant de *démontrer* (?) la formule (1), s'énonce ainsi, à propos d'un Lemme préliminaire :

« Si l'on objecte que cette convention est arbitraire et ne » semble pas nécessaire, nous en convenons volontiers. La » question qui nous occupe a, dans sa nature même, quelque » chose de vague et ne peut être bien précisée que par un » principe jusqu'à un certain point arbitraire. La détermination » d'une grandeur par l'observation peut se comparer, avec

(*) Traduction de M. Bertrand (1857) (pp. 6 et 7).

» quelque justesse, à un jeu dans lequel il y aurait une perte à » craindre et aucun gain à espérer. » ... « Mais quelle perte » doit-on assimiler à une erreur déterminée? C'est ce qui n'est » pas clair en soi ; cette détermination dépend en partie de » notre volonté... »

« Laplace a considéré la question d'une manière analogue... » Cette hypothèse (*), si nous ne nous faisons pas illusion, n'est » pas moins arbitraire que la nôtre » ; etc., etc. (**).

Ce n'est pas tout. Gauss dit encore : « La moyenne arithmétique » des valeurs observées est la valeur la plus probable de cette » quantité (x), sinon en toute rigueur, du moins avec une » grande approximation, de telle sorte que *le plus sûr soit tou-* » *jours de s'y arrêter* » (p. 118). Le Géomètre rigoureux par excellence admet donc, comme axiome, une proposition *fausse* dans certains cas!

2° Encke a fait, pour le cas de trois quantités, une tentative de démonstration; mais elle suppose que la valeur la plus probable est la même que si, au lieu des mesures k_1, k_2, k_3, on avait pris $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, k_3.

Comme le fait observer M. De Tilly (***), *cette hypothèse est, au fond, un postulatum nouveau.*

3° Dans son *Traité élémentaire du calcul des erreurs* (IV), M. Faà de Bruno s'exprime en ces termes :

« La valeur la plus plausible... sera celle dont les différences » avec les valeurs observées seront les plus petites. Si cela est, » il faudra aussi que la somme de ces différences prises en » valeur absolue soit la plus petite possible. Pour réaliser cette » condition algébriquement, nous dirons (*sic*) que la somme » des carrés des erreurs doit être un minimum. »

Autant de mots, autant ... d'*erreurs*.

(*) Celle de Laplace.

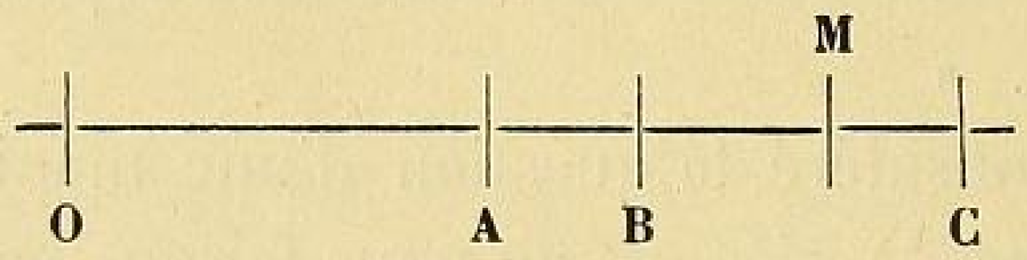
(**) Ces *raisonnements* font songer à ceux qu'emploie Sganarelle (*Le Médecin malgré lui;* acte II, scène VI).

(***) *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. I, p. 145.

(IV) Page 15.

Soient, pour fixer les idées, $OA = 5$, $OB = 6$, $OC = 8$. Soit à déterminer le point M par la condition

$$AM + DM + CM = min.;$$



les distances étant prises en *valeurs absolues.* A cause de $BM + CM = BC = 2$, le point M, *supposé situé entre* B *et* C, doit être le plus près possible de A : il doit se confondre avec B. La formule qui répond au problème de M. Faà est donc $x = 6$, et non $x = \frac{5+6+8}{3}$.

En outre, si l'on veut que $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2$ soit un minimum, on trouve

$$(x - 5) + (x - 6) + (x - 8) = 0.$$

4° Meyer, mon savant prédécesseur, *admet* que « la valeur » la plus avantageuse (*sic*) du résultat d'un grand nombre d'ob- » servations est celle que l'on déduit de leur moyenne arithmé- » tique (*) ».

5° M. H. Laurent fait un véritable entassement d'intégrales (**).

6° D'après M. De Tilly, excellent juge : « le principe de la » moyenne est établi ... lorsque le nombre des données est » *infini* et lorsqu'il est égal à *deux* ... il est impossible de » démontrer ... le principe de la moyenne entre *trois* quan- » tités (***) ».

7° Une *Théorie analytique des moindres carrés*, due à M. Biver, est basée sur la proposition suivante, véritable non-sens :

La dérivée de $\varphi(x^2 + y^2 + z^2 + ...)$ *est*

$$\varphi'(x^2 + y^2 + z^2 + \cdots) \times (2x + 2y + 2z + \cdots) \text{ (iv)}.$$

(*) *Calcul des probabilités,* publié par M. Folie, p. 213.

(**) *Traité du calcul des probabilités,* pp. 144 et suiv.

(***) *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. I, p. 144.

(iv) *Journal de Liouville,* 1853, p. 177.

III. *Méthode des moindres carrés* (*). — Soit P la probabilité du concours des erreurs Δ_1, Δ_2, ..., Δ_μ. Après avoir démontré (?) la formule

$$P = A \,.\, h^\mu \pi^{-\frac{\mu}{2}} e^{-h^2 \Sigma \Delta^2},$$

Gauss en déduit, comme il suit, la *règle des moindres carrés* : « Il faut, pour que le produit P devienne maximum, que la » somme

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \cdots$$

» devienne minimum. Donc le système de valeurs des inconnues, » le plus probable, correspond au cas où les carrés des diffé- » rences ... donnent la somme la plus petite possible, pourvu » que toutes les observations soient également présumées pré- » cises. » (*sic*) (**)

Voici une autre manière, très simple, d'arriver à la même conclusion.

Supposons que des éléments inconnus, x, y, z, ... soient liés, à des paramètres a, b, c, ... p, a', b', c', ... p', ..., par des équations de la forme

$$V = ax + by + cz + \cdots + p = 0.$$

Si les valeurs de ces paramètres étaient données exactement, les équations

$$V = 0, \quad V' = 0, \quad V'' = 0, \ldots \qquad (1)$$

en nombre égal à celui des inconnues x, y, z, ... détermineraient celles-ci.

De plus, on pourrait remplacer le système (1) par l'équation *unique*

$$\sum V^2 = 0. \qquad (2)$$

Au lieu de cela, et quelles que soient les valeurs adoptées pour x, y, z, ..., les seconds membres des équations (1) sont

(*) On devrait dire : *de la moindre somme des carrés.*

(**) *Méthode...*, p. 121.

des quantités w, w', w'', ..., très petites si les observations ont été bien faites : ces quantités sont les *erreurs* provenant des observations.

L'équation (2) est remplacée par

$$\sum V^2 = \sum w^2.$$

La quantité Σw^2 ne pouvant être nulle, il est *naturel* de disposer des valeurs de x, y, z, ... de manière qu'elle soit la plus petite possible. On est ainsi conduit au principe de la *moindre somme des carrés des erreurs*, découvert, presque simultanément, par Legendre et par Gauss (*).

CXXXIII. — Sur les normales à certaines courbes.

(*Novembre* 1873.)

I. Problème (**). — *Sur la tangente* MP *à une courbe donnée,* AMB, *on prend* MP $= \varphi(s)$, s *désignant l'arc* AM, *compté à partir d'un point fixe* A. *Le lieu du point* P *est une ligne* PP'P''... *On propose de construire la normale* PN, *située dans le plan osculateur à la courbe donnée.*

x, y, z étant les coordonnées de M, les coordonnées de P sont, avec les notations ordinaires :

$$x_1 = x + a\varphi, \quad y_1 = y + b\varphi, \quad z_1 = z + c\varphi. \tag{1}$$

Par suite :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{ds} &= a(1 + \varphi') + a'\varphi, \\ \frac{dy_1}{ds} &= b(1 + \varphi') + b'\varphi, \\ \frac{dz_1}{ds} &= c(1 + \varphi') + c'\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(*) Pour les développements, voir nos *Remarques sur la méthode des moindres carrés.*

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

Les premiers membres sont *proportionnels* aux cosinus directifs de la tangente PS; donc l'équation du plan normal, en P, à la courbe PP′, est

$$\sum (X - x_1)\left[a(1 + \varphi') + a'\varphi\right] = 0. \tag{3}$$

Les équations de la *normale principale* MC, à la courbe donnée, sont (*)

$$\frac{X - x}{a'} = \frac{Y - y}{b'} = \frac{Z - z}{c'}. \tag{4}$$

Les valeurs de X, Y, Z, satisfaisant aux équations (3), (4), sont les coordonnées du point N où la normale PN rencontre MC. Si l'on fait $MN = p$, on a, par les proportions (4) :

$$X - x = pa'\rho, \quad Y - y = pb'\rho, \quad Z - z = pc'\rho \text{ (**)}. \tag{5}$$

On a aussi

$$X - x_1 = (X - x) - (x_1 - x) = pa'\rho - a\varphi.$$

Donc l'équation (3) devient

$$\sum (pa'\rho - a\varphi)\left[a(1 + \varphi') + a'\varphi\right] = 0,$$

ou

$$\frac{p\varphi}{\rho} - \varphi(1 + \varphi') = 0,$$

ou

$$p = \rho(1 + \varphi'). \tag{6}$$

II. Soit P_1 le point symétrique de P, relativement à M; soit p_1 la distance MN_1 :

$$p_1 = \rho(1 - \varphi').$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2}(p + p_1) = \rho. \tag{7}$$

(*) Voir notre *Théorie analytique des lignes à double courbure*, p. 9.

(**) A cause de

$$MC = \rho = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Ainsi, *le centre de courbure*, C, *est le milieu du segment déterminé, sur la normale principale, par les normales* MN, MN_1 (*).

III. Supposons que la distance MP soit constante, auquel cas la courbe PP′P″ ... est une sorte de *parallèle* à la courbe donnée (**).

Alors $\varphi' = 0$, et

$$p = \rho \tag{8}$$

Donc, *si une droite* MPQR *glisse tangentiellement à une courbe donnée* AMB, *et que* PP′, QQ′, RR′, ... *soient les trajectoires de ses différents points, les plans normaux en* P, Q, R, ... *à toutes ces trajectoires, passent au centre de courbure* C, *de* AMB. Autrement dit, *ces plans normaux se coupent suivant la droite polaire* CK (***).

IV. D'après les formules (2) et (6) :

$$\sum \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 = (1 + \varphi')^2 + \frac{\varphi^2}{\rho^2} = \frac{p^2 + \varphi^2}{\rho^2} = \frac{n^2}{\rho^2}; \tag{9}$$

n désignant la longueur du segment PN de la normale.

Les cosinus directifs de cette droite sont donc

$$\frac{\rho}{n}\left[a(1 + \varphi') + a'\varphi\right], \quad \frac{\rho}{n}\left[b(1 + \varphi') + b'\varphi\right], \quad \frac{\rho}{n}\left[c(1 + \varphi') + c'\varphi\right].$$

Par suite, si θ est l'angle des deux tangentes :

$$\cos\theta = \frac{\rho}{n}(1 + \varphi'),$$

ou

$$\cos\theta = \frac{p}{n} = \cos \text{MCP}. \tag{10}$$

(*) Dès 1857, M. Mannheim a trouvé, *pour les courbes planes*, des théorèmes analogues à celui-ci. (Voir les *Nouvelles Annales*, les *Annali matematica*, etc.)

(**) Nous l'appellerons *pseudo-parallèle*.

(***) Propriété connue, évidente par la théorie des axes instantanés.

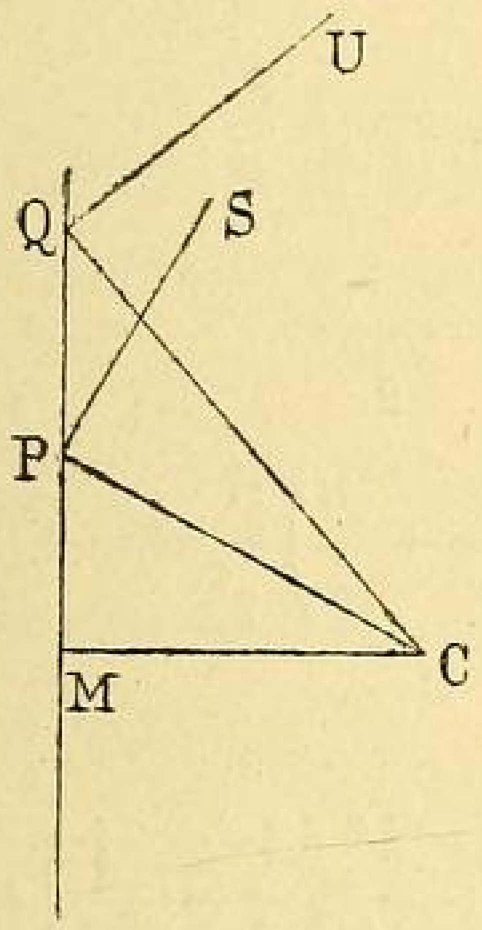
En effet, PS *est dans le plan osculateur* PMC (*), et les angles TPS, MCP ont les côtés respectivement perpendiculaires. De plus, par la formule (9) :

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{n}{\rho}. \tag{11}$$

Addition. — (*Janvier* 1886.)

V. Considérons la développable S, ayant AMB pour arête de rebroussement. Le plan tangent en P, à S, contient la tangente PS à la courbe PP'. D'ailleurs ce plan est osculateur, en M, à l'arête de rebroussement. Donc celui-ci contient PS.

VI. En revenant au cas particulier de PM = *const.*, projetons la figure sur le plan osculateur PMC. Les tangentes PS, QU, aux pseudo-parallèles, sont perpendiculaires, respectivement, à CP, CQ, ... Donc, d'après un théorème connu, l'*enveloppe de ces droites*, c'est-à-dire *l'antipodaire de* MP, *est la parabole qui a* M *pour sommet,* C *pour foyer.*



VII. *Courbure de la pseudo-parallèle.* — On a

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{ds_1^6} \sum (dx_1 d^2y_1 - dy_1 d^2x_1)^2, \tag{12}$$

quelle que soit la variable indépendante. Supposons que ce soit s. Alors, si nous désignons MP par k :

$$dx_1 = (a + a'k)ds, \quad dy_1 = (b + b'k)ds,$$

$$d^2x_1 = (a' + a''k)ds^2, \quad d^2y_1 = (b' + b''k)ds^2,$$

$$dx_1 d^2y_1 - dy_2 d^2x_1 = \left[(ab' - ba') + (ab'' - ba'')k + (a'b'' - b'a'')k^2\right] ds^3.$$

(*) Voir le paragraphe V.

A cause de $\frac{ds}{ds_1} = \frac{\rho}{n}$, la formule (12) devient

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \left(\frac{\rho}{n}\right)^6 S, \tag{13}$$

pourvu que l'on fasse

$$S = \sum (ab' - ba')^2 + k^2 \sum (ab'' - ba'')^2 + k^4 \sum (a'b'' - b'a'')^2$$
$$+ 2k \sum (ab' - ba')(ab'' - ba'') + 2k^2 \sum (ab' - ba')(a'b'' - b'a'')$$
$$+ 2k^3 \sum (ab'' - ba'')(a'b'' - b'a'').$$

Or (*) :

$$\sum (ab' - ba')^2 = \frac{1}{\rho^2}, \quad \sum (ab'' - ba'')^2 = \frac{1}{r^2\rho^4}(\rho^2 + r^2\rho'^2),$$

$$\sum (a'b'' - b'a'')^2 = \frac{1}{\rho^4}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right),$$

$$\sum (ab' - ba')(ab'' - ba'') = - \sum \frac{n}{\rho} \frac{\rho h + nr\rho'}{r\rho^2} \text{(**)} = - \frac{\rho'}{\rho^3},$$

$$\sum (ab' - ba')(a'b'' - b'a'') = \sum \frac{n}{\rho} \cdot \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{c}{r} + \frac{n}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho^4},$$

$$\sum (ab'' - ba'')(a'b'' - b'a'') = - \sum \frac{\rho h + nr\rho'}{r\rho^2} \left(\frac{c}{r} + \frac{n}{\rho}\right) \frac{1}{\rho^2} = - \frac{\rho'}{\rho^5}.$$

Ainsi,

$$S = \frac{1}{\rho^2} - 2k\frac{\rho'}{\rho^3} + \frac{k^2}{\rho^4}\left(2 + \frac{\rho^2}{r^2} + \rho'^2\right) - 2\frac{k^3\rho'}{\rho^5} + \frac{k^4}{\rho^4}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right);$$

ou, après quelques réductions faciles,

$$S = \frac{1}{\rho^6}\left[(n^2 - k\rho\rho')^2 + \frac{k^2 n^2 \rho^2}{r^2}\right].$$

La formule demandée est donc

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{n^6}\left[(n^2 - k\rho\rho')^2 + \frac{k^2 n^2 \rho^2}{r^2}\right]. \tag{14}$$

(*) *Théorie analytique des lignes à double courbure*, pp. 13 et suiv.

(**) Ici, n est un *cosinus directif*.

VIII. *Remarques.* — 1° Si l'on suppose r infini, auquel cas la courbe donnée est plane, la formule (14) se réduit à

$$\frac{1}{\rho_1} = \pm \frac{n^2 - k\rho\rho'}{n^3}. \tag{15}$$

2° Nous venons de rappeler que :

$$\sum (ab' - ba')^2 = \frac{1}{\rho^2}, \quad \sum (a'b'' - b'a'')^2 = \frac{1}{\rho^4}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right).$$

D'un autre côté (*) :

$$\sum (ab' - ba')c'' = \frac{1}{r\rho^2}.$$

Donc, par l'élimination de r et de ρ :

$$\sum (a'b'' - b'a'')^2 = \left[\sum (ab' - ba')^2\right]^3 + \left[\sum (ab' - ba')c''\right]^2. \tag{16}$$

Dans cette *identité*, a, b, c sont des fonctions d'une variable s, vérifiant la condition

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

3° Soit R le rayon de courbure, en C, de la *développée* de AMB. On sait que $R = \rho\rho'$. La formule (14), si l'on adopte le signe $+$, devient

$$\rho_1 = \frac{n^3}{n^2 - kR}.$$

On conclut, de celle-ci :

$$\frac{\rho_1}{\rho_1 - n} = \frac{\frac{n^2}{k}}{R},$$

puis l'élégante construction due à M. Nicolaïdès (*Nouvelles Annales*, 1866, p. 383).

(*) *Théorie analytique...*, p. 16.

CXXXIV. — Une intégrale d'équation.

(*Juin* 1874) (*).

Soit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = 0, \tag{1}$$

dont l'intégrale *immédiate* est

$$\mathcal{L}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \mathcal{L}\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) = \mathcal{L}\left(\mu+\sqrt{\mu^2+1}\right),$$

ou

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) = \mu+\sqrt{\mu^2+1}. \tag{2}$$

Comme facteur *intégrant*, on peut prendre

$$\lambda = xy + \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}. \tag{3}$$

En effet,

$$\frac{d\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{dy} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{d\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{y^2+1}}\right)}{dx}.$$

De plus, le premier membre de la proposée est une différentielle exacte. Donc, si l'on remplace λ par $-c$, et que l'on isole le radical, l'intégrale *médiate*, mise sous forme rationnelle, est

$$x^2 + y^2 + 2cxy + 1 - c^2 = 0. \tag{4}$$

(*) Introduction au théorème d'Euler, sur l'intégrale *algébrique* de

$$\frac{dx}{\sqrt{1-c^2\sin^2 x}} + \frac{dy}{\sqrt{1-c^2\sin^2 y}} = 0.$$

CXXXV. — Sur les surfaces orthogonales.

(*Juin* 1874) (*).

1. Problème. — *Déterminer toutes les surfaces* Σ *qui coupent, orthogonalement, les surfaces* S *représentées par*

$$F(x, y, z) = c. \tag{1}$$

Cherchons d'abord les trajectoires orthogonales des surfaces S.

Soit $Pdx + Qdy + Rdz$ la différentielle de $F(x, y, z)$. Les équations différentielles du problème sont :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{2}$$

Les surfaces S, se succédant d'une manière continue, admettent une infinité de trajectoires orthogonales ; donc *les équations simultanées* (2) *sont toujours intégrables*. Si

$$f(x, y, z) = \alpha, \quad f_1(x, y, z) = \beta \tag{3}$$

en sont les intégrales, celles-ci représentent toutes les trajectoires cherchées, et

$$f(x, y, z) = \varphi[f_1(x, y, z)] \tag{4}$$

représente toutes les surfaces Σ, φ étant une fonction arbitraire (**).

(*) Un extrait de cette Note a paru dans les *Comptes rendus* (séance du 6 juillet 1874). La méthode est celle dont j'ai fait usage dans le petit Mémoire intitulé : *Recherche des lignes de courbure de la surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites qui se coupent est constante* (Académie de Belgique, Savants étrangers, t. XXXII).

(**) De là résulte que *si*, comme on l'a supposé,

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

est intégrable, l'intégration de

$$Pp + Qq = R$$

équivaut au problème proposé.

II. Problème. — 1° *Reconnaître si les surfaces* S, *représentées par l'équation* (1), *appartiennent à un système orthogonal triple;*

2° *Trouver, si elles existent, les surfaces* Σ_1, Σ_2 *qui, avec les surfaces* S, *constituent le système.*

Attribuons à la fonction φ deux formes particulières, ψ et π : si les surfaces correspondantes sont orthogonales, le problème sera résolu. La condition d'*orthogonalité* est

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{df}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{df}{dz}\right)^2-\left[\dfrac{df}{dx}\dfrac{df_1}{dx}+\dfrac{df}{dy}\dfrac{df_1}{dy}+\dfrac{df}{dz}\dfrac{df_1}{dz}\right](\psi'+\pi')\\ \qquad+\left[\left(\dfrac{df_1}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{df_1}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{df_1}{dz}\right)^2\right]\psi'\pi'=0.\end{array}\right\}\quad(5)$$

Dans cette équation :

$$\psi'=\psi'[f_1(x,y,z)]=\psi'(\beta),\quad \pi'=\pi'[f_1(x,y,z)]=\pi'(\beta).\quad(6)$$

En chaque point des lignes de courbure de S, déterminées par les surfaces Σ, on a

$$f(x,y,z)=\psi(\beta),\quad f_1(x,y,z)=\beta.\quad(7)$$

Si donc, entre les équations (3) et (5), on élimine deux des trois variables x, y, z, l'équation résultante devra être *identique*. En exprimant les conditions nécessaires pour que la troisième variable disparaisse ainsi, en même temps que les deux autres, on obtiendra deux équations différentielles, entre ψ, π et β (*).

III. Problème. — *Quelles doivent être la forme d'une fonction* F(a, b, x), *et les valeurs des paramètres* a, b, *pour que l'on ait, identiquement,*

$$F(a,b,x)=0\ ?\ (^{**}).$$

1° La fonction F, nulle, quelles que soient les valeurs attri-

(*) Ce qui précède est tiré du Mémoire. J'ai conclu, de cette méthode, divers systèmes orthogonaux.

(**) Si l'on remplace a, b, x par x, y, z, le problème peut être énoncé ainsi : *Trouver l'équation des surfaces qui contiennent des droites parallèles à l'axe* Oz.

buées à x, doit, en particulier, être nulle pour $x = 0$. Ainsi, déjà, les paramètres satisfont à la condition

$$F(a, b, o) = 0.$$

2° Soit

$$y = F(a, b, x) - F(a, b, o).$$

Cette fonction y, *identiquement nulle* pour $x = 0$, doit être toujours nulle, c'est-à-dire *constante.* Comme le premier terme est variable et le second terme constant, la condition imposée est absurde, à moins que y ait la forme $\varphi(a, b)\,X$, et que les paramètres vérifient l'équation $\varphi(a, b) = 0$ (*).

3° De

$$F(a, b, x) - F(a, b, o) = \varphi(a, b) X,$$

on conclut que

$$F(a, b, x) = A + \lambda X,$$

les quantités A, λ *étant indépendantes de* x, *et la fonction* X *n'étant pas infinie pour* $x = 0$.

En outre, les valeurs des paramètres sont données par les équations

$$A = 0, \quad \lambda = 0.$$

IV. Revenons aux équations (3), (5); et supposons, comme précédemment, que les valeurs de x, y, tirées des deux premières, soient substituées dans la troisième. *Si le système orthogonal existe, on devra pouvoir disposer des fonctions* φ, π, *de manière à faire disparaître* z. D'après le dernier paragraphe, le résultat de la substitution a la forme $A + \lambda Z$. Et comme les quantités $\psi' + \pi'$, $\psi'\pi'$ sont indépendantes de z, on a, séparément :

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 &= A + \lambda Z,\\
\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{df_1}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{df_1}{dz} &= B + \mu Z,\\
\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dz}\right)^2 &= C + \nu Z.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

(*) La fonction X ne doit pas devenir infinie pour $x = 0$. Elle peut contenir a et b.

Nous croyons donc pouvoir énoncer ce théorème :

Soient

$$f(x, y, z) = \alpha, \quad f_1(x, y, z) = \beta$$

les équations d'une infinité de lignes, trajectoires orthogonales des surfaces S *représentées par* $F(x, y, z) = c$. *Pour que ces surfaces puissent faire partie d'un système orthogonal triple, les dérivées partielles* $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, ... *doivent, après l'élimination de* x, y, *satisfaire aux équations* (8), *dans lesquelles les quantités* A, B, C, λ, μ, ν *sont indépendantes de* z (*).

V. Au moyen des valeurs (8), l'équation (5) devient

$$(A + \lambda Z) - (B + \mu Z)(\psi' + \pi') + (C + \nu Z)\psi'\pi' = 0.$$

Cette *équation de condition*, devant avoir lieu quel que soit z, se décompose en

$$A - B(\psi' + \pi') + C\psi'\pi' = 0, \quad \lambda - \mu(\psi' + \pi') + \nu\psi'\pi' = 0.$$

Par conséquent, ψ' *et* π' *sont les deux valeurs de* $\frac{d\alpha}{d\beta}$, *satisfaisant à l'équation*

$$(B\nu - C\mu)\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2 + (C\lambda - A\nu)\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right) + A\mu - B\lambda = 0, \tag{9}$$

du premier ordre et du second degré. Une équation du premier ordre ayant toujours une intégrale, il s'ensuit que : *Si les conditions* (8) *sont remplies, il existe deux séries de surfaces* Σ_1, Σ_2, *formant, avec les surfaces* S, *un système triplement orthogonal. Les conditions* (8), *nécessaires, sont donc suffisantes* (**).

(*) Quand l'équation donnée a la forme

$$X + Y + Z = 0,$$

les égalités (8) conduisent, assez rapidement, aux conditions

$$X'X''' = 2(X'' - a)(X'' - b), \quad Y'Y''' = 2(Y'' - a)(Y'' - b),$$
$$Z'Z''' = 2(Z'' - a)(Z'' - b),$$

trouvées par M. Serret (*Journal de Liouville*, t. XII).

(**) Les doutes exprimés dans la Note insérée aux *Comptes rendus*

VI. *Application.*

$$(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) = c \sin z,$$

ou

$$\mathcal{L}.(e^x + e^{-x}) + \mathcal{L}.(e^y + e^{-y}) - \mathcal{L}.\sin z = \mathcal{L}.(c). \qquad (1)$$

Donc

$$P = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad Q = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}, \quad R = -\frac{\cos z}{\sin z};$$

puis

$$\frac{dx}{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)} = \frac{dy}{\left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right)} = -\frac{dz}{\left(\frac{\cos z}{\sin z}\right)}. \qquad (2)$$

Les intégrales sont

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\cos z} = \alpha, \quad \frac{e^y - e^{-y}}{\cos z} = \beta. \qquad (3)$$

Par suite :

$$\frac{df}{dx} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos z}, \quad \frac{df}{dy} = 0, \quad \frac{fd}{dz} = \frac{(e^x - e^{-x})\sin z}{\cos^2 z},$$

$$\frac{df_1}{dx} = 0, \quad \frac{df_1}{dy} = \frac{e^y + e^{-y}}{\cos y}, \quad \frac{df_1}{dz} = \frac{(e^y - e^{-y})\sin z}{\cos^2 z};$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2(\cos^2 z - \sin^2 z)}{\cos^4 z}$$

$$= \frac{\alpha^2 \cos^2 z + 2(1 + \cos^2 z - \sin^2 z)}{\cos^4 z} = \frac{\alpha^2 + 4}{\cos^2 z},$$

$$\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{df_1}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{df_1}{dz} = \frac{\alpha\beta \sin^2 z}{\cos^2 z},$$

$$\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dz}\right)^2 = \frac{\beta^2 + 4}{\cos^2 z}.$$

(6 juillet 1874) subsistent encore (février 1886); et je suis loin d'être satisfait de la démonstration employée dans le paragraphe IV. Néanmoins, comme toutes les applications que j'ai essayées, du théorème énoncé, m'ont conduit à des résultats exacts, je le soumets à l'appréciation des Géomètres.

Ces valeurs, comparées à

$$A + \lambda Z, \quad B + \mu Z, \quad C + \nu Z,$$

donnent :

$$A = \alpha^2 + 4, \quad \lambda = \alpha^2 + 4, \quad B = 0, \quad \mu = \alpha\beta, \quad C = \beta^2 + 4,$$
$$\nu = \beta^2 + 4, \quad Z = \mathrm{tg}^2 z.$$

L'équation (9) se réduit à

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4}} = \pm \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4}}.$$

L'intégrale de celle-ci est (*)

$$\alpha^2 + \beta^2 \pm h\alpha\beta + 4 - h^2 = 0.$$

Par conséquent, les surfaces Σ_1, Σ_2 sont représentées par

$$(e^x - e^{-x})^2 + (e^y - e^{-y})^2 + h(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) + (4 - h^2)\cos^2 z = 0,$$
$$(e^x - e^{-x})^2 + (e^y - e^{-y})^2 - g(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) + (4 - g^2)\cos^2 z = 0.$$

Elles constituent, avec les surfaces données, un système triplement orthogonal.

VII. *Cas particulier remarquable.* Supposons que l'équation donnée ait la forme

$$F(x) + F(y) + F(z) = c \text{ (**)}. \tag{10}$$

Considérons la ligne (inconnue) dont les équations seraient

$$f(x) = f(y) = f(z), \tag{11}$$

puis les surfaces Σ contenant cette ligne. Leur équation est

$$f(x) - f(z) + \lambda[f(y) - f(z)] = 0. \tag{12}$$

(*) Voir la *Note* CXXXIV, p. 164.

(**) Chacune des surfaces S, représentée par cette équation, est située de la même manière relativement aux trois plans coordonnés. Si, par exemple,

$$F(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

S est une *surface de révolution* autour de la *droite isogonale*.

La condition d'orthogonalité de S et de Σ est

$$F'(x)f'(x) + \lambda F'(y)f'(y) - (1 + \lambda)F'(z)f'(z) = 0.$$

Elle devient identique si l'on prend

$$f'(x) = \frac{1}{F'(x)}, \quad f'(y) = \frac{1}{F'(y)}, \quad f'(z) = \frac{1}{F'(z)},$$

ou

$$f(x) = \int \frac{dx}{F'(x)}, \quad f(y) = \int \frac{dy}{F'(y)}, \quad f(z) = \int \frac{dz}{F'(z)}.$$

Soient maintenant deux surfaces Σ_1, Σ_2, la première représentée par l'équation (12), la seconde par

$$f(x) - f(z) + \mu[f(y) - f(z)] = 0. \tag{13}$$

La condition d'orthogonalité est

$$[f'(x)]^2 + \lambda\mu[f'(y)]^2 + (1 + \lambda)(1 + \mu)[f'(z)]^2 = 0.$$

Elle se réduit à une identité, pour $x = y = z$, si les constantes λ, μ vérifient la relation

$$1 + \lambda\mu + (1 + \lambda)(1 + \mu) = 0. \tag{14}$$

En résumé :

Par la droite isogonale passent une infinité de couples de surfaces Σ_1, Σ_2, orthogonales deux à deux (*), *et orthogonales à toutes les surfaces* S (**).

VIII. *Suite.* — Dans l'équation (10), je prends

$$F(x) = \mathcal{L} . \sin x, \tag{15}$$

de manière que les surfaces S sont représentées par

$$\sin x . \sin y . \sin z = \sin c.$$

(*) A chaque valeur de λ correspond une valeur de μ.

(**) Ce n'est donc point là un *système triplement orthogonal,* dans le sens habituel de l'expression.

Les équations (8) deviennent

$$\frac{dx}{\cot x} = \frac{dy}{\cot y} = \frac{dz}{\cot z}.$$

On déduit, de celles-ci :

$$\frac{\cos x}{\cos z} = \alpha, \quad \frac{\cos y}{\cos z} = \beta.$$

Donc

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 = \frac{\sin^2 x \cos^2 z + \cos^2 x \sin^2 z}{\cos^4 z} = \frac{1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \cos^2 z}{\cos^2 z},$$

$$\frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\alpha}{dz} \cdot \frac{d\beta}{dz} = \frac{\cos x \cos y \sin^2 z}{\cos^4 z} = \frac{\alpha\beta(1 - \cos^2 z)}{\cos^2 z},$$

$$\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 = \frac{\sin^2 y \cos^2 z + \cos^2 y \sin^2 z}{\cos^4 z} = \frac{1 + \beta^2 - 2\beta^2 \cos^2 z}{\cos^2 z};$$

puis

$$A = -2\alpha^2, \quad \lambda = 1 + \alpha^2, \quad B = -\alpha\beta, \quad \mu = \alpha\beta,$$

$$C = -2\beta^2, \quad \nu = 1 + \beta^2, \quad Z = \frac{1}{\cos^2 z}.$$

L'équation (9) est, par suite,

$$\alpha\beta(\beta^2 - 1)\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right) - \alpha\beta(\alpha^2 - 1) = 0.$$

Celle-ci n'est peut-être pas facilement intégrable ; mais *le système triple existe.*

IX. *Remarque.* — Soient, comme précédemment,

$$f(x, y, z) = \alpha, \quad f_1(x, y, z) = \beta \tag{3}$$

les intégrales des équations *simultanées :*

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{2}$$

Par la théorie connue :

$$P\frac{df}{dx}+Q\frac{df}{dy}+R\frac{df}{dz}=0,$$

$$P\frac{df_1}{dx}+Q\frac{df_1}{dy}+R\frac{df_1}{dz}=0;$$

puis

$$\frac{P}{\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dz}-\frac{df}{dz}\frac{df_1}{dy}}=\frac{Q}{\frac{df}{dz}\frac{df_1}{dx}-\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dz}}=\frac{R}{\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dx}}=\theta; \quad (16)$$

θ étant une fonction de x, y, z, ou une *constante*.

On conclut, de ces proportions :

$$P^2+Q^2+R^2=\theta^2\sum\left[\left(\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dz}-\frac{df}{dz}\frac{df_1}{dy}\right)^2\right]. \quad (17)$$

La somme contenue dans le second membre est la même chose que

$$\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2\right]\left[\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{df_1}{dy}\right)^2+\left(\frac{df_1}{dz}\right)^2\right]$$
$$-\left[\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dy}+\frac{df}{dz}\frac{df_1}{dz}\right]^2;$$

c'est-à-dire, d'après les formules (8),

$$(A+\lambda Z)(C+\nu Z)-(B+\mu Z)^2.$$

Donc, finalement,

$$(A+\lambda Z)(C+\nu Z)-(B+\mu Z)^2=\frac{P^2+Q^2+R^2}{\theta^2}. \quad (18)$$

X. *Application.* — Dans l'exemple ci-dessus (VIII) :

$$P=\cot x,\quad Q=\cot y,\quad R=\cot z,$$

$$\alpha=\frac{\cos x}{\cos z},\quad \beta=\frac{\cos y}{\cos z},$$

$$A+\lambda Z=\frac{1+\alpha^2-2\alpha^2\cos^2 z}{\cos^2 z},\quad B+\mu Z=\frac{\alpha\beta(1-\cos^2 z)}{\cos^2 z},$$

$$C+\nu Z=\frac{1+\beta^2-2\beta^2\cos^2 z}{\cos^2 z}.$$

Donc

$$(A + \lambda Z)(C + \nu Z) - (B + \lambda\mu)^2$$
$$= \frac{1}{\cos^4 z}\left[(1 + \alpha^2 - 2\alpha^2\cos^2 z)(1 + \beta^2 - 2\beta^2\cos^2 z) - \alpha^2\beta^2(1 - \cos^2 z)^2\right],$$

ou

$$(A + \lambda Z)(C + \nu Z) - (B + \lambda\mu)^2$$
$$= \frac{1}{\cos^4 z}\left[1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2\beta^2)\cos^2 z + 3\alpha^2\beta^2\cos^4 z\right].$$

D'un autre côté,

$$P^2 + Q^2 + R^2 = \frac{\alpha^2\cos^2 z}{1 - \alpha^2\cos^2 z} + \frac{\beta^2\cos^2 z}{1 - \beta^2\cos^2 z} + \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z};$$

ou, après quelques réductions,

$$(1 - \alpha^2\cos^2 z)(1 - \beta^2\cos^2 z)\sin^2 z[P^2 + Q^2 + R^2]$$
$$= \cos^2 z[1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2\beta^2)\cos^2 z + 3\alpha^2\beta^2\cos^4 z].$$

La comparaison avec la relation (18) donne

$$\theta^2 = \frac{\cos^6 z}{(1 - \alpha^2\cos^2 z)(1 - \beta^2\cos^2 z)\sin^2 z};$$

ou plutôt,

$$\theta^2 = \frac{\cos^6 z}{\sin^2 x \sin^2 y \sin^2 z};$$

expression qui s'accorde avec les égalités (16).

Addition. — (*Février* 1886.)

XI. *Une propriété numérique.* — L'équation (9) a la forme

$$(Bc - Cb)x^2 + (Ca - Ac)x + Ab - Ca = 0.$$

Celle-ci étant résolue par rapport à x, la quantité sous le radical est

$$(Ca - Ac)^2 - 4(Bc - Cb)(Ab - Ba).$$

Si on la multiple par C^2, et qu'on emploie la transformation ordinaire, on trouve *l'identité*

$$\left.\begin{array}{r} C^2\left[(Ca - Ac)^2 - 4(Bc - Cb)(Ab - Ba)\right] \\ = [C^2a + (2B^2 - AC)c - 2BCb]^2 - 4(B^2 - AC)(Bc - Cb)^2 \end{array}\right\} \quad (A)$$

Par conséquent :

A, B, C, a, b, c, m *étant des nombres entiers, la quantité*

$$C^2\left[(Ca - Ac)^2 - 4(Bc - Cb)(Ab - Ba)\right]$$

est une somme de deux carrés, si $B^2 - AC = -m^2$.

XII. *Suite.* — D'après cette remarque, l'identité (A) prend la forme

$$NC^2 = X^2 + Y^2,$$

X et Y étant des nombres entiers. De cette égalité, on conclut, facilement,

$$N = X'^2 + Y'^2,$$

même quand X et Y ont des facteurs communs. L'énoncé précédent peut donc être remplacé par celui-ci :

A, B, C, a, b, c, m *étant des nombres entiers, la quantité*

$$N = (Ca - Ac)^2 - 4(Bc - Cb)(Ab - Ba)$$

est une somme de deux carrés, si $B^2 - AC = -m^2$.

XIII. *Applications.*

1° $A = 2,\ B = 5,\ C = 17,\ a = 1,\ b = 3,\ c = 2,\ m = 3.$

On a

$$N = 13^2 + 4 \cdot 41 = 333 = 18^2 + 3^2.$$

2° $A = 2,\ B = 1,\ C = 13,\ a = 1,\ b = 2,\ c = 3,\ m = 5.$

On trouve

$$N = 7^2 + 4 \cdot 23 \cdot 3 = 325 = 18^2 + 1^2 = 17^2 + 6^2 = 15^2 + 10^2.$$

CXXXVI. — Sur une intégrale pseudo-elliptique (*).

I. Une lettre de Fuss à Condorcet, rappelée par M. Darboux (**), contient le passage suivant :

« ... La formule intégrale

$$\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4},$$

» qu'il (Euler) observe pouvoir être rendüe rationnelle (***)
» moyennant la substitution singulière

$$x = \frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}}$$

» quoiqu'il ait cru autrefois qu'il soit impossible de la réduire
» à la rationalité par quelque substitution que ce soit, parce
» qu'il en pouvoit (IV) exprimer l'intégrale par des logarithmes
» et des arcs de cercles... »

Je vais montrer, dans cette courte Note, que la substitution employée par Euler, au lieu d'être *singulière*, est, pour ainsi dire, *forcée*, en ce sens qu'elle est la résultante de plusieurs transformations simples et connues.

II. Soit

$$dy = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx. \tag{1}$$

1° Si l'on fait

$$x = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi \text{ (V)}, \tag{2}$$

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique* (1880). A propos d'un travail de M. Hermite, publié dans le *Journal de Resal*, t. VI, p. 5.

(**) *Bulletin des Sciences*, mai 1879, p. 226.

(***) C'est, bien entendu, *la différentielle* qui peut être rendue rationnelle.

(IV) Plus loin, nous reviendrons sur ce mot.

(V) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 9.

on trouve :

$$dx = \frac{d\varphi}{1 + \cos\varphi}, \quad 1 - x^4 = 4\frac{\cos\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2}, \quad 1 + x^4 = 4\frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2},$$

$$dx\sqrt{1 + x^4} = 2\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}{(1 + \cos\varphi)^2}d\varphi;$$

puis

$$dy = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}d\varphi. \tag{3}$$

2° Faisons

$$\sin\varphi = z;$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{dz}{1 - z^2}.$$

L'équation (3) devient

$$dy = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}z^2}}{1 - z^2}dz. \tag{5}$$

Ainsi, *y n'est pas une intégrale elliptique* (*).

3° Pour faire disparaître le radical, on peut poser

$$\frac{z}{\sqrt{2}} = \sin\theta. \tag{6}$$

De là résulte, immédiatement,

$$dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cos^2\theta d\theta}{1 - 2\sin^2\theta}. \tag{7}$$

(*) D'après cela, dans le fragment rapporté plus haut, ne doit-on pas lire *pourroit*, au lieu de *pouvoit?* Si, *a priori*, Euler regardait $\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}dx$ comme la différentielle d'une *intégrale elliptique*, il devait conclure, comme l'écrit Fuss, à l'impossibilité de la rendre rationnelle.

4° Enfin, la transformation habituelle :

$$\operatorname{tg} \theta = t, \tag{8}$$

donne

$$dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dt}{(1-t^2)(1+t^2)}, \tag{9}$$

ou

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{dt}{t+1} - \frac{dt}{t-1} \right).$$

5° L'intégrale est donc

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} t + \frac{1}{4\sqrt{2}} \,\mathfrak{L} \cdot \frac{t+1}{t-1} + const.$$

III. Des formules (2), (4), (6), (8), on tire, successivement :

$$x = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}$$

$$= \frac{1-\sqrt{1-2\sin^2\theta}}{\sqrt{2}\sin\theta} = \frac{1-\sqrt{1-\dfrac{2t^2}{1+t^2}}}{\sqrt{2}\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}};$$

et enfin

$$x = \frac{\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{2}}; \tag{11}$$

ce qui, sauf une insignifiante différence de signes (*), est la transformation employée par Euler. Celle-ci, comme je l'ai dit en commençant, était donc *forcée*.

(*) Dans

$$x = \frac{\sqrt{1+p^2} + \sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}},$$

on peut convenir de prendre négativement le second radical, afin que $p=0$ donne $x=0$.

IV. L'équation (11) donne

$$t = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}.$$

On a donc, au lieu de l'intégrale (10),

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ arc tg } \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \mathcal{L} \cdot \frac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^4}}{x\sqrt{2}-\sqrt{1+x^4}} + \mathit{const.};$$

ou, sous une forme un peu plus simple,

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\text{arc sin } \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + \frac{1}{2} \mathcal{L} \cdot \frac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^4}}{x\sqrt{2}-\sqrt{1+x^4}} \right] + \mathit{const.}$$

Si l'intégrale est comptée à partir de $x = 0$,

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\text{arc sin} \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + \frac{1}{2} \mathcal{L} \cdot \frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}} \right],$$

ou enfin

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\text{arc sin} \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + \mathcal{L} \cdot \frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-x^2} \right] (*);$$

formule connue (*).

(*) *Cours d'Analyse*, p. 138.

CXXXVII. — Sur les Élassoïdes (1872) (*).

I. *Transformation des formules.* — Aux formules (87) de mon ancien Mémoire (**), on peut substituer celles-ci, dont la vérification est facile (***) :

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi'(a)\sin a + \varphi''(a)\cos a + \psi'(b)\sin b + \psi''(b)\cos b, \\ y &= \varphi'(a)\cos a - \varphi''(a)\sin a + \psi'(b)\cos b - \psi''(b)\sin b, \\ z &= \sqrt{-1}\left[\varphi(a) + \varphi''(a) - \psi(b) - \psi''(b)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

En particulier :

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi'(a)\sin a + \varphi''(a)\cos a + \varphi'(b)\sin b + \varphi''(b)\cos b, \\ y &= \varphi'(a)\cos a - \varphi''(a)\sin a + \varphi'(a)\cos b - \varphi''(b)\sin b, \\ z &= \sqrt{-1}\left[\varphi(a) + \varphi''(a) - \varphi(b) - \varphi''(b)\right] \text{ (iv)}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

II. *Élassoïdes algébriques.* — Pour en obtenir, il suffit de supposer que $\varphi(a)$ soit fonction de sin a ou de cos a.

Prenons, par exemple,

$$\varphi(a) = \cos 2a, \quad (3)$$

auquel cas les formules (2) deviennent

$$\left.\begin{aligned} \cos^3 a + \cos^3 b = -\frac{x}{4}, \quad \sin^3 a + \sin^3 b = \frac{y}{4}, \\ \cos^2 a - \cos^2 b = -\frac{z}{6}\sqrt{-1} \text{ (v)}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

(*) *Surfaces à courbure moyenne nulle.* Cette dénomination d'*élassoïde* a été proposée par M. Ribaucour, dans le beau Mémoire couronné, en 1880, par l'Académie de Belgique.

(**) *Journal de l'École polytechnique,* 37e Cahier, p. 156.

(***) Elle se fait comme on le voit à l'endroit cité.

(iv) Le système (2), ne renfermant qu'*une* fonction arbitraire, ne constitue pas l'*intégrale générale* de l'équation aux dérivées partielles :

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0.$$

(v) Nous supprimons le calcul, très simple.

Pour éviter les fractions, soient, généralement :

$$\cos^3 a + \cos^3 b = \mathrm{A}, \quad \sin^3 a + \sin^3 b = \mathrm{B}, \quad \cos^2 a - \cos^2 b = 2\mathrm{C}, \tag{5}$$

puis l'équation *auxiliaire* :

$$\cos^2 a + \cos^2 b = 2\lambda. \tag{6}$$

Il résulte, des deux dernières :

$$\left.\begin{array}{ll} \cos^2 a = \lambda + \mathrm{C}, & \cos^2 b = \lambda - \mathrm{C}, \\ \sin^2 a = 1 - \lambda - \mathrm{C}, & \sin^2 b = 1 - \lambda + \mathrm{C}. \end{array}\right\} \tag{7}$$

De la première des équations (5), on tire

$$\cos^6 a = \mathrm{A}^2 - 2\mathrm{A}\cos^3 b + \cos^6 b,$$

puis

$$4\mathrm{A}^2 \cos^6 b = (\mathrm{A}^2 - \cos^6 a + \cos^6 b)^2,$$

c'est-à-dire, à cause des valeurs (7) :

$$4\mathrm{A}^2(\lambda - \mathrm{C})^3 = [\mathrm{A}^2 - 2\mathrm{C}^3 - 6\mathrm{C}\lambda^2]^2. \tag{8}$$

On trouve, semblablement,

$$4\mathrm{B}^2(1 + \mathrm{C} - \lambda)^3 = [\mathrm{B}^2 + 2\mathrm{C}^3 + 6\mathrm{C}(1-\lambda)^2]^2 \text{ (*)}. \tag{9}$$

Il resterait à éliminer λ, ce qui serait plus long que difficile. Mais il vaut mieux conserver les équations (8) et (9), en y regardant λ comme un paramètre variable : ces équations représentent la génératrice de l'*élassoïde* (**).

III. *Remarque.* — Celui-ci est *réel.* En effet, soit $z = 0$, d'où $\mathrm{C} = 0$. Les équations (8), (9) se réduisent à

$$4\lambda^3 = \frac{x^2}{16}, \quad 4(1-\lambda)^3 = \frac{y^2}{16}.$$

(*) L'égalité (8) étant connue, il suffit, pour former l'égalité (9), de changer A, C, λ en B, — C, 1 — λ.

(**) On ne doit pas oublier que

$$\mathrm{A} = -\frac{x}{4}, \quad \mathrm{B} = \frac{y}{4}, \quad \mathrm{C} = -\frac{z}{6}\sqrt{-1}.$$

Il résulte, de celles-ci,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3}},$$

équation d'une *hypocycloïde à quatre rebroussements.*

IV. *Rayons principaux.* — Reprenons les formules rappelées ci-dessus (*) :

$$\left.\begin{aligned} dx &= \varpi'(a)\sin a da + \pi'(b)\sin b db,\\ dy &= \varpi'(a)\cos a da + \pi'(b)\cos b db,\\ dz &= \sqrt{-1}\,[\varpi'(a)da - \pi'(b)db]; \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

puis les suivantes, qui s'en déduisent :

$$\left.\begin{aligned} &p = \sqrt{-1}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}, \quad q = -\sqrt{-1}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)},\\ &1 + p^2 + q^2 = -\cot^2\frac{1}{2}(a-b). \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

L'équation qui donne les rayons principaux d'un élassoïde est

$$(s^2 - rt)\,\mathrm{R}^2 = (1 + p^2 + q^2)^2. \quad (12)$$

Il s'agit de former $s^2 - rt$.

Or :

$$r\frac{dx}{da} + s\frac{dy}{da} = \frac{dp}{da}, \quad r\frac{dx}{db} + s\frac{dy}{db} = \frac{dp}{db},$$

$$s\frac{dx}{da} + t\frac{dy}{da} = \frac{dq}{da}, \quad s\frac{dx}{db} + t\frac{dy}{db} = \frac{dq}{db}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da} &= \left(r\frac{dx}{da} + s\frac{dy}{da}\right)\left(s\frac{dx}{db} + t\frac{dy}{db}\right) - \left(r\frac{dx}{db} + s\frac{dy}{db}\right)\left(s\frac{dx}{da} + t\frac{dy}{da}\right)\\ &= (rt - s^2)\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right), \end{aligned}$$

(*) Ce sont les formules (87) du Mémoire.

ou

$$s^2 - rt = -\frac{\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da}}{\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}}. \tag{13}$$

D'après les formules (10), la valeur du dénominateur est, évidemment,

$$\varpi'(a)\,\pi'(b)\sin(a-b).$$

D'un autre côté, les relations (11) donnent :

$$\frac{dp}{da} = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}\,\frac{\cos b}{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}, \qquad \frac{dq}{db} = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}\,\frac{\sin a}{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)},$$

$$\frac{dp}{db} = \frac{1}{2}\sqrt{-1}\,\frac{\cos a}{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}, \qquad \frac{dq}{da} = \frac{1}{2}\sqrt{-1}\,\frac{\sin b}{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}.$$

Ainsi

$$\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da} = -\frac{1}{4}\,\frac{\sin(a-b)}{\sin^4\frac{1}{2}(a-b)};$$

puis

$$s^2 - rt = \frac{1}{4\varpi'(a)\,\pi'(b)\sin^4\frac{1}{2}(a-b)}. \tag{14}$$

D'ailleurs (11),

$$(1+p^2+q^2)^2 = \frac{\cos^4\frac{1}{2}(a-b)}{\sin^4\frac{1}{2}(a-b)}.$$

Donc, finalement,

$$R^2 = 4\varpi'(a)\,\pi'(b)\cos^4\frac{1}{2}(a-b). \tag{15}$$

V. *Discussion d'un élassoïde.* — A la fin du Mémoire, nous avons donné les formules :

$$\left.\begin{aligned} -x &= (e^n + e^{-n})\cos m + (e^n - e^{-n})\sin m,\\ y &= (e^n + e^{-n})\sin m - (e^n - e^{-n})\cos m,\\ -z &= 2(m+n) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Il résulte, des deux premières :

$$x^2 + y^2 = 2(e^{2n} + e^{-2n}), \tag{17}$$

$$(x \cos m - y \sin m)^2 - (x \sin m + y \cos m)^2 = 4 \tag{18}$$

Soient :

$$x = u \cos \omega, \quad y = u \sin \omega.$$

L'équation (18) devient

$$u^2[\cos^2(m + \omega) - \sin^2(m + \omega)] = 4,$$

puis

$$2m = -2\omega + \operatorname{arc} \cos \frac{4}{u^2} \cdot \tag{19}$$

Quant à l'équation (17), elle donne

$$e^{-2n} = \frac{u^2 - \sqrt{u^2 - 16}}{4} \cdot \tag{20}$$

L'équation de la surface est donc

$$z = 2\omega - \operatorname{arc} \cos \frac{4}{u^2} + \mathcal{L} \frac{u^2 - \sqrt{u^2 - 16}}{4} \cdot \tag{21}$$

Celle-ci a la forme

$$z = k\omega + \mathrm{F}(u).$$

Or, cette nouvelle équation appartient à la *surface d'une vis*, dont le *pas* est $2k\pi$, et dont le *profil* serait représenté par

$$z = \mathrm{F}(x) \text{ (*)}.$$

VI. ***Remarque***. — Si l'on éliminait seulement n, l'équation (21) serait remplacée par le système suivant, qui représente une génératrice quelconque de l'élassoïde :

$$u^2 \cos (2m + 2\omega) = 4, \tag{22}$$

$$z = -2m + \mathcal{L} . \frac{u^2 - \sqrt{u^2 - 16}}{4} . \tag{23}$$

(*) Mémoire, p. 20.

Cela posé :

1° L'équation (22) représente une infinité de *cylindres hyperboliques,* égaux à celui dont l'équation est

$$y^2 - x^2 = 4.$$

2° L'équation (22) représente des *surfaces de révolution,* égales entre elles.

Quand le cylindre tourne autour de l'axe Oz, la surface de révolution glisse le long de cet axe. On voit donc, de nouveau, que l'*élassoïde* considéré *est une surface de vis.*

Addition. — (*Septembre* 1880) (*).

VII. A la fin de son *avant-propos,* l'Auteur du travail envoyé à l'Académie, s'énonce ainsi :

« M. Sophus Lie..... a montré que les surfaces à courbure » moyenne nulle sont, de deux façons, des *surfaces-moulures.* »

J'ai toujours *soupçonné,* sans pouvoir le démontrer, que les élassoïdes sont des *surfaces à génératrice* constante. Quant au théorème de M. Lie, il résulte assez simplement, si je le comprends bien, des formules :

$$x = \int \varpi'(a) \sin a da + \int \pi'(b) \sin b db,$$

$$y = \int \varpi'(a) \cos a da + \int \pi'(b) \cos b db,$$

$$z = \sqrt{-1}\left[\varpi(a) + \pi(b)\right].$$

Soient :

$$\int \varpi'(a) \sin a da = X, \qquad \int \pi'(b) \sin b db = X_1,$$

$$\int \varpi'(a) \cos a da = Y, \qquad \int \pi'(b) \cos b db = Y_1,$$

$$\sqrt{-1}\, \varpi(a) = Z, \qquad \sqrt{-1}\, \pi(b) = Z_1;$$

(*) Tirée du Rapport sur le Mémoire de M. Ribaucour.

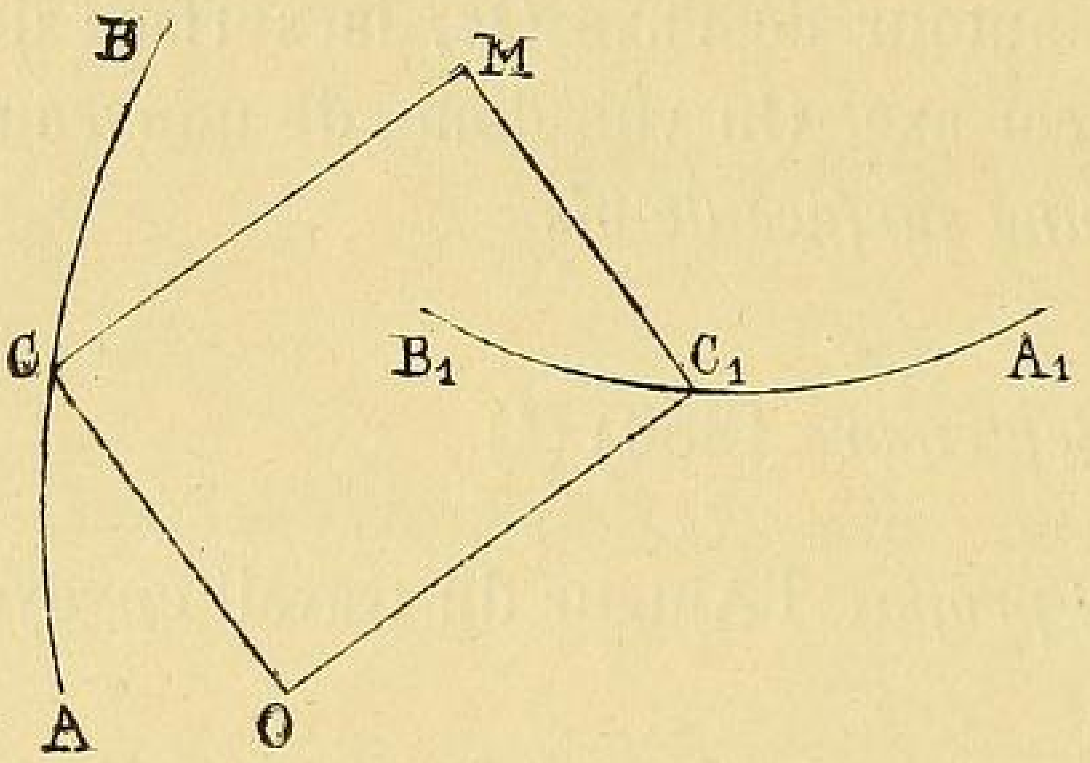
et, par conséquent :

$$x = X + X_1, \quad y = Y + Y_1, \quad z = Z + Z_1.$$

Il est clair que l'on a

$$X = f(Z), \quad Y = \varphi(Z); \quad X_1 = f_1(Z), \quad Y_1 = \varphi_1(Z_1).$$

Construisons les courbes AB, A_1B_1, représentées par ces équations ; prenons un point C sur la première, et un point C_1 sur la seconde. O étant l'origine, le sommet M, du parallélogramme construit sur OC et OC_1, appartient évidemment à la surface. De plus, si le point C_1 est fixe, M décrit une courbe *égale et parallèle* à ACB ; etc.



Dans le cas actuel, *les profils* AB, A_1B_1 *sont imaginaires.*

Autre addition. — (*Mai* 1885) (*).

VIII. A la page 150 de mon ancien Mémoire, on trouve, sous la forme suivante, les équations d'un élassoïde :

$$\left.\begin{aligned} x &= \left[e^{\nu} - \frac{1}{2}\nu(e^{\nu} - e^{-\nu})\right] \cos\theta + \frac{1}{2}\theta(e^{\nu} + e^{-\nu}) \sin\theta, \\ y &= \left[e^{\nu} - \frac{1}{2}\nu(e^{\nu} - e^{-\nu})\right] \sin\theta - \frac{1}{2}\theta(e^{\nu} + e^{-\nu}) \cos\theta, \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

$$z = \theta(\nu - 1); \quad (25)$$

puis, en note :

« D'après la forme de ces expressions, il est probable que » la surface peut être engendrée par le *roulement* d'une certaine » courbe..... la trace, sur le plan des *xy*, est une *développante* » *de cercle.* »

(*) Tirée d'une leçon à l'Université de Liège.

Si l'on fait

$$A = e^{\nu} - \frac{1}{2}\nu(e^{\nu} - e^{-\nu}), \quad B = \frac{1}{2}(e^{\nu} + e^{-\nu}), \tag{26}$$

une génératrice de la surface est représentée par

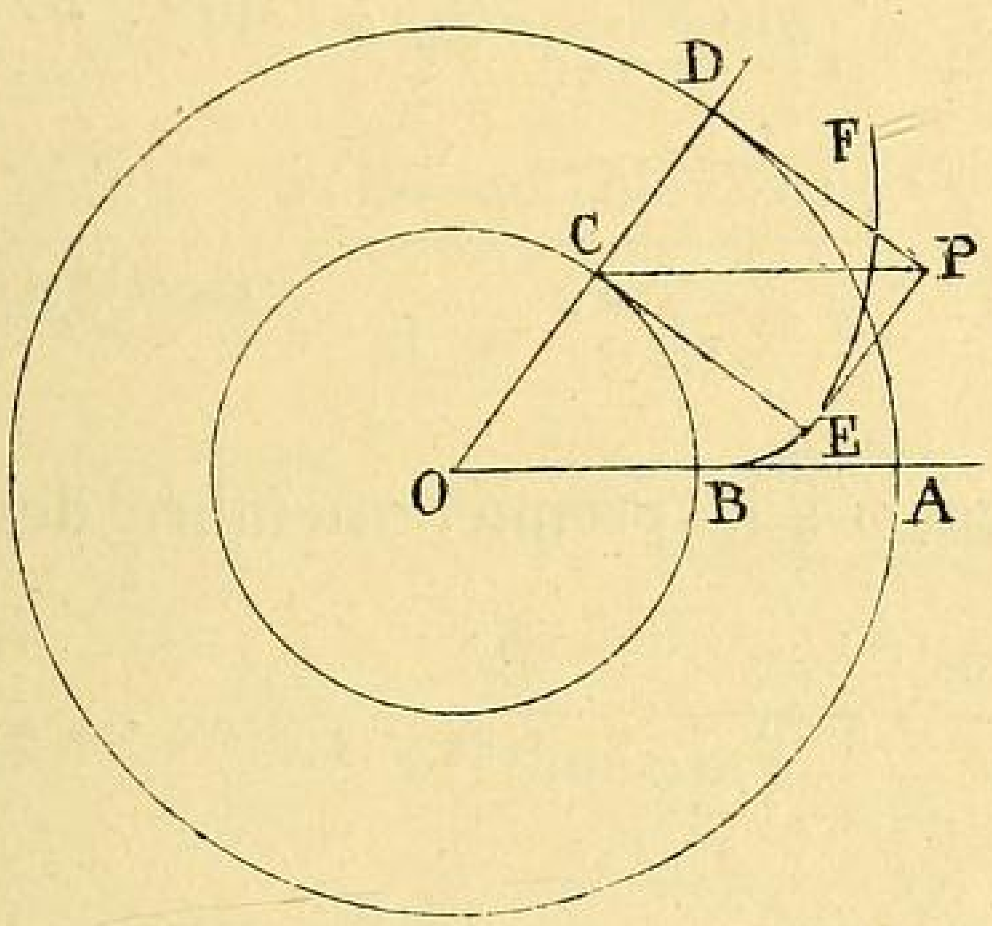
$$x = A\cos\theta + B\theta\sin\theta, \quad y = A\sin\theta - B\theta\cos\theta, \quad z = (\nu - 1)\theta.$$

Les deux premières formules étant écrites ainsi :

$$\left.\begin{aligned} x &= B(\cos\theta + \theta\sin\theta) + (A - B)\cos\theta, \\ y &= B(\sin\theta - \theta\cos\theta) + (A - B)\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

on voit que x, y sont les coordonnées d'un point P, défini de la manière suivante.

Soient décrites les circonférences OA, OB, puis la *développante* BEF ... du cercle OB. Menons la droite OCD faisant, avec OBA, l'angle arbitraire θ; puis construisons le rectangle DCEP.



Le lieu du point P, ou la projection horizontale de la génératrice, est donc une *pseudo-parallèle à la développante* variable BEF. On sait que la normale, en P, est la droite PC (*).

IX. *Remarque.* — On a, par les formules ci-dessus, ou par l'inspection de la figure,

$$x^2 + y^2 = A^2 + B^2\theta^2 = A^2 + B^2\left(\frac{z}{v - 1}\right)^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 - B^2\frac{z^2}{(v - 1)^2} = A^2.$$

Ainsi la génératrice, projetée suivant APQ..., appartient à un *hyperboloïde de révolution, à une nappe*.

(*) Voir page 160.

CXXXVIII. — Quelques intégrales définies (*).

X. Dans un *Mémoire sur les Nombres de Bernoulli et d'Euler* (**), j'ai donné les quatre formules :

$$P_{2q-1} = 8q \int_0^\infty \frac{\alpha^{2q-1}d\alpha}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} = \frac{q}{2^{2q-3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega\cos(2q-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega} + e^{-\frac{\pi}{2}\cot\omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2q+2}\omega} \text{ (***)},$$

$$E_{2q} = 4^{q+1} \int_0^\infty \frac{\alpha^{2q}d\alpha}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega\sin(2q-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega} + 1} \frac{d\omega}{\sin^{2q+2}\omega}.$$

Il en résulte :

$$4^q \int_0^\infty \frac{\alpha^{2q-1}d\alpha}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega\cos(2q-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega} + e^{-\frac{\pi}{2}\cot\omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2q+2}\omega}, \quad (48)$$

$$2^{2q+3} \int_0^\infty \frac{\alpha^{2q}dx}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega\sin(2q-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega} + 1} \frac{d\omega}{\sin^{2q+2}\omega}. \quad (49)$$

Dans (48), je fais $\alpha = \frac{1}{2}\cot\omega$: le premier membre devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2q-1}\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega} - e^{-\frac{\pi}{2}\cot\omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2q+1}\omega}.$$

Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2q-1}\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega} - e^{-\frac{\pi}{2}\cot\omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2q+1}\omega} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega\cos(2q-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega} + e^{-\frac{\pi}{2}\cot\omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2q+2}\omega}. \quad (50)$$

La même transformation, appliquée à l'égalité (49), donne

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2q}\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega} + e^{-\frac{\pi}{2}\cot\omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2q+2}\omega} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega\sin(2q-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega} + 1} \frac{d\omega}{\sin^{2q+2}\omega}. \quad (51)$$

(*) Suite de la *Note* XCIII.

(**) *Académie de Belgique*, Mémoires *in-quarto*.

(***) On ne doit pas oublier que P_{2q-1} *est un nombre entier, impair.* (*Note* XXXIV.)

XI. *Une rectification.* — Des fautes de calcul se sont glissées dans le paragraphe VI (*). Il en résulte que les formules (30), (31) sont inexactes.

On peut, comme il suit, rétablir ce paragraphe (**).

Dans la relation connue :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(2q+2)(2q+1)}{1.2}B_{2q-1}+\frac{(2q+2)(2q+1)2q(2q-1)}{1.2.3.4}B_{2q-3}+\cdots\\&\qquad+\frac{(2q+2)(2q+1)}{1.2}B_1=q\ (^{***}),\end{aligned}\right\}\quad(52)$$

remplaçons les Nombres de Bernoulli par leurs valeurs, exprimées en intégrales définies. Elle devient

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{T}dt}{e^{2\pi t}-1}=\pm\frac{q}{4(q+1)}\ (^{\mathrm{IV}}),\qquad(53)$$

en supposant

$$\mathrm{T}=\frac{(2q+1)2q}{1.2}t^{2q-1}-\frac{(2q+1)2q(2q-1)(2q-2)}{1.2.3.4}t^{2q-3}+\cdots\pm\frac{2q+1}{1}t.$$

Il est visible que

$$\mathrm{T}=t^{2q+1}-\frac{\left(t+\sqrt{-1}\right)^{2q+1}+\left(t-\sqrt{-1}\right)^{2q+1}}{2}.$$

Nous avons donc, au lieu de la relation (53) :

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty\frac{t^{2q+1}dt}{e^{2\pi t}-1}-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\left[\left(t+\sqrt{-1}\right)^{2q+1}+\left(t-\sqrt{-1}\right)^{2q+1}\right]\\&\qquad=\pm\frac{q}{4(q+1)},\end{aligned}\right\}\quad(54)$$

(*) Tome I, p. 396.

(**) Ce nouveau calcul, plus simple que l'autre, date de 1874.

(***) *Loc. cit.*

(IV) Le signe +, si q est *impair*.

ou

$$\left.\begin{aligned}\pm\frac{1}{4(q+1)}B^{2q+1}-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\left[\left(t+\sqrt{-1}\right)^{2q+1}+\left(t-\sqrt{-1}\right)^{2q+1}\right]\\ =\pm\frac{q}{4(q+1)}\ (^*).\end{aligned}\right\}\quad(55)$$

Soit, dans la relation (54), $t=\cot\varphi$. Elle se réduit à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2q+1}\varphi-\cos(2q+1)\varphi}{e^{2\pi\cot\varphi}-1}\,\frac{d\varphi}{\sin^{2q+3}\varphi}=\pm\frac{q}{4(q+1)}.\quad(56)$$

On a aussi (**)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2p\varphi\,.\sin\varphi}{e^{2\pi\cot\varphi}-1}\,\frac{d\varphi}{\sin^{2q+3}\varphi}=\pm\frac{2q-1}{4(2q+1)}.$$

Donc, par soustraction,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2q+1}\varphi-\cos 2q\varphi\sin\varphi}{e^{2\pi\cot\varphi}-1}\,\frac{d\varphi}{\sin^{2q+3}\varphi}=\pm\frac{1}{4(q+1)(2q+1)}.\quad(57)$$

En outre,

$$B_{2q-1}=q-1\mp 4q\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2q-1)\varphi}{e^{2\pi\cot\varphi}-1}\,\frac{d\varphi}{\sin^{2q+1}\varphi}.\quad(58)$$

XII (***). Soit

$$A_{p,q}=\int_0^{\pi}\cos^p x\cos qx\,dx\ (^{\text{IV}}).\quad(59)$$

(*) L'intégrale

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{2q+1}dt}{e^{2\pi t}-1}$$

est essentiellement positive. Donc le premier terme de l'égalité doit être pris avec le signe *supérieur* ou le signe *inférieur*, selon que le nombre q est *pair* ou *impair*.

(**) *Loc. cit.*

(***) Ce paragraphe est tiré de mon deuxième *Mémoire sur les fonctions* X_n (1882, p. 20).

(IV) On peut consulter, relativement à cette intégrale, la Note que nous avons publiée dans le *Journal de Liouville* (t. V, p. 113); et, dans le même Recueil (t. VIII), un remarquable Mémoire de Serret.

De
$$\cos qx = \cos (q-1)x \cos x - \sin (q-1)x \sin x,$$
on déduit
$$A_{p,q} = A_{p+1,q-1} - \int_0^{\pi} \cos^p x \sin (q-1)x \sin x dx.$$

L'intégration par parties donne
$$\int_0^{\pi} \cos^p x \sin (q-1)x \sin x dx$$
$$= -\left[\frac{\cos^{p+1} x \sin \overline{q-1x}}{p+1}\right]_0^{\pi} + \frac{q-1}{q+1} A_{p+1,q-1}.$$

Et comme le terme intégré est nul :
$$A_{p,q} = \frac{p-q+2}{p+1} A_{p+1,q-1}. \qquad (60)$$

De cette relation, on conclut, facilement,
$$A_{p,q} = \frac{p-q+2}{p+1} \cdot \frac{p-q+4}{p+2} \cdots \frac{p+q}{p+q} \int_0^{\pi} \cos_{p+q} x dx. \quad (61)$$

La nouvelle intégrale est nulle si $p+q$ est *impair*. De plus, le second membre est nul, encore, dans les cas suivants :
$$q = p+2, \quad q = p+4, \quad q = p+6, \ldots$$

Donc, *pour que l'intégrale représentée par* $A_{p,q}$ *ne soit pas nulle, on doit avoir*
$$p - q = \mathcal{M} . 2.$$

Quand il en est ainsi,
$$\int_0^{\pi} \cos^{p+q} x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q} x dx = \pi \frac{1.3.5 \ldots \overline{p+q-1}}{2.4.6 \ldots \overline{p+q}};$$

et, en conséquence,
$$A_{p,q} = \pi \frac{(p-q+2)(p-q+4)\ldots(p+q)}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)} \cdot \frac{1.3.5 \ldots \overline{p+q-1}}{2.4.6 \ldots \overline{p+q}};$$

Le second membre peut être considérablement simplifié.

En premier lieu, la fraction

$$\frac{(p-q+2)(p-q+4)\dots(p+q)}{2\,.\,4\,.\,6\dots(p+q)}=\frac{1}{2.4.6\dots(p-q)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-q}{2}}\frac{1}{1.2.3\dots\frac{p-q}{2}}.$$

D'autre part,

$$1\,.\,3\,.\,5\dots(p+q-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p+q}{2}}2\,.\,6\,.\,10\dots(2p+2q-2);$$

puis, par une transformation bien connue (*),

$$1\,.\,3\,.\,5\dots(p+q-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p+q}{2}}\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\left(\frac{p+q}{2}+2\right)\dots(p+q).$$

Enfin,

$$\frac{\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\left(\frac{p+q}{2}+2\right)\dots(p+q)}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)}=\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\left(\frac{p+q}{2}+2\right)\dots p.$$

On a donc

$$\frac{(p-q+2)(p-q+4)\dots(p+q)}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\dots\overline{p+q-1}}{2\,.\,4\,.\,6\dots\overline{p+q}}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{p}\frac{\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\left(\frac{p+q}{2}+2\right)\dots p}{1\,.\,2\,.\,3\dots\frac{p-q}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{p}C_{p,\frac{p-q}{2}};$$

puis

$$A_{p,q}=\frac{\pi}{2^p}C_{p,\frac{p-q}{2}},$$

ou

$$\int_0^{\pi}\cos^p x\cos qx\,dx=\frac{\pi}{2^p}C_{p,\frac{p-q}{2}}. \tag{62}$$

(*) Voir pages 43, 55, ...

XIII. De la formule

$$\operatorname{tg} x = 2\int_0^{\infty} \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}\,d\alpha,$$

due à Poisson (*), on déduit, par intégration,

$$-\mathcal{L}.\cos x = \int_0^{\infty} \frac{(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})^2}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}\,\frac{d\alpha}{\alpha}; \tag{63}$$

et, par différenciation,

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 4\int_0^{\infty} \frac{e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}\,\alpha\,d\alpha. \tag{64}$$

La combinaison de cette égalité, avec celle-ci :

$$\operatorname{tg}^2 x = 4\int_0^{\infty} \frac{(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})^2}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}\,\alpha\,d\alpha \;(^{**}),$$

donne ce résultat connu :

$$\frac{1}{8} = \int_0^{\infty} \frac{\alpha\,d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}.$$

XIV. *Suite.* — On a, en série convergente,

$$\frac{1}{\alpha}\left(e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x} - 2\right) = 2\sum_1^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{\Gamma(2n+1)}\,\alpha^{2n-1}.$$

Donc, si l'on suppose le premier membre de l'égalité (63) développé suivant les puissances de x, le coefficient de x^{2n} doit être

$$\frac{2^{2n+1}}{\Gamma(2n+1)}\int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2n-1}\,d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}.$$

(*) Voir, sur d'autres conséquences de cette formule, la *Note* XXXV.

(**) *Note* XXXV.

Or,

$$- \mathcal{S} . \cos x$$

$$= (4-1)A_2 \frac{(2x)^2}{2} - (4^2-1)A_4 \frac{(2x)^4}{4} + \cdots \pm (4^n-1)A_{2n} \frac{(2x)^{2n}}{2n} \mp \cdots \text{ (*)},$$

pourvu que l'on suppose

$$A_{2n} = \frac{B_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)} \text{ (**)}.$$

Identifiant, nous avons donc

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} = \pm \frac{4^n - 1}{4n} B_{2n-1}. \tag{65}$$

Cette formule ne diffère pas, au fond, de celle de Plana :

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} = \pm \frac{1}{4n} B_{2n-1} \text{ (***)}.$$

Autrement dit,

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} = (4^n - 1) \int_0^\infty \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1}.$$

En effet, cette égalité revient à celle-ci :

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha \,(e^{\pi\alpha} + 1)}{e^{2\pi\alpha} - 1} = 4^n \int_0^\infty \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1};$$

puis à *l'identité*

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{\pi\alpha} - 1} = 4^n \int_0^\infty \frac{\beta^{2n-1} d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1}.$$

(*) *Note* LIX, p. 208.
(**) *Note* XXXIII, p. 92.
(***) *Ibid.*, p. 95.

XV. Comme on le vérifie aisément,

$$\int_0^x \cos 2x \operatorname{tg} \frac{1}{2} x dx = 2 \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{3}{2} - 2 \mathcal{L}. \left(\cos \frac{1}{2} x\right). \quad (66)$$

Donc, en particulier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \operatorname{tg} \frac{1}{2} x dx = -1 + \mathcal{L}.2. \quad (67)$$

La relation (66) va nous donner d'autres intégrales définies, assez intéressantes.

Soit X le second membre. Intégrant par parties, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \cos 2x \operatorname{tg} \frac{1}{2} x = [\mathrm{X}x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{X} dx$$

$$= \frac{\pi}{2}(-1 + \mathcal{L}.2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2 \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{2} + 2 \mathcal{L}. \left(\cos \frac{1}{2} x\right)\right] dx.$$

La dernière intégrale se décompose en

$$-2 + \frac{3}{2}\frac{\pi}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{L}. \left(\cos \frac{1}{2} x\right) dx.$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \cos 2x \operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \mathcal{L}.2 - 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{L}. \left(\cos \frac{1}{2} x\right) dx.$$

Si l'on fait $\frac{1}{2} x = \alpha$, on a

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{L}. \left(\cos \frac{1}{2} x\right) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathcal{L}.(\cos \alpha) d\alpha = -\pi \mathcal{L}.2 + 2\mathrm{G}\ (^*).$$

Par conséquent,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \cos 2x \operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \mathcal{L}.2 - 2 + 2\mathrm{G}. \quad (68)$$

(*) Bierens de Haan, T. 286.

XVI. *Suite.* — Soit

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin(2a+4)x - \sin(2a+2)x\right] \operatorname{tg}\frac{1}{2}x\,dx, \qquad (69)$$

le paramètre a surpassant (-1).

La quantité entre parenthèses équivaut à

$$2\sin x \cos(2a+3)x = 4\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x\cos(2a+3)x;$$

donc

$$E = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{1}{2}x\cos(2a+3)x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\cos(2a+3)x\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2a+3)x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2a+2)x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2a+4)x\,dx,$$

ou

$$E = 2\frac{\sin(2a+3)\frac{\pi}{2}}{2a+3} - \frac{\sin(a+1)\pi}{2(a+1)} - \frac{\sin(a+2)\pi}{2(a+2)} \; (^*) \qquad (70)$$

Prenant les dérivées des deux membres, on a

$$\left.\begin{aligned}
&2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx\left[\cos(2a+4)x - \cos(2a+2)x\right]\operatorname{tg}\frac{1}{2}x \\
&= 2\frac{\pi\cos(2a+3)\frac{\pi}{2}}{2a+3} - 4\frac{\sin(2a+3)\frac{\pi}{2}}{(2a+3)^2} - \frac{\pi\cos(a+1)\pi}{2(a+1)} \\
&+ \frac{\sin(a+1)\pi}{2(a+1)^2} - \frac{\pi\cos(a+2)\pi}{2(a+2)} + \frac{\sin(a+2)\pi}{2(a+2)^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Il y a, maintenant, deux cas à distinguer.

1° Si a est un nombre *pair*, le second membre se réduit à

$$\frac{4}{(2a+3)^2} + \frac{\pi}{2a+2} + \frac{\pi}{2a+4};$$

(*) Si a est un nombre entier, le premier sinus égale ± 1; les deux autres termes sont nuls; en sorte que $E = \pm\frac{2}{2a+3}$. Ce résultat s'accorde avec celui que l'on trouve dans la *Note* LIV, formule (27).

2° Si a est *impair*, cette même quantité égale

$$-\frac{4}{(2a+3)^2}-\frac{\pi}{2a+2}-\frac{\pi}{2a+4}.$$

Supposant $a = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2n$, nous trouvons donc, successivement :

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\,(\cos 4x - \cos 2x)\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \frac{4}{3^2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4},$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\,(\cos 6x - \cos 4x)\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = -\frac{4}{5^2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6},$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\,(\cos 8x - \cos 6x)\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \frac{4}{7^2}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{8},$$

. . . .

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\left(\cos\overline{4n+2}\,x - \cos 4nx\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = -\frac{4}{(4n+1)^2}-\frac{\pi}{4n}-\frac{\pi}{4n+2},$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\left(\cos\overline{4n+4}\,x - \cos\overline{4n+2}\,x\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$$
$$= \frac{4}{(4n+3)^2}+\frac{\pi}{4n+2}+\frac{\pi}{4n+4};$$

puis, par addition,

$$\left.\begin{aligned} &2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\left(\cos\overline{4n+4}\,x - \cos 2x\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x \\ &= 4\left[\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\cdots+\frac{1}{(4n+3)^2}\right]+\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{1}{2n+2}\right].\end{aligned}\right\} \quad (72)$$

Pour n *infini*, cette égalité devient

$$2\,lim\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\cos(4n+4)x\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\cos 2x\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}x + 4(1-\mathrm{G})+\frac{\pi}{2};$$

c'est-à-dire, à cause de la formule (68) :

$$lim\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\cos(4n+4)x\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2}\left(1-\mathcal{L}\,.\,2\right). \quad (73)$$

CXXXIX. — Une intégration.

(*Juillet* 1875.)

I. Soit l'équation

$$(ax^2 + by^2 + c)dy^2 + 2fxydxdy + gx^2dx^2 = 0\ (^*), \tag{1}$$

ou

$$[agx^2 + (bg - f^2)y^2 + cg]dy^2 + [fydy + gxdx]^2 = 0. \tag{2}$$

On tire, de celle-ci,

$$dy = \pm \frac{fydy + gxdx}{\sqrt{(f^2 - bg)y^2 - agx^2 - cg}}.$$

Le second membre est une différentielle exacte si

$$\frac{f}{bg - f^2} = \frac{1}{a},$$

ou

$$f^2 - bg + af = 0; \tag{3}$$

et alors l'intégrale est

$$y - \beta = \mp \frac{1}{a}\sqrt{-afy^2 - agx^2 - cg},$$

ou

$$a^2(y - \beta)^2 + afy^2 + agx^2 + cg = 0\ (^{**}). \tag{4}$$

(*Addition.* — *Mars* 1886.)

II. En général, posons

$$agx^2 + (bg - f^2)y^2 + cg = -a^2u^2, \tag{5}$$

de manière que

$$fydy + gxdx = \pm\, audy, \tag{6}$$

et

$$agxdx + (bg - f^2)ydy = -a^2udu. \tag{7}$$

(*) On peut voir, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. II, p. 21), le problème de Géométrie répondant à cette équation.

(**) *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. II, p. 82).

Éliminant $gxdx$, on a ces deux *équations homogènes, du premier degré :*

$$a^2u(du \pm dy) = (af + f^2 - bg)ydy;$$

ou, si l'on fait

$$af + f^2 - bg = a^2k:$$

$$u(du \pm dy) = kydy; \tag{8}$$

et le problème peut être considéré comme résolu.

III. *Application.* — L'intégrale de

$$(x^2 + y^2 + 1)dy^2 - 2xydxdy - 2x^2dx^2 = 0 \tag{9}$$

est

$$(u - y)(u + 2y)^2 = \lambda^3, \tag{10}$$

si l'on pose

$$u^2 = 2x^2 + 3y^2 + 2.$$

En effet, la différentielle de l'équation (10) est, suppression faite d'un facteur,

$$udu + (u - 2y)dy = 0,$$

ou

$$2xdx + ydy + dy\sqrt{2x^2 + 3y^2 + 2} = 0,$$

ou enfin

$$(x^2 + y^2 + 1)dy^2 - 2xydxdy - 2x^2dx^2 = 0. \tag{9}$$

CXL. — Sur une formule de Jacobi.

(*Octobre* 1875.)

I. Cette formule, bien remarquable, se trouve dans une lettre de Jacobi à Legendre, reproduite par le *Journal de Crelle* (*).

Elle consiste en :

$$\left.\begin{aligned} &\{q - q^{5.5} - q^{7.7} + q^{11.11} + q^{13.13} - q^{17.17} - \dots\}^3 \\ &= q^3 - 3 \,.\, q^{3.3.3} + 5\,q^{3.5.5} - 7\,q^{3.7.7} + \dots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

A l'inspection de cette identité, on ne peut savoir si, dans le premier membre, les exposants

$$1^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 11^2,\ 13^2,\ 17^2,\ \dots$$

(*) 1875, p. 240.

sont *les carrés des nombres premiers impairs, autres que* 3, *ou les carrés des nombres impairs, non divisibles par* 3 (*).

Pour trancher la question, il suffit de lire, dans le tome VII du *Journal de Liouville,* le célèbre Mémoire de Jacobi, relatif à la formule, non moins célèbre :

$$[1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \cdots]^3 = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + \cdots$$

En effet, à la page 92, on trouve l'*identité*

$$\left[\sum \pm x^{aa}\right]^3 = \sum (-1)^{\frac{b-1}{2}} bx^{3bb}, \qquad (2)$$

dans laquelle a *est un nombre impair non divisible par* 3, *et* b, *un nombre impair quelconque* (**).

Or, la formule (2) n'est que la formule (1), *expliquée.*

II. En 1877, j'ai proposé ce théorème empirique :

Le triple de tout carré impair, non divisible par 5, *égale la somme des carrés de trois nombres premiers, autres que* 2 *et* 3(***).

Si l'on supprimait la restriction : *non divisible par* 5, le théorème empirique ne différerait pas de celui qui résulte de l'égalité (1), *mal interprétée.* Mais on ne peut la supprimer.

En effet, *le nombre* 6 075 $= 3 \cdot 45^2$ *n'est pas la somme des carrés de trois nombres premiers impairs* (IV).

(*) Pendant plusieurs années, j'ai admis la première hypothèse. (Mai 1886.)

(**) On a imprimé x^{bb} au lieu de x^{3bb}.

(***) Voir la *Note* LXXXVII.

(IV) Le carré de tout nombre premier impair, autre que 5, est terminé par 1 ou par 9. De là résulte que, dans l'équation *supposée :*

$$6\,075 = p^2 + p'^2 + p''^2,$$

un des nombres p, p', p'' égale 5. Soit $p = 5$.

Il vient

$$6\,050 = p'^2 + p''^2,$$

puis

$$121 = x^2 + y^2;$$

équation *impossible.* (Mai 1886.)

CXLI. — Une intégrale triple.

(*Janvier* 1876.)

I. Soit la relation *connue* (*) :

$$\left.\begin{aligned}C_{2n,n} + \frac{1}{3}C_{2n-2,n-1}\cdot C_{2,1} + \frac{1}{5}C_{2n-4,n-2}\cdot C_{4,2} + \cdots + \frac{1}{2n+1}C_{2n,n}\\ = 4^n\frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}{3\,.\,5\,.\,7\ldots\overline{2n+1}}.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

En général,

$$\frac{\Gamma(2p+1)}{[\Gamma(p+1)]^2} = \frac{2^{2p+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p}\varphi d\varphi = \frac{4^p}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^{2p}\varphi d\varphi.$$

Le premier membre de l'égalité (1) est donc la même chose que

$$\frac{4^n}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi d\theta\left[\cos^{2n}\varphi + \frac{1}{3}\cos^{2n-2}\varphi\cos^2\theta + \cdots + \frac{1}{2n+1}\cos^{2n}\theta\right].$$

Pour sommer la quantité entre parenthèses, je pose

$$y = x\cos^{2n}\varphi + \frac{x^3}{3}\cos^{2n-2}\varphi\cos^2\theta + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cos^{2n}\theta\,;$$

d'où

$$y' = \cos^{2n}\varphi + x^2\cos^{2n-2}\varphi\cos^2\theta + \cdots + x^{2n}\cos^{2n}\theta;$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{\cos^{2n+2}\varphi - x^{2n+2}\cos^{2n+2}\theta}{\cos^2\varphi - x^2\cos^2\theta}.$$

La somme cherchée est donc

$$\int_0^1 \frac{\cos^{2n+2}\varphi - x^{2n+2}\cos^{2n+2}\theta}{\cos^2\varphi - x^2\cos^2\theta}\,dx.$$

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, p. 159; t. III, p. 417; etc. Voir aussi la *Note* LXXXVII.

Par conséquent,

$$\int_0^\pi\int_0^\pi d\varphi d\theta\int_0^1 \frac{\cos^{2n+2}\varphi - x^{2n+2}\cos^{2n+2}\theta}{\cos^2\varphi - x^2\cos^2\theta}\,dx = \frac{1}{\pi^2}\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots\overline{2n+1}}. \quad (2)$$

II. *Remarque.* — La fraction

$$\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots\overline{2n+1}} = \frac{[2^n\Gamma(n+1)]^2}{\Gamma(2n+2)} = 4^n\int_0^1 z^n(1-z)^n dz.$$

Donc la relation (2) peut être écrite ainsi :

$$\int_0^\pi\int_0^\pi d\varphi d\theta\int_0^1 \frac{\cos^{2n+2}\varphi - x^2\cos^{2n+2}\theta}{\cos^2\varphi - x^2\cos^2\theta}\,dx = \frac{4^n}{\pi^2}\int_0^1 z^n(1-z)^n dz. \quad (3)$$

CXLII. — Une formule du binôme.

(*Février* 1876.)

1. La théorie de la décomposition des fractions rationnelles donne, comme cas particulier :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{(x-a)^n(x-b)^n}\\ &= \sum_{p=1}^{p=n}(-1)^{n-p}C_{2n-p-1,\,n-1}\left[\frac{1}{(a-b)^{2n-p}(x-a)^p}+\frac{1}{(b-a)^{2n-p}(x-b)^p}\right].\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Si $x = 0$ (*), cette relation devient

$$\frac{1}{(ab)^n} = \sum_{p=1}^{p=n}(-1)^n C_{2n-p-1,\,n-1}\left[\frac{1}{(a-b)^{2n-p}a^p}+\frac{1}{(b-a)^{2n-p}b^p}\right] (^{**}). \quad (2)$$

Multiplions les deux membres par $(a-b)^{2n}a^nb^n$, et changeons b en $-b$:

$$(a+b)^{2n-1} = \sum_{p=1}^{p=n} C_{2n-p-1,\,n-1}(a+b)^{p-1}a^{n-p}b^{n-p}(a^p+b^p). \quad (A)$$

(*) Les constantes a, b sont supposées inégales, et non nulles.

(**) A cause de

$$(-1)^{n-p} : (-1)^p = (-1)^{n-2p} = (-1)^n.$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}(a+b)^{13} = {} & 924(ab)^6(a+b) + 462(a+b)(ab)^5(a^2+b^2)\\ & + 210(a+b)^2(ab)^4(a^3+b^3) + 84(a+b)^3(ab)^3(a^4+b^4)\\ & + \ 28(a+b)^4(ab)^2(a^5+b^5)\\ & + \quad 7(a+b)^5(ab)(a^6+b^6) + (a+b)^6(a^7+b^7).\end{aligned}$$

II. Si l'on fait $b = ax$, et qu'on change n en $n+1$, on trouve

$$\left.\begin{aligned}(1+x)^{2n} = {} & (1+x)^{n-1}(1+x^{n+1}) + C_{n+1,1}(1+x)^{n-2}x(1+x^n)\\ & + C_{n+2,2}(1+x)^{n-3}x^2(1+x^{n-1}) + \cdots + C_{2n,n}x^n.\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Donc, en particulier,

$$\begin{aligned}(1+x)^8 = {} & (1+x)^3(1+x^5) + 5(1+x)^2x(1+x^4) + 15(1+x)x^2(1+x^3)\\ & + 35x^3(1+x^2) + 70x^4.\end{aligned}$$

(*Addition.* — *Mars* 1886.)

III. L'égalité (B) peut être écrite ainsi

$$\left.\begin{aligned}& (1+x)^{2n}\\ = {} & (1+x)^{n-1} + C_{n+1,1}(1+x)^{n-2}x + C_{n+2,2}(1+x)^{n-3}x^2 + \cdots + Ax^{n-1}\\ & + x^{n+1}[(1+x)^{n-1} + C_{n+1,1}(1+x)^{n-2} + C_{n+2,2}(1+x)^{n-3} + \cdots + A]\\ & + C_{2n,n}x^n \ (^*).\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

On a, en série convergente,

$$(1+x-x)^{-(n+1)} = (1+x)^{-(n+1)}$$
$$\times\left[1 + C_{n+1,1}\left(\frac{x}{1+x}\right) + C_{n+2,2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots + A\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n-1} + B\left(\frac{x}{1+x}\right)^n + \cdots\right],$$

ou

$$\begin{aligned}& (1+x)^{2n}\\ & = (1+x)^{n-1} + C_{n+1,1}(1+x)^{n-2}x + \cdots + Ax^{n-1} + B\,\frac{x^n}{1+x}\\ & \qquad + C\,\frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} + \cdots \ (^{**})\end{aligned}$$

(*) $A = C_{2n-1,n}$.

(**) $B = C_{2n,n}$, $C = C_{2n+1,n}$, ...

De même,

$$(1 + x - 1)^{-(n+1)} =$$

$$(1 + x)^{-(n+1)}\left[1 + C_{n+1,1}\frac{1}{1+x} + \cdots + A\frac{1}{(1+x)^{n-1}} + B\frac{1}{(1+x)^{n}} + \cdots\right],$$

ou

$$(1 + x)^{2n}$$

$$= x^{n+1}\left[(1+x)^{n-1} + C_{n+1,1}(1+x)^{n-2} + \cdots + A + B\frac{1}{1+x} + C\frac{1}{(1+x)^2} + \cdots\right].$$

Par conséquent, l'égalité (3) devient

$$B\frac{x^n}{1+x} + C\frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} + \cdots$$

$$= (1 + x)^{2n} - x^{n+1}\left[B\frac{1}{1+x} + C\frac{1}{(1+x)^2} + \cdots\right] + C_{2n,n}x^n,$$

ou

$$\frac{(1+x)^{2n}}{x^{n+1}} = C_{2n+1,n}\frac{1+1}{(1+x)^2} + C_{2n+2,n}\frac{1+x}{(1+x)^3} + C_{2n+3,n}\frac{1+x^2}{(1+x)^4} + \cdots \quad (C)$$

On a ainsi un développement de

$$\frac{(1+x)^{2n}}{x^{n+1}},$$

en série convergente, du moins si la variable x est comprise entre 0 et 1 (*).

Si x égale 1, la formule se réduit à

$$4^n = +\frac{1}{2}C_{2n+1,n} + \frac{1}{4}C_{2n+2,n} + \frac{1}{8}C_{2n+3,n} + \cdots; \quad (4)$$

expression connue, facile à vérifier.

(*) Cette relation (C) a quelque analogie avec une remarquable formule d'Euler, que j'ai démontrée en 1844 (*Journal de Liouville,* t. IX).

CXLIII. — Sur une série de Legendre (*).

(*Décembre* 1875.)

I. Parmi les Notes que l'illustre Legendre a placées à la suite de sa *Géométrie*, la plus remarquable me parait être celle qui donne, en fraction continue, le développement de

$$\psi(z) = \frac{a}{z}\,\frac{1+\dfrac{a}{z+1}+\dfrac{1}{1.2}\dfrac{a^2}{(z+1)(z+2)}+\dfrac{1}{1.2.3}\dfrac{a^3}{(z+1)(z+2)(z+3)}+\cdots}{1+\dfrac{a}{z}+\dfrac{1}{1.2}\dfrac{a^2}{z(z+1)}+\dfrac{1}{1.2.3}\dfrac{a^3}{z(z+1)(z+2)}+\cdots}; \quad (1)$$

savoir,

$$\psi(z) = \cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\cfrac{a}{z+3+\cdots}}}}. \quad (2)$$

Ce développement résulte, d'ailleurs, des équations

$$\varphi(z)-\varphi(z+1)=\frac{a}{z(z+1)}\varphi(z+2), \quad (3)$$

$$\psi(z)=\frac{a}{z}\,\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)};$$

dans lesquelles

$$\varphi(z)=1+\frac{a}{z}+\frac{a^2}{1.2.z(z+1)}+\frac{a^3}{1.2.3.z(z+1)(z+2)}+\cdots(^{**}) \quad (5)$$

(*) Tirée, en partie, des *Notes d'Algèbre et d'Analyse;* en partie, du *Bulletin de l'Académie.* (Janvier 1876.)

(**) La formule (4) est l'égalité (1), mise sous forme abrégée.

II. Changeant de notation, soit

$$\varphi(k) = y = 1 + \frac{x}{1.k} + \frac{x^2}{1.2.k(k+1)} + \frac{x^3}{1.2.3.k(k+1)(k+2)} + \cdots \quad (6)$$

Pour évaluer y, ou sommer la série, prenons la dérivée de $x^{k-1}y$:

$$(x^{k-1}y)' = (k-1)x^{k-2} + x^{k-1} + \frac{x^k}{1.2.k} + \frac{x^{k+1}}{1.2.3.k(k+1)} + \cdots$$

Multiplions par x^{2-k} les deux membres de cette égalité, et prenons encore les dérivées ; nous aurons

$$[x^{2-k}(x^{k-1}y)']' = 1 + \frac{x}{1.k} + \frac{x^2}{1.2.k(k+1)} + \cdots = y;$$

ou

$$xy'' + ky' - y = 0. \quad (7)$$

Telle est l'équation qui, intégrée, ferait connaître y.

III. On tire, de l'équation (6) :

$$y' = \frac{1}{k}\left[1 + \frac{x}{1.(k+1)} + \frac{x^2}{1.2.(k+1)(k+2)} + \cdots\right],$$

ou

$$y' = \frac{1}{k}\varphi(k+1). \quad (8)$$

La relation (4) devient donc, après le changement de notation,

$$\psi(k) = x\frac{y'}{y}; \quad (9)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$k\frac{d.\varphi(x, k)}{dx} = \varphi(x, k+1)\,(*). \quad (10)$$

IV. Lorsque $k = \frac{1}{2}$,

$$\psi(k) = \sqrt{x}\,\frac{e^{2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}}}{e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}}\,(**).$$

(*) Cette équation (10) se rattache au *Calcul des différences mêlées,* dont Biot, et d'autres Géomètres, se sont occupés au commencement du siècle.

(**) LEGENDRE, *Éléments de Géométrie* (1823), p. 291.

L'équation (9) devient

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{e^{2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}}}{e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}}.$$

Le second membre est la dérivée de

$$e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}};$$

donc

$$y = y_1 = e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}$$

doit satisfaire à l'équation

$$xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0. \tag{11}$$

C'est ce qui a lieu. Connaissant cette *intégrale particulière*, on trouve, sans peine, *l'intégrale générale :*

$$y = Ae^{2\sqrt{x}} + Be^{-2\sqrt{x}}. \tag{12}$$

V. Pour réduire, au premier ordre, l'équation

$$xy'' + ky' - y = 0, \tag{7}$$

il suffit d'employer la transformation connue :

$$y = e^{\int u dx}. \tag{13}$$

On trouve

$$x(u' + u^2) + ku - 1 = 0. \tag{14}$$

Supposons, pour un instant,

$$u'x + ku = 0;$$

d'où $u = Cx^{-k}$. Le principe de la *variation des constantes* donne, tout de suite,

$$\frac{dC}{dx} = x^{k-1} - x^{-k}C^2,$$

ou

$$\frac{dz}{dx} = x^{k-1} - x^{-k}z^2; \tag{15}$$

équation trouvée par M. Le Paige, au moyen d'une autre transformation (*), et réductible à l'*équation de Riccati :*

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{1-k}\left[x^{-\frac{2k-1}{k-1}} - v^2\right]. \tag{16}$$

(*) *Bulletin*, 1876, t. XLI, p. 1011.

VI. Par les formules (13) et (9) :

$$\frac{y'}{y} = u = \frac{1}{x}\psi(k).$$

Or, après le changement de a en x, la formule (2) donne

$$\psi(k) = \cfrac{x}{k + \cfrac{x}{k + 1 + \cfrac{x}{k + 2 + \cdots}}}$$

Donc

$$u = \cfrac{1}{k + \cfrac{x}{k + 1 + \cfrac{x}{k + 2 + \cdots}}}$$

De plus, $z = ux^k$. Conséquemment, l'intégrale de l'équation (15) est, à une constante près, représentée par

$$z = \cfrac{x^k}{k + \cfrac{x}{k + 1 + \cfrac{x}{k + 2 + \cdots}}} \tag{17}$$

Si, par exemple, $k = 1$, l'équation

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{z^2}{x}$$

est vérifiée par

$$z = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{3 + \cdots}}} \quad (*).$$

(*) Lorsque $k = 1$, la sommation de la série (6) dépend de la quantité

$$\int_0^\pi e^{(1+x)\cos\theta} \cos(x \sin\theta) \cos(\sin\theta) d\theta.$$

CXLIV. — Relations entre des sommes de carrés.

(*Avril* 1876) (*).

Parmi les innombrables identités relatives à ce sujet, a-t-on remarqué celle-ci :

$$\begin{aligned}&(a+b+c-d)^2+(b+c+d-a')^2+(c+d+a'-b')^2+(d+a'+b'-c')^2\\&+(a'+b'+c'-d')^2+(b'+c'+d'-a)^2+(c'+d'+a-b)^2+(d'+a+b-c)^2\\&=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(d+a')^2+(a'+b')^2+(b'+c')^2\\&+(c'+d')^2+(d'+a)^2+(a-d)^2+(b-a')^2+(c-b')^2+(d-c')^2\\&+(a'-d')^2+(b'-a)^2+(c'-b)^2+(d'-c)^2?\end{aligned}$$

Elle réduit, à *une somme de huit carrés,* une *somme de seize carrés.*

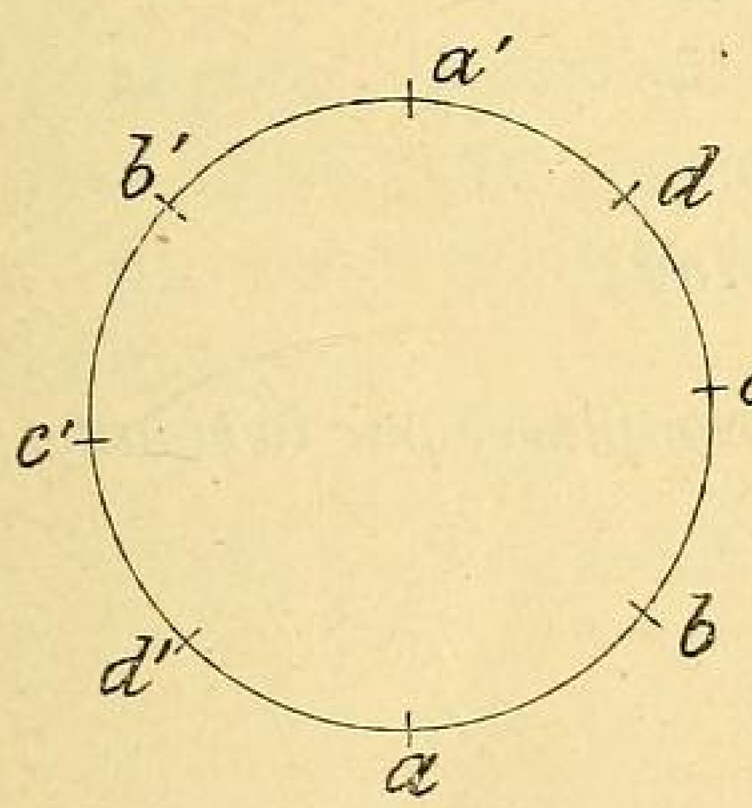
Par exemple :

$$\begin{aligned}&2^2+3^2+8^2+8^2+10^2+19^2+14^2+8^2\\&=3^2+5^2+7^2+10^2+11^2+12^2+15^2+9^2\\&+3^2+4^2+2^2+3^2+2^2+4^2+5^2+5^2,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&4+9+64+64+100+361+196+64=862\\&=9+25+49+100+121+144+225+81\\&+9+16+4+9+4+16+25+25.\end{aligned}$$

(*Addition.* — *Mars* 1886.)



II. Si l'on suppose les quantités $a, b, c, d, a', b', c', d'$ disposées circulairement, on peut énoncer ainsi l'identité précédente :

On ajoute deux termes consécutifs, et l'on élève au carré.

On retranche deux termes dont les rangs diffèrent de trois unités, et l'on élève au carré.

(*) Complément de la *Note* CIV.

On fait la somme de trois termes consécutifs; on en retranche le terme suivant; et l'on élève au carré.

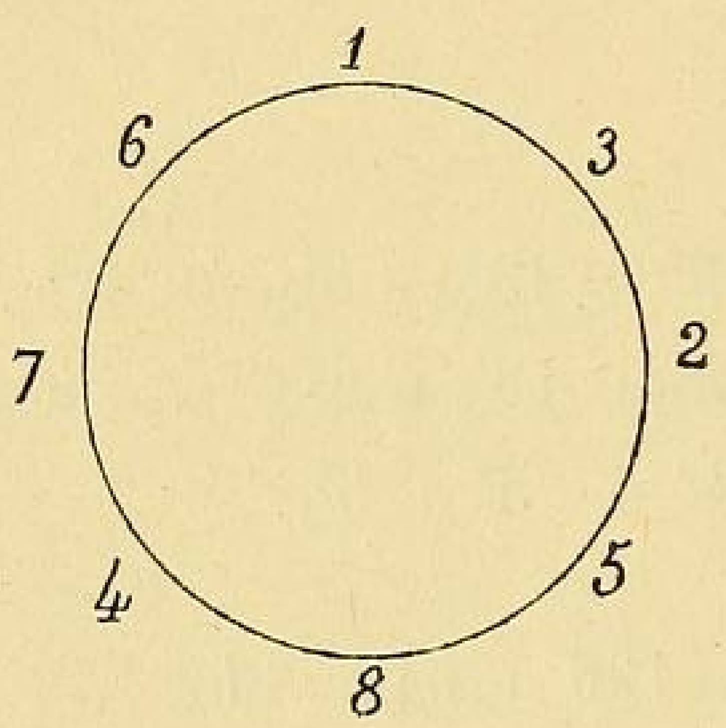
Cela posé, la somme des seize premiers carrés, ainsi formés, égale la somme des huit derniers.

En outre, le premier membre peut être remplacé par

$$(a+d'+c'-b')^2+(d'+c'+b'-a')^2+(c'+b'+a'-d)^2+(b'+a'+d-c)^2$$
$$+(a'+d+c-b)^2+(d+c+b-a)^2+(c+b+a-d')^2+(b+a+d'-c')^2;$$

c'est-à-dire que *l'on peut faire le tour de la figure, dans un sens ou dans l'autre.*

III. *Application.*



1° $4^2+5^2+7^2+13^2+12^2+11^2$
$+13^2+7^2=742,$

2° $4^2+5^2+2^2+2^2+2^2+3^2+4^2$
$+4^2=94,$

3° $1^2+2^2+11^2+10^2+13^2+16^2$
$+11^2+8^2=836,$

4° $10^2+9^2+14^2+15^2+12^2+9^2$
$+0^2+3^2=836,$

5° $742+94=636.$

IV. *Autre identité.* — Si s et n désignent *la somme* et le *nombre* des quantités $a, b, c, \ldots$ on a

$$\sum(s-2a)^2=(n-4)s^2+\sum(2a)^2.$$

Lorsque $n=5$, elle se réduit à

$$\sum(s-2a)^2=s^2+\sum(2a)^2;$$

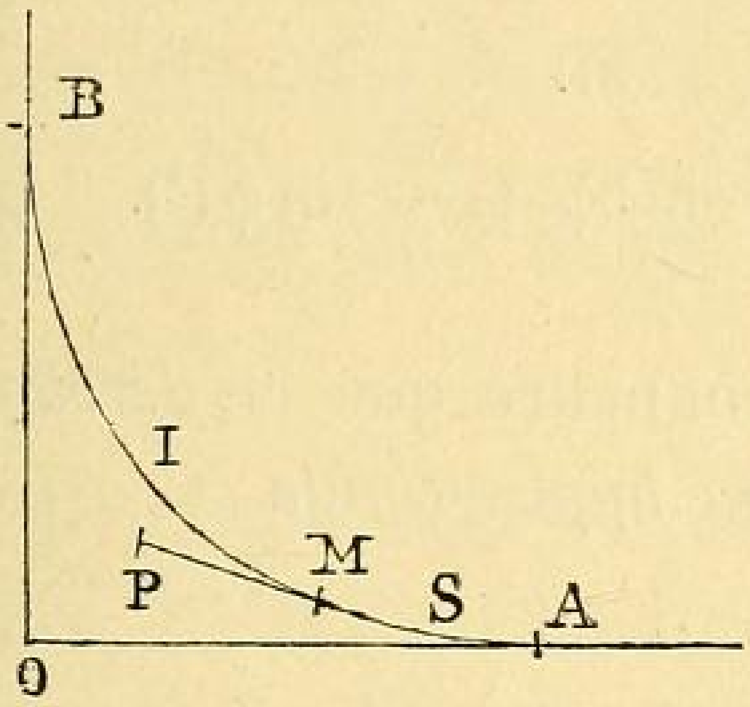
en sorte que *la somme de cinq carrés est remplacée par la somme de six carrés.*

Etc.

CXLV. — Sur les développantes d'une hypocycloïde.

(*Juin* 1856) (*).

I. Soit l'*hypocycloïde à quatre rebroussements*, A, représentée par



$$\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Soit MP la tangente en M, faisant, avec AO, l'angle φ. On a :

$$\alpha = a \cos^3 \varphi,$$

$$\beta = a \sin^3 \varphi \ (^{**}),$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = - \cos \varphi, \quad \frac{d\beta}{ds} = \sin \varphi, \quad s = \frac{3}{2} a \sin^2 \varphi.$$

Si AMP $= l$, les coordonnées du point P sont

$$x = \alpha - (l - s) \cos \varphi, \quad y = \beta + (l - s) \sin \varphi;$$

ou

$$x = a \cos^3 \varphi - \left(l - \frac{3}{2} a \sin^2 \varphi\right) \cos \varphi,$$

$$y = a \sin^3 \varphi + \left(l - \frac{3}{2} a \sin^2 \varphi\right) \sin \varphi.$$

Comme cas particulier, je suppose $l = \frac{3}{4} a$: la *développante* B, lieu du point P, passera par le sommet I de la *développée* A.

En vertu de cette hypothèse, les formules précédentes se réduisent à

$$x = \frac{1}{4} a(3 - 2 \cos^2 \varphi) \cos \varphi, \quad y = \frac{1}{4} a(3 - 2 \sin^2 \varphi) \sin \varphi. \quad (1)$$

(*) Résumé d'une Note publiée dans les *Comptes rendus*, à propos de deux communications de Lord Brougham.

(**) *Cours d'Analyse*, p. 494.

II. Celles-ci peuvent être écrites ainsi :

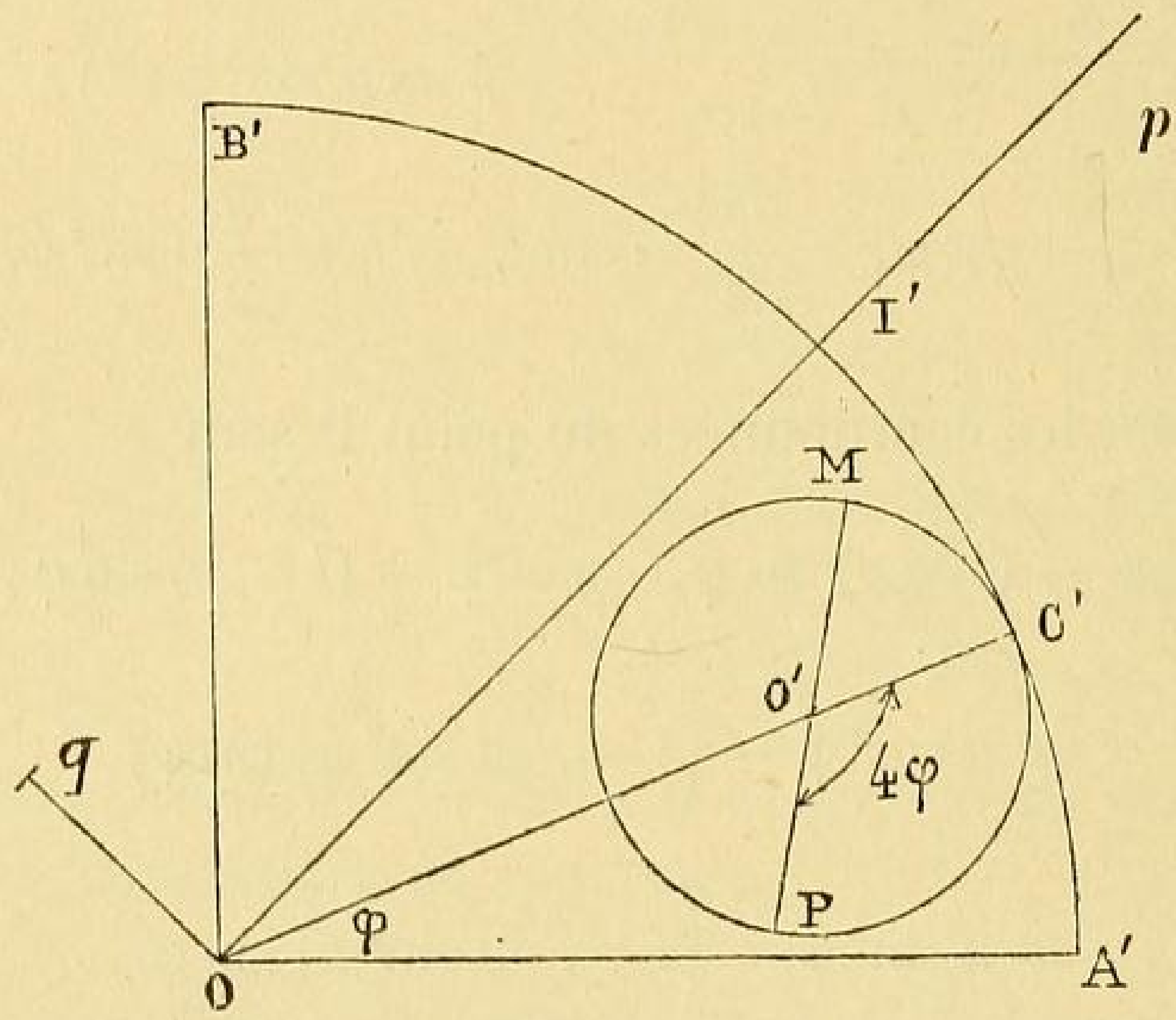
$$x = \frac{1}{8}a(3\cos\varphi + 3\cos\varphi - 4\cos^3\varphi) = \frac{1}{8}a(3\cos\varphi - \cos 3\varphi),$$

$$y = \frac{1}{8}a(3\sin\varphi + 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi) = \frac{1}{8}a(3\sin\varphi + \sin 3\varphi);$$

ou plutôt de cette manière :

$$x = -\frac{a}{8}\cos 3\varphi + \frac{3a}{8}\cos\varphi, \quad y = \frac{a}{8}\sin 3\varphi + \frac{3a}{8}\sin\varphi\,(^*). \qquad (2)$$

Sous cette forme, il est aisé de reconnaître que la *dévelop-pante* B est, comme la développée A, *une hypocycloïde.*



En effet, supposons qu'une circonférence O', dont le rayon est R', roule à l'intérieur d'une circonférence O, ayant pour rayon

$$R = 4R' = \frac{a}{2}\cdot$$

C' étant le point de contact, soient $C'O'OA = \varphi$, $C'O'P = 4\varphi$: le lieu du point P est une hypocycloïde dont A' et B' sont *deux rebroussements.*

(*) Par suite d'une faute de calcul ou d'une faute d'impression, les formules analogues à celles-ci, rapportées dans les *Comptes rendus,* sont inexactes; mais nos conclusions subsistent.

Un point quelconque de la circonférence O′ décrit une hypocycloïde égale à la première. En particulier, le point M, diamétralement opposé à P, en décrit une qui passe au milieu I′ de l'arc A′B′. Cela posé, si l'on appelle X, Y les coordonnées rectangulaires de M, on a :

$$\left.\begin{aligned} X &= 3R'\cos\varphi + R'\cos(\varphi+\pi-4\varphi) = R'(3\cos\varphi - \cos 3\varphi),\\ Y &= 3R\sin\varphi + R'\sin(\varphi+\pi-4\varphi) = R'(3\sin\varphi + \sin 3\varphi);\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ou, à cause de $R' = \frac{a}{8}$:

$$X = x, \qquad Y = y.$$

III. Pour avoir l'équation de la développée, sous la forme $F(X, Y) = 0$, il faudrait éliminer φ, entre les formules (3). Nous allons effectuer, *indirectement*, cette élimination.

Prenons OI′ pour nouvel axe des abscisses ; et appelons p, q les nouvelles coordonnées de M. D'après les formules évidentes

$$p = (X+Y)\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad q = (X-Y)\sqrt{\frac{1}{2}}: \qquad (4)$$

$$p = R'\sqrt{\frac{1}{2}}\left[3(\cos\varphi+\sin\varphi) + (-\cos 3\varphi + \sin 3\varphi)\right],$$

$$q = R'\sqrt{\frac{1}{2}}\left[3(\cos\varphi-\sin\varphi) - (\cos 3\varphi + \sin 3\varphi)\right].$$

On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi) &= \cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right),\\ -\sqrt{\frac{1}{2}}(\cos\varphi-\sin\varphi) &= \sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right),\\ \sqrt{\frac{1}{2}}(-\cos 3\varphi+\sin 3\varphi) &= \cos\left(3\varphi-3\frac{\pi}{4}\right),\\ -\sqrt{\frac{1}{2}}(\cos 3\varphi+\sin 3\varphi) &= \sin\left(3\varphi-3\frac{\pi}{4}\right);\end{aligned}$$

donc

$$p = R'\left[3\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3\varphi-3\frac{\pi}{4}\right) = 4R'\cos^3\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$q = R'\left[-3\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3\varphi-3\frac{\pi}{4}\right) = 4R'\sin^3\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right];$$

puis

$$p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}} = (4R')^{\frac{2}{3}}; \tag{5}$$

puis encore, par les formules (4) :

$$(X + Y)^{\frac{2}{3}} + (X - Y)^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{4}R'^{\frac{2}{3}}; \tag{6}$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} a^{\frac{2}{3}} \ (^*). \tag{7}$$

Tel est le résultat cherché.

IV. La tangente T, à l'hypocloïde A, est représentée par

$$\frac{x}{\cos\varphi} + \frac{y}{\sin\varphi} = a. \tag{8}$$

Les développantes de A sont les trajectoires orthogonales de T. La condition d'*orthogonalité* est

$$-\frac{dy}{dx}\operatorname{tg}\varphi + 1 = 0.$$

Donc l'équation différentielle de ces trajectoires serait

$$\frac{x}{dy} + \frac{y}{dx} = \frac{a}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

ou

$$y = -x\frac{dx}{dy} + \frac{a}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}}}. \tag{9}$$

D'après la remarque faite dans la Note XX (t. I, p. 54) (**), une intégrale de cette équation (9) est l'équation (7).

(*) On conclut de cette équation, en élevant deux fois au cube :

$$[a^2 - 4(x^2 + y^2)]^3 = 108a^2(x^2 - y^2)^2.$$

(**) Et, antérieurement, dans les *Comptes rendus*.

V. Nous pouvons résumer, comme il suit, les relations qui existent entre l'hypocycloïde A, ses parallèles, l'hypocycloïde B et ses parallèles :

1° *De même que la courbe* A, *et ses parallèles, sont les enveloppes d'une série de droites parallèles entre elles, et dont l'une, ayant pour longueur* a, *glisse sur les côtés d'un angle droit; les développantes de ces courbes sont les enveloppes d'une seconde série de droites parallèles, dont l'une, ayant pour longueur* $\frac{a}{2}$, *glisse sur les bissectrices de l'angle droit;*

2° *A chaque courbe de la première série correspond, dans la seconde, une courbe semblable : le rapport de similitude est* $\frac{1}{2}$ (*).

CXLVI. — Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde et de la surface des ondes (**).

I. Si l'on représente par l, m, n les cosinus directifs de la normale mn en un point m d'une surface s, et que l'on adopte les notations employées dans la Note LVIII, les lignes de courbure de s seront représentées par

$$\frac{dx}{dl}=\frac{dm}{dy}=\frac{dz}{dn}=\frac{udu}{dv}. \tag{1}$$

Soient, comme dans le *Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes*, α, β, γ les cosinus directifs d'une droite OA, perpendiculaire au plan Omn. Posant

$$k = +\sqrt{u^2 - v^2}, \tag{2}$$

on trouve

$$\frac{\alpha}{ny - mz}=\frac{\beta}{lz - nx}=\frac{\gamma}{mx - ly}=\frac{1}{k}; \tag{3}$$

puis, au lieu des équations (1) :

$$\frac{\sum \alpha dx}{\sum \alpha dl}=\frac{udu}{dv}. \tag{4}$$

(*) Voir la *Note* CXXIII.

(**) Communiquée, en partie, au Congrès de Paris (24 août 1878).

II. *Ellipsoïde.* — Dans le cas où s est un ellipsoïde, on a

$$l = \frac{vx}{a^2}, \quad x^2 = a^4 \frac{u^2 + \frac{b^2c^2}{v^2} - (b^2 + c^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \ (^*), \tag{5}$$

$$\alpha = \frac{ny - mz}{k} = \frac{vyz}{k}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) (^{**}). \tag{6}$$

Donc :

$$\sum \alpha dx = \frac{vxyz}{k} \sum \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)\frac{dx}{x} = \frac{xyz}{k} \sum \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) \frac{uv^3du - b^2c^2dv}{k^2v^2 + (b^2 - v^2)(c^2 - v^2)},$$

$$\sum \alpha dl = \frac{v}{k} \sum yz \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) \frac{1}{a^2}(vdx + xdv)$$

$$= \frac{vxyz}{k} \sum \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) \frac{1}{a^2}\left(v\frac{dx}{x} + dv\right)$$

$$= \frac{v^2xyz}{k} \sum \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) \frac{1}{a^2}\frac{dx}{x} \ (^{***})$$

$$= \frac{vxyz}{k} \sum \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) \frac{1}{a^2} \frac{uv^3du - b^2c^2dv}{k^2v^2 + (b^2 - v^2)(c^2 - v^2)};$$

ou bien :

$$\sum \alpha dx = \frac{xyz}{a^2b^2c^2k} \sum b^2(b^2 - c^2) \frac{uv^3du - b^2c^2dv}{k^2v^2 + (b^2 - v^2)(c^2 - v^2)}, \tag{7}$$

$$\sum \alpha dl = \frac{vxyz}{a^2b^2c^2k} \sum (b^2 - c^2) \frac{uv^3du - b^2c^2dv}{k^2v^2 + (b^2 - v^2)(c^2 - v^2)}. \tag{8}$$

Si l'on désigne par φ le premier membre de l'équation (4), on a

$$\left. \begin{array}{c} v\varphi = \\ \dfrac{\sum a^2(b^2-c^2)(uv^3du-b^2c^2dv)[k^2v^2+(c^2-v^2)(a^2-v^2)][k^2v^2+(a^2-v^2)(b^2-v^2)]}{\sum (b^2-c^2)(uv^3du-b^2c^2dv)[k^2v^2+(c^2-v^2)(a^2-v^2)][k^2v^2+(a^2-v^2)(b^2-v^2)]}. \end{array} \right\} \tag{9}$$

(*) *Note* LVIII.

(**) *Mémoire...*, p. 5.

(***) Le coefficient de dv est nul.

III. *Suite.* — Soient, pour abréger :

$$\left.\begin{aligned}
P &= \sum a^2(b^2-c^2)[k^2v^2+(c^2-v^2)(a^2-v^2)][k^2v^2+(a^2-v^2)(b^2-v^2)],\\
Q &= \sum (b^2-c^2)[k^2v^2+(c^2-v^2)(a^2-v^2)][k^2v^2+(a^2-v^2)(b^2-v^2)],\\
Q' &= \sum (b^2-c^2)b^2c^2[k^2v^2+(c^2-v^2)(a^2-v^2)][k^2v^2+(a^2-v^2)(b^2-v^2)];
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

alors l'égalité (9) prend la forme :

$$v\varphi = \frac{Puv^3du - a^2b^2c^2Qdv}{Quv^3du - Q'dv}. \qquad (10)$$

Il s'agit d'évaluer les sommes P, Q, Q'.

Chacune est réductible à la forme

$$Ak^4 + Bk^2 + C.$$

Or, on trouve aisément les valeurs suivantes.

1° Pour P :

$$\begin{aligned}
A &= v^2 \sum (b^2-c^2)a^2 = 0,\\
B &= v^2 \sum (b^2-c^2)a^2(a^2-v^2)(b^2+c^2-2v^2) = (a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)v^4,\\
C &= (a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2)\sum (b^2-c^2)a^2(a^2-v^2)\\
&= -(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2);
\end{aligned}$$

2° Pour Q :

$$\begin{aligned}
A &= v^2 \sum (b^2-c^2) = 0,\\
B &= v^2 \sum (b^2-c^2)(a^2-v^2)(b^2+c^2-2v^2) = (a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-v^2)v^2,\\
C &= (a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2)\sum (b^2-c^2)(a^2-v^2) = 0;
\end{aligned}$$

3° Pour Q' :

$$\begin{aligned}
A &= v^4 \sum (b^2-c^2)b^2c^2 = -(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)v^4,\\
B &= v^2 \sum (b^2-c^2)b^2c^2(a^2-v^2)(b^2+c^2-2v^2)\\
&= (a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)v^4(a^2+b^2+c^2-2v^2),\\
C &= (a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2)\sum (b^2-c^2)b^2c^2(a^2-v^2)\\
&= (a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2).
\end{aligned}$$

Conséquemment, si l'on fait abstraction du facteur

$$(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2),$$

on peut prendre :

$$\left.\begin{aligned}
P &= k^2v^4 - (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2),\\
Q &= k^2v^2,\\
Q' &= [-k^4v^2 + k^2(a^2 + b^2 + c^2 - 2v^2)v^2 + (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)]v^2.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Par suite, après quelques réductions,

$$\varphi = \frac{u^2}{v}\cdot\frac{k^2uv^5du - (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)uvdu - k^2a^2b^2c^2dv}{k^2u^3v^3du - (a^2 - u^2)(b^2 - u^2)(c^2 - u^2)v^2dv - k^2a^2b^2c^2dv}. \quad (13)$$

Relativement aux coordonnées *podaires* u, v, l'équation différentielle des lignes de courbure est donc

$$\frac{k^2uv^5du - (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)uvdu - k^2a^2b^2c^2dv}{k^2u^3v^3du - (a^2 - u^2)(b^2 - u^2)(c^2 - u^2)v^2dv - k^2a^2b^2c^2dv} = \frac{vdu}{udv}. \quad (14)$$

Chassant le dénominateur, ordonnant, et supprimant un facteur, on trouve

$$u^2v^4du^2 + uv^3(u^2 - a^2 - b^2 - c^2)dudv + a^2b^2c^2dv^2 = 0; \quad (15)$$

résultat connu (*).

IV. *Surfaces conjuguées* (**). — L'équation des lignes de courbure d'une surface s étant

$$\frac{\sum \alpha dx}{\sum \alpha dl} = \frac{udu}{dv}, \quad (4)$$

celle des lignes de courbure de la surface S, conjuguée de s, sera

$$\frac{\sum \alpha dX}{\sum \alpha dL} = \frac{udu}{dv}. \quad (16)$$

Or (***),

$$X = \frac{vx - lu^2}{k}, \quad L = \frac{x - lv}{k}. \quad (17)$$

(*) *Note* LVIII.

(**) *Mémoire...*, p. 1.

(***) *Mémoire...*, pp. 5 et 6.

Il résulte, de ces valeurs :

$$\left.\begin{aligned} k\sum \alpha dX &= v\sum \alpha dx - u^2\sum \alpha dl \ (^*), \\ k\sum \alpha dL &= \sum \alpha dx - v\sum \alpha dl. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Désignons par Φ le premier membre de l'équation (16). D'après les deux dernières formules,

$$\Phi = \frac{v\varphi - u^2}{\varphi - v},$$

ou

$$\Phi\varphi - (\Phi + \varphi)v + u^2 = 0. \quad (19)$$

D'un autre côté, l'équation (16) devenant

$$\frac{v\varphi - u^2}{\varphi - v} = \frac{udu}{dv},$$

il résulte, de celle-ci :

$$\varphi = u\,\frac{vdu - udv}{udu - vdv}. \quad (20)$$

On a donc ce théorème :

La même fonction φ, égale à $u\frac{du}{dv}$ *pour les lignes de courbure de* s, *devient égale à* $u\frac{vdu-udv}{udu-vdv}$ *pour les lignes de courbure de* S ;

(*) On a

$$dX = \frac{k(vdx + xdv - u^2dl - 2ludu) - (vx - lu^2)\,dk}{k^2};$$

donc

$$k^2\sum \alpha dX = \sum (ny - mz)(vdx + xdv - u^2dl - 2ludu)$$
$$- \frac{dk}{k}\sum (ny - mz)(vx - lu^2);$$

et, en négligeant les sommes *évidemment nulles :*

$$k^2\sum \alpha dX = v\sum (ny - mz)dx - u^2\sum (ny - mz)dl,$$

ou

$$k\sum \alpha dX = v\sum \alpha dx - u^2\sum \alpha dl.$$

Ainsi u, v, k *se comportent comme des constantes.*

Le développement de $k\Sigma\alpha dL$ donne lieu à la même remarque ou, ce qui est équivalent :

La même fonction φ, *égale à* u $\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dv}}$ *pour les lignes de courbure de* s, *devient égale à* u $\frac{\mathrm{vdu}-\mathrm{udv}}{\mathrm{udu}-\mathrm{vdv}}$ *pour les transformées, sur* s, *des lignes de courbure de* S.

En effet, un point M de S, et son conjugué m, ont mêmes coordonnées u, v.

V. *Remarque.* — L'équation (19) étant symétrique par rapport aux fonctions φ, Φ, *les lignes de courbure de* s *sont représentées, indifféremment, par*

$$\varphi = \frac{udu}{dv}, \quad \Phi = u\,\frac{vdu - udv}{udu - vdu},$$

et les lignes de courbure de S, *par*

$$\Phi = \frac{udu}{dv}, \quad \varphi = u\,\frac{vdu - udv}{udu - vdv}.$$

VI. *Surface des ondes.* — Soient, pour abréger :

$$\mathrm{U} = (u^2 - a^2)(u^2 - b^2)(u^2 - c^2), \quad \mathrm{V} = (v^2 - a^2)(v^2 - b^2)(v^2 - c^2). \quad (21)$$

Dans le cas où s est un ellipsoïde, nous avons trouvé (III) :

$$\varphi = \frac{u^2}{v}\,\frac{k^2uv^5du + \mathrm{V}uvdu - k^2a^2b^2c^2dv}{k^2u^3v^3du + \mathrm{U}v^2dv - k^2a^2b^2c^2dv}.$$

Donc les lignes de courbure de la surface des ondes sont représentées par l'équation

$$\frac{u}{v}\,\frac{(k^2v^4 + \mathrm{V})uvdu - k^2a^2b^2c^2dv}{k^2u^3v^3du + (\mathrm{U}v^2 - k^2a^2b^2c^2)dv} = \frac{vdu - udv}{udu - vdv},$$

que l'on peut réduire à

$$\mathrm{V}u^3vdu^2 - [(\mathrm{U}v^2 + \mathrm{V}u^2)v^2 + k^4(a^2b^2c^2 - u^2v^4)]dudv + \mathrm{U}uv^3dv^2 = 0. \quad (22)$$

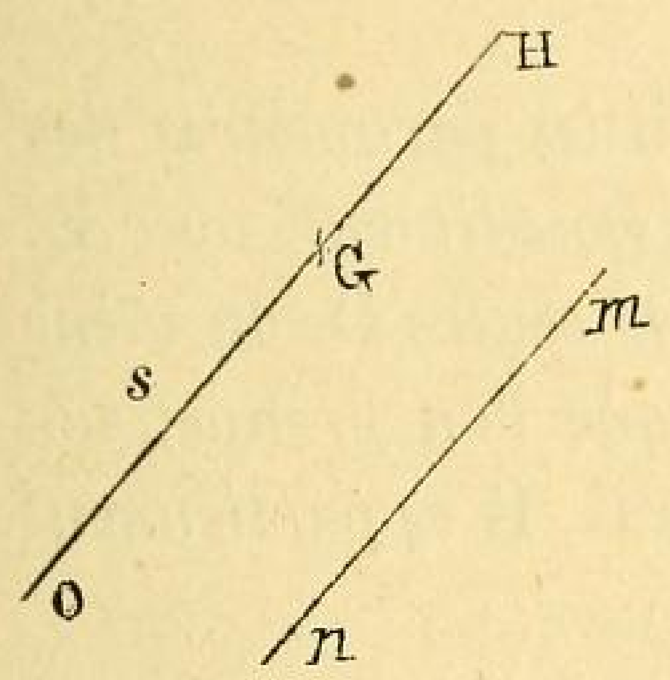
Celle-ci, dont la forme est symétrique, paraît néanmoins difficile à intégrer, même quand l'ellipsoïde s se réduit à un *cylindre* ou à une *ellipse* (*).

(*) Dans ce second cas particulier, la surface S, représentée par

$$(a^2x^2 + b^2y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - a^2b^2(x^2 + y^2) = 0,$$

est une *cyclotomique à directrice rectiligne.* (Note XLI.)

VII. Problème. — *On mène, dans la surface des ondes, O, un demi-diamètre* s, *parallèle à une normale* mn *à l'ellipsoïde* E, *conjugué de* O. *Quelles sont les valeurs de* s ?



Les coordonnées du point d'intersection, G, sont

$$ls = \frac{vx}{a^2}s,$$

$$ms = \frac{vy}{b^2}s,$$

$$ns = \frac{vz}{c^2}s;$$

donc, à cause de la condition connue

$$\sum \frac{a^2X^2}{s^2 - a^2} = 0\ (^*),$$

la quantité s^2 est racine de l'équation

$$\sum \frac{x^2}{a^2(s^2 - a^2)} = 0,$$

que l'on peut remplacer par

$$\sum \frac{x^2}{a^2} + \sum \frac{x^2}{s^2 - a^2} = 0;$$

ou encore, par

$$1 + \sum \frac{x^2}{s^2 - a^2} = 0. \tag{25}$$

Le point m est situé sur l'hyperboloïde G, représenté par

$$\sum \frac{x^2}{a^2 - g^2} = 1;$$

(*) Cette équation, jointe à

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = s^2,$$

représente la surface O.

donc l'équation (23) est vérifiée par $s^2 = g^2$; et, conséquemment, par $s^2 = h^2$, h étant le paramètre du second hyperboloïde H, homofocal à l'ellipsoïde E, et passant au point m. On a donc ce théorème :

Soient m *un point de l'ellipsoïde* E, *et* g, h *les paramètres des hyperboloïdes* G, H *qui se coupent en* m, *et constituent, avec* E, *un système triplement orthogonal. Si, par le centre* O, *on mène une parallèle à la normale, en* m, *à* E, *et que l'on prenne, sur cette parallèle,* OG = g, OH = h ; *les points* G, H *appartiennent à la surface des ondes, conjuguée de* E.

VIII. Corollaire. — *Si le point* m *décrit une ligne de courbure de* E, *représentée par* g = const., *l'un des deux points correspondant à* m *décrit, sur* O, *une conique sphérique : le rayon de la sphère est* g.

En d'autres termes :

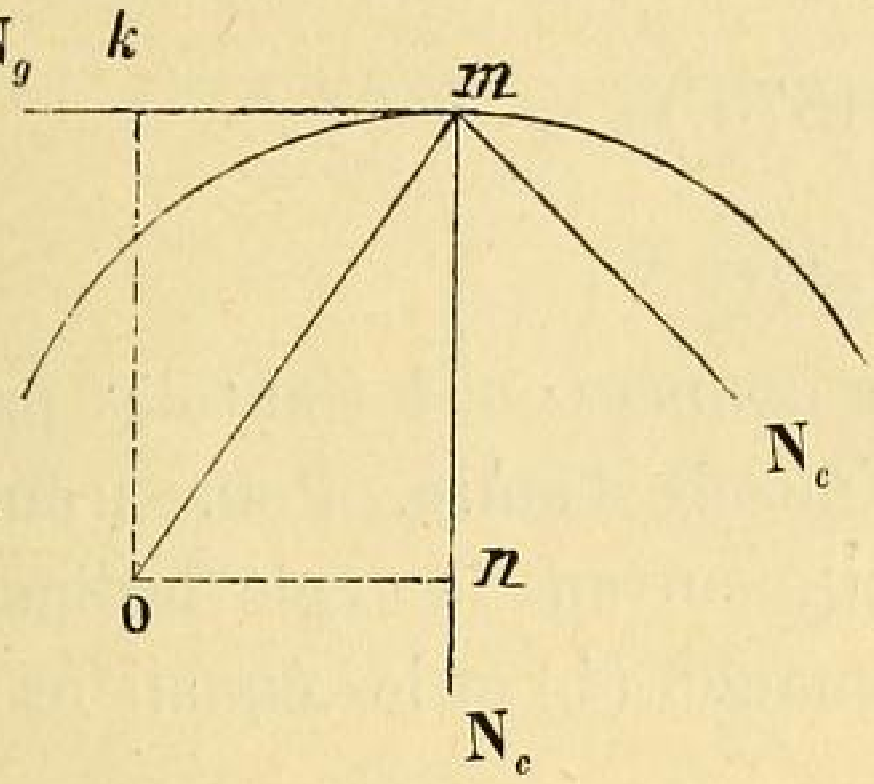
Le cône C, *dont les génératrices, passant par le pôle, sont parallèles aux normales à l'ellipsoïde* E, *menées en tous les points d'une ligne de courbure, coupe, suivant une ligne sphérique, l'une des nappes de la surface des ondes : le rayon de la sphère est le paramètre de l'hyperboloïde sur lequel la ligne de courbure est située* (*).

IX. Considérons l'ellipsoïde E, l'hyperboloïde G et le cône C dont la directrice est la ligne de courbure L, intersection de E et de G. Les équations de ces surfaces sont, respectivement :

$$\sum \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \sum \frac{x^2}{a^2 - g^2} = 1, \quad \sum \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2 - g^2} \right) = 0.$$

(*) Cette proposition complète, nous semble-t-il, un théorème de M. Mannheim : « *Sur la surface de l'onde* (S_0) *dérivant de* E, *la transformée* » *d'une ligne de courbure de cette surface est telle que les normales à* (S_0) » *issues des différents points de cette ligne sont respectivement perpendi-* » *culaires à des diamètres de* (S_0) *égaux entre eux.* » (*Congrès du Havre.*)

Soient N_e, N_g, N_c les trois normales, au point m. En désignant par p la distance du centre au plan tangent, en m, à l'hyperboloïde, on trouve :



$$\cos(N_e, N_c) = \frac{p}{\sqrt{v^2 + p^2}},$$

$$\cos(N_e, N_g) = -\frac{v}{\sqrt{v^2 + p^2}}.$$

Prenons, pour plan de la figure, celui qui est normal, en m, à la ligne de courbure. Supposons le centre O projeté, en n et en k, sur les normales N_e, N_g : $mn = v$, $mk = p$. Si l'on achève le rectangle, on a

$$\cos \mathrm{O}mk = \frac{p}{\sqrt{v^2 + p^2}}, \quad \cos \mathrm{O}mn = \frac{v}{\sqrt{v^2 + p^2}};$$

donc la normale N_c, *au cône, est perpendiculaire à* Om.

Cette simple remarque donne lieu au théorème suivant, qui complète une proposition due à Lamarle (*) :

1° *Si, par le centre* O, *l'on mène des plans* P, *parallèles aux plans tangents à l'ellipsoïde* E, *en tous les points d'une ligne de courbure* L, *le cône* C, *enveloppe des plans* P, *coupe* E *suivant une ligne sphérique : le rayon de la sphère est le paramètre* g *de l'hyperboloïde sur lequel la ligne* L *est située;*

2° *La génératrice de contact, entre le plan* P *et le cône, est parallèle à la normale* N_g *à l'hyperboloïde* (**).

(*) *Si du centre* O *de* (E) *on mène des plans tangents à cette surface menés » des différents points d'une ligne de courbure* (m), *ces plans enveloppent un » cône du* 2e *degré qui coupe* (E) *suivant une ligne sphérique.* » (Mannheim, *Congrès du Havre.*)

(**) M. Mannheim a déduit son théorème de celui de Lamarle. Du reste, les deux propositions n'en font réellement qu'une, en vertu du Lemme suivant :

Soient une surface développable Σ *et un cône* Σ_1, *ayant leurs génératrices respectivement parallèles. Soient, sur ces deux surfaces,* L, L_1 *les trajectoires orthogonales des génératrices : les tangentes* MP, M_1P_1, *en deux points correspondants, sont parallèles.*

CXLVII. — Sur les surfaces enveloppes.

(*Février* 1875.)

I. Soit

$$f(x, y, z, a, b) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une série de surfaces données; a, b étant des paramètres variables, indépendants l'un de l'autre. Pour trouver l'équation de l'enveloppe, on doit, suivant la règle ordinaire, éliminer ces paramètres entre l'équation (1) et les équations

$$\frac{df}{da} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{db}{df} = 0. \tag{3}$$

On peut opérer d'une manière un peu différente.

II. Si l'on éliminait a entre les équations (1) et (2), on trouverait une équation

$$\mathrm{F}(x, y, z, b) = 0, \tag{4}$$

représentant (pour une même valeur de b) une enveloppe des surfaces données; et, si l'on éliminait b entre cette équation (4) et $\frac{d\mathrm{F}}{db} = 0$, on obtiendrait l'équation d'une surface Σ, *enveloppe d'enveloppes :* je dis que Σ est la surface cherchée.

Au lieu d'éliminer a entre (1) et (2), regardons a comme une fonction de b, définie par cette équation (1). L'équation (1) prend la forme

$$f[x, y, z, \varphi(b), b] = 0.$$

Par suite, $\frac{d\mathrm{F}}{db} = 0$ est la même chose que

$$\frac{df}{db} + \frac{df}{da}\frac{da}{db} = 0. \tag{5}$$

Cette équation (5) est une conséquence des équations (1), (2); donc les systèmes :

$$f = 0, \quad \frac{df}{da} = 0, \quad \frac{df}{db} = 0; \tag{A}$$

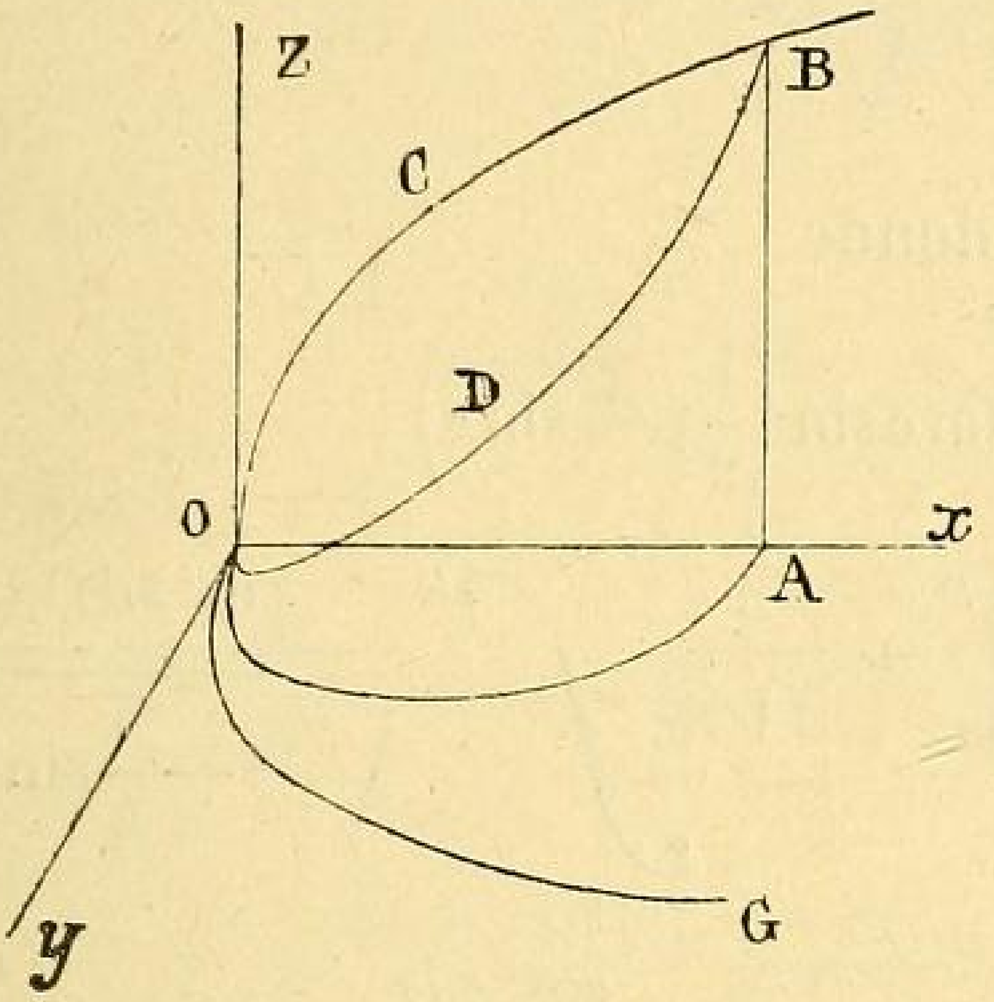
$$f = 0, \quad \frac{df}{da} = 0, \quad \frac{df}{db} + \frac{df}{da}\frac{da}{db} = 0; \tag{B}$$

sont équivalents.

CXLVIII. — Problème de quadrature.

(*Juin* 1875.)

On donne un paraboloïde de révolution, représenté par



$$y^2 + z^2 = 2ax.$$

Sur le cercle osculateur, en O, *à la section méridienne* OG, *on construit le cylindre* OAB*z*, *dont l'équation est*

$$y^2 = x(a - x).$$

Trouver l'aire A *de la* DEMI-FENÊTRE ODBC (*).

I. En employant les notations habituelles, on trouve aisément

$$A = \int_0^a dx\sqrt{a^2 + 2ax}\int_0^{\sqrt{x(a-x)}} \frac{dy}{\sqrt{2ax - y^2}}. \qquad (1)$$

L'intégrale relative à y est

$$\text{arc sin}\,\frac{y}{\sqrt{2ax}}.$$

Entre les limites données, elle devient *arc sin* $\sqrt{\frac{a-x}{2a}}$. Donc

$$A = \sqrt{a}\int_0^a dx\sqrt{a + 2x}\;\text{arc sin}\sqrt{\frac{a-x}{2a}}. \qquad (2)$$

(*) Ce problème, analogue à celui de la *fenêtre de Viviani*, a été traité dans une leçon à l'Université de Liège.

Pour réduire aux intégrales elliptiques, je pose

$$x = a\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right)(^*). \tag{3}$$

De là résulte

$$A = 3a^2\sqrt{3}\int_0^{\mu} \sin\theta\cos^2\theta d\theta \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\theta\right), \tag{4}$$

$$\sin\mu = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

II. L'intégration par parties donne

$$\int_0^{\mu} \sin\theta\cos^2\theta d\theta \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\theta\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\cos^3\theta\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\theta\right)\right]_0^{\mu} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{\mu}\frac{\cos^4\theta d\theta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}}$$

$$= -\frac{\pi}{36\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{\mu}\frac{\cos^4\theta d\theta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}};$$

puis

$$A = -\frac{\pi}{6}a^2 + \frac{a^2}{3}B, \tag{5}$$

en supposant

$$B = \int_0^{\mu}\frac{\cos^4\theta d\theta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}}. \tag{6}$$

III. Soit, généralement,

$$\int\frac{\cos^4\theta d\theta}{\Delta} = \alpha(\Delta\sin\theta\cos\theta) + \beta\int\frac{d\theta}{\Delta} + \gamma\int\Delta d\theta\,(^{**}),$$

(*) *Résultante* de deux transformations très simples.

(**) Ceci est l'artifice de Legendre (*Fonctions elliptiques*, t. I, p. 11), un peu simplifié.

ou

$$1 - 2\sin^2\theta + \sin^4\theta$$

$$= \alpha(1 - c^2\sin^2\theta)(1 - 2\sin^2\theta) - \alpha c^2\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) + \beta + \gamma(1 - \sin^2\theta).$$

En identifiant, on trouve

$$\alpha = \frac{1}{3c^2}, \quad \beta = \frac{(3c^2 - 2)(c^2 - 1)}{3c^4}, \quad \gamma = 2\,\frac{2c^2 - 1}{3c^4};$$

et, si $c^2 = \frac{3}{4}$:

$$\alpha = \frac{4}{9}, \quad \beta = -\frac{1}{27}, \quad \gamma = \frac{16}{27}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} B &= \frac{4}{9}\sin\mu\cos\mu\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\mu} - \frac{1}{27}F(\mu) + \frac{16}{27}E(\mu) \\ &= \frac{1}{27}[4 + 16E(\mu) - F(\mu)]; \end{aligned}$$

puis

$$A = -\frac{\pi}{6}a^2 + \frac{4}{81}a^2 + \frac{a^2}{81}[16E(\mu) - F(\mu)]. \tag{7}$$

CXLIX. — Sur les podaires.

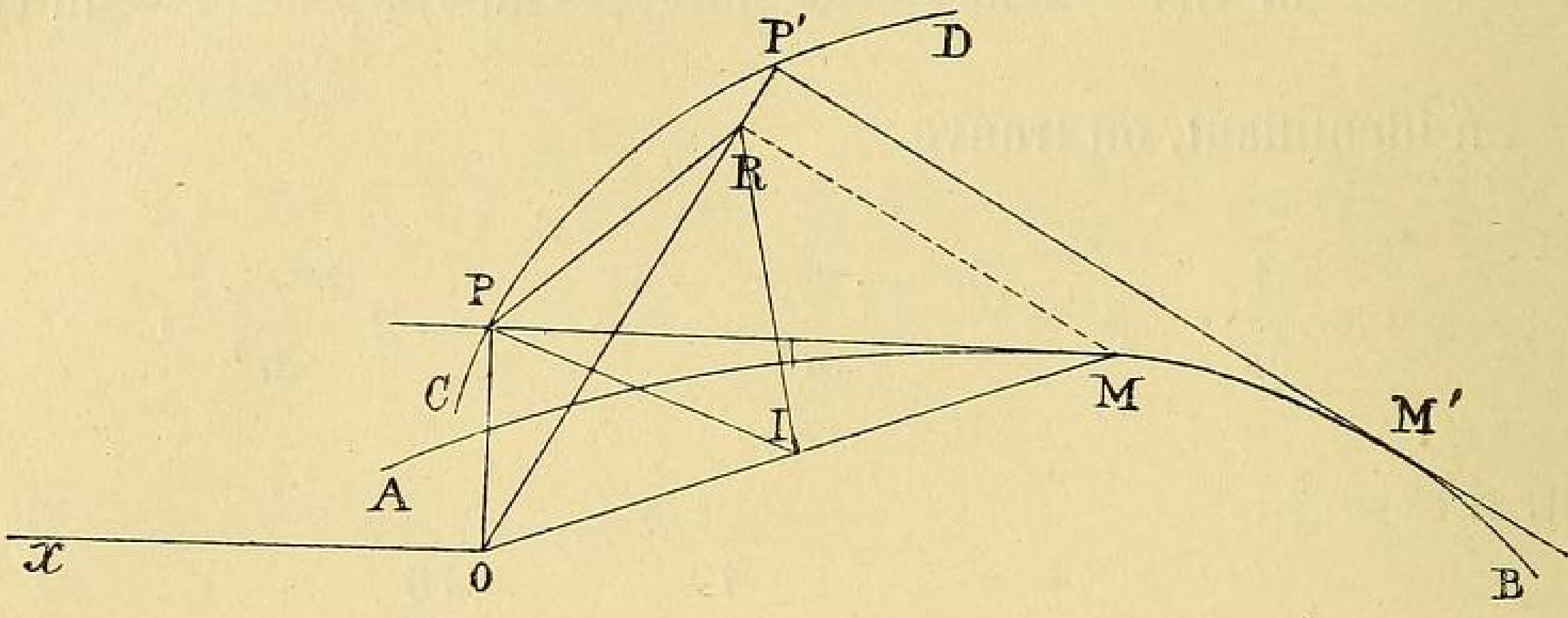
(*Juin* 1875.)

I. *Élément de la podaire.* — Soient, sur une courbe donnée, C, M, M′ deux points infiniment voisins. Soient P, P′ les points correspondant à M, M′, sur la podaire CD de C, relativement à un *pôle* O. Désignons par u le rayon vecteur OM, par E l'angle de contingence en M, par $d\sigma$ l'arc infiniment petit PP′.

Si l'on mène MR parallèle à la tangente M′T′, la distance RP′, entre ces deux droites, est un infiniment petit du deuxième ordre. Donc nous pouvons supposer $d\sigma = $ PR.

Pour évaluer la longueur PR, j'observe que le quadrilatère

OPRM, ayant deux angles droits, en P et en R, est inscrit à la demi-circonférence décrite sur OM comme diamètre. Ainsi



$$\mathrm{PR} = 2\,\frac{u}{2}\sin\frac{\mathrm{PIR}}{2} = u\sin\varepsilon\,;$$

ou, en négligeant le troisième ordre,

$$\mathrm{PR} = u\varepsilon.$$

La formule cherchée est donc

$$d\sigma = u\varepsilon\,; \tag{1}$$

ou

$$d\sigma = u\,\frac{ds}{\rho}\cdot \tag{2}$$

Celle-ci exprime que : *l'élément de la podaire est à l'élément de la courbe primitive, dans le rapport du rayon vecteur au rayon de courbure de celle-ci* (*).

Addition. — (*Novembre* 1881.)

II. Soit

$$p = f(\omega) \tag{3}$$

l'équation de la podaire. Legendre a donné cette formule remarquable

$$ds = (p + p'')\,d\omega\ (^{**}), \tag{4}$$

(*) *Traité des fonctions elliptiques*, t. III, p. 588.

(**) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, p. 175.

dont la démonstration est facile (*). D'ailleurs, $d\omega = \varepsilon$; donc

$$\rho = p + p'' \text{ (**)}. \tag{5}$$

III. *Remarque.* — On doit, à M. Green, cette autre expression du rayon de courbure :

$$\rho = \frac{udu}{dp} \text{ (***)}. \tag{6}$$

Il est aisé de ramener l'une à l'autre. En effet, d'après une propriété connue, sur laquelle nous allons revenir :

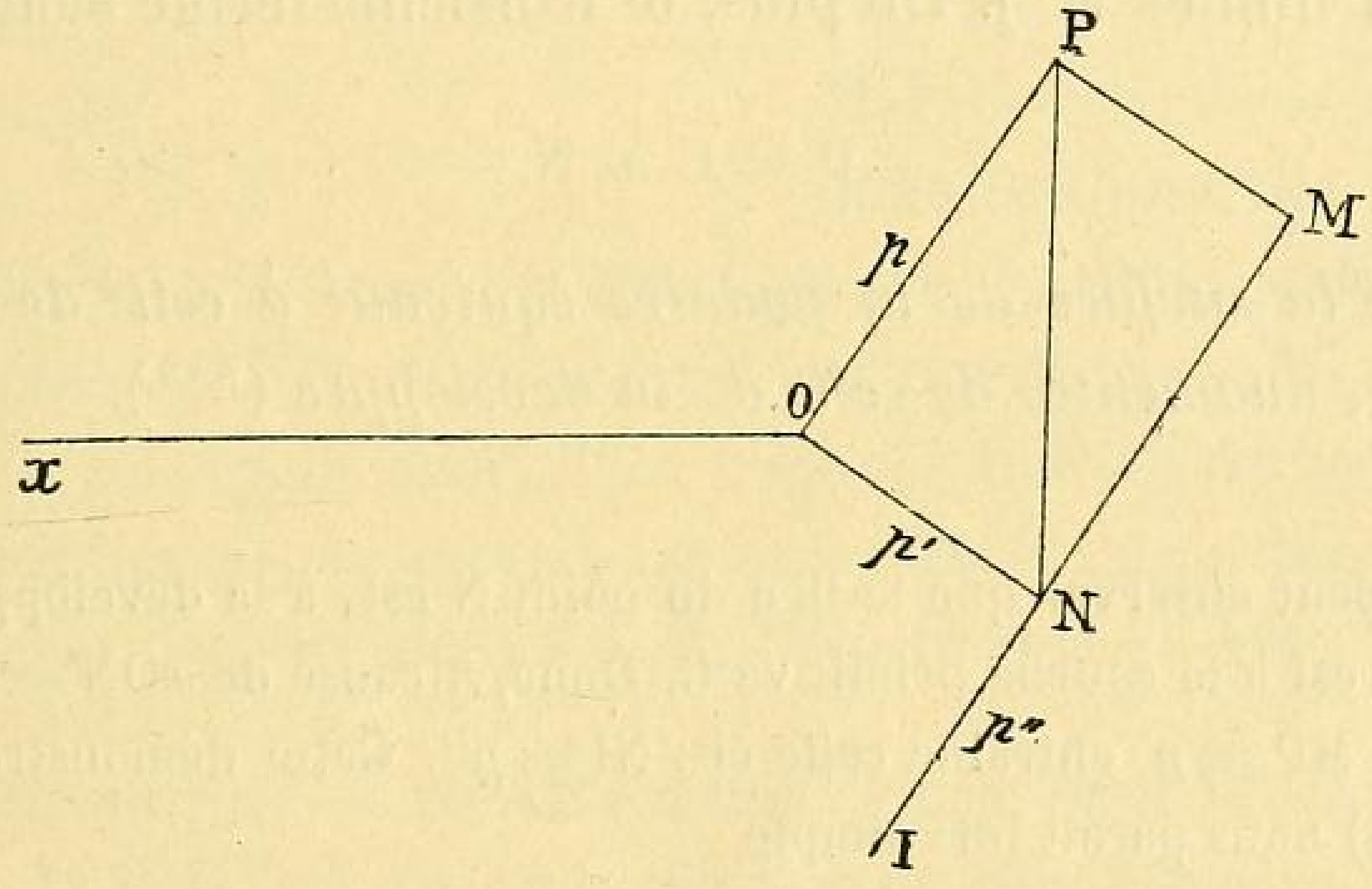
$$u^2 = p^2 + p'^2;$$

donc

$$udu = (pp' + p'p'')d\omega = (p + p'')dp;$$

etc.

IV. *Podaire de la développée.* — On sait que la normale PN, au point P de la podaire, est l'hypoténuse du triangle PON, dans



lequel $ON = p'$. En outre, cette normale est la diagonale du rectangle MPON (IV). Donc $MP = p'$. De plus, *le lieu du point* N,

(*) Celle de Legendre est trop compliquée. De plus, l'illustre Géomètre ne semble pas avoir aperçu la relation (5).

(**) *Bulletin de l'Académie,* février 1869.

(***) *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. II, p. 175.

(IV) *Cours d'Analyse,* p. 347.

projection de l'origine sur la normale à C, *est la podaire de la développée de* C.

V. *Centre de courbure.* — D'après la formule (5), il suffit, pour trouver le centre de courbure de C, de prendre $\mathrm{NI} = p''$ (*).

VI. *Relation entre trois aires.* — Supposons que la courbe C soit fermée, convexe, et qu'elle renferme le pôle O. Appelons C, P, N les aires des trois courbes. Il est visible que

$$\mathrm{C} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p\,ds, \quad \mathrm{P} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p^2 d\omega, \quad \mathrm{N} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p'^2 d\omega.$$

A cause de la valeur de ds (4) :

$$\mathrm{C} - \mathrm{P} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} pp''d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p\,dp' = \left[\frac{1}{2}pp'\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p'^2 d\omega.$$

Le terme intégré est nul; parce que p, p' ont mêmes valeurs aux deux limites (**). De plus, le troisième terme égale (— N). Donc

$$\mathrm{P} = \mathrm{C} + \mathrm{N}.$$

Ainsi : *la surface de la podaire équivaut à celle de la courbe primitive, augmentée de celle de la développée* (***).

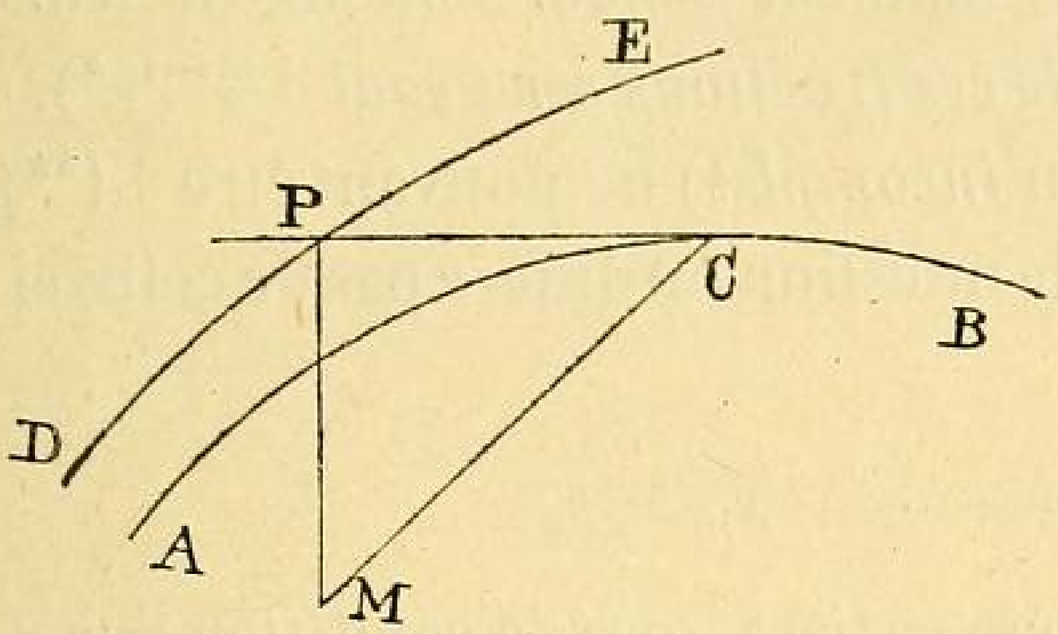
(*) On peut observer que le lieu du point N est, à la développée, ce que la podaire est à la courbe primitive C. Donc, à cause de $x\mathrm{ON} = \omega + const.$, la relation $\mathrm{MP} = p'$ entraîne celle-ci : $\mathrm{NI} = p''$. Cette démonstration de la formule (5) nous paraît fort simple.

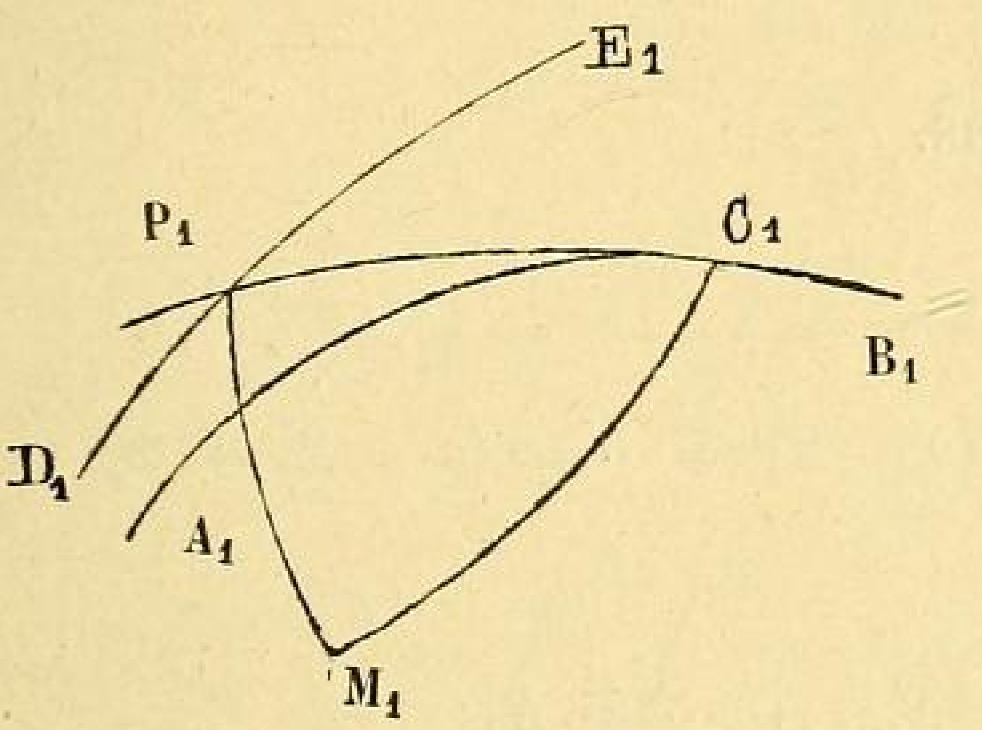
(**) Cette remarque a été faite, autrefois, par M. *Ronkar,* aujourd'hui Professeur à l'Université de Liège.

(***) Autrement dit : *la couronne comprise entre la courbe et sa podaire, est équivalente, en surface, à la podaire de la développée.* Par exemple, *la podaire de la développée de l'ellipse* (l'un des foyers étant pris comme pôle) *a pour mesure* $\pi a(a - b)$. (Septembre 1886.)

Autre addition. — (*Avril* 1886.)

VII. *Transformée d'une podaire.* — Soient une courbe ACB et sa podaire DPE, relativement à un pôle M. Enroulons la figure sur une surface développable Σ, de manière que ACB devienne $A_1C_1B_1$; etc.





Les droites MC, CP, MP sont remplacées par des lignes géodésiques M_1C_1, C_1P_1, M_1P_1. MP est le plus court chemin de M à la tangente CP; donc M_1P_1 est, sur Σ, le plus court chemin de M_1 à C_1P_1; et l'*angle* $M_1P_1C_1$ *est droit* (*). On a donc ce théorème :

La transformée, sur une développable Σ, *de la podaire d'une courbe plane* ACB, *relativement à un point donné* M, *est le lieu du sommet de l'angle droit d'un triangle* $M_1P_1C_1$ *formé par trois lignes géodésiques, et dont le sommet* M_1 *est fixe, tandis que le côté* C_1P_1 *est tangent au côté* A_1B_1, *transformé de* AB.

VIII. *Remarque.* — *Si* AB *est une ellipse, dont* M *soit un foyer, la courbe* $D_1P_1E_1$ *est une transformée de circonférence* (**).

(*) Cette proposition, à peu près évidente, est démontrée dans le *Calcul des variations,* de Moigno et Lindelöf. Elle est d'autant plus remarquable que, dans la *transformée plane* d'une figure tracée sur une surface développable, les angles ne sont pas, généralement, égaux aux angles primitifs.

(**) La question des *transformées de podaires* est liée à celle des *développantes.* On peut consulter, sur ce sujet, notre *Théorie analytique des lignes à double courbure,* pp. 61-63.

CL. — Un théorème d'Ampère.

(*Septembre* 1875.)

« *Si l'on réunit toutes les fractions continues qui, réduites* » *sous la forme la plus simple, donnent* s *pour somme de leurs* » *quotients entiers, le nombre de ces fractions sera égal à* 2^{s-1}(*). »

Le dernier *quotient entier* (ou *incomplet*) ne pouvant être 1 (**), à moins que la fraction égale 1, la question ne diffère pas de celle-ci :

Combien l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = s$$

admet-elle de solutions en nombres entiers, avec la condition que x_n *surpasse* 1?

Soit A_s ce nombre de solutions.

1° Il est visible que $A_2 = 1$.

2° Des identités :

$$s = s = 1 + (s-1) = 2 + (s-2) = \cdots = (s-2) + 2,$$

on conclut la relation

$$A_s = 1 + A_{s-1} + A_{s-2} + \cdots + A_2;$$

puis, de celle-ci :

$$A_{s-1} = 1 + A_{s-2} + \cdots + A_2.$$

Donc, par soustraction,

$$A_s = 2A_{s-1}.$$

Ainsi, *les nombres* A_2, A_3, ... A_s *forment une progression, dont la raison est* 2. Et comme $A_2 = 1$:

$$A_s = 2^{s-2}.$$

(*) *Correspondance mathématique de Quetelet*, t. IX, p. 145. Cet énoncé n'est pas très clair. Voici comment je l'interprète : *Combien y a-t-il de fractions continues* (de la forme ordinaire) *dans lesquelles la somme des quotients incomplets soit* s?

(**) En effet,

$$a + \cfrac{1}{b + \cdots + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{1}}} = a + \cfrac{1}{b + \cdots + \cfrac{1}{k+1}}.$$

CLI. — Sur les dérivées d'une fraction.

(*Février* 1876.)

I. Soit

$$y = \frac{1}{(1-x^2)^k} = \frac{1}{(1+x)^k}\,\frac{1}{(1-x)^k}. \tag{1}$$

On a, k étant positif :

$$\frac{\Gamma(k)}{(1+x)^k} = \int_0^\infty e^{-(1+x)\alpha}\,\alpha^{k-1}d\alpha,$$

$$\frac{\Gamma(k)}{(1-x)^k} = \int_0^\infty e^{-(1-x)\beta}\,\beta^{k-1}d\beta;$$

donc

$$[\Gamma(k)]^2 y = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)}\,e^{(\beta-\alpha)x}\,\alpha^{k-1}\,\beta^{k-1}\,d\alpha d\beta, \tag{2}$$

et

$$[\Gamma(k)]^2\frac{d^ny}{dx^n} = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)+(\beta-\alpha)x}(\beta-\alpha)^n\,\alpha^{k-1}\,\beta^{k-1}\,d\alpha d\beta. \tag{3}$$

Pour simplifier l'intégrale double, posons

$$\alpha = \frac{u}{1+x}, \quad \beta = \frac{v}{1-x}.$$

Il résulte, de ces valeurs :

$$(\alpha\beta)^{k-1} = \frac{(uv)^{k-1}}{(1-x^2)^{k-1}}, \quad d\alpha d\beta = \frac{dudv}{1-x^2}, \quad \beta-\alpha = \frac{v(1+x)-u(1-x)}{1-x^2};$$

puis, au lieu de la formule (3) :

$$[\Gamma(k)]^2\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{1}{(1-x^2)^{k+n}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u+v)}(uv)^{k-1}[v(1+x)-u(1-x)]^n dudv. \tag{4}$$

Le terme général de la puissance n$^{\text{ième}}$ est

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n-p+1)}(-1)^p u^p v^{n-p}(1-x)^p(1+x)^{n-p}.$$

Donc l'égalité (4) devient :

$$[\Gamma(k)]^2 \frac{d^n y}{dx^n}$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{(1-x^2)^{k+n}} \sum_0^n (-1)^p \frac{(1-x)^p(1+x)^{n-p}}{\Gamma(p+1)\Gamma(n-p+1)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u+v)} u^{k+p-1} v^{k+n-p-1} du dv. \quad (5)$$

L'intégrale double, considérée comme le produit de deux intégrales simples, a pour valeur

$$\Gamma(k+p)\Gamma(k+n-p) = \Gamma(2k+n) \int_0^1 (1-\theta)^{k+p-1} \theta^{k+n-p-1} d\theta$$

$$= \Gamma(2k+n) \int_0^1 (\theta-\theta^2)^{k-1} (1-\theta)^p \theta^{n-p} d\theta.$$

Nous avons donc, au lieu du second membre de la formule (5):

$$\frac{\Gamma(2k+n)}{(1-x^2)^{k+n}} \int_0^1 (\theta-\theta^2)^{k-1} d\theta$$

$$\times \sum_0^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n-p+1)} (-1)^p [(1+x)\theta]^{n-p} [(1-x)(1-\theta)]^p.$$

La quantité $\sum_0^n$ représente le développement de

$$[(1+x)\theta - (1-x)(1-\theta)]^n = (2\theta - 1 + x)^n.$$

Par conséquent,

$$[\Gamma(k)]^2 \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(2k+n)}{(1-x^2)^{k+n}} \int_0^1 (\theta-\theta^2)^{k-1} (2\theta-1+x)^n d\theta \text{ (*)}. \quad (6)$$

II. Posons

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{P_n}{(1-x^2)^{k+n}} : \quad (7)$$

P_n est un *polynôme entier, du degré* n, déterminé par la formule

$$P_n = \frac{\Gamma(2k+n)}{[\Gamma(k)]^2} \int_0^1 (\theta-\theta^2)^{k-1} (2\theta-1+x)^n d\theta. \quad (8)$$

(*) Très probablement, le calcul précédent peut être abrégé; mais peut-être, en l'abrégeant, le rendrait-on moins simple.

Pour la simplifier, soit fait

$$2\theta - 1 = \cos\varphi. \tag{9}$$

On trouve, par un calcul facile,

$$P_n = \frac{1}{2^{2k-1}} \frac{\Gamma(2k+n)}{[\Gamma(k)]^2} \int_0^\pi \sin^{2k-1}\varphi (x + \cos\varphi)^n d\varphi \ (^*). \tag{10}$$

Addition. — (*Avril* 1886.)

III. Si l'on développe $(x + \cos\varphi)^n$, on a, en supprimant des intégrales nulles,

$$\int_0^\pi \sin^{2k-1}\varphi (x + \cos\varphi)^n d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1}\varphi d\varphi [x^n + C_{n,2} x^{n-2} \cos^2\varphi + C_{n,4} x^{n-4} \cos^4\varphi + \cdots].$$

En général,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\varphi \cos^q\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}.$$

Donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\Gamma(k) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1}\varphi \cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\Gamma(k) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)},$$

. . . . ;

(*) Lorsque $k = \frac{1}{2}$, cette égalité se réduit à

$$P_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\pi} \int_0^\pi (x + \cos\varphi)^n d\varphi;$$

ce qui est exact. (*Notes d'Algèbre et d'Analyse*, p. 10.)

puis, à cause de $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$:

$$\int_0^\pi \sin^{2k-1}\varphi(x + \cos\varphi)^n d\varphi$$

$$= \frac{\Gamma(k)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} \left[x^n + C_{n,2} \frac{\frac{1}{2}}{k + \frac{1}{2}} x^{n-2} + C_{n,4} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k + \frac{3}{2}\right)} x^{n-4} + \cdots \right];$$

et enfin, au lieu de la formule (10) :

$$P_n = \frac{1}{2^{2k-1}} \frac{\Gamma(2k + n)\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} \cdot$$

$$\times \left[x^n + \frac{1}{2k + 1} C_{n,2} x^{n-2} + \frac{1 \cdot 3}{(2k + 1)(2k + 3)} C_{n,4} x^{n-4} + \cdots \right] (^*). \quad (11)$$

IV. *Remarque.* — Si k est un *nombre entier*, le second membre est *rationnel;* ce qui devait être.

Soit, par exemple, $k = 1$; alors

$$P_n = \Gamma(n + 2) \left[x^n + \frac{1}{3} C_{n,2} x^{n-2} + \frac{1}{5} C_{n,4} x^{n-4} + \cdots \right];$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(n + 2)}{(1 - x^2)^{n+1}} \left[x^n + \frac{1}{3} C_{n,2} x^{n-2} + \frac{1}{5} C_{n,4} x^{n-4} + \cdots \right] (^{**}).$$

(*) Le dernier terme contient x^0 ou x^1, selon que n est *pair* ou *impair.*

(**) Si, après avoir décomposé y en

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}\right],$$

on forme *directement* $\frac{d^n y}{dx^n}$, on trouve le même résultat.

CLII. — Une construction de l'hyperbole.

(*Mars* 1876) (*).

I. Lemme. — *Étant donné un triangle* ABC, *on décrit, du sommet* C *comme centre, une circonférence quelconque. Des points* A, B, *on mène des tangentes* AD, BE, *lesquelles se coupent en* M. *Le lieu du point* M *est la circonférence circonscrite au triangle* ABC.

II. *Construction de l'hyperbole.* — Soient A, A′ les sommets réels; F, F′ les foyers; Oy l'axe non transverse. Par F, F′, on fait passer une circonférence quelconque : soit C l'un de ses points d'intersection avec Oy. On trace la corde CF, qui coupe, en D, la parallèle AB à Oy. Du point C comme centre, avec CD pour rayon, on trace une circonférence C′. Soient M, M′ les points où elle coupe la première circonférence : *les points* M, M′ *appartiennent à l'hyperbole, laquelle touche, en ces points, la circonférence* C′.

III. *Remarque.* — *L'hyperbole est l'enveloppe de* C′.

CLIII. — Développement d'un radical.

(*Avril* 1886.)

I. Soient

$$y = 1 + z + z^2 + \cdots + z^p, \tag{1}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{y}} = \sum_0^\infty A_n z^n \text{ (**)}; \tag{2}$$

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

(**) Lorsque $p = 2$, les coefficients A_n deviennent un cas particulier des *fonctions de Legendre* (*Deuxième Mémoire sur les fonctions* X_n, p. 63).

et, par conséquent,

$$u\sqrt{y} = 1. \tag{3}$$

On déduit, de cette équation,

$$uy' + 2yu' = 0, \tag{4}$$

ou

$$u(1 + 2z + 3z^2 + \cdots + pz^{p-1}) + 2u'(1 + z + z^2 + \cdots + z^p) = 0. \tag{5}$$

A cette égalité, on peut adjoindre celle-ci :

$$u[1 - (p+1)z^p + pz^{p+1}] + 2u'(1 - z)(1 - z^{p+1}) = 0, \tag{6}$$

résultant de ce que :

$$y = \frac{1 - z^{p+1}}{1 - z}, \tag{7}$$

$$y' = \frac{1 - (p+1)z^p + pz^{p+1}}{(1 - z)^2} \text{ (*)}. \tag{8}$$

II. La relation (6) équivaut à

$$[1-(p+1)z^p+pz^{p+1}]\sum_0^\infty A_n z^n + 2(1-z-z^{p+1}+z^{p+2})\sum_1^\infty nA_n z^{n-1} = 0,$$

ou encore, à

$$\left.\begin{aligned} &[1 - (p+1)z^p + pz^{p+1}] \sum_0^\infty A_n z^n \\ &+ 2(1 - z - z^{p+1} + z^{p+2}) \sum_0^\infty (n+1)A_{n+1} z^n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Le coefficient de z^{n-1} est

$$A_{n-1} - (p+1)A_{n-p-1} + pA_{n-p-2}$$
$$+2[nA_n - (n-1)A_{n-1} - (n-p-1)A_{n-p-1} + (n-p-2)A_{n-p-2}] = 0, \quad (n \overline{>} p+2)$$

ou

$$2nA_n - (2n-3)A_{n-1} - (2n-p-1)A_{n-p-1} + (2n-p-4)A_{n-p-2} = 0. \tag{10}$$

(*) Les équations aux différences finies, déduites des égalités (5), (6), contiennent, respectivement, $p + 1$ *termes* et *quatre termes*. A partir de $p = 4$, la seconde est donc plus simple que la première. En conséquence, dans ce qui va suivre, nous négligerons l'égalité (5).

III. L'*ordre* de cette équation (10), *aux différences finies*, est

$$n - (n - p - 2) = p + 2.$$

Donc, elle donnera, de proche en proche, un terme de rang quelconque, si l'on connaît, préalablement, les $p + 1$ termes *initiaux* : A_0, A_1, ..., A_p.

Évidemment,

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -\frac{1}{2}.$$

Pour trouver A_2, A_3, ..., A_p, et même le *terme général*, A_n, on peut appliquer l'une ou l'autre des méthodes suivantes :

1° D'après la formule

$$y = \frac{1 - z^{p+1}}{1 - z}, \tag{7}$$

on a

$$u = (1 - z)^{\frac{1}{2}}(1 - z^{p+1})^{-\frac{1}{2}} \tag{12}$$

Le développement du premier facteur est

$$1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2.4}z^2 - \frac{1.3}{2.4.6}z^3 - \dots = 1 - \sum_0^\infty C_{2q,\,q}\frac{z^{q+1}}{4^{q+1}.2(q+1)}. \tag{13}$$

Le développement du second :

$$1 + \frac{1}{2}z^{p+1} + \frac{1.3}{2.4}z^{2(p+1)} + \dots = \sum_0^\infty C_{2q',\,q'}\frac{z^{(p+1)q'}}{4^{q'}}. \tag{14}$$

Faisant le produit, et le limitant à z^p, on aura donc les valeurs initiales demandées ; savoir :

$$A_2 = -\frac{1}{2.4}, \quad A_3 = -\frac{1.3}{2.4.6}, \quad \dots, \quad A_p = -\frac{1.3.5\dots\overline{2p-1}}{2.4.6\dots 2p}.$$

2° De

$$u = \frac{1}{\sqrt{y}} = \sum_0^\infty A_n z^n, \tag{2}$$

on conclut

$$\frac{1-z}{1-z^{p+1}} = 1 + 2A_1 z + \cdots + (A_0A_n + A_1A_{n-1} + \cdots + A_nA_0)z^n + \cdots,$$

ou

$$\left.\begin{aligned} &1 - z + z^{p+1} - z^{p+2} + z^{2p+2} - z^{2p+3} + \cdots \\ &= 1 + 2A_1 z + \sum_2^{\infty} (A_0A_n + A_1A_{n-1} + \cdots + A_nA_0)z^n; \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

puis

$$A_0A_n + A_1A_{n-1} + \cdots + A_nA_0 = \begin{matrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}, \quad (16)$$

selon la forme de n.

IV. Cette relation (16), inapplicable dès que l'indice n est un peu grand, pourrait servir à prouver la propriété suivante :

$$4^n A_n = \textit{entier}. \quad (17)$$

Mais la démonstration est encore plus simple au moyen de la formule (12), jointe aux développements (13) et (14).

En effet, si $q + 1$ n'est pas multiple de $p + 1$,

$$A_n = -\sum C_{2q,q} \cdot C_{2q',q'} \frac{1}{4^{q+q'}2(q+1)}; \qquad (n = \overline{p+1}\,q' + q + 1)$$

et, dans le cas contraire,

$$A_n = \frac{1}{4^t} C_{2t,t} - \sum C_{2q,q} \cdot C_{2q',q'} \frac{1}{4^{q+q'}2(q+1)}. \qquad \left(t = \frac{n}{p+1}\right)$$

Or, d'après un théorème connu,

$$\frac{1}{q+1} C_{2q,q} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2q}{1 \cdot 2 \ldots q \times 1 \cdot 2 \ldots \overline{q+1}} = \textit{entier};$$

et, d'un autre côté, $4^{q+q'+\frac{1}{2}}$ *divise* $4^{q+q'+pq'+1}$.

V. En résumé : 1° *Si l'on suppose*

$$(1 + z + z^2 + \cdots + z^p)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} C_n \left(\frac{z}{4}\right)^n,$$

tous les coefficients C_n *sont entiers.*

2° *Ces coefficients sont donnés par la formule*

$$2nC_n=4(2n-3)C_{n-1}+4^{p+1}(2n-p-1)C_{n-p-1}-4^{p+2}(2n-p-4)C_{n-p-2} \quad (18)$$

3° *Ce multiple de* 4^n *se réduit à zéro, si* $n = \mathcal{M}(p+1)$.

VI. ***Remarque.*** — Si $p = 1$, la formule (18) devient

$$nC_n - 2(2n-3)C_{n-1} - 16(n-1)C_{n-2} + 32(2n-5)C_{n-3} = 0. \quad (19)$$

Le calcul direct donne

$$C_1 = -2 = -C_{2,1}, \quad C_2 = 6 = C_{4,2}, \quad C_3 = -20 = -C_{6,3};$$

après quoi l'on vérifie, aisément, que

$$C_n = \mp C_{2n,n} \text{ (*)}. \quad (20)$$

Par conséquent, il existe cette relation entre les nombres $C_{2n,n}$:

$$\left.\begin{array}{l} nC_{2n,n} + 2(2n-3)C_{2n-2,n-1} - 16(n-1)C_{2n-4,n-2} \\ -32(2n-5)C_{2n-6,n-3} = 0. \end{array}\right\} \quad (21)$$

Il en résulte, si n est *impair :*

$$-3C_{2n-2,n-1} + 8C_{2n-4,n-2} + 80C_{2n-6,n-3} = \mathcal{M}(n),$$

ou

$$3C_{2n,n} - 8C_{2n-2,n-1} - 80C_{2n-4,n-2} = \mathcal{M}(n+1).$$

On sait que $C_{2n,n} = \mathcal{M}(n+1)$; donc, par le changement déjà effectué :

$$C_{2n,n} + 10C_{2n-2,n-1} = \mathcal{M}(n+2).$$

Nous avons donc ce petit théorème :

Soit n *un nombre impair. Si, au nombre des combinaisons de* 2n *lettres,* n *à* n, *on ajoute* 10 *fois le nombre des combinaisons de* 2n — 2 *lettres,* n — 1 *à* n — 1, *le résultat est divisible par* n + 2 (**).

(*) Ce résultat était évident *a priori,* à cause de

$$u = (1+z)^{-\frac{1}{2}}.$$

(**) Pour le cas de n *pair,* je n'ai rien trouvé de semblable.

CLIV. — Sur une équation algébrique.

(*Septembre* 1876.)

I. L'équation

$$(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1 = 0$$

a été remarquée depuis longtemps, parce que ses *seules* racines réelles sont *toujours* $0, -\frac{1}{2}, -1$ (*).

Il est facile d'en former d'autres, jouissant de propriétés analogues à celle qui vient d'être rappelée. Par exemple :

L'équation réciproque

$$x^{4n+2} - (2n+1)x^{2n+2} + (2n+1)x^{2n} - 1 = 0 \qquad (1)$$

a trois racines égales à $+1$, *trois racines égales à* -1, *et* $4n-4$ *racines imaginaires.*

La démonstration, que nous ne développerons pas, est extrêmement simple.

II. Si l'on supprime le facteur $(x^2-1)^2$, l'équation résultante peut être mise sous la forme

$$[x^{2n-1}+x^{2n-3}+\cdots+x]^2-(2n-1)x^{2n-2}-(2n-3)x^{2n-4}-\cdots-1=0, \quad (2)$$

puis sous celle-ci :

$$x^{4n-2}+2x^{4n-4}+\cdots+nx^{2n}-nx^{2n-2}-(n-1)x^{2n-4}-\cdots-1=0. \quad (3)$$

Il est évident que le premier membre de cette dernière équation est encore divisible par x^2-1.

Addition. — (*Septembre* 1886.)

III. Le quotient est

$$Q = x^{4n-4} + 3x^{4n-6} + 6x^{4n-8} + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}x^{2n-2} + \cdots$$
$$+ 6x^4 + 3x^2 + 1.$$

(*) *Cours d'Analyse*, p. 303. On suppose $n > 1$. Je crois me rappeler que Waring s'en est occupé.

Ainsi, *l'équation réciproque*

$$\left.\begin{array}{l} x^{4n} + 3x^{4n-2} + 6x^{4n-4} + \cdots + \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}x^{2n} + \cdots \\ \qquad + 6x^4 + 3x^2 + 1 = 0, \end{array}\right\} \quad (4)$$

dans laquelle les coefficients sont les nombres triangulaires, n'a aucune racine réelle.

IV. Soit X_{4n} le polynôme formant le premier membre. Il est facile de voir que

$$X_{4n} = (x^{2n} + x^{2n-2} + \cdots + x^2 + 1)^2 + x^2X_{4n-4}. \qquad (5)$$

En effet, le développement du carré est, comme on sait :

$$x^{4n} + 2x^{4n-4} + 3x^{4n-4} + 4x^{4n-6} + \cdots + 3x^4 + 2x^2 + 1.$$

Donc, en identifiant les deux membres, on retrouve les égalités connues :

$$3 = 1 + 2, \quad 6 = 3 + 3, \quad 10 = 6 + 4, \quad 15 = 10 + 5, \ldots$$

V. Si l'on part de

$$X_4 = x^4 + 3x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 + x^2,$$

on obtient, au moyen de la formule (5) :

$$\left.\begin{array}{r} X_{4n} = (x^{2n} + x^{2n-2} + \cdots + x^2 + 1)^2 \\ + x^2(x^{2n-2} + x^{2n-4} + \cdots + x^2 + 1)^2 + \cdots + x^{2n-2}(x^2 + 1)^2 + x^{2n}. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Ce polynôme, étant la somme de plusieurs carrés, ne peut s'annuler pour aucune valeur réelle de x. La proposition primitive est donc vérifiée (*).

(*) Au moyen de cette relation (6), et de l'équation (4), on pourrait démontrer la formule connue qui donne la *somme des carrés des nombres naturels*.

CLV. — Une application de la formule du binôme.

(*Novembre* 1861.)

x étant positif, on a, en série convergente,

$$2^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2} + \cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2\ldots n} + \cdots (^*). \quad (1)$$

D'un autre côté,

$$2^x = 1 + \frac{x(\ell.2)}{1} + \frac{x^2(\ell.2)^2}{1.2} + \frac{x^3(\ell.3)^3}{1.2.3} + \cdots \quad (2)$$

Si, dans ces deux développements, on égale les coefficients de x^2, on trouve

$$\frac{1}{2}(\ell.2)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots \quad (3)$$

Le second membre est la même chose que

$$\int_0^1 d\theta \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}(1+\theta) + \frac{1}{4}(1+\theta+\theta^2) - \frac{1}{5}(1+\theta+\theta^2+\theta^3) + \cdots\right],$$

ou

$$\int_0^1 \frac{d\theta}{1-\theta}\left[\frac{1}{2}(1-\theta) - \frac{1}{3}(1-\theta^2) + \frac{1}{4}(1-\theta^3) - \frac{1}{5}(1-\theta^4) + \cdots\right],$$

ou encore :

$$\int_0^1 \frac{d\theta}{1-\theta}\left[1 - \ell.2 + \frac{\ell(1+\theta) - \theta}{\theta}\right].$$

Donc enfin,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)}\left[\ell(1+x) - x\,\ell.2\right] = \frac{1}{2}(\ell.2)^2\,(^{**}). \quad (4)$$

(*) *Comptes rendus*, t. XLV, p. 621.

(**) Probablement, cette intégrale est connue; mais je ne l'ai pas trouvée dans le Recueil de M. Bierens de Haan.

CLVI. — Sur la fonction E(x).

(*Mars* 1877.)

Soit, avec la notation de Legendre,

$$E\left(\frac{N}{p}\right) + E\left(\frac{N}{p^2}\right) + E\left(\frac{N}{p^3}\right) + \cdots = X; \qquad (1)$$

N, p étant des nombres entiers.

Mettons N sous la forme :

$$ap^{n-1} + bp^{n-2} + \cdots + kp + l;$$

$a, b, c, \ldots k, l$ étant inférieurs à p (*).

Il résulte, de cette décomposition,

$$X = a(p^{n-2} + \cdots + p + 1) + b(p^{n-3} + \cdots + p + 1) + \cdots + k,$$

ou

$$X = a\frac{p^{n-1} - 1}{p - 1} + b\frac{p^{n-2} - 1}{p - 1} + \cdots + k\frac{p - 1}{p - 1}. \qquad (2)$$

On a aussi

$$N = a(p^{n-1} - 1) + \cdots + k(p - 1) + a + b + \cdots + k + l. \qquad (3)$$

Donc le quotient entier de N par $p - 1$ est

$$Y = X + E\left(\frac{a + b + \cdots + k + l}{p - 1}\right). \qquad (4)$$

Le maximum du numérateur est $n(p - 1)$.

Par conséquent :

Le nombre X *est compris entre* Y *et* Y — n ;

ou, ce qui revient au même :

Si l'on suppose

$$X = Y = E\left(\frac{N}{p - 1}\right),$$

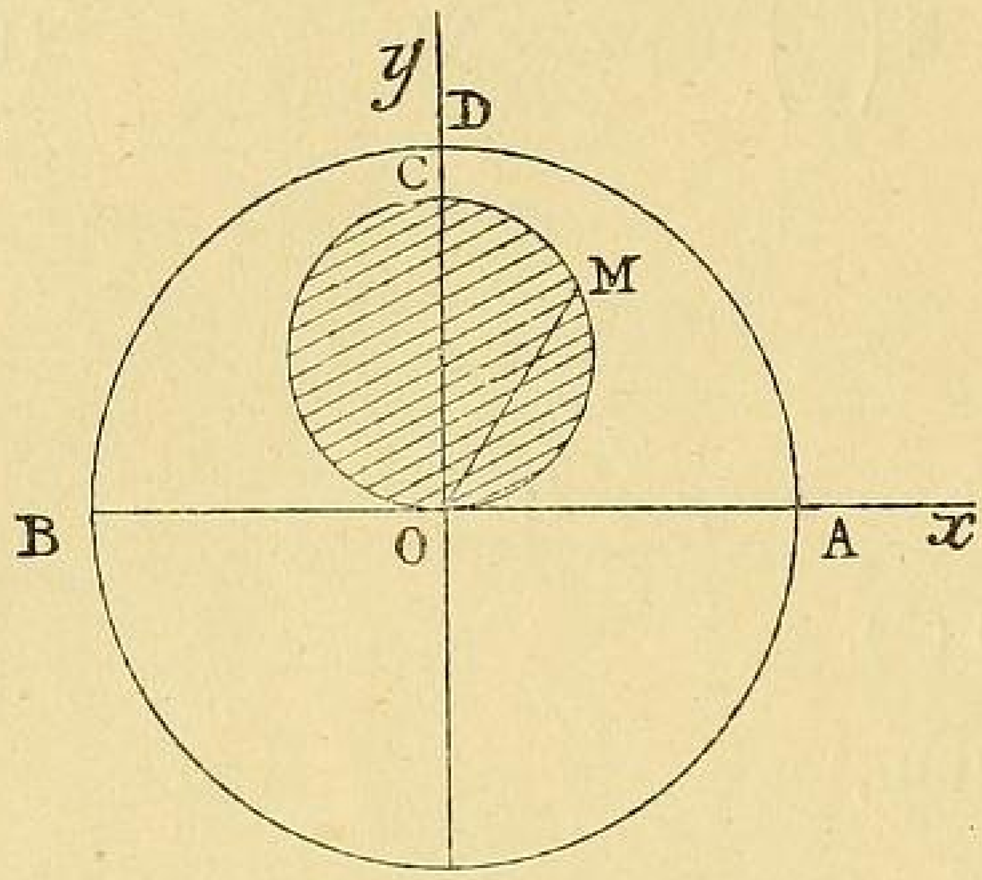
l'erreur commise est inférieure à n; p^n *étant la première puissance de* p *qui surpasse* N.

(*) Autrement dit, on suppose N écrit dans le système dont la base est p.

CLVII. — Aire d'une figure sphérique.

(*Avril* 1877.)

I. Le rayon OA étant pris pour unité, soit $OC = c$.



Sur OC, comme diamètre, décrivons une circonférence.

A désignant l'aire de la partie supérieure de la sphère, projetée à l'intérieur du cercle OC,

$$A = 2\iint \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}; \quad (1)$$

x et y étant positifs.

Soient :

$$x = u \cos \varphi, \qquad y = u \sin \varphi; \qquad (2)$$

alors

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{c \sin \varphi} \frac{udu}{\sqrt{1 - u^2}} \, (*); \qquad (3)$$

puis

$$A = \pi - 2E_1(c). \qquad (4)$$

II. *Remarques.* — 1° Lorsque $c = 1$, la figure sphérique est la *fenêtre de Viviani* (**).

2° Dans le cas général, le quart de la sphère, dont la projection est ADBO, a pour mesure π. Donc

$$E_1(c) = \textit{aire projetée suivant } ADCMO.$$

(*) Parce que $OM = OC \sin \varphi$.

(**) Voir la *Note* CXLVIII.

CLVIII. — Quelques théorèmes sur les coniques (*).

I. *Si deux coniques ont leurs axes principaux respectivement parallèles, leurs quatre points d'intersection appartiennent à une même circonférence* (**).

II. Réciproque. — *Si deux coniques se coupent en quatre points situés sur une circonférence, leurs axes principaux sont, respectivement, parallèles.*

III. Corollaire. — *Si deux angles ont leurs bissectrices parallèles, leurs côtés forment un quadrilatère inscriptible.*

IV. *Dans l'ellipse, la somme des cordes passant par un foyer, et parallèles à deux diamètres conjugués, est constante* (***).

La somme dont il s'agit est, avec les notations habituelles :

$$s = 2p\left[\frac{1}{1-e^2\cos^2\omega}+\frac{1}{1-e^2\cos^2\omega'}\right]. \tag{1}$$

Il faut vérifier que s est indépendante de ω et de ω', si l'on a, entre ces variables, la relation

$$\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\omega' = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{2}$$

Soient t, t' les deux tangentes, de manière que

$$tt' = e^2 - 1. \tag{3}$$

La formule (1) peut être écrite ainsi :

$$s = 2p\left[\frac{1+t^2}{1-e^2+t^2}+\frac{t+t'^2}{1-e^2+t'^2}\right];$$

(*) Trouvés à diverses époques. Je supprime les démonstrations de ceux qui sont *presque évidents*. (Avril 1886.)

(**) Conséquence d'une propriété des surfaces du deuxième ordre, publiée en 1847 (*Nouvelles Annales*, p. 421).

(***) *Manuel des Candidats*, t I, p. 469.

puis sous cette forme :

$$s = 2p\,\frac{2(1-e^2)+(2-e^2)(t^2+t'^2)+2t^2t'^2}{(1-e^2)^2+(1-e^2)(t^2+t'^2)+t^2t'^2}.$$

Au moyen de la condition (3), la fraction devient

$$\frac{4-6e^2+2e^4+(2-e^2)(t^2+t'^2)}{(1-e^2)[2-2e^2+t^2+t'^2]} = \frac{2-e^2}{1-e^2}.$$

Ainsi

$$s = 2p\,\frac{2-e^2}{1-e^2} = 2\,\frac{a^2+b^2}{a}. \tag{4}$$

V. *Si, d'un point* M *d'une hyperbole, pris comme centre, on décrit une circonférence passant par un foyer, et qui coupe, en* R, R', *la directrice correspondante, l'angle* RMR' *est constant* (*).

VI. *Soit une ellipse* E *ayant* F, F' *pour foyers. Sur* FF' *et* DD' = 2b, *comme diamètres conjugués, on construit une ellipse* E'.

1° *Les deux courbes sont doublement tangentes;*

2° *La normale commune, en chacun des deux points de contact, est parallèle à* DD'.

1° L'équation de E étant

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \tag{5}$$

on trouve, aisément, que E' est représentée par

$$c^2y^2 + b^2(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 = b^2c^2\sin^2\theta. \tag{6}$$

Les deux courbes seront tangentes si l'on a, pour chacun de leurs points communs :

$$\frac{c^2y - b^2(x\sin\theta - y\cos\theta)\cos\theta}{a^2y} = \frac{b^2(x\sin\theta - y\cos\theta)\sin\theta}{b^2x} = \frac{b^2c^2\sin^2\theta}{a^2b^2}\ (^{**}). \tag{7}$$

(*) Autrement dit, *le triangle isoscèle* RMR' *est invariable de forme.*

(**) Par le théorème des fonctions homogènes.

Les équations (7) se réduisent à l'équation *unique :*

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \theta, \tag{8}$$

laquelle représente *la corde de contact* TT′ (*).

2° Le diamètre GG′, perpendiculaire à DD′, a pour équation

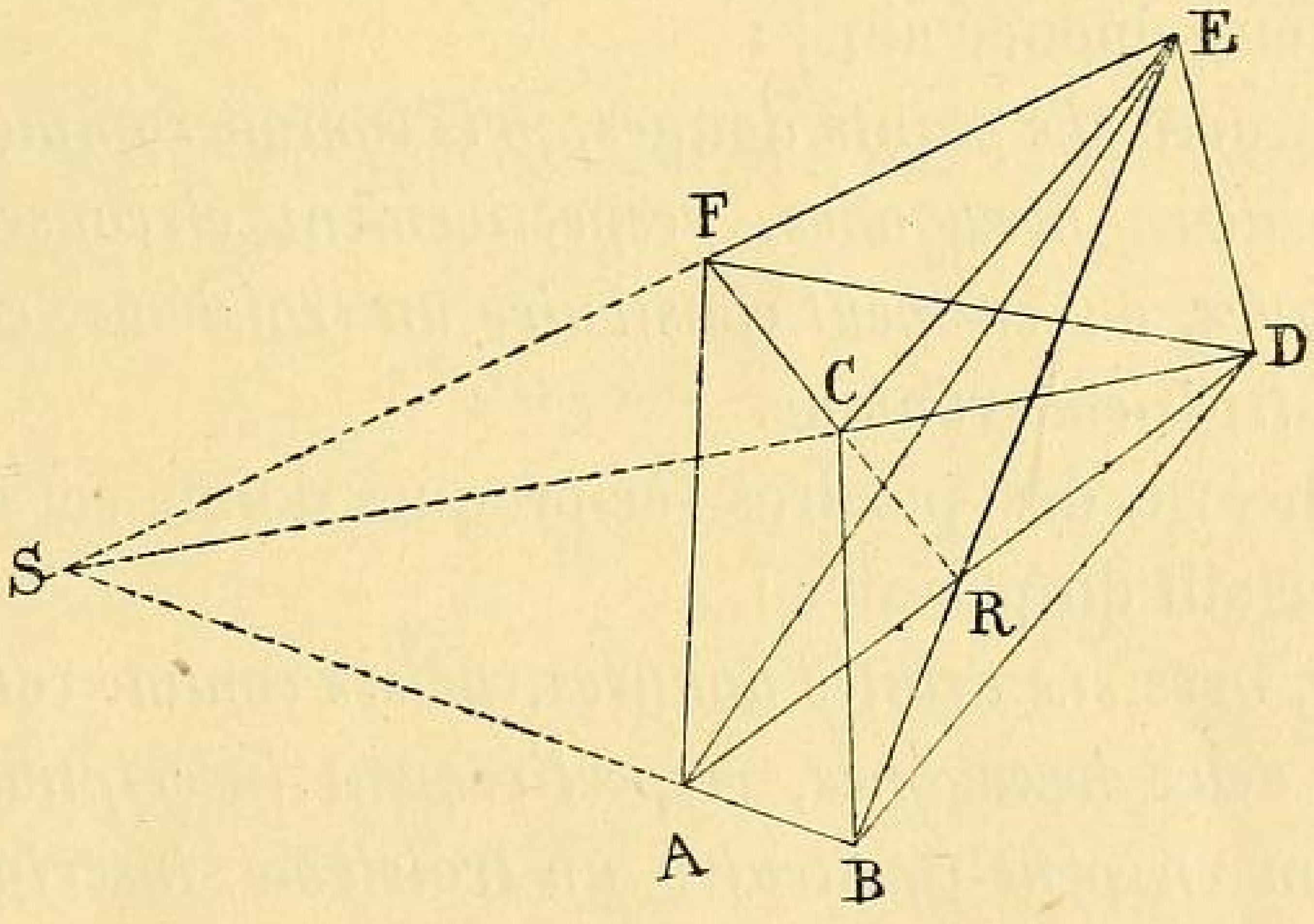
$$\frac{y}{x} = -\cot \theta. \tag{9}$$

Le produit des coefficients angulaires de TT′ et de GG′ étant $-\frac{b^2}{a^2}$, TT′ *est conjuguée à* GG′ ; ou, ce qui revient au même :
La normale commune, en T, *est parallèle au diamètre* DD′.

VII. *Soit une parabole* P. *Du point* B, *symétrique du sommet* A, *relativement à la directrice, on mène une transversale, qui coupe* P *aux points* C, D. *Les normales* CM, DM, *en ces points, se coupent sur* P.

VIII. *Remarque. — Si la transversale devient tangente, le point* M *appartient à la développée de* P.

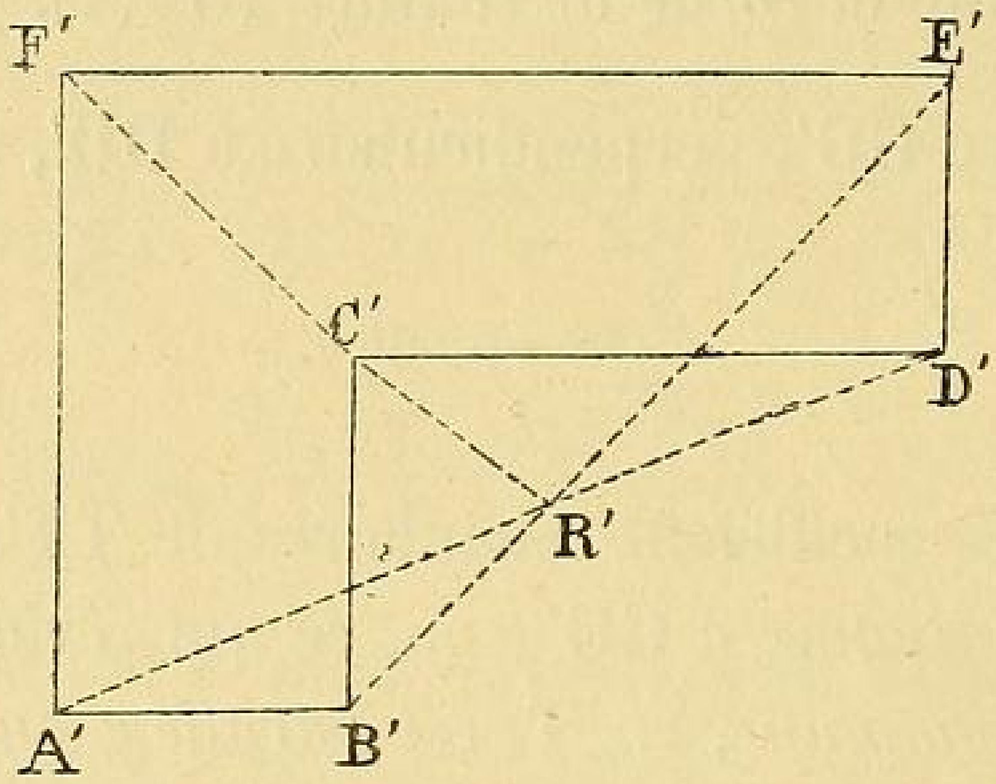
IX. *Soit un hexagone* ABCDEF, *dans lequel trois côtés alternatifs concourent en un point* S, *et les trois diagonales, joignant*



(*) *Si l'angle* θ *varie, l'enveloppe de* E′ *est donc* E (abstraction faite des deux foyers). (*Application de l'Algèbre à la Géométrie,* 1848, p. 336.)

les sommets opposés, concourent en un point R. *Cela posé, les trois autres côtés concourent en un point* T (*).

Considérons un hexagone auxiliaire, A'B'C'D'E'F', dont les côtés soient parallèles trois à trois. Il est très facile de vérifier



que les diagonales A'D', B'E', F'C' concourent en un point R'. *Mettant en perspective,* on a le théorème énoncé.

X. *Remarques.* — 1° D'après la seconde hypothèse, et la réciproque du théorème de Brianchon, l'hexagone ABCDEF est *circonscrit à une conique* C.

Pour la même raison, l'hexagone ADEBCF, dont les diagonales sont AB, CD, EF, est circonscrit à une conique C'.

De même encore, l'hexagone ABDFCE, dont les diagonales sont AF, BC, DE, est circonscrit à une conique C''. Le théorème peut donc être énoncé ainsi :

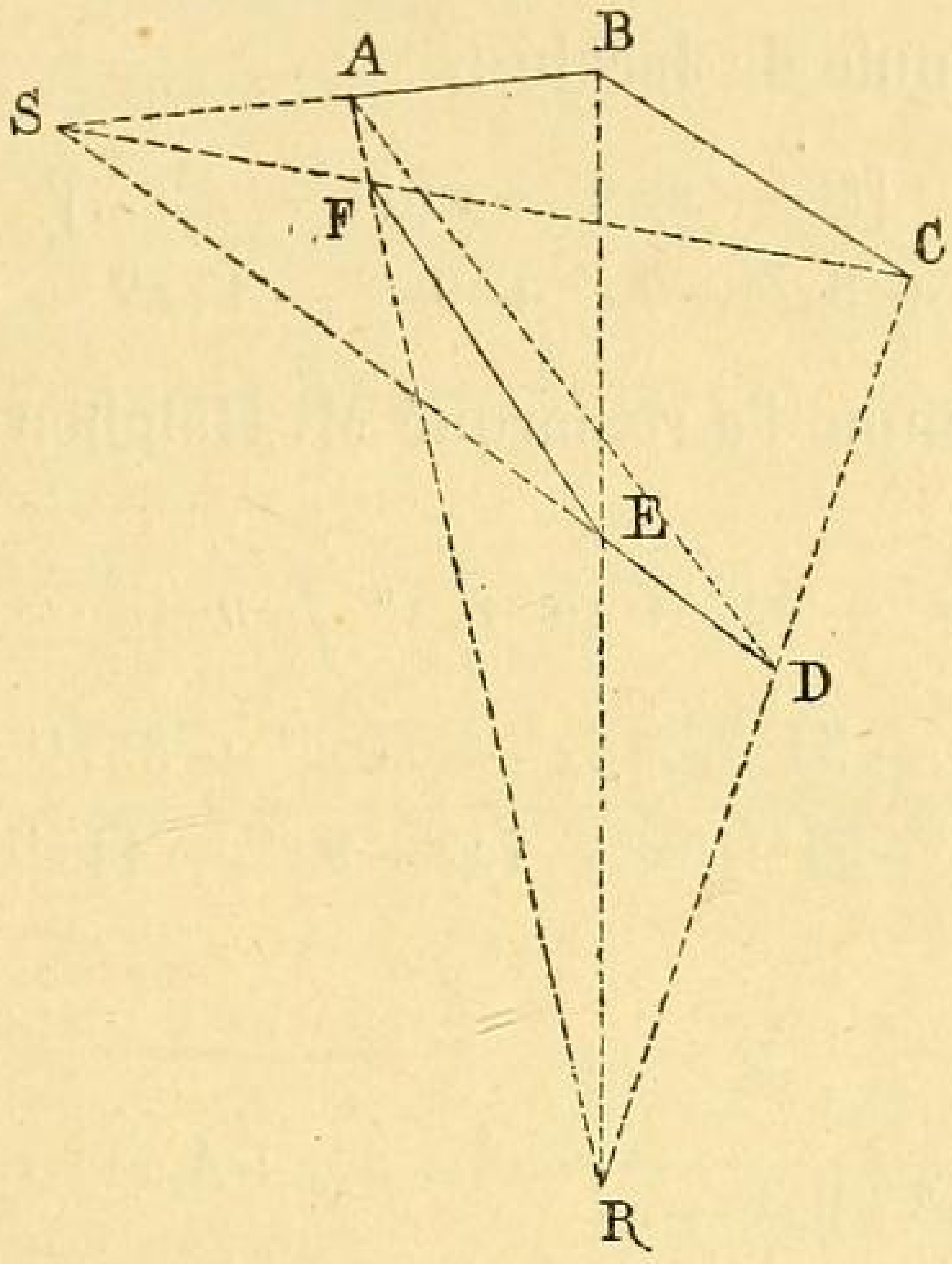
Lorsque, avec six points donnés, pris comme sommets, on peut construire deux hexagones, respectivement circonscriptibles à deux coniques, on en peut construire un troisième, circonscriptible à une troisième conique.

2° La théorie des polaires réciproques donne cet autre théorème, corrélatif du premier :

Lorsque, avec six droites données, prises comme côtés, on peut construire deux hexagones, respectivement inscriptibles à deux coniques, on en peut construire un troisième, inscriptible à une troisième conique.

(*) Non marqué sur la figure.

3° Le premier énoncé peut encore être remplacé par celui-ci : *Lorsque, dans un hexagone* ABCDEF, *les côtés* AB, DE *et la diagonale* CF *concourent en un point* S; *que, de plus, les côtés*



CD, AF *et la diagonale* BE *concourent en un point* R ; *alors les côtés* BC, EF *et la diagonale* AD *concourent en un point* T (*).

4° Dans la figure auxiliaire, les trois hexagones (**) seraient :

A'C'E'F'B'D', A'C'E'B'D'F', A'B'F'D'E'C'.

(*) De là résulte un théorème corrélatif. Mais nous ne pouvons épuiser cette intéressante théorie.

(**) Non tracés.

CLIX. — Sur la somme des diviseurs de n.

(*Juillet* 1877) (*).

I. Soit la formule de Jacobi :

$$\left.\begin{aligned}&[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots]^3\\&=1-3x+5x^3-7x^6+9x^{10}-11x^{15}+\cdots\ (^{**}).\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Il en résulte, comme l'a remarqué M. Halphen :

$$\left.\begin{aligned}&x+3x^2+4x^3+\cdots+x^n\int n+\cdots\\&=\frac{x-5x^2+14x^6-30x^{10}+55x^{15}-\cdots}{1-3x+5x^3-7x^6+9x^{10}-11x^{15}+\cdots}(^{***}).\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Supposons :

$$\frac{1}{1-3x+5x^3-7x^6+9x^{10}-\cdots}=1+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n+\cdots,\quad(3)$$

de manière que *les nombres entiers* A_n *sont donnés par la loi de récurrence :*

$$A_n-3A_{n-1}+5A_{n-3}-7A_{n-6}+9A_{n-10}-\cdots=0.\quad(4)$$

Alors, d'après l'égalité (2) :

$$\int n=A_{n-1}-5A_{n-3}+14A_{n-6}-30A_{n-10}+55A_{n-15}-\cdots\quad(A)$$

Ainsi, *l'on peut trouver la somme des diviseurs de* n *sans connaître aucun de ces diviseurs, sans décomposer* n *en facteurs premiers*, etc.

(*) A l'occasion d'une formule de M. Halphen (*Bulletin de la Société mathématique, Congrès du Havre*).

(**) *Note* CXL. Le second membre est décomposable en facteurs, d'*au moins treize manières* (*Recherches sur quelques produits indéfinis*).

(***) *Recherches sur quelques produits...*, pp. 39 et suiv. Il est visible que, *dans le numérateur, le coefficient de* $x^{\frac{n(n+1)}{2}}$ *est, en valeur absolue, la somme des carrés des* n *premiers nombres entiers.*

II. J'ignore si l'on a fait attention que l'on peut ramener la recherche de $\int n$, au problème de la *décomposition d'un nombre entier, en parties entières, positives, égales ou inégales.* Pour arriver à ce résultat curieux, il suffit de modifier, légèrement, la méthode employée ci-dessus.

Soit la célèbre formule d'Euler :

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\cdots \quad (5)$$

On en conclut, comme Labey (*) :

$$\left.\begin{aligned} & x+3x^2+4x^3+\cdots+x^n\int n+\cdots \\ & = \frac{x+2x^2-5x^5-7x^7+12x^{12}+15x^{15}-\cdots}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\cdots}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

La fraction

$$\frac{1}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-\cdots},$$

développée en série, devient

$$\sum_0^\infty \psi(n)x^n,$$

$\psi(n)$ représentant le nombre des décompositions dont il s'agit (**).

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} & \int n = \\ & \psi(n-1)+2\psi(n-2)-5\psi(n-5)-7\psi(n-7)+12\psi(n-12)+\cdots (^{***}). \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

(*) Euler, *Introduction à l'Analyse*, t. I, p. 337.

(**) *Recherches...*, p. 11.

(***) Les coefficients 1, + 2, — 5, — 7, ..., sont donnés par la formule

$$x_\lambda = (-1)^{\lambda-1}\frac{3\lambda^2 \mp \lambda}{2}.$$

CLX. — Sur quelques produits indéfinis (*).

(*Août* 1877.)

I. Rappelons un certain nombre de définitions et de formules :

$$\alpha = (1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots = 2^{\frac{1}{6}}k^{-\frac{1}{12}}k'^{\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{24}}, \tag{3}$$

$$\alpha' = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots = 2^{\frac{1}{6}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(kk')^{\frac{1}{6}}q^{-\frac{1}{12}}, \tag{4}$$

$$\beta = (1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots = 2^{\frac{1}{6}}(kk')^{-\frac{1}{12}}q^{\frac{1}{24}}, \tag{5}$$

$$\beta' = (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots = 2^{-\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{6}}(k'q)^{-\frac{1}{12}}, \tag{6}$$

$$\alpha\beta\beta' = 1, \tag{7}$$

$$\frac{2\omega}{\pi} = (1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^2, \tag{18}$$

$$1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots = q^{-\frac{1}{8}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}\sqrt{k}} = \frac{\alpha'}{\alpha}, \tag{20}$$

$$1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots = q^{-\frac{1}{8}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}\sqrt{kk'}} = \frac{\alpha'}{\beta}, \tag{21}$$

$$1-3q^2+5q^6-7q^{12}+\cdots = \alpha'^3 = q^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2kk'}, \tag{24}$$

$$\beta\beta' = \sum_0^\infty \varphi(n)q^n \; (^{**}), \tag{32}$$

$$\beta = \sum_0^\infty \varphi_i(n)q^n, \tag{34}$$

$$\beta' = \sum_0^\infty \varphi_p(n)q^n, \tag{36}$$

(*) Complément au Mémoire de 1871. Voir la *Note* CXXXI.

(**) $\varphi(n)$ est *le nombre des décompositions de* n *en parties positives, entières, inégales;* $\varphi_i(n)$, *celui des décompositions en parties impaires, inégales;* etc.

$$\frac{1}{\beta} = \alpha\beta' = \sum_0^\infty (-q)^n \varphi(n), \qquad (75)$$

$$\alpha'\beta = 1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + q^{22} + q^{26} + q^{35} - \cdots, \qquad (79)$$

$$\left.\begin{aligned} &(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots)^3 \\ &= (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots) \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}(-q)^n. \end{aligned}\right\} \quad (415)$$

II. *Décomposition de la série d'Euler* (*). — Si l'on y change x en q^2, elle devient

$$1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots = \alpha'. \qquad (52)$$

1° Pour la décomposer en *deux* facteurs, il suffit de prendre l'*identité :*

$$\alpha' = \frac{\alpha'}{\beta} \cdot \beta .$$

En effet, d'après les formules (21), (34) :

$$1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots = (1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots) \sum_0^\infty \varphi_i(n) q^n. \quad (A)$$

2° Pour la décomposer en *trois* facteurs, on peut d'abord observer que les formules (18), (75) donnent

$$\alpha' = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\, \beta^{-2},$$

ou

$$\left.\begin{aligned} &1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots \\ &= (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots) \left[\sum_0^\infty (-q)^n \varphi(n)\right]^2. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

3° Ce n'est pas tout. A cause de la relation (7), on a

$$\alpha' = \alpha'\beta \times \alpha \times \beta';$$

(*) Voir page 253, formule (5).

puis, par le développement (79) :

$$\left.\begin{array}{l} 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots \\ = (1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots) \sum_0^\infty \varphi_i(n) q^n \times \sum_0^\infty \varphi(n) q^{2n} \;(^*). \end{array}\right\} \quad \text{(C)}$$

III. *Autres décompositions.* — Reprenons la formule

$$\left.\begin{array}{l} 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots \\ = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots) \left[\sum_0^\infty (-q)^n \varphi(n)\right]^2. \end{array}\right\} \quad \text{(B)}$$

En la combinant avec celle-ci :

$$(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \cdots)^3 = (1 + 2q + 2q^4 + \cdots) \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} (-q)^n, \quad (413)$$

on obtient

$$(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \cdots)^2 = \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} (-q)^n \times \beta^2,$$

ou

$$(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \cdots)^2 = \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} (-q)^n \left[\sum_0^\infty \varphi_i(n) q^n\right]^2; \quad \text{(D)}$$

puis, à cause de la formule (73) :

$$\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} (-q)^n = \left\{(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \cdots) \sum_0^\infty (-q)^n \varphi(n)\right\}^2. \quad \text{(E)}$$

Ainsi : 1° de même que *la série d'Euler est le produit d'une série par le carré d'une série*, (B), *son carré est le produit d'une série par le carré d'une série*, (D).

(*) On a aussi

$$\alpha' = \alpha'\beta \times \alpha\beta';$$

et, par conséquent,

$$1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots = (1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots) \sum_0^\infty \varphi(n) q^n;$$

puis

$$\sum_0^\infty \varphi(n) q^n = \sum_0^\infty \varphi_i(n) q^n \times \sum_0^\infty \varphi(n) q^{2n}.$$

(Mai 1886.)

2° *La série*

$$1 - \varepsilon_5 q + \varepsilon_9 q^2 - \varepsilon_{13} q^3 + \cdots$$

est un carré (*).

IV. *Suite.* — D'après les *définitions* (4), (5),

$$\frac{\alpha'}{\beta} = \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}.$$

Si l'on groupe convenablement les facteurs, la fraction devient

$$\begin{aligned}
&(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots \times (1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})\ldots \\
&= \alpha \times (1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots) \\
&= \sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q^n) \times [1 - q^4 - q^8 + q^{20} + \cdots].
\end{aligned}$$

La comparaison avec (E) donne donc, par le changement de q en $(-q)$:

$$\left.\begin{aligned}
&1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots \\
&= (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{16} - \cdots)\sum_0^\infty \varphi(n) q^n \\
&= (1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots)\sum_0^\infty \varphi_i(n) q^n.
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{F})$$

Enfin, si l'on élève au carré, on a, d'après la note précédente :

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} q^n = \left[(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} \cdots)\sum_0^\infty \varphi(n) q^n\right]^2 \\
&= \left[(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots)\sum_0^\infty \varphi_i(n) q^n\right]^2.
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{G})$$

Conséquemment :

La série

$$1 + \varepsilon_5 q + \varepsilon_9 q^2 + \varepsilon_{13} q_{13} + \cdots,$$

quotient de deux carrés, (D), *est, au moins de deux manières, le produit de deux carrés.*

(*) En effet, le produit contenu dans le second membre de (E) est

$$\frac{\alpha'}{\beta} = 1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots$$

CLXI. — Sur une formule d'approximation (*).

(*Septembre* 1877.)

I. Dans la *Note* XXXVI, nous avons rappelé la solution de ce problème :

De 1 *à* n (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers donnés*, α, β, γ, ..., λ?

Le nombre cherché est

$$N = n - \sum\left(\frac{n}{\alpha}\right) + \sum\left(\frac{n}{\alpha\beta}\right) - \sum\left(\frac{n}{\alpha\beta\gamma}\right) + \cdots \text{ (**)}. \qquad \text{(A)}$$

Si l'on remplace cette formule par celle-ci :

$$N' = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\cdots, \qquad \text{(A')}$$

dont le calcul est très simple (***), on commet une erreur

$$x = N' - N,$$

dont il serait fort utile de trouver des limites; mais, chose remarquable, la valeur de x est, assez souvent, fort petite. Autrement dit, l'approximation résultant de la formule (A′) peut, dans certains cas, être très grande.

II. *Exemples* :

1° $\quad n = 1\,000\,000, \quad \alpha = 13, \quad \beta = 23, \quad \gamma = 149.$

(*) Addition à la *Note* CLVI.

(**) Tome I, page 120. La première *Remarque* renferme une faute : au lieu de $N = 1$, on doit lire $N = 2$.

(***) Surtout au moyen de la Table IX, de Legendre.

La formule (A) donne

$$N = 1\,000\,000 - \left(\frac{1\,000\,000}{13}\right) - \left(\frac{1\,000\,000}{23}\right) - \left(\frac{1\,000\,000}{149}\right)$$

$$+ \frac{1\,000\,000}{13.23} + \left(\frac{1\,000\,000}{13.149}\right) + \left(\frac{1\,000\,000}{23.149}\right) - \left(\frac{1\,000\,000}{13.23.149}\right)$$

$$= 1\,000\,000 - 76\,923 - 43\,478 - 6\,711 + 3\,344 + 516$$

$$+ 291 - 22 = 877\,017.$$

D'après (A') :

$$N' = 1\,000\,000 \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{22}{23} \cdot \frac{148}{149} = \frac{59\,072\,000\,000}{44\,551} = 877\,017{,}0...$$

Ainsi,

$$x < 0{,}1.$$

2° $n = 8\,541,\quad \alpha = 5,\quad \beta = 11,\quad \gamma = 19,\quad \delta = 31.$

Un calcul tout semblable donne

$$N = 5\,695,\quad N' = 5\,694{,}8;\quad x < 0{,}2.$$

III. *Remarque. — Si* n *est divisible par tous les nombres premiers donnés,* $N' = N$.

CLXII. — Un lieu géométrique.

(*Octobre* 1877.)

Par un des points d'intersection de deux circonférences, on mène la double corde commune ATT'. *Par les points de contact* T, T', *on mène les tangentes* TM, T'M. *Quel est le lieu du point* M (*)?

Prenons AB pour axe des abscisses, le point A pour origine. Soient x, y les coordonnées de T; x', y' les coordonnées de T'. Nous avons

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0, \tag{1}$$

$$x'^2 + y'^2 - 2\alpha x' - 2\beta' y' = 0. \tag{2}$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Les équations des tangentes sont

$$(x-\alpha)X+(y-\beta)Y=\alpha x+\beta y,$$

$$(x'-\alpha)X+(y'-\beta')Y=\alpha x'+\beta' y';$$

ou, à cause de

$$\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}=m: \tag{3}$$

$$(x-\alpha)X+(mx-\beta)Y=(\alpha+m\beta)x, \tag{4}$$

$$(x'-\alpha)X+(mx'-\beta')Y=(\alpha+m\beta')x'. \tag{5}$$

Les abscisses des points **T**, **T'** sont, par les relations (1), (2), (3):

$$x=2\frac{\alpha+m\beta}{1+m^2},\quad x'=2\frac{\alpha+m\beta'}{1+m^2}. \tag{6}$$

Il faut, entre les quatre dernières équations, éliminer x, x', m.

L'élimination de x et de x' donne

$$2(mY+X)(\alpha+m\beta)-(\beta Y+\alpha X)(m^2+1)-2(\alpha+m\beta)^2=0, \tag{7}$$

$$2(mY+X)(\alpha+m\beta')-(\beta' Y+\alpha X)(m^2+1)-2(\alpha+m\beta')^2=0. \tag{8}$$

Par soustraction, après suppression du facteur $\beta-\beta'$, on trouve

$$2(mY+X)m-Y(m^2+1)-2m\left[2x+m(\beta+\beta')\right]=0. \tag{9}$$

D'autre part, si l'on multiplie par β', par β, et qu'on retranche :

$$-2\alpha(mY+X)+(m^2+1)\alpha X+2(\alpha^2-m^2\beta\beta')=0. \tag{10}$$

Ces équations se réduisent à celles-ci :

$$2mX+(m^2-1)Y-2m\left[2\alpha+m(\beta+\beta')\right]=0, \tag{9'}$$

$$-(m^2-1)X+2mY-2\left[\alpha-m^2\frac{\beta\beta'}{\alpha}\right]=0, \tag{10'}$$

lesquelles représentent *deux droites perpendiculaires entre elles.*

Écrivons-les ainsi :

$$\left[Y - 2(\beta + \beta')\right]m^2 + 2(X - 2\alpha)m - Y = 0, \tag{11}$$

$$\left(2\frac{\beta\beta'}{\alpha} - X\right)m^2 + 2Ym + (X - 2\alpha) = 0. \tag{12}$$

L'enveloppe de la première droite est la circonférence représentée par

$$(X - 2\alpha)^2 + Y^2 - 2(\beta + \beta')Y = 0. \tag{13}$$

L'enveloppe de la seconde a pour équation

$$Y^2 + (X - 2\alpha)\left(X - 2\frac{\beta\beta'}{\alpha}\right) = 0. \tag{14}$$

Par conséquent, *le point* M *est le sommet d'un angle droit, circonscrit à deux circonférences :* le problème est simplifié (*).

(*) Nous arrêtons ici cette Note, parce que de pures considérations géométriques prouvent que le lieu du point M est un *Limaçon de Pascal*. Voir, dans les *Nouvelles Annales* (t. XV), les curieux théorèmes énoncés par M. Mannheim; et, dans *Mathesis* (t. I), la démonstration, due à M. Clevers. Nous ferons, cependant, les remarques suivantes :

1° *Les circonférences,* dont il vient d'être question, *sont orthogonales;*

2° D'après un théorème connu (*Théorèmes et Problèmes,* p. 30), *l'angle* M *est celui sous lequel se coupent les circonférences données : il est constant;*

3° Par conséquent, *le lieu du point* M *se compose, généralement, de plusieurs Limaçons de Pascal* (Mannheim);

4° *Le lieu du sommet d'un angle donné, circonscrit à deux circonférences données, coïncide avec le lieu du sommet d'un angle droit, circonscrit à deux circonférences auxiliaires, orthogonales.* (Mai 1886.)

CLXIII. — Théorèmes d'Arithmétique.

(*Novembre* 1877.)

I. *Soit* b *un nombre premier, non diviseur de* a. *La fraction*

$$f = \frac{a(a+b)(a+2b)\ldots(a+\overline{n-1}\,b)}{1.2.3\ldots n}$$

est réductible à

$$\frac{N}{b^k}\ (^*).$$

Soit p un diviseur premier de $1.2.3\ldots n$, différent de b. Prenons, dans le numérateur de f, les p premiers facteurs :

$$a,\quad a+b,\quad a+2b,\ \ldots,\ a+(p-1)b.$$

Parmi ces nombres, il y en a un, et un seul, divisible par p (**). Soit pa' ce multiple de p.

Dans le numérateur de f, les seuls multiples de p sont, comme on le voit sans peine :

$$pa',\quad pa'+pb,\quad pa'+2pb,\ \ldots,\ pa'+\overline{n'-1}\,pb;$$

n' étant le quotient entier de n par p.

Dans le dénominateur, les seuls multiples de p sont

$$p,\quad 2p,\quad 3p,\ \ldots,\ n'p.$$

Supprimant, aux deux termes, $p^{n'}$, nous avons à considérer la fraction *auxiliaire*

$$f' = \frac{a'(a'+b)\ldots(a'+\overline{n'-1}\,b)}{1.2.3\ldots n'},$$

(*) Ce théorème est dû, *peut-être*, à Eisenstein.

(**) Propriété connue.

sur laquelle on peut répéter les mêmes raisonnements. Celle-ci conduirait à

$$f'' = \frac{a''(a''+b)\ldots(a''+\overline{n''-1}\,b)}{1.2.3\ldots n''};$$

n'' étant le quotient entier de n' par p ; et ainsi de suite.

De cette manière, on fait disparaître, des deux termes de f, *tous* les facteurs premiers du dénominateur. Il n'y a exception que pour le facteur premier b.

D'ailleurs, par une propriété connue,

$$k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{b}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n}{b^2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n}{b^3}\right) + \cdots$$

II. *Remarques.* — 1° Si b est seulement *premier avec* a, la fraction f est réductible à

$$\frac{\mathrm{N}}{p^k p'^{k'} p''^{k''}\ldots},$$

$p, p', p'', \ldots$ étant les facteurs premiers de b.

2° *Si* b *surpasse* n, f *est un nombre entier.*

3° On peut énoncer le théorème suivant :

a *et* b *étant premiers entre eux, tout nombre entier* N, *premier avec* b, *divise une infinité de termes de la progression :*

$$a,\quad a+b,\quad a+2b, \ldots (^*).$$

4° Soit $\frac{a}{b} = m < 1$. On a, en série convergente (**) :

$$2^{-m} = 1 - \frac{a}{1}\frac{1}{b} + \frac{a(a+b)}{1.2}\frac{1}{b^2} - \cdots$$

$$\pm \frac{a(a+b)(a+2b)\ldots(a+\overline{n-1}\,b)}{1.2.3\ldots n}\frac{1}{b^n} \mp \cdots$$

(*) Ce théorème, évident par la théorie de l'équation

$$a + bx = \mathrm{N}y,$$

est, pour ainsi dire, *inverse* de celui de Jacobi (*Note* XXXVI).

(**) *Comptes rendus,* t. XLV.

D'après le théorème,

$$\frac{a(a+b)\dots(a+\overline{n-1}\,b)}{1.2.3\dots n} = \frac{A_n}{b^k};$$

A_n étant un nombre entier. Donc

$$\frac{1}{\sqrt[b]{2^a}} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{A_n}{b^{n+k}}.$$

CLXIV. — Sur une série.

(*Novembre* 1877.)

Soit s_n la somme des n premiers termes de la série

$$1 - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} - \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)} + \dots$$

On trouve :

$$s_1 = \frac{a}{a+1},\quad s_2 = \frac{a+1}{a+2},\quad s_3 = \frac{a^2+3a+1}{(a+1)(a+3)} = \frac{N_2}{(a+1)(a+3)},\dots$$

Supposons

$$s_n = \frac{N_{n-2}}{(a+1)(a+2)\dots(a+n-3)(a+n-1)}, \qquad (1)$$

N_{n-2} étant un polynôme du degré $n-2$.

D'après la loi de formation des termes :

$$\left.\begin{aligned} s_n &= \frac{N_{n-3}}{(a+1)(a+2)\dots(a+n-4)(a+n-2)} \\ &\mp \frac{1}{(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}\ (^*). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(*) Le signe —, si n est *pair*.

Conséquemment,

$$(a+n-2)N_{n-2}=(a+n-3)(a+n-1)N_{n-3}\mp 1. \qquad (3)$$

Dans cette identité, prenons $a=-(n-1)$. Elle se réduit à

$$N_{n-2}=\pm 1\ (*). \qquad (4)$$

Ainsi, *le polynôme* N_{n-2} *devient* ± 1, *quand on y remplace* a *par* 1 — n. Cette loi, évidente pour

$$N_1=a+1,\quad N_2=a^2+3a+1,\quad N_3=a^3+6a^2+9a+3,$$

subsiste donc pour N_4, N_5, ..., N_{n-3}, N_{n-2}.

Soit maintenant, d'après les formules (1), (2) :

$$s_{n+1}=\frac{N_{n-2}}{(a+1)\dots(a+n-3)(a+n-1)}\pm\frac{1}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)},$$

ou

$$s_{n+1}=\frac{(a+n-2)(a+n)N_{n-2}\pm 1}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}. \qquad (5)$$

Pour $a=1-n$, le numérateur devient

$$\mp 1\pm 1=0;$$

donc il est divisible par $a+n-1$; et la dernière formule se réduit à

$$s_{n+1}=\frac{N_{n-1}}{(a+1)(a+2)\dots(a+n-2)(a+n)}.$$

C. Q. F. D.

(*) $+1$, si n est *pair*.

CLXV. — Une décomposition en facteurs.

(*Mars* 1878) (*).

I. Pour résoudre l'équation

$$x^4 + 2px^2 + q^2 = 0,$$

dans le cas où toutes les racines sont imaginaires, on peut (**) faire usage de l'*identité*

$$x^4+2px^2+q^2=\left[x^2+x\sqrt{2(q-p)}+q\right]\left[x^2-x\sqrt{2(q-p)}+q\right]. \qquad \text{(A)}$$

Si l'on suppose

$$q-p=r, \qquad x=(2r)^{k+\frac{1}{2}},$$

elle devient

$$\left.\begin{aligned}&(2r)^{4k+2}+2(q-r)(2r)^{2k+1}+q^2\\ &=[(2r)^{2k+1}+(2r)^{k+1}+q][(2r)^{2k+1}-(2r)^{k+1}+q].\end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

Celle-ci permet de décomposer, en deux *facteurs entiers*, certains nombres. Par exemple :

$$10^6 - 8\,.\,10^3 + 1 = (10^3 + 10^2 + 1)(10^3 - 10^2 + 1),$$
$$4^6 + 2\,.\ 4^3 + 9 = (4^3 + 4^2 + 3)(4^3 - 4^2 + 3),$$

etc.

II. Si $r = q = 1$, la relation (B) se réduit à

$$2^{4k+2} + 1 = (2^{2k+1} + 2^{k+1} + 1)(2^{2k+1} - 2^{k+1} + 1), \qquad \text{(C)}$$

formule de M. Le Lasseur (***).

(*) Communiqué, en partie, au *Congrès de Reims*.

(**) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. I, p. 36.

(***) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. IV, p. 86. Ce simple rapprochement, que M. Le Lasseur a bien voulu admettre, a été l'objet, à Reims, d'une attaque aussi dépourvue de raison que de politesse. (Mai 1886.)

III. Dans l'identité

$$x^6 + 1 = \left(x^2 + 1\right)\left(x^2 + x\sqrt{3} + 1\right)\left(x^2 - x\sqrt{3} + 1\right),$$

faisons

$$x = 3^{k+\frac{1}{2}}.$$

Elle prend la forme

$$3^{6k+3} + 1 = (3^{2k+1} + 1)(3^{2k+1} + 3^{k+1} + 1)(3^{2k+1} - 3^{k+1} + 1). \quad \text{(D)}$$

Ainsi, le cube de 3^{2k+1}, augmenté de l'unité, est décomposé en trois facteurs entiers. Par exemple :

$$(27^3 + 1) = (27 + 1)(27 + 9 + 1)(27 - 9 + 1).$$

Il est clair que le nombre des relations, analogues à (B), (C), (D), est indéfini.

IV. Le premier membre de (C) étant une somme de deux carrés, chacun des facteurs du second membre doit être, également, une somme de deux carrés.

En effet :

$$2^{2k+1} + 2^{k+1} + 1 = (2^k + 1)^2 + (2^k)^2,$$

$$2^{2k+1} - 2^{k+1} + 1 = (2^k - 1)^2 + (2^k)^2.$$

V. Si, pour abréger, on fait $2^k = x$, on a encore :

$$2^{2k+1} + 2^{k+1} + 1 = 2x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{2}\left[(2x + 1)^2 + 1\right],$$

$$2^{2k+1} - 2^{k+1} + 1 = 2x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2}\left[(2x - 1)^2 + 1\right];$$

puis

$$2^{4k+2} + 1 = \frac{1}{4}\left[(2x + 1)^2 + 1\right]\left[(2x - 1)^2 + 1\right],$$

ou

$$4x^k + 1 = \frac{1}{4}\left[(2x + 1)^2 + 1\right]\left[(2x - 1)^2 + 1\right]; \quad \text{(E)}$$

identité évidente et connue (*).

(*) *Manuel des Candidats*, t. I, p. 31. Il en résulte que la recherche des facteurs premiers de $2^{4k+2} + 1$, se réduit à celle des facteurs premiers, soit de $(2x + 1)^2 + 1$, soit de $(2x - 1)^2 + 1$.

CLXVI. — Sur une classe d'équations différentielles (*).

(*Juin* 1878.)

I. Si l'on élimine c entre l'équation

$$f(x, y) = c\varphi(x, y) + \mathrm{F}(c) \tag{1}$$

et sa différentielle, on trouve l'*équation du premier ordre :*

$$f = \varphi \frac{df}{d\varphi} + \mathrm{F}\left(\frac{df}{d\varphi}\right). \tag{2}$$

Donc, pour intégrer cette équation (2), *il suffit d'y remplacer* $\frac{df}{d\varphi}$ *par* c, absolument comme si f et φ étaient les variables (**).

II. *Application.* — Soient :

$$f = x^2 + 1, \quad \varphi = y^2 + 2y, \quad \mathrm{F}(c) = \frac{c+2}{c-1}.$$

L'équation (2) devient

$$x^2 + 1 = (y^2 + 2y)\frac{xdx}{(y+1)dy} + \frac{xdx + 2(y+1)dy}{xdx - (y+1)dy},$$

ou

$$\left[(x^2+1)(y+1)dy - x(y^2+2y)dx\right]\left[xdx - (y+1)dy\right]$$
$$= (y+1)\left[xdx + 2(y+1)dy\right]dy.$$

L'intégrale de celle-ci est donc

$$x^2 + 1 = c(y^2 + 2y) + \frac{c+2}{c-1}.$$

(*) Note tirée, en partie, du *Bulletin de l'Académie.* (Février 1878.)

(**) Relativement à f et φ, cette équation (2) est, en effet, une *équation de Clairaut,* conformément au beau théorème de M. Mansion. (Mai 1886.)

Addition. — (*Mai* 1886.)

III. Soit l'équation :

$$x^2 + y^2 = 2xy \frac{xdx + ydy}{xdy + ydx} + \left(\frac{xdx + ydy}{xdy + ydx}\right)^2, \tag{3}$$

ou

$$(y^2 - x^2)(ydx - xdy)(xdy + ydx) = (xdx + ydy)^2. \tag{4}$$

Il paraît difficile d'intégrer celle-ci, même au moyen d'un changement de variables. Mais comme l'équation (3) rentre dans la forme (2), l'intégrale cherchée est, tout simplement,

$$x^2 + y^2 = 2cxy + c^2. \tag{4}$$

IV. La méthode précédente, *indirecte*, nous paraît, néanmoins, assez remarquable : elle s'applique à certaines équations qui ne rentrent dans *aucune classe connue*. Ainsi, l'intégrale de

$$f = \varphi \frac{df}{d\varphi} + \sin\left(\frac{df}{d\varphi}\right)$$

est

$$f = c\varphi + \sin c,$$

quelles que soient les fonctions f, φ.

V. *Exemple.* — L'équation

$$\sin x + \sin y = \cos x \cos y \sin(x + y) \frac{\cos x + y' \cos y}{\cos^2 y + y' \cos^2 x}$$
$$+ \sin\left\{\cos^2 x \cos^2 y \frac{\cos x + y' \cos y}{\cos^2 y + y' \cos^2 x}\right\}$$

a pour intégrale :

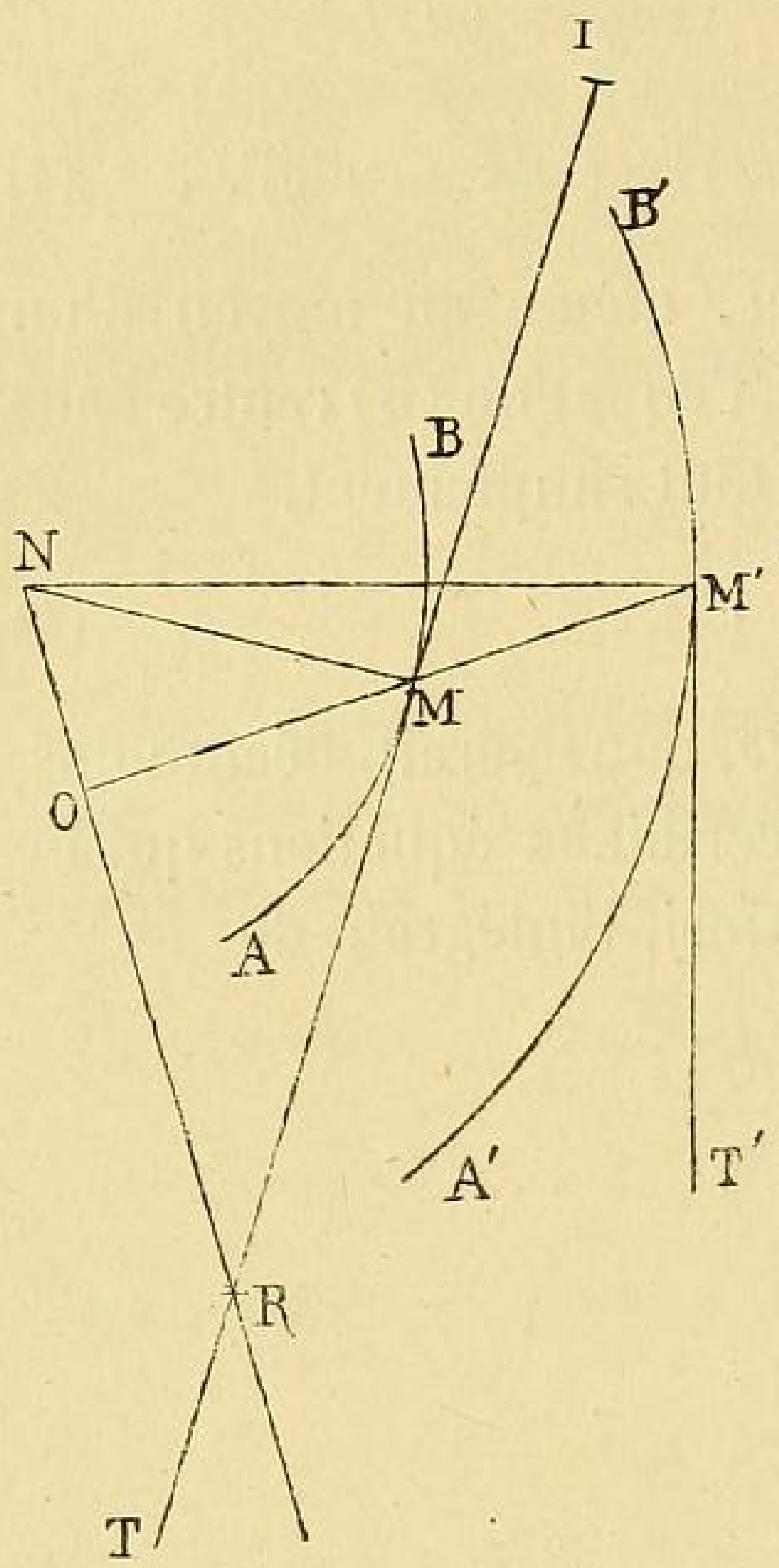
$$\sin x + \sin y = c \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y} + \sin c \text{ (*)}.$$

(*) On contribuerait aux progrès de l'Analyse si l'on pouvait former un recueil des équations différentielles ayant des intégrales de formes données.

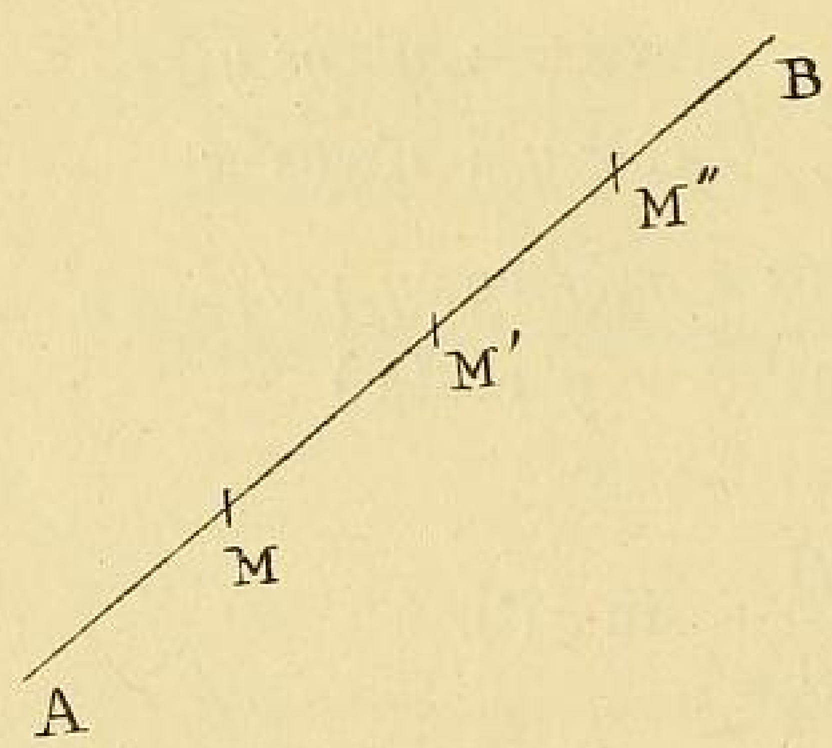
CLXVII. — Conchoïdes et podaires.

(*Novembre* 1878.)

I. Soient des conchoïdes AMB, A′M′B′, ... ayant le point O pour pôle. D'après un théorème connu, les normales aux points correspondants M, M′, ... concourent en un point N, situé sur la perpendiculaire au rayon OMM′ ... Les tangentes MT, M′T′, ... sont donc *les positions du second côté d'un angle droit, dont le sommet parcourt le rayon, et dont le premier côté passe en* N. Conséquemment, *l'enveloppe de ces droites est une parabole ayant* N *pour foyer,* O *pour sommet, et dont* OMM′ ... *est la tangente au sommet* (*). Si la tangente MT rencontre NO en R, on trouve le point I, où elle touche la parabole, en prenant MI = MR.



II. *Remarque.* — 1° Pour chaque rayon OMM′ ..., il y a une parabole, dont le sommet est le pôle O.

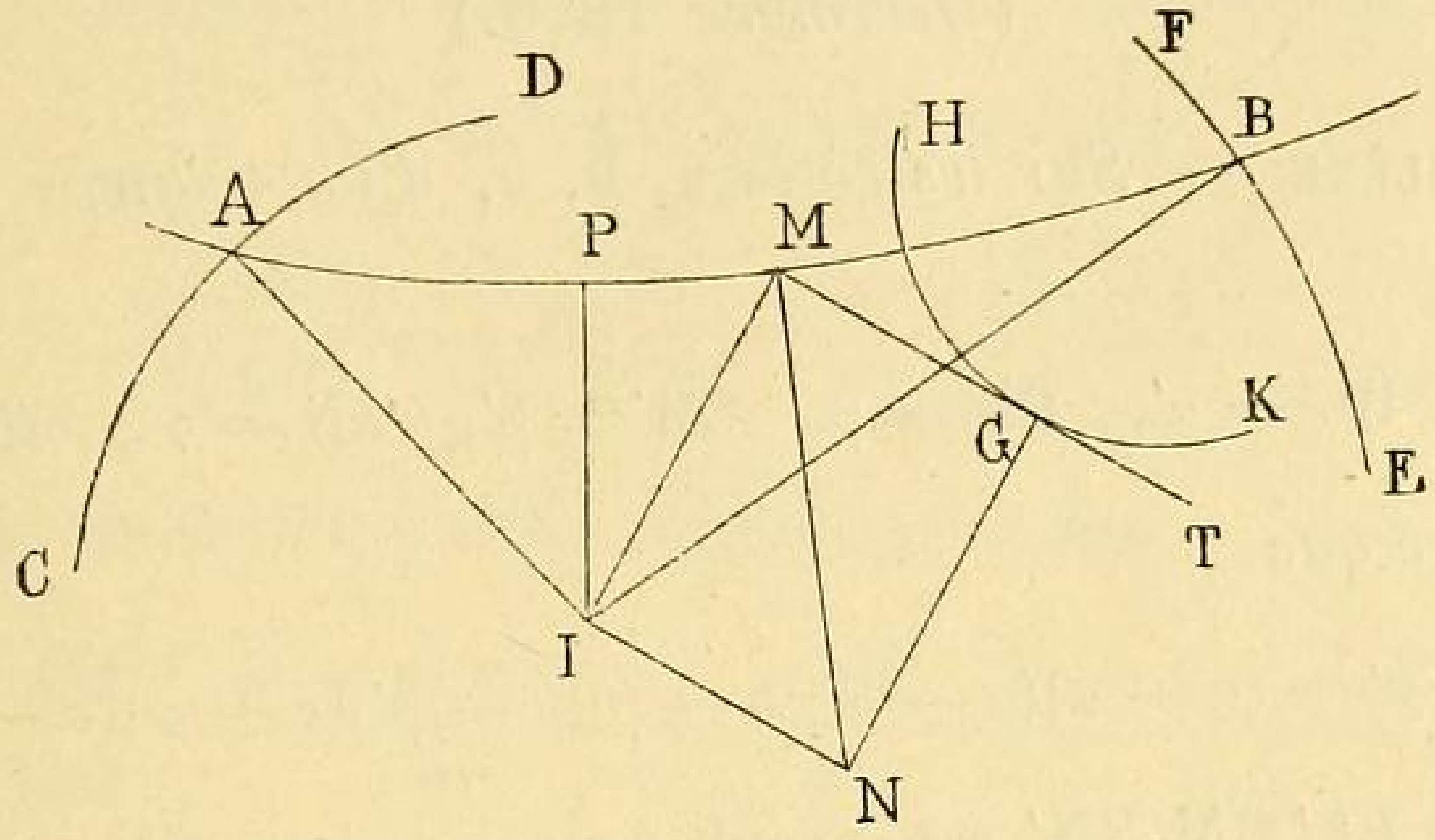


III. Corollaire. — *Si une droite* AB *se meut dans un plan, les tangentes en* M, M′, M″, ... *aux trajectoires de ces points, enveloppent une parabole* (**).

(*) Propriété connue. *La parabole est l'anti-podaire de* OMM′..., *relativement au foyer* N.

(**) Théorème connu. Voyez les *Mélanges de Géométrie pure, par M. de Jonquières*, p. 29.

IV. Généralisation. — Soit une courbe AB, s'appuyant sur deux directrices CD, EF. Menons les normales AI, BI à ces



directrices : I est le centre instantané de rotation; donc MI est normale à la trajectoire du point quelconque M. Soient MT la tangente à cette trajectoire et HGK l'enveloppe de MT.

Relativement à HGK, AB est une podaire; donc HGK *est l'anti-podaire de* AB; et, par conséquent :

L'enveloppe des tangentes aux trajectoires des points M, M' ..., *est l'anti-podaire de* AB, *relativement au centre instantané* I.

Pour trouver le point de contact G, il suffit de *tracer la normale* MN *à* AB, *puis d'achever le rectangle* MING.

V. *Remarque.* — Si la ligne AMB est *droite,* et que les directrices CD, EF soient *circulaires,* la trajectoire du point quelconque M est une *courbe de Watt* (*), et le point I est *fixe.* Soit alors IP perpendiculaire à AB : *le point* P *est celui où la droite mobile touche son enveloppe.*

CLXVIII. — Une propriété des nombres triangulaires.

(*Décembre* 1878.)

Il suffit de l'énoncer :

La différence entre les carrés de deux nombres triangulaires consécutifs égale le cube de la différence entre ces nombres.

(*) Dans le cas le plus général. Voir la *Note* CXVII.

CLXIX (*). — Sur l'homologie.

(*Décembre* 1878.)

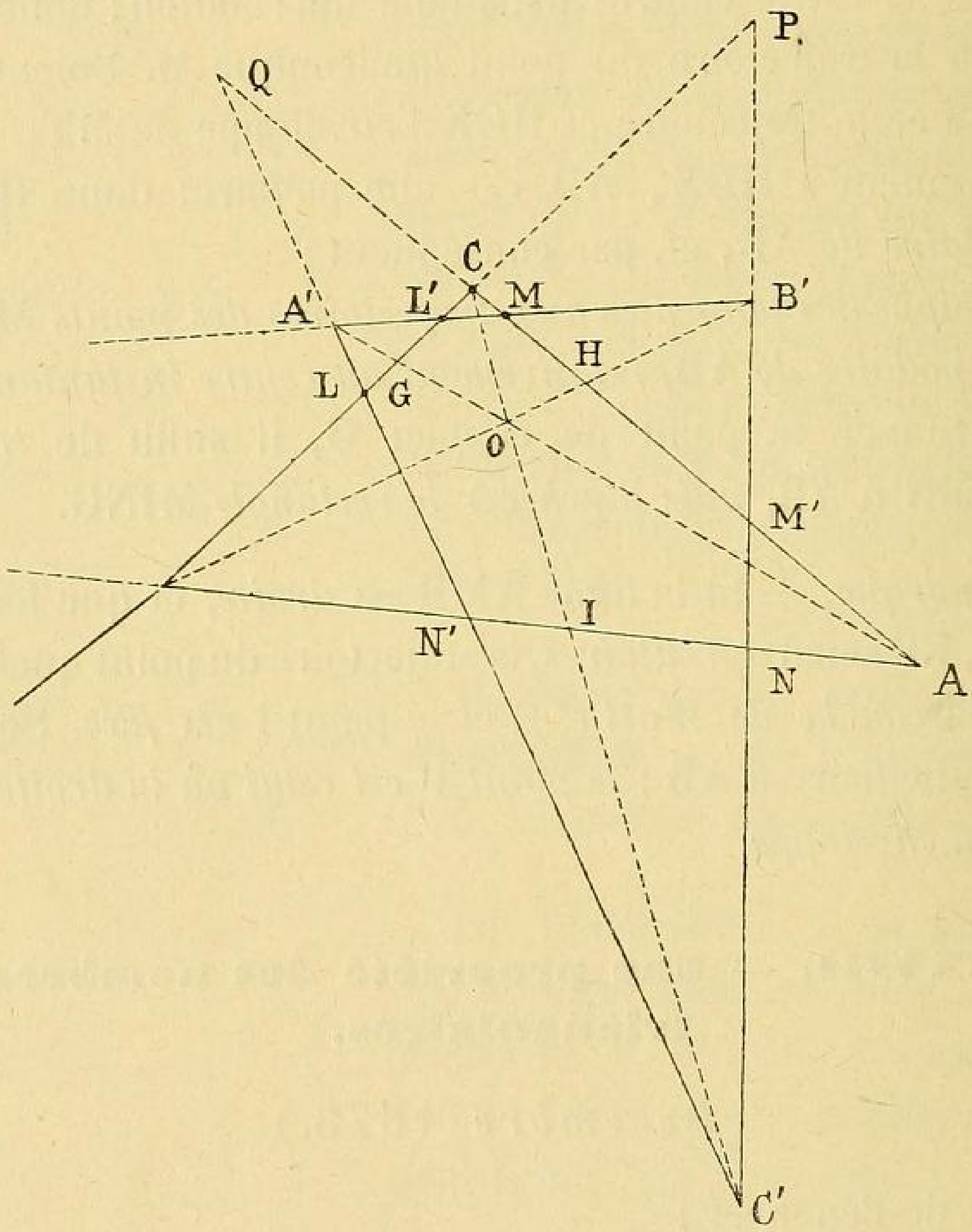
I. PROBLÈME. — *Sur les côtés* a, b, c, *d'un triangle* ABC, *on prend*

$$BL = \alpha,\quad BL' = \alpha',\quad CM = \beta,\quad CM' = \beta',\quad AN = \gamma,\quad AN' = \gamma',$$

de manière que

$$\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma' = (a-\alpha)(a-\alpha')(b-\beta)(b-\beta')(c-\gamma)(c-\gamma') :$$

l'hexagone LL'MM'NN' *est inscrit à une conique* (**).



Prolongeant les CORDES L'M, M'N, N'L, *on obtient le triangle*

(*) Tirée, en partie, du *Bulletin de l'Académie*.

(**) Théorème de Carnot.

A', B', C', *homologique de* ABC. *Déterminer, en fonction des données, l'axe* PQR *d'homologie et le centre* O *d'homologie.*

1° Considérant le triangle ABC et la transversale B'C', on a

$$AN\,.\,BP\,.\,CM' = AM'\,.\,BN\,.\,CP,$$

ou

$$\frac{BP}{CP} = \frac{BN\,.\,AM'}{AN\,.\,CM'} = \frac{(c-\gamma)(b-\beta')}{\gamma\beta'}. \tag{1}$$

Une permutation tournante donne ensuite :

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{(a-\alpha)(c-\gamma')}{\alpha\gamma'}, \quad \frac{AR}{BR} = \frac{(b-\beta)(c-\alpha')}{\beta\alpha'}. \tag{2}$$

Ainsi l'*axe* PQR *divise les côtés du triangle* ABC *dans des rapports simples et connus.*

2° Des triangles BCH, BAH, respectivement coupés par A'B', B'C', on conclut :

$$BL'\,.\,CM\,.\,B'H = BB'\,.\,MH\,.\,CL',$$

$$BN\,.\,AM'\,.\,B'H = BB'\,.\,M'H\,.\,AN.$$

Donc

$$\frac{MH}{M'H} = \frac{AN\,.\,BL'\,.\,CM}{BN\,.\,AM'\,.\,CL'},$$

ou

$$\frac{MH}{M'H} = \frac{\beta\gamma\alpha'}{(a-\alpha')(b-\beta')(c-\gamma)}. \tag{3}$$

Et comme $MM' = \beta' - \beta$, on tire, de cette proportion :

$$MH = (\beta' - \beta)\frac{\beta\gamma\alpha'}{\beta\gamma\alpha' + (a-\alpha')(b-\beta')(c-\gamma)}, \tag{4}$$

$$M'H = (\beta' - \beta)\frac{(a-\alpha')(b-\beta')(c-\gamma)}{\beta\gamma\alpha' + (a-\alpha')(b-\beta')(c-\gamma)}. \tag{5}$$

3° On a

$$CH = \beta + MH, \quad AH = (b-\beta') + M'H;$$

puis, au moyen des valeurs précédentes :

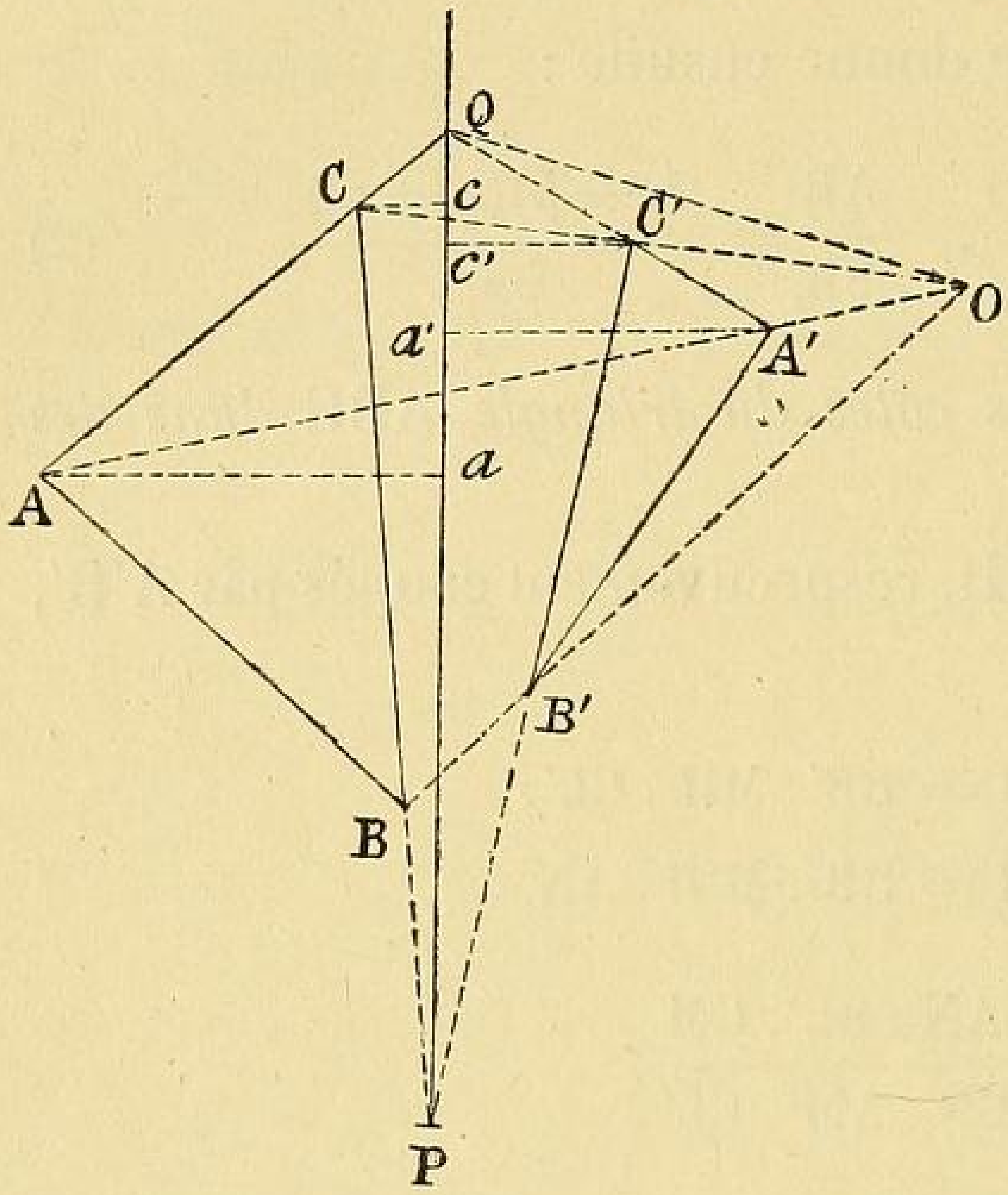
$$\frac{CH}{AH} = \frac{\beta}{b-\beta'}\cdot\frac{\alpha'\beta'\gamma + (a-\alpha')(b-\beta')(c-\gamma)}{\alpha'\beta\gamma + (a-\alpha')(b-\beta)(c-\gamma)}. \tag{6}$$

Une simple permutation donne ensuite :

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{BI}}=\frac{\gamma}{c-\gamma'}\cdot\frac{\alpha\beta'\gamma'+(a-\alpha)(c-\gamma')(b-\beta')}{\beta'\gamma\alpha+(a-\alpha)(c-\gamma)(b-\beta')}, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{CG}}=\frac{\alpha}{a-\alpha'}\cdot\frac{\beta\gamma'\alpha'+(b-\beta)(a-\alpha')(c-\gamma')}{\gamma'\alpha\beta+(b-\beta)(a-\alpha)(c-\gamma')}\ (^*). \tag{8}$$

II. Théorème. — *Le rapport des distances des sommets* A, A′, *au centre* O, *est au rapport de leurs distances à l'axe* PQ, *dans une raison constante* (**).



Je n'ai trouvé, dans aucun ouvrage, la démonstration *annoncée* par Chasles (***). En voici une.

Soient Aa, A′a', Cc, C′c' perpendiculaires à PQ. On doit avoir

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}}:\frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{A'}a'}=\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OC'}}:\frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{C'}c'},$$

ou

$$\frac{\mathrm{OA}\,.\,\mathrm{A'}a'}{\mathrm{OA'}.\,\mathrm{A}a}=\frac{\mathrm{OC}\,.\,\mathrm{C'}c'}{\mathrm{OC'}.\,\mathrm{C}c}. \tag{9}$$

Or :

$$\frac{\mathrm{A'}a'}{\mathrm{C'}c'}=\frac{\mathrm{A'Q}}{\mathrm{C'Q}},\quad \frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{C}c}=\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{CQ}};$$

donc l'égalité (9) devient

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{A'Q}}=\frac{\mathrm{OC}\,.\,\mathrm{C'Q}}{\mathrm{OC'}.\,\mathrm{CQ}}. \tag{10}$$

(*) On vérifie aisément (malgré la complication de ces valeurs) que le produit des seconds membres égale l'unité. C'est ce qui doit être; car

$$\mathrm{CH}\,.\,\mathrm{AI}\,.\,\mathrm{BG}=\mathrm{AH}\,.\,\mathrm{BI}\,.\,\mathrm{CG}.$$

(**) *Aperçu historique*, seconde édition, p. 84.

(***) A l'endroit cité.

Menons QO. D'après un théorème sur les transversales, trouvé autrefois (*) :

$$\frac{OA}{OA'} \cdot \frac{CQ}{C'Q} = \frac{OC}{OC'} \cdot \frac{AQ}{A'Q};$$

ce qui ne diffère pas de la relation (10).

III. *Remarque.* — La valeur commune des derniers rapports est $\frac{AC}{A'C'}$.

Addition. — (*Juin* 1886.)

IV. Soient, pour abréger :

$$AO = x, \quad BO = y, \quad CO = z;$$

$$BG = p, \quad CG = p', \quad CA = q, \quad AH = q', \quad AI = r, \quad BI = r';$$

de manière que

$$pqr = p'q'r'. \tag{11}$$

Du triangle AGC, coupé par BOH, on conclut

$$BC \,.\, AH \,.\, GO = BG \,.\, CH \,.\, AO,$$

ou

$$aq'GO = pqAO;$$

puis, par un calcul fort simple,

$$\frac{x}{AG} = \frac{(p+p')q'}{(p+p')q'+pq}; \tag{12}$$

(*) *Si trois droites, issues d'un même point* O, *rencontrent, en* A, B, C *et en* A', B', C', *deux transversales, on a*

$$\frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{OA}{OA'} = \frac{CA}{C'A'} \cdot \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{OC}{OC'}.$$

(Théorèmes et Problèmes, p. 95.)

et par une permutation tournante :

$$\frac{y}{\mathrm{BH}} = \frac{(q+q')r'}{(q+q')r'+qr}, \tag{13}$$

$$\frac{z}{\mathrm{CT}} = \frac{(r+r')p'}{(r+r')p'+rp}. \tag{14}$$

Les droites AG, BP, CI sont connues (*) ; donc les valeurs de x, y, z le sont également.

V. *Remarques.* — 1° La formule (13) peut être remplacée par une autre. Reprenons, en effet, la relation

$$\frac{x}{\mathrm{AG}} = \frac{(p+p')q'}{(p+p')q'+pq}. \tag{12}$$

Dans le triangle ABC, on peut substituer le point G au point H, en changeant p en q', q en p'. Ainsi

$$\frac{y}{\mathrm{BH}} = \frac{(q+q')p}{(p+p')p+p'q'} \;(^{**}). \tag{15}$$

2° Dans les formules (12), (15), les dénominateurs sont *identiques ;* donc

$$\frac{x}{\mathrm{AG}} + \frac{y}{\mathrm{BH}} = 1 + \frac{pq'}{(p+p')q'+pq}.$$

Si l'on introduit les aires des triangles AOB, BOC, COA, ABC, on trouve, au lieu de la dernière relation,

$$\frac{\mathrm{AOB}}{\mathrm{ABC}} = \frac{pq'}{(p+q')p'+pq}. \tag{16}$$

(*) Par exemple, au moyen d'un théorème d'Euler :

$$\overline{\mathrm{AG}}^2 = \frac{1}{a}(b^2p + c^2p') - pp'.$$

(**) Il est d'ailleurs visible que, d'après l'égalité (11) :

$$\frac{r'}{(q+q')r'+qr} = \frac{p}{(q+q')p+p'q'}.$$

Par conséquent :

Si les quantités p, q, r, p', q', r' *satisfont à la condition* pqr = p'q'r', *elles rendent identique l'égalité*

$$1 = \frac{pq'}{pq + p'q' + pq'} + \frac{qr'}{qr + q'r' + qr'} + \frac{rp'}{rp + r'q' + rp'}. \quad (17)$$

3° La formule (12) donne, immédiatement, cette autre identité :

$$1 = \frac{pq}{pq + p'q' + pq'} + \frac{qr}{qr + q'r' + qr'} + \frac{rp}{rp + r'p' + rp'}. \quad (18)$$

4° Des deux dernières, résulte celle-ci :

$$1 = \frac{p'q'}{pq + p'q' + pq'} + \frac{q'r'}{qr + q'r' + qr'} + \frac{r'p'}{rq + r'p' + rp'} \ (^*). \quad (19)$$

5° Si l'on simplifie, autant que possible, chacune de ces égalités, on trouve

$$(pqr - p'q'r')^2 = 0 \ (^{**}).$$

(*) De simples échanges de lettres donnent encore trois autres relations, de même forme que les précédentes.

(**) Par conséquent, la surface représentée par

$$1 = \sum \frac{xy}{xy + ab + bx},$$

est identique avec celle dont l'équation est

$$xyz = abc.$$

CLXX. — Polaires réciproques.

(*Décembre* 1878) (*).

I. Théorème. — *Deux triangles* T, T′, *polaires réciproques relativement à une conique* C, *sont homologiques* (**).

Réciproque. — *Deux triangles* T, T′, *homologiques, sont polaires réciproques relativement à une certaine conique* (***).

II. *Remarques.* — 1° Soient *deux polygones* P, P′, de n côtés chacun, *polaires réciproques* relativement à une conique C. Dans P, prenons trois côtés, indéfiniment prolongés : nous formons un triangle ABC, auquel correspond, dans P′, un triangle A′B′C′. Les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un centre d'homologie H. Le nombre de ces centres est

$$C_{n,3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.$$

2° Le nombre N, des triangles ABC, est celui des combinaisons trois à trois, de $\frac{n(n-1)}{2}$ droites. On trouve

$$N = \frac{1}{48}(n+1)n(n-1)(n-2)(n^2-n-4).$$

Etc.

(*) Complément à la *Note* CLIX.

(**) Démonstration facile.

(***) Cette réciproque a été démontrée par M. Neuberg, aussi bien que le théorème (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V, p. 270). Mon savant Confrère a étendu ses recherches aux *tétraèdres homologiques*.

CLXXI. — Question d'analyse indéterminée.

(*Juin* 1879.)

Trouver la loi de formation des nombres à la fois triangulaires et carrés (Philippe Breton) (*).

I. L'équation du problème :

$$x^2 = \frac{1}{2} y(y+1),$$

se transforme, immédiatement, en

$$(2y+1)^2 - 2(2x)^2 = 1. \qquad (1)$$

Si l'on développe $\sqrt{2}$ en fraction continue, on trouve les réduites :

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \frac{577}{408},\ \dots$$

Par conséquent :

$$2x = 2,\quad 12,\quad 70,\quad 408, \dots,$$

$$2y+1 = 3,\quad 17,\quad 99,\quad 577, \dots;$$

ou

$$x = 1,\quad 6,\quad 35,\quad 204, \dots$$

$$y = 1,\quad 8,\quad 49,\quad 288, \dots$$

Ainsi, les valeurs de y sont, alternativement, *le carré du numérateur d'une réduite de rang impair*, et *le double du carré du dénominateur d'une réduite de rang pair* (**).

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V, p. 285. La question est traitée dans l'*Algèbre* d'Euler.

(**) En outre, *chacun de ces doubles, augmenté de* 1, *est un carré*.

II. Les valeurs générales sont données par les formules connues :

$$x = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n}\right], \tag{2}$$

$$2y + 1 = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}\right]; \tag{3}$$

ou par celles-ci, qui s'en déduisent :

$$x = \frac{1}{2}C_{2n,1} + C_{2n,3} + 2C_{2n,5} + 2^2C_{2n,7} + \cdots, \tag{4}$$

$$y = C_{2n,2} + 2C_{2n,4} + 2^2C_{2n,6} + \cdots \tag{5}$$

D'ailleurs

$$x^2 = \frac{1}{32}\left[(1+\sqrt{2})^{4n} + (1-\sqrt{2})^{4n} - 2\right];$$

c'est-à-dire :

$$x^2 = \frac{1}{8}\left[C_{4n,2} + 2C_{4n,4} + 2^2C4_{4n,6} + \cdots\right]. \tag{6}$$

Ainsi, les nombres demandés résultent de la formule

$$N = \frac{1}{8}\left[C_{4n,2} + 2C_{4n,4} + 2^2C_{4n,6} + \cdots\right]: \tag{7}$$

ils sont carrés et triangulaires.

III. D'après la valeur de $2y+1$, on a

$$y = \frac{1}{4}\left[(\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n\right]^2.$$

Si n est *pair*, cette formule peut être écrite ainsi :

$$y = 2\left[C_{n.1} + 2C_{n,3} + 2^2C_{n,5} + \cdots\right]^2; \tag{8}$$

et, si n est *impair :*

$$y = \left[1 + 2C_{n,2} + 2^2C_{n,4} + \cdots\right]^2. \tag{9}$$

Dans le second cas, y *est un carré impair ;* et, dans le premier, y *est le double d'un carré pair* (*).

(*) Voir la fin du paragraphe II.

IV. *Remarques.* — 1° $N = \frac{1}{2} y (y + 1)$ *est la somme des* y *premiers nombres entiers.* Le problème peut donc être énoncé ainsi :

Déterminer y, *de façon que la somme* N, *des* y *premiers nombres entiers, soit un carré.*

2° Si l'on représente par $\frac{u_n}{v_n}$ la réduite de rang n, on a

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2}\left[(\sqrt{2}+1)^n + (1-\sqrt{2})^n\right], \\ v_n &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]; \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

puis

$$u_n v_n = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n}\right] = x = N.$$

Les valeurs de N sont donc

$$1^2, \quad (2.3)^2, \quad (5.7)^2, \quad (12.17)^2, \quad (29.41)^2, \quad (70.99)^2, \ \dots \ (^*).$$

Addition. — (*Juin* 1886.)

V. Dans l'expression de v_n, remplaçons n par $2n - 1$. Nous aurons :

$$v_{2n-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)^{2n-1} + (\sqrt{2}-1)^{2n-1}\right]. \qquad (11)$$

Soient

$$\sqrt{2} + 1 = \alpha, \quad 1 - \sqrt{2} = -\beta.$$

Ces deux quantités vérifient l'équation

$$t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Donc, d'après un théorème connu (**) :

(*) Cette propriété résulte aussi de la forme des valeurs de y.

(**) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés* (Atti dell'Académie des Nuovi Lincei, 1884, p. 23).

Chacun des dénominateurs

$$1,\quad 5,\quad 29,\quad 169,\quad 985,\quad 5\,741,\ \ldots$$

est : 1° *la somme de deux carrés ;* 2° *la somme de trois carrés* (*).

CLXXII (**). — Sur une classe d'équations différentielles.

(*Juillet* 1879.)

I. Dans la première *Note sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques,* j'ai fait observer que l'intégrale générale de l'équation *classique :*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0, \tag{1}$$

est réductible à la forme

$$y = \mathrm{E}(x)\left[\lambda \int \frac{dx}{x\,[\mathrm{E}(x)]^2} + \mu\right]. \tag{2}$$

Dans cette égalité, λ, μ sont les constantes arbitraires, et

$$\mathrm{E}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - x^2 \sin^2\varphi} = \mathrm{E}_1(x).$$

(*) Il y a, naturellement, exception pour les deux premiers. Quant aux autres, on trouve :

$$\begin{aligned}
29 &= 5^2 + 2^2 = 3^2 + 4^2 + 2^2,\\
169 &= 12^2 + 5^2 = 12^2 + 3^2 + 4^2,\\
985 &= 29^2 + 12^2 = 21^2 + 20^2 + 12^2,\\
5\,741 &= 29^2 + 70^2 = 21^2 + 20^2 + 70^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On peut consulter, sur ce sujet, le travail intitulé : *Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries* (1883, p. 26).

(**) Tirée du *Bulletin de l'Académie* (1886).

Il résulte, de la formule (2), que l'équation (1) peut être transformée d'une manière simple et remarquable.

Posons, en effet :

$$y = \frac{z}{\sqrt{x}}, \quad \sqrt{x}\,\mathrm{E}(x) = \mathrm{X}; \tag{3}$$

nous aurons

$$z = \mathrm{X}\left[\lambda \int \frac{dx}{\mathrm{X}^2} + \mu\right]; \tag{4}$$

puis, en divisant par X et en différenciant deux fois :

$$\frac{z''}{z} = \frac{\mathrm{X}''}{\mathrm{X}} (*). \tag{5}$$

Addition. — (*Juin* 1886.)

II. *Remarques.* — 1° X étant une fonction *quelconque,* l'intégrale générale de l'équation (5) est donnée par la formule (4). On vérifie directement ce fait en observant qu'une intégrale particulière est

$$z_1 = \mathrm{X},$$

et en appliquant la méthode connue (**).

2° Une seconde intégrale particulière est, évidemment,

$$z_2 = \mathrm{X}\int \frac{dx}{\mathrm{X}^2}.$$

III. Il n'est pas inutile de vérifier que

$$y = \mathrm{E}(x)\left[\lambda \int \frac{dx}{x\left[\mathrm{E}(x)\right]^2} + \mu\right] \tag{2}$$

est l'intégrale générale de l'équation (1).

(*) Dans le tome V de la *Nouvelle Correspondance mathématique* (p. 331), j'ai ramené, à cette forme, une équation assez complexe, proposée par M. *Escary.*

(**) *Inventée,* ou du moins très heureusement employée par l'illustre Sturm, dans ses Mémoires sur la théorie de la Chaleur. Il en a déduit son célèbre théorème.

Pour plus de clarté dans le calcul, remplaçons, suivant l'usage, x par c, de manière que

$$\frac{y}{E(c)} = \lambda \int \frac{dc}{c[E(c)]^2} + \mu;$$

ou, sous forme abrégée :

$$\frac{y}{E} = \lambda \int \frac{dc}{cE^2} + \mu. \tag{6}$$

Les deux premières dérivées de cette équation sont

$$c(Ey' - yE') = \lambda,$$

$$cEy'' + Ey' - (cE'' + E')y = 0. \tag{7}$$

On sait que

$$E' = \frac{1}{c}[E - F], \quad F' = \frac{E - b^2F}{b^2c} (^*);$$

donc

$$E'' = \frac{1}{c}[E' - F'] - \frac{1}{c^2}[E - F], \quad cE'' + E' = E' - F' = -\frac{c}{b^2}E.$$

La substitution dans (7) donne, après suppression du facteur commun E :

$$cy'' + y' + \frac{c}{b^2}y = 0;$$

ce qui ne diffère pas de l'équation (1).

IV. Si l'on veut, de la transformée (5), revenir à la proposée (1), on doit faire $z = y\sqrt{x}$. On trouve

$$\frac{4x^2y'' + 4xy' - y}{4x^2y} = \frac{X''}{X}. \tag{8}$$

A cause de $X = \sqrt{x}\,E(x)$, cette équation paraît contradictoire avec l'équation (1). Mais un calcul semblable au précédent donne

$$\frac{X''}{X} = -\frac{1 + 3x^2}{4(1 - x^2)x^2}; \tag{9}$$

(*) Legendre, t. I, pp. 66 et 67.

puis

$$4x^2(1-x^2)y'' + 4x(1-x^2)y' - (1-x^2)y + (1+3x^2)y = 0;$$

etc.

Ainsi, la fonction $\frac{X''}{X}$, au lieu d'être transcendante, est *algébrique et rationnelle.* Cela devait arriver; car deux équations différentes ne peuvent avoir même intégrale générale.

V. Lorsque $X = \sqrt{x}\,E(x)$, l'équation (5) est donc

$$\frac{z''}{z} + \frac{1+3x^2}{4(1-x^2)x^2} = 0. \tag{10}$$

Cette transformée de l'équation (1), plus simple que celle-ci, a pour intégrale, comme on l'a vu :

$$z = X\left[\lambda\int\frac{dx}{X^2} + \mu\right]. \tag{4}$$

VI. *Généralisation.* — L'équation (5) est comprise dans cette autre :

$$X^2z'' + kXX'z' - \left[XX'' + kX'^2\right]z = 0; \tag{11}$$

k désignant une constante donnée.

En l'écrivant ainsi :

$$\frac{Xz'' - X''z}{Xz' - X'z} + k\frac{X'}{X} = 0, \tag{12}$$

on reconnaît qu'une intégrale première est

$$(Xz' - Xz)\,X^k = A. \tag{13}$$

L'intégrale générale a donc pour expression

$$z = X\left[A\int\frac{dx}{X^{k+2}} + B\right] (*). \tag{15}$$

(*) On arrive à la même conclusion en observant que l'équation (11) est vérifiée par $z = X$.

VII. *Remarque.* — Sauf le cas où X est un monôme, la méthode précédente ne semble point applicable à l'équation

$$\frac{z^{(p)}}{z} = \frac{X^{(p)}}{X}, \tag{15}$$

p surpassant 2.

Mais soit $X = x^n$; et, par conséquent,

$$\frac{z^{(p)}}{z} = n(n-1)\cdots(n-p+1)x^{-p}. \tag{16}$$

Si l'on essaie

$$z = x^{\lambda},$$

on trouve

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-p+1) = n(n-1)\cdots(n-p+1). \tag{17}$$

Cette équation *algébrique,* du degré p, dont la discussion est intéressante, est vérifiée par

$$\lambda = n \ (^*);$$

et, lorsque p est *pair,* par

$$\lambda = -(n-p+1).$$

L'intégrale générale de l'équation (15) (**) est donc, si p est *pair :*

$$z = Ax^n + Bx^{p-n-1} + B_1 x^{\lambda_1} + \cdots + A_{p-2}x^{\lambda_{p-2}}; \tag{18}$$

et, si p est *impair :*

$$z = Ax^n + A_1 x^{\lambda_1} + \cdots + A_{p-1}x^{\lambda_{p-1}}. \tag{19}$$

VIII. *Application.* — Soient $n = 5$, $p = 4$; auquel cas l'équation (16) devient

$$\frac{z^{\text{IV}}}{z} = \frac{9.8.7.6}{x^4}. \tag{20}$$

(*) L'existence de cette racine était évidente *a priori.*

(**) Équation *linéaire,* à *coefficients constants.*

L'équation auxiliaire (17) est

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 3\,024,$$

ou

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda - 3\,024 = 0.$$

Elle a pour racines :

$$9, -6, \quad \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{215}\sqrt{-1}\right), \quad \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{215}\sqrt{-1}\right).$$

L'intégrale générale de l'équation (20) est donc

$$z = \mathrm{A}x^9 + \mathrm{B}^{-6} + \left[\mathrm{A}_1 x^{\frac{\sqrt{215}}{2}\sqrt{-1}} + \mathrm{A}_2 x^{-\frac{\sqrt{215}}{2}\sqrt{-1}}\right] x^{\frac{3}{2}};$$

ou, sous une forme un peu plus simple,

$$z = \mathrm{A}x^9 + \mathrm{B}x^{-6} + \mathrm{C}x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{215}}{2}\,\mathcal{L}.\,\alpha x\right) (^*). \qquad (21)$$

(*) Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\sqrt{215}}{2} = m,$$

les quatre premières dérivées de

$$z_1 = x^{\frac{2}{3}} \sin(m\,\mathcal{L}.\,\alpha x)$$

sont :

$$z_1^{\mathrm{I}} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin(m\,\mathcal{L}.\,\alpha x) + m x^{\frac{1}{2}} \cos(m\,\mathcal{L}.\,\alpha x),$$

$$z_1^{\mathrm{II}} = \left(\frac{3}{4} - m^2\right) x^{-\frac{1}{2}} \sin(m\,\mathcal{L}.\,\alpha x) + 2m x^{-\frac{1}{2}} \cos(m\,\mathcal{L}.\,\alpha x),$$

$$z_1^{\mathrm{III}} = -\left(\frac{3}{8} + \frac{3}{2} m^2\right) x^{-\frac{3}{2}} \sin(m\,\mathcal{L}.\,\alpha x) - \left(\frac{1}{4} m + m^3\right) x^{-\frac{3}{2}} \cos(m\,\mathcal{L}.\,\alpha x),$$

$$z_1^{\mathrm{IV}} = \left(\frac{9}{16} + \frac{5}{2} m^2 + m^4\right) x^{-\frac{5}{2}} \sin(m\,\mathcal{L}.\,\alpha x).$$

Égalant à

$$3\,024\, x^{-\frac{5}{2}} \sin(m\,\mathcal{L}.\,\alpha x)$$

Autre addition. — (*Juillet* 1886.)

IX. M. De Tilly m'écrit (*) qu'il sait intégrer

$$\frac{z^{(p)}}{z} = Ax^m,$$

m étant *quelconque*. C'est là un très grand progrès. En effet, la méthode de Kummer (**), fort ingénieuse, exige des transformations longues et pénibles; et, jusques dans ces derniers temps, j'ai cru que l'intégrale de la simple équation

$$\frac{z^{(p)}}{z} = x \tag{22}$$

ne pouvait être exprimée que par des intégrales définies. Voici, en peu de mots, le résultat auquel je suis parvenu, il y a quelques années.

Soit θ_1 *une racine primitive de l'équation binôme* $x^{p+1} - 1 = 0$. *L'équation* (22) *est vérifiée par*

$$z_1 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^{p+1}}{p+1}} \left(e^{\alpha x} + e^{\alpha\theta_1 x} + \dots + e^{\alpha\theta_1^p x}\right) d\alpha. \tag{23}$$

Donc, l'intégrale générale est la somme de p *intégrales définies, respectivement multipliées par des constantes.*

cette dernière expression, on a donc

$$m^4 + \frac{5}{2} m^2 - \frac{48\,375}{16} = 0;$$

d'où, en négligeant les racines imaginaires,

$$m^2 = \frac{215}{4};$$

etc.

(*) Lettre du 4 juillet.

(**) *Journal de Liouville*, t. IV.

X. *Remarque.* — Soit $p = 1$. L'intégrale générale de

$$\frac{z'}{z} = x$$

serait donc

$$z = A \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) d\alpha. \tag{24}$$

Or, cette intégrale est

$$z = Ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

Ainsi, l'on doit avoir

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) dx = ke^{\frac{x^2}{2}}.$$

Si l'on fait $x = 0$, on trouve $k = \sqrt{2\pi}$. Par conséquent,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) d\alpha = \sqrt{2\pi}\, e^{\frac{x^2}{2}}; \tag{25}$$

formule connue.

Dans le cas général, la comparaison de la valeur de z, déduite de la formule (23), avec celle qui résulte de la méthode due à mon savant Confrère, fera connaître de nouvelles intégrales définies.

CLXXIII. — Théorèmes d'Arithmétique (*).

(*Avril* 1886.)

I. *Soit* $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, a, b, c, ... *étant des nombres premiers, inégaux. Soit* x *le plus grand des produits* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, ... *On a*

$$1.2.3 \ldots x = \mathfrak{M}(N).$$

Supposons

$$x = a\alpha \geqq b\beta \geqq c\gamma \geqq \ldots$$

(*) A propos de ma démonstration du *Théorème de Staudt et Clausen* (*Note* LXXVI).

Il suffit de démontrer que

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots x = \mathcal{M}\,(b^{\beta})\ (^{*}).$$

Dans le premier membre, le nombre b est facteur autant de fois que l'indique l'expression

$$\lambda = \left(\frac{x}{b}\right) + \left(\frac{x}{b^2}\right) + \left(\frac{x}{b^3}\right) + \cdots$$

Soit

$$x = b\beta + y,$$

y étant *nul* ou *positif*. Il est clair que l'on a

$$\left(\frac{x}{b}\right) = \beta + \left(\frac{y}{b}\right),$$

puis

$$\lambda \overline{\overline{>}} \beta;$$

et, par conséquent,

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots x = \mathcal{M}\,(b^{\beta}).$$

II. *Soient* n *un nombre pair, et* p *un nombre premier, supérieur à* 2. *On a*

$$\Delta^{p-1}(1^{n-1}) = \mathcal{M}\,(p).$$

Le premier membre égale

$$p^{n-1} - \frac{p-1}{1}(p-1)^{n-1} + \cdots - \frac{p-1}{1}\,2^{n-1} + 1.$$

En négligeant des multiples de p, on le réduit à

$$(p-1)^{n-1} + (p-2)^{n-1} + (p-3)^{n-1} + \cdots + 2^{n-1} + 1;$$

puis à

$$-1 - 2^{n-1} - 3^{n-1} - \cdots + 3^{n-1} + 2^{n-1} + 1,$$

quantité nulle, parce qu'elle est composée de n termes, égaux et de signes contraires deux à deux.

(*) En effet,

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots a\alpha = \mathcal{M}\,(a^{\alpha});$$

et, d'un autre côté, les facteurs a^{α}, b^{β}, c^{γ}, ... sont premiers entre eux, deux à deux.

CLXXIV. — Sur un théorème de M. Pépin.

(*Septembre* 1880.)

I. Dans les *Comptes rendus* (séance du 16 août), on lit :

« *Ainsi les deux nombres premiers* 7 *et* 13 *ne peuvent diviser* » *la somme de trois cubes sans diviser l'un de ces cubes.* »

p étant un nombre premier, soit $n = \frac{p-1}{2}$.

D'après le théorème de Fermat, *si* p *ne divise pas* a :

$$a^n = \mathfrak{M}(p) \pm 1.$$

Donc, i étant *impair :*

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_i^n = \mathfrak{M}(p) + x,$$

en supposant

$$x = (\pm 1) + (\pm 1) + \cdots$$

Le nombre des termes du second membre étant *impair*, x n'est pas nul. On a donc ce théorème :

Si p *est un nombre premier, et que* i *soit impair, la somme des puissances* $\frac{p-1}{2}$, *de* i *nombres entiers, premiers avec* p, *n'est pas divisible par* p.

Addition. — (*Juin* 1886.)

II. Corollaire :

$$1^{\frac{p-1}{2}} + 2^{\frac{p-1}{2}} + \cdots + (p-2)^{\frac{p-1}{2}}$$

n'est pas divisible par p.

III. *Remarque.* — Le théorème ci-dessus ne démontre pas la proposition relative au nombre 13, signalée par M. Pépin. Pour la vérifier, il suffit d'observer que les résidus, par 13, des nombres

$$1,\quad 8,\quad 27,\quad 64,\quad 125,\quad 216,\quad 343,\quad 512,\quad 729,\quad 1\,000,\ \ldots,$$

sont

$$+1,\quad -5,\quad +1,\quad -1,\quad -5,\quad -5,\quad +5,\quad +5,\quad +1,\quad -1,\ \ldots;$$

c'est-à-dire ± 1, ± 5. Donc la somme de trois d'entre eux ne peut être nulle.

CLXXV. — Sur deux formules d'approximation.

(*Mars* 1881.)

I. Suivant Euler (*), on a, sensiblement,

$$\pi = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a} + 4a\left[\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{a^2+4} + \cdots + \frac{1}{a^2+a^2}\right]; \quad (1)$$

a étant un nombre entier (**).

On sait que

$$\int_0^\infty e^{-mx}\sin x\,dx = \frac{1}{1+m^2}\ (^{***}),$$

ou

$$\int_0^\infty e^{-\frac{m}{a}x}\sin x\,dx = \frac{a^2}{a^2+m^2}.$$

Donc,

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{a^2+4} + \cdots + \frac{1}{a^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \left(e^{-\frac{x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + \cdots + e^{-\frac{ax}{a}}\right)\sin x\,dx. \quad (2)$$

La quantité entre parenthèses égale

$$e^{-\frac{x}{a}}\,\frac{1-e^{-x}}{1-e^{-\frac{x}{a}}}.$$

Par conséquent, si l'on appelle A le second membre de l'égalité (1) :

$$A = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a} + \frac{4}{a}\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{e^{\frac{x}{a}}-1}\sin x\,dx;$$

et, pour a infini :

$$\lim A = 4\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x}\sin x\,dx. \quad (3)$$

(*) *Correspondance avec Goldbach*, p. 221.

(**) Condition évidente, le dernier dénominateur étant $a^2 + a^2$.

(***) *Note* LIII.

Or :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx \text{ (*)} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$lim\, \mathrm{A} = \pi.$$

II. Si l'on fait $a = 1, 2, 3$, on trouve, par application de la formule (1) :

$$\pi = 3{,}16\,666, \quad \pi = 3{,}14\,166, \quad \pi = 3{,}141\,595.$$

On voit que le second membre converge rapidement vers sa limite.

III. Dans le *Journal de M. G. de Longchamps* (février 1881), M. *Geoffroy* a donné une formule que l'on peut écrire ainsi :

$$\pi = \frac{4}{a} + 4a\left[\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{a^2+4} + \cdots + \frac{1}{a^2+\overline{a-1}^2}\right]. \qquad (2)$$

En la comparant à la formule d'Euler, on voit que la différence des seconds membres est

$$\delta = \frac{1}{a} - \frac{1}{6a^2}.$$

Cette quantité, nulle à la limite, devient $\frac{11}{24}$ pour $a = 2$. Ainsi, la formule (2) est moins approximative que celle d'Euler.

CLXXVI. — Une surface d'intrados (**).

(*Juin* 1881.)

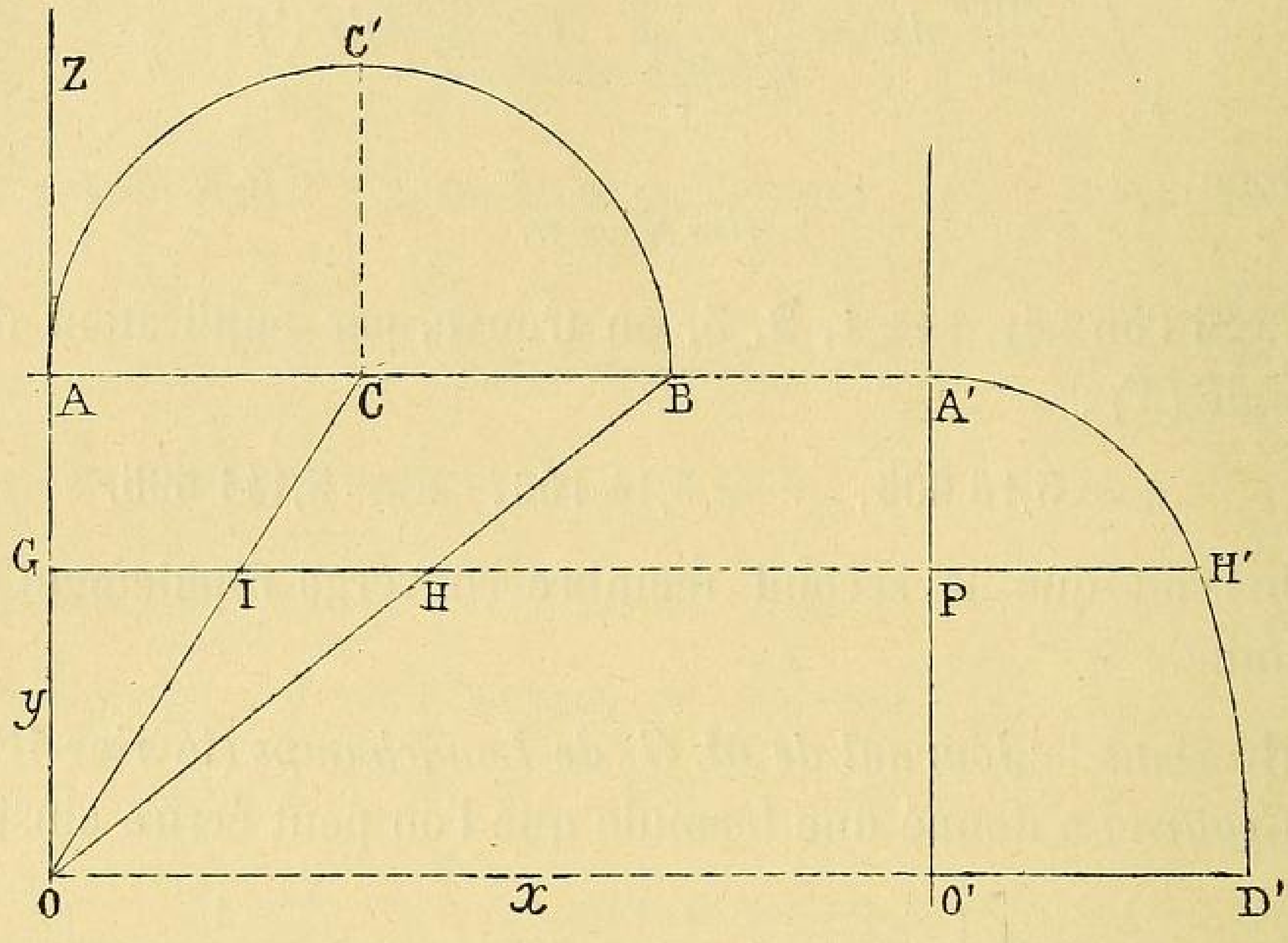
I. *On donne, dans le plan vertical* OA, *une ellipse projetée, en vraie grandeur, suivant* A'D' (***); *et, dans le plan vertical* OB, *une ellipse projetée, aussi, suivant* A'D'. *Une circonférence, dont le plan est perpendiculaire à* OA, *et dont le centre* I *est sur l'horizontale* OC, *rencontre les deux ellipses. Quelle est la surface ainsi engendrée?*

(*) Bierens de Haan, T. 365.

(**) Université de Liège — Salles du second étage.

(***) $O'A' = AB = 2a$, $O'D' = AC = CB = a$.

Soient G, H les projections horizontales des points où la géné-



ratrice coupe les directrices; soit H' la projection verticale de ces deux points.

Il est visible que le rayon ρ, de la circonférence génératrice, est donné par la formule

$$\rho = \sqrt{\overline{\mathrm{IH}}^2 + \overline{\mathrm{PH'}}^2}.$$

Mais :

$$\mathrm{IH} = \frac{1}{2}\,\mathrm{OG}, \qquad \overline{\mathrm{PH'}}^2 = \frac{1}{4}\left(4a^2 - \overline{\mathrm{O'P}}^2\right).$$

Donc, à cause de $\mathrm{O'P} = \mathrm{OG}$,

$$\rho = a.$$

Ainsi, la surface d'*intrados* proposée appartient à un *cylindre dont la base est la demi-circonférence* AC'B, *et dont les génératrices sont parallèles à l'horizontale* OC.

II. Si l'on considère le corps limité par le plan horizontal, la surface cylindrique et les plans verticaux OA, OB, AB, on trouve aisément que le volume de ce corps est

$$v = \left(\pi - \frac{4}{3}\right) a^3 \text{ (*)}.$$

(*) L'aire de la surface d'intrados est donnée par une intégrale elliptique, assez compliquée, et peu intéressante.

CLXXVII. — Quelques séries numériques.

(1857-1880.)

I. Dans la formule

$$\frac{\Gamma(l+l'+1)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l'+1)} = 1 + \frac{l}{1}\frac{l'}{1} + \frac{l(l-1)}{1.2}\frac{l'(l'-1)}{1.2} + \cdots \text{ (*)},$$

supposons $l = 1$, $l' = 1$: elle devient

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3.\left(\frac{1}{2.4}\right)^2 - 5\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 - 7\left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2 - \cdots \text{(**)}. \quad (1)$$

Mais

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 + \cdots \text{(***)}. \quad (2)$$

Donc, par l'élimination de $\frac{2}{\pi}$:

$$1 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{2.4}\right)^2 + 11\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 + 15\left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2 + \cdots, \quad (3)$$

résultat curieux (IV).

En combinant les égalités (1), (3), on trouve :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \cdots \quad (4)$$

II. La formule (3) peut être écrite autrement.

Le terme général de la série est, pour $n > 0$:

$$u_{n+1} = \frac{(4n+3)}{4}\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots\overline{2n+2}}\right)^2.$$

Soit, comme dans la Note CVII :

$$\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{4.6\ldots\overline{2n+2}} = \frac{1}{4^n}C_n = \frac{T_{n+2}}{4^n}.$$

(*) Tome I, page 141.

(**) Cette égalité résulte aussi du développement de $E_1(c)$ (Legendre, t. I, p. 65), dans lequel on ferait $c = 1$. (Août 1881.)

(***) Tome I, page 140.

(IV) *Second Mémoire sur les fonctions* X_n (p. 6).

T_{n+2} étant le $(n+2)^{\text{ième}}$ *Nombre de Segner*. Nous aurons

$$u_{n+1} = \frac{4n+3}{4^{2n+2}} T_{n+2}^2;$$

puis, au lieu de la relation (3) :

$$1 = \frac{7}{16} T_3^2 + \frac{11}{16^2} T_4^2 + \frac{15}{16^3} T_5^2 + \cdots \tag{5}$$

Voici donc encore une série remarquable, dans laquelle figurent les Nombres de Segner.

CLXXVIII. — Une équation aux différences.

(*Août* 1881.)

I. Soit

$$(2n-1)\,u_{n+1} - 4n\,u_n + (2n+1)\,u_{n-1} = 0, \tag{1}$$

cette équation (*).

En l'écrivant ainsi

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{2n+1} = \frac{u_n - u_{n-1}}{2n-1}, \tag{2}$$

on trouve, immédiatement,

$$u_n = n^2 a + b; \tag{3}$$

a, b étant des constantes.

II. La formule (3) donne

$$u_1 = a + b,\quad u_2 = 4a + b,\quad u_2 - u_1 = 3a.$$

Par conséquent, *si les deux termes initiaux sont entiers, et que leur différence soit divisible par* 3, *les termes* u_3, u_4, ... *seront entiers* (**).

(*) Rencontrée en étudiant la fonction X_n.

(**) Si la *loi de récurrence* est

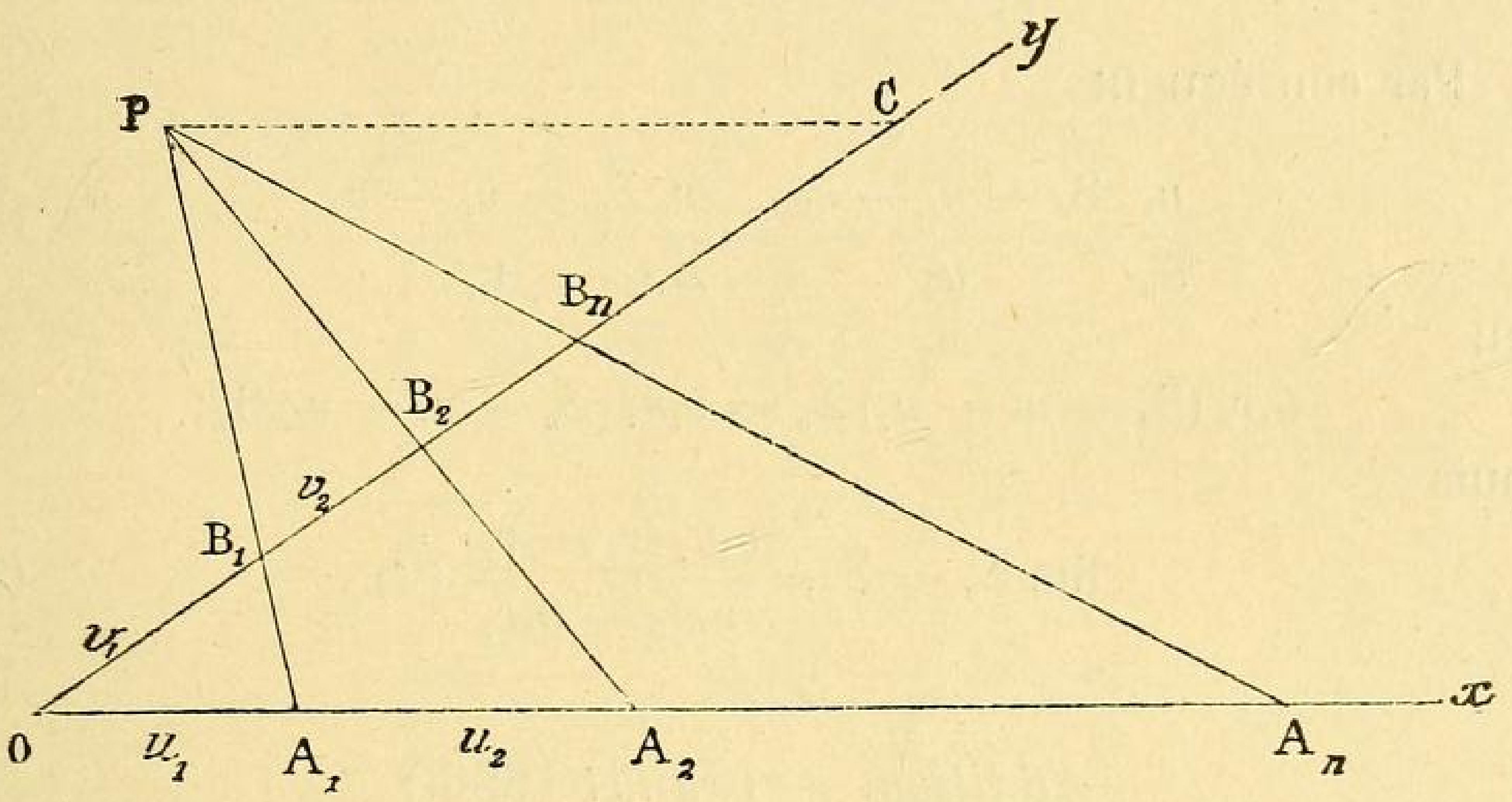
$$(n+1)\,u_{n+1} - (2n+1)\,u_n + n u_{n-1} = 0,$$

il est impossible que tous les termes soient entiers.

CLXXIX. — Application de la Perspective aux séries.

(*Janvier* 1882.)

I. Considérons la figure formée par un angle rectiligne et un système de parallèles. Si l'on en fait la *perspective*, sur un *tableau* parallèle à l'un des côtés de l'angle, on obtient, en général,



la figure ci-contre, dans laquelle P est le point de concours des droites A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ..., perspectives des parallèles données.

Soient :

$$OA_1 = u_1, \quad A_1A_2 = u_2, \ldots; \quad OA_n = S_n;$$

$$OB_1 = v_1, \quad B_1B_2 = v_2, \ldots; \quad OB_n = \Sigma_n.$$

Nous avons ainsi la représentation géométrique de deux séries :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_4 + \cdots, \tag{1}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_4 + \cdots, \tag{2}$$

à termes *positifs*. Si la première est *divergente*, la seconde sera *convergente*.

En effet, la position-*limite* de A_nB_n est PC, parallèle à Ox.

II. *Remarque. — Toutes les séries convergentes* (2) *ont même limite, si les termes initiaux* u_1, u_2, v_1, v_2 *sont constants.*

Car la position du point P, et par suite celle du point C (l'angle yOx étant donné), ne dépendent que de ces quatre termes.

III. Lorsque trois droites PA, PB, PC sont coupées par deux droites OABC, OA'B'C', on a

$$\frac{OA}{OC}\cdot\frac{BC}{AB}=\frac{OA'}{OC'}\cdot\frac{B'C'}{A'B'}\ (^*).$$

Par conséquent

$$\frac{u_1}{S_n}\cdot\frac{S_n-u_1-u_2}{u_2}=\frac{v_1}{\Sigma_n}\frac{\Sigma_n-v_1-v_2}{v_2},$$

ou

$$u_1v_2(S_n-u_1-u_2)\Sigma_n=v_1u_2(\Sigma_n-v_1-v_2)S_n;$$

puis

$$\lim\Sigma_n=\Sigma=\frac{v_1u_2(v_1+v_2)}{v_1u_2-u_1v_2}\ (^{**}). \tag{3}$$

Addition. — (*Juillet* 1886.)

IV. *Exemples.* — 1° Soient

$$u_1=u_2=\cdots=u_n=1;\ v_1=1,\ v_2=\frac{2}{3}.$$

L'équation (1) se réduit à

$$\frac{2}{3}(n-2)\Sigma_n=n\left(\Sigma_n-\frac{5}{3}\right).$$

Il en résulte :

$$\Sigma_n=\frac{5n}{n+4},\quad \Sigma=5.$$

En outre,

$$v_n=20\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right).$$

(*) Voir ci-dessus, page 275.

(**) Le second membre est fini et déterminé si, comme nous l'avons supposé, les droites A_1B_1, A_2B_2 sont concourantes.

2° $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, ..., $u_n = 2^{n-1}$, $S_n = 2^n - 1$.

On trouve :

$$\Sigma_n = 2\frac{2^n - 1}{2^{n-1} + 1}, \quad \Sigma = 4,$$

$$v_n = 3\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1} + 1)(2^{n-2} + 1)} = \frac{6}{2^{n-2} + 1} - \frac{6}{2^{n-1} + 1}.$$

V. *Remarques.* — 1° Si l'on suppose

$$\sigma = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n + 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \cdots, \tag{4}$$

on a :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \cdots,$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots,$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} - \frac{1}{8^4} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ;$$

puis, par la sommation des colonnes *verticales* :

$$\sigma = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{15} + \cdots = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n - 1}. \tag{5}$$

Ainsi, les séries (4), (5) ont même limite.

2° Cette limite commune σ doit être une transcendante compliquée. Car la série (4) est un cas particulier de celle-ci :

$$\frac{x}{1 + x} + \frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{x^3}{1 + x^3} + \frac{x^4}{1 + x^4} + \cdots,$$

laquelle se rattache à la *série de Lambert.*

CLXXX. — Sur les nombres combinatoires (*).

I. *Les nombres* $C_{m,1}, C_{m,2}, \ldots, C_{m,m}$ *sont tous impairs, si* $m=2^k-1$. *Cette condition est nécessaire* (**).

II. *Soient*

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\theta=n,$$

$$N=\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots\alpha\times 1.2\ldots\beta\times\ldots\times 1.2\ldots\theta}.$$

Si deux, au moins, des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta$ *sont impairs,* N *est pair* (**).

III. *Les mêmes notations subsistant, le nombre* $(n+1)$ N *est divisible par :*

$$\alpha+1, \qquad \beta+1, \qquad \ldots\ \theta+1;$$
$$\alpha+\beta+1, \qquad \alpha+\gamma+1, \qquad \ldots\ \sigma+\theta+1;$$
$$\alpha+\beta+\gamma+1, \quad \alpha+\beta+\delta+1, \quad \ldots\ \rho+\sigma+\theta+1;$$

. . . . (***).

IV. *Si* p *est un nombre premier,*

$$C_{p-1,q}=\mathfrak{M}(p)\pm 1,$$

selon que q *est pair ou impair* (IV).

V. Théorème. — *Si* a *et* b *sont premiers entre eux,*

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b-1)}{1.2.3\ldots a\times 1.2.3\ldots b}=\textit{entier}\ (\text{V}).$$

(*) Nous rappelons ici les énoncés de théorèmes publiés dans divers recueils.

(**) Mathesis, t. I, p. 203.

(***) Ibid., t. III, p. 48.

(IV) Cette propriété, dont la démonstration n'offre aucune difficulté, est probablement connue. (Juillet 1886.)

(V) *Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques.*

VI. *Si* a + b *est un nombre premier,*

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b-1)}{1.2.3\ldots a \times 1.2.3\ldots b} = entier\ (^*).$$

VII.
$$C_{2n,\,n} + \frac{1}{3}C_{2n-2,\,n-1}.C_{2,1} + \frac{1}{5}C_{2n-4,\,n-2}.C_{4,\,2} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2n+1}C_{2n,\,n} = 4^n \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}\ (^{**}).$$

VIII. Théorème. — *Si* p *est premier :*

$$1 + \frac{1}{2}[C_{p-1,1}]^2 + \frac{1}{3}[C_{p-1,2}]^2 + \cdots + \frac{1}{p-1}[C_{p-1,\,p-2}]^2 = entier\ (^{***}).$$

IX. $C_{2n,\,n} + C_{2n-2,\,n-1}.C_{2,\,1} + C_{2n-4,\,n-2}.C_{4,\,2} + \cdots + C_{2n,\,n} = 4^n\ (^{\text{IV}})$.

$$(n-1)C_{2n,\,2} + 2(n-2)C_{2n,\,4} + 3(n-3)C_{2n,\,6} + \cdots + (n-1)C_{2n,\,2}$$
$$= n(2n-1)4^{n-2}\ (^{\text{V}}).$$

X. $2^{n-1} - 2^{n-3}C_{n-2,\,1} + 2^{n-5}C_{n-3,\,2} - 2^{n-7}C_{n-4,\,3} + \cdots = n\ (^{\text{VI}})$.

XI. $2^{n-3} - 2^{n-5}\dfrac{n-3}{2} + 2^{n-7}\dfrac{(n-4)(n-5)}{2.3} - \cdots = \dfrac{2^{n-1}-1}{n}\ (^{\text{VII}})$.

XII. $1 + \dfrac{1}{3}C_{n-1,2} + \dfrac{1}{5}C_{n-1,4} + \cdots + \dfrac{1}{n-2}C_{n-1,n-3} = \dfrac{2^{n-1}-1}{n}\ (^{\text{VIII}}).\ (A)$

XIII. $\displaystyle\sum_0^s \frac{[C_{2p,\,p}]^2\,[C_{2s-2p,\,s-p}]^2}{C_{s,\,p}} = 2^s \sum_0^s (-4)^p [C_{2s-2p,\,s-p}]^2 C_{s-p,\,p}\ (^{\text{VIII}})$.

Remarque. — Dans les deux dernières égalités, chacun des termes est entier, si n est *premier.*

(*) Corollaire du théorème.

(**) *Notes d'Algèbre et d'Analyse,* p. 14.

(***) *Ibid.,* p. 20.

(IV) *Journal de Liouville,* t. IV.

(V) *Notes d'Algèbre et d'Analyse.*

(VI) *Sur quelques développements de* sin nx *et de* cos nx (*Nouvelles Annales,* 1883).

(VII) Relation presque évidente.

(VIII) *Sur un développement de l'intégrale elliptique...* (1885). Voir aussi *Note* CIX.

XIV. $\sum_{p=0}^{p=n} C_{2n+1,2p+1}\left[1.3.5\,.\,\overline{2p-1}\,.\,1.3.5\ldots\overline{2n-2p-1}\right]^2$
$$= (2.4.6\,..\,2n)^2 \text{ (*)}.$$

XV. Théorème. — p *étant un nombre premier, supérieur à* 2 :

$$1 + 3^{p-2} + 5^{p-2} + \cdots + (p-2)^{p-2} = \frac{2^{p-1}-1}{p} + \mathfrak{M}(p). \quad \text{(B)}$$

Dans l'égalité (A) :

$$C_{p-1,2} = ap + 1 = 3a', \quad C_{p-1,4} = bp + 1 = 5b', \ldots;$$

$a, a', b, b', \ldots$ étant des nombres *entiers*.

Les équations

$$ap + 1 = 3a', \quad bp + 1 = 5b', \quad cp + 1 = 7c', \ldots$$

sont vérifiées (d'après le théorème de Fermat) par :

$$a' = 3^{p-2} + \mathfrak{M}(p), \quad b' = 5^{p-2} + \mathfrak{M}(p), \quad c' = 7^{p-2} + \mathfrak{M}(p), \ldots$$

Donc cette égalité (A) devient

$$1 + 3^{p-2} + 5^{p-2} + \cdots + (p-2)^{p-2} = \frac{2^{p-1}-1}{p} + \mathfrak{M}(p). \quad \text{(B)}$$

XVI. Corollaire. — *Les nombres entiers*

$$1 + 3^{p-2} + 5^{p-2} + \cdots + (p-2)^{p-2}, \quad \frac{2^{p-1}-1}{p}$$

sont, simultanément, divisibles ou non divisibles par p (**).

XVII. $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} C_{p,1} + \dfrac{1}{n-1} C_{p,2} - \cdot\cdot = (-)^p \dfrac{1}{(n+1)C_{n,p}}$. (C)

(*) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 61. Il résulte, de cette dernière relation, que

$$(2.4.6.2n)^2$$

est la somme de 4^n *carrés impairs.*

(**) M. Mansion s'est proposé ce problème :

Peut-on avoir $2^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}(p^2)$? Au moyen du Corollaire, la question est ramenée à une autre, peut-être moins difficile. Suivant M. Ern. Cesàro, à qui je l'ai soumise, elle est impossible pour $p \gtreqless 43$.

Le premier membre égale

$$\int_0^1 \left[x^n - \frac{p}{1} x^{n-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} x^{n-q} - \ldots \pm x^{n-p}\right] dx$$

$$= \int_0^1 x^{n-p}(x-1)^p dx = (-1)^p \mathrm{B}(p+1, n-p+1)$$

$$= (-1)^p \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-p+2)}{\Gamma(n+2)} = (-1)^p \frac{1}{(n+1)\mathrm{C}_{n,p}}.$$

La relation (C) est donc démontrée.

Remarque. — Elle subsiste quand n et p sont remplacés par des nombres quelconques, pourvu que p ne surpasse pas n.

CLXXXI. — Carrés magiques.

(*Décembre* 1885.)

I. Avec les nombres 1, 2, ..., 16, on peut former le *carré magique* suivant :

10	8	5	11
4	15	14	1
13	2	3	16
7	9	12	6

Il en résulte, immédiatement, une infinité de carrés magiques, représentés par

$x+10y$	$x+8y$	$x+5y$	$x+11y$
$x+4y$	$x+15y$	$x+14y$	$x+y$
$x+13y$	$x+2y$	$x+3y$	$x+16y$
$x+7y$	$x+9y$	$x+12y$	$x+6y$

II. *Exemple* : $x = 3$, $y = 5$.

47	37	22	52
17	72	67	2
62	7	12	77
32	42	57	27

Il est clair que le procédé est général.

CLXXXII. — Intégrales définies équivalentes.

(*Juin* 1886) (*).

I. Un calcul direct, fort simple, donne

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{1 + x + \sqrt{1 + x^2}} = a. \tag{1}$$

Cette formule a cela de remarquable, qu'elle subsiste quand, dans le dénominateur, on remplace x par $X = f(x)$, $f(x)$ étant une fonction *impaire* (**).

En effet, A étant la valeur cherchée,

$$A = \int_{-a}^{+a} \frac{dx(1 + X - \sqrt{1 + X^2})}{2X} = \frac{1}{2} 2a + \int_{-a}^{+a} \frac{1 - \sqrt{1 + X^2}}{X} dx;$$

ou, en vertu de l'hypothèse faite sur X :

$$A = a.$$

(*) Communication au Congrès de Nancy.

(**) C'est-à-dire, satisfaisant à la condition

$$f(-x) = -f(x).$$

II. *Applications :*

1° $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin^3 x+\sqrt{1+\sin^6 x}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{1+\sin x+\cos x} = \frac{\pi}{2} \text{ (*)}.$$

2° X_n représentant un *polynôme de Legendre,* à indice *impair :*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+X_n+\sqrt{1+X_n^2}} = 1.$$

3° D'après la formule

$$\frac{1}{4}\frac{\omega(1-k')}{\pi} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \cdots \text{ (**)},$$

la transcendante $\omega(1-k^2)$ est une *fonction impaire,* relativement à la variable q. Donc

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dq}{1+\omega(1-k')+\sqrt{1+\omega^2(1-k')^2}} = 1.$$

Etc., etc.

III. *Remarque. — Toutes les courbes représentées par l'équation*

$$y = \frac{1}{1+X+\sqrt{1+X^2}},$$

et limitées par $x = \pm a$, *ont des aires égales.*

(*) Dans la deuxième intégrale, $X = \sin x$; dans la troisième, $X = \sin^3 x$; dans la quatrième, $X = \operatorname{tg} x$.

(**) *Note* CXXIV, p. 129.

CLXXXIII. — Sur les fonctions elliptiques de première espèce.

(*Mars* 1877.)

I. Problème (*). — *Trouver une courbe dont l'arc soit exprimé par l'intégrale elliptique de première espèce.*

De l'énoncé, on conclut

$$u^2 d\omega^2 + du^2 = \frac{k^4 du^2}{\sqrt{(f^2 - u^2)(u^2 - g^2)}}; \tag{1}$$

f, g étant des constantes données, et k une indéterminée.

Ensuite,

$$u^2 d\omega^2 = \frac{du^2}{(f^2 - u^2)(u^2 - g^2)} [u^4 - (f^2 + g^2)u^2 + f^2 g^2 + k^4].$$

Le trinôme entre parenthèses est un carré lorsque

$$k^2 = \frac{1}{2}(f^2 - g^2). \tag{3}$$

On a donc, s'il en est ainsi,

$$\pm d\omega = \frac{u^2 - \frac{f^2 + g^2}{2}}{u\sqrt{(f^2 - u^2)(u^2 - g^2)}} du,$$

ou

$$\pm d\omega = \frac{1}{2}\frac{du}{u}\left[\sqrt{\frac{u^2 - g^2}{f^2 - u^2}} - \sqrt{\frac{f^2 - u^2}{u^2 - g^2}}\right]. \tag{3}$$

II. Pour simplifier le second membre, on peut faire, par exemple,

$$\frac{f^2 - u^2}{u^2 - g^2} = \mathrm{tg}^2\varphi;$$

c'est-à-dire

$$u^2 = f^2 \cos^2\varphi + g^2 \sin^2\varphi. \tag{4}$$

(*) Résolu par *Legendre* et *Serret*.

Il résulte, de cette relation,

$$\pm\, d\omega = \frac{1}{2}(g^2 - f^2)\frac{d\varphi}{f^2\cos^2\varphi + g^2\sin^2\varphi}; \tag{5}$$

puis, par une formule connue,

$$\pm\,(\omega - \alpha) = \frac{1}{2}\frac{g^2 - f^2}{fg}\,\text{arc tg}\left(\frac{g}{f}\,\text{tg}\,\varphi\right). \tag{6}$$

III. Les courbes cherchées (toutes égales entre elles) sont représentées par le système des équations (4), (6), ou par la formule unique :

$$\pm\frac{g}{f}\sqrt{\frac{f^2 - u^2}{u^2 - g^2}} = \text{tg}\left[\frac{2fg}{g^2 - f^2}(\omega - \alpha)\right]. \tag{7}$$

IV. Si s est l'arc d'une de ces courbes, compté, par exemple, à partir de $\omega = \alpha$, on tire, de l'équation (1) :

$$ds = \frac{1}{2}(f^2 - g^2)\frac{du}{\sqrt{(f^2 - u^2)(u^2 - g^2)}};$$

ou, au moyen de la formule (4) :

$$ds = \frac{1}{2}\frac{f^2 - g^2}{\sqrt{f^2 - (f^2 - g^2)\sin^2\varphi}}\,d\varphi. \tag{8}$$

Ainsi, conformément à l'énoncé, *l'arc* s *égale le produit d'une longueur constante, par une intégrale de première espèce.*

CLXXXIV. — Sur l'Analyse indéterminée.

Problème. — *Trouver des solutions entières de l'équation*

$$(x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) = u^3. \qquad (1)$$

I. Le premier membre égale

$$3x^2(y+z) + 3y^2(z+x) + 3z^2(x+y) + 6xyz.$$

Ainsi, u^3 doit être divisible par 27. Soit n^3 le quotient :

$$(y+z)x^2 + (y+z)^2x + yz(y+z) = 9n^3,$$

ou

$$(y+z)(z+x)(x+y) = 9n^3. \qquad (2)$$

Donc, si l'on décompose $9n^3$ en abc, on a :

$$y+z=a, \quad z+x=b, \quad x+y=c;$$

puis, en supposant $a+b+c=2p$:

$$x=p-a, \quad y=p-b, \quad z=p-c \; (*), \quad u=3n. \qquad (3)$$

II. *Applications.* 1° $n=2$, $9n^3=72$.

On peut prendre :

$$a=2, \quad b=6, \quad c=6.$$

On trouve :

$$x=5, \quad y=1, \quad z=1, \quad u=6.$$

En effet,

$$7^3 - (5^3+1^3+1^3) = 6^3,$$

ou

$$1^3+1^3+5^3+6^3=7^3.$$

2° $n=8$, $9n^3=4\,608$; $a=16$, $b=16$, $c=18$, $p=25$;

$$x=9, \quad y=9, \quad z=7, \quad u=24.$$

On a

$$25^3-9^3-9^3-7^3=24^3,$$

ou

$$9^3+9^3+7^3+24^3=25^3.$$

(*) Afin que x, y, z soient entiers, $2p$ doit être un nombre *pair*.

III. *Remarque.* — Le premier membre de l'équation (1) est

$$p^3 - \left[(p-a)^3 + (p-b)^3 + (p-c)^3\right].$$

Cette quantité doit se réduire à $27n^3$ si $abc = 9n^3$; donc, en général, on a l'*identité* :

$$(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3 = 24abc; \quad \text{(A)}$$

ou, si l'on fait

$$a = 3\alpha^3, \quad b = 3\beta^3, \quad c = \gamma^3:$$

$$\left.\begin{aligned}(3\beta^3+\gamma^3-3\alpha^3)^3+(\gamma^3+3\alpha^3-3\beta^3)^3+(3\alpha^3+3\beta^3-\gamma^3)^3+(6\alpha\beta\gamma)^3\\ =(3\alpha^3+3\beta^3+\gamma^3)^3.\end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

Cette seconde identité résout, d'une infinité de manières, l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = t^3 \text{ (*)}. \quad (4)$$

IV. *Exemple.* — Prenons

$$\beta = 4, \quad \gamma = 1, \quad \alpha = 4.$$

Il résulte, de ces valeurs :

$$x = 1, \quad y - 1, \quad z = 383, \quad u = 96, \quad t = 385;$$

puis

$$1^3 + 1^3 + 383^3 + 96^3 = 385^3.$$

CLXXXV. — Une identité (**).

(*Mai* 1877.)

On a, quelles que soient les quantités b, c :

$$4(10b^2 - 19bc + 10c^2)^3 + 216\left[bc(b-c\right]^2$$
$$= 135\left[(5b^2 - 11bc + 5c^2)(b-c)\right]^2 + \left[(25b^2 - 49bc + 25c^2)(b+c)\right]^2.$$

(*) On peut comparer cette solution *incomplète* avec celle qui est développée dans la *Note* CXXVI.

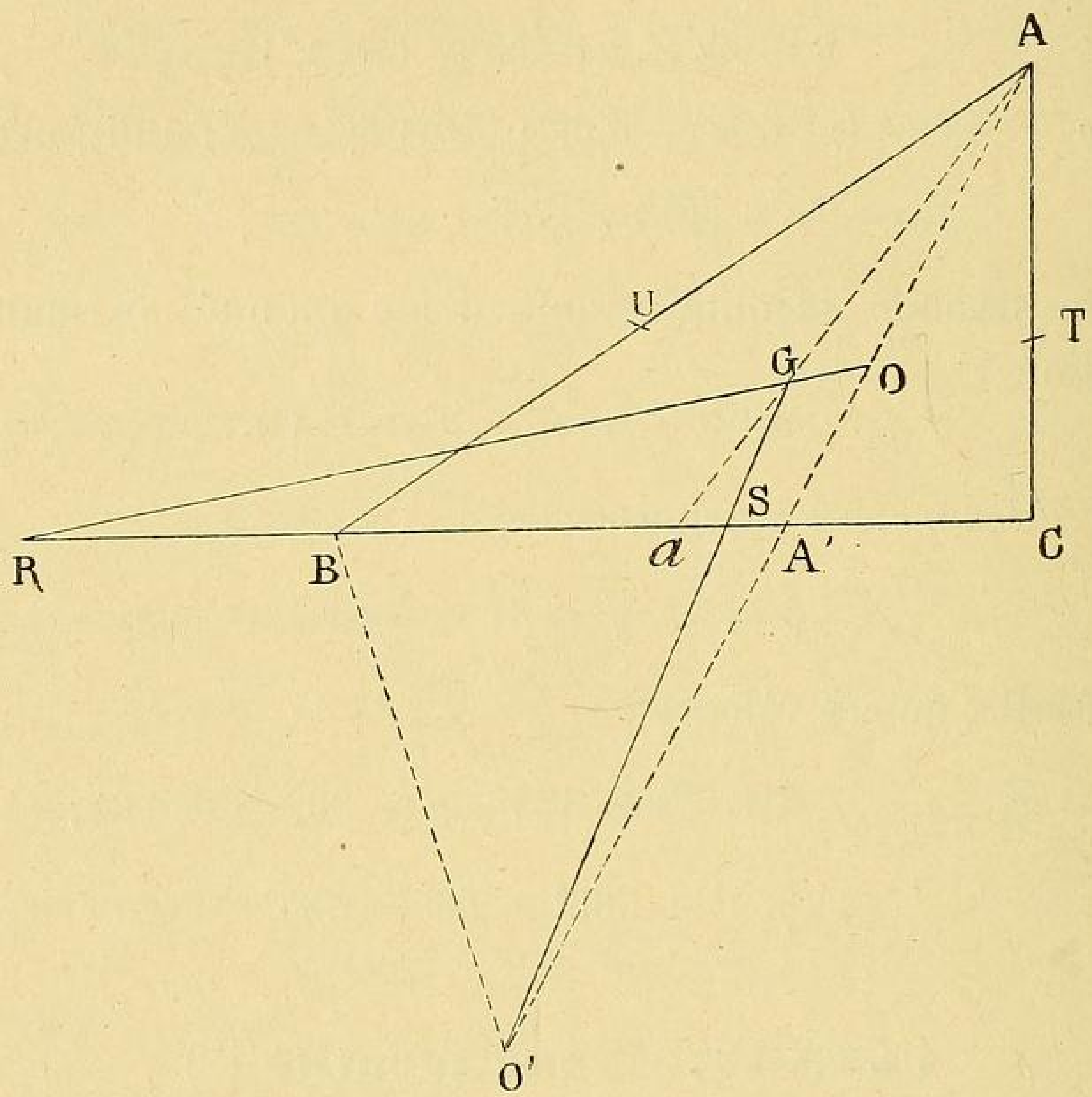
(**) Trouvée en discutant l'équation

$$x^3 - 2(b+c)x^2 - (2b^2 - 9bc + 2c^2)x + (b+c)(b^2 - 3bc + c^2) = 0.$$

CLXXXVI. — Généralisation d'un théorème de M. Laisant (*).

(*Octobre* 1876.)

I. Théorème. — *La droite qui joint le centre* G *de gravité d'un triangle* ABC, *au centre* O *du cercle inscrit, divise le côté*



moyen BC *en deux segments* BR, CR *proportionnels aux différences entre ce côté et les deux autres.*

Le théorème de Ptolémée, appliqué au triangle AaA' et à la transversale OGR, donne

$$AG \,.\, aR \,.\, A'O = AO \,.\, A'R \,.\, aG.$$

Par des propriétés connues :

$$AG = 2aG, \quad \frac{A'O}{AO} = \frac{BA'}{BA}, \quad BA' = \frac{ac}{b+c};$$

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II et III (Question 152).

donc la relation précédente se réduit à

$$\frac{a\mathrm{R}}{\mathrm{A'R}} = \frac{b+c}{2a}. \qquad (1)$$

Ainsi déjà :

Les distances du point R, *aux pieds de la médiane* Aa *et de la bissectrice* AA′, *sont entre elles comme la demi-somme des côtés extrêmes est au côté moyen.*

Si l'on représente par x, y les segments BR, CR, on peut écrire, sous les deux formes suivantes, la proportion (1) :

$$\frac{x + \frac{1}{2}a}{x + \frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{2a}, \qquad \frac{y - \frac{1}{2}a}{y - \frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{2a}.$$

La première équation donne

$$x = \frac{a(c-a)}{2a-b-c};$$

la seconde :

$$y = \frac{a(a-b)}{2a-b-c}.$$

Donc

$$\frac{x}{y} = \frac{c-a}{a-b},$$

ou

$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{CR}} = \frac{c-a}{a-b}. \qquad (2)$$

C. Q. F. D.

II. O′ étant le centre du cercle ex-inscrit à l'angle A; menons la droite GO′. Soit S le point où elle coupe BC. On trouve, de la même manière que précédemment :

$$\frac{a\mathrm{S}}{\mathrm{A'S}} = \frac{b+c}{2a}\ (^*); \qquad (3)$$

puis

$$\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{CS}} = \frac{a+c}{a+b}. \qquad (4)$$

(*) D'après les proportions (1), (3), *la droite* aA′ *est partagée harmoniquement par les points* R, S.

III. O'', O''' étant les centres des deux derniers cercles ex-inscrits (*); soient T, U les points où les droites GO'', GO''' rencontrent, respectivement, CA, AB. Une permutation tournante, effectuée sur la proportion (4), donne

$$\frac{\mathrm{CT}}{\mathrm{AT}}=\frac{b+a}{b+c},\quad \frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{BU}}=\frac{c+b}{c+a};$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{BS}\,.\,\mathrm{CT}\,.\,\mathrm{AU}=\mathrm{CS}\,.\,\mathrm{AT}\,.\,\mathrm{BU}. \tag{5}$$

Ainsi, *les droites* AS, BT, CU (**) *concourent en un point* V.

CLXXXVII. — Sur l'hexagone inscrit.

(*Octobre* 1878) (***).

I. Théorème. — *Soient* a, a', b, b', c, c' *les côtés consécutifs d'un hexagone inscrit; soient* α, β, γ *les diagonales qui joignent les sommets opposés. On a, entre ces neuf éléments, les relations*

$$(ab+a'\beta)(bc+b'\gamma)(ca+c'\alpha)=(a'b'+b\alpha)(b'c'+c\beta)(c'a'+\gamma)$$
$$=(\alpha\beta-ab')(\beta\gamma-bc')(\gamma\alpha-ca')\ (^{\text{IV}}).$$

1° Dans les quadrilatères inscrits CA'BC', A'BC'A (v) :

$$b'\gamma+bc=\mathrm{A'C'}.\,\mathrm{BC},\qquad b\alpha+a'b'=\mathrm{A'B'}.\,\mathrm{AB};$$

et, par conséquent,

$$\frac{b'\gamma+bc}{b\alpha+a'b'}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}.$$

Une permutation tournante donne ensuite :

$$\frac{c'\alpha+ca}{c\beta+b'c'}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BC}},\quad \frac{a'\beta+ab}{a\gamma+c'a'}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CA}}.$$

(*) Non tracés sur la figure.

(**) Non tracées.

(***) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V, p. 295.

(IV) Prouhet en a donné une autre (*Nouvelles Annales*, 1858, p. 185).

(V) Le lecteur est prié de faire la figure.

Le produit des seconds membres égale l'unité; donc

$$(bc + b'\gamma)(ca + c'\alpha)(ab + a'\beta) = (b'c' + c\beta)(c'a' + a\gamma)(a'b' + b\alpha). \quad (1)$$

2° Dans les quadrilatères inscrits CA'BA, ABCB' :

$$c \cdot \mathrm{AB} + b' \cdot \mathrm{CA} = \alpha \cdot \mathrm{BC}, \quad c' \cdot \mathrm{AB} + a \cdot \mathrm{BC} = \beta \cdot \mathrm{CA};$$

ainsi, par l'élimination de CA :

$$(c\beta + b'c')\,\mathrm{AB} = (\alpha\beta - ab')\,\mathrm{BC};$$

puis, au moyen d'une permutation tournante :

$$(\alpha\gamma + c'a')\,\mathrm{BC} = (\beta\gamma - bc')\,\mathrm{CA},$$
$$(b\alpha + a'b')\,\mathrm{CA} = (\gamma\alpha - ca')\,\mathrm{AB}.$$

Conséquemment,

$$(c\beta + b'c')(a\gamma + c'a')(b\alpha + a'b') = (\alpha\beta - ab')(\beta\gamma - bc')(\gamma\alpha - ca'). \quad (2)$$

II. Considérons les quadrilatères inscrits B'CA'B, B'AC'B. La formule connue :

$$\mathrm{R}^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}{(a + b + c - d)(b + c + d - a)(c + d + a - b)(d + a + b - c)} \ (*),$$

appliquée à chacune de ces deux figures, donne

$$\mathrm{R}^2 = \frac{(b'c' + c\beta)(c'\beta + b'c)(b'\beta + cc')}{(\beta + b' + c - c')(b' + c + c' - \beta)(c + c' + \beta - b')(c' + \beta + b' - c)},$$

$$\mathrm{R}^2 = \frac{(a'\beta + ab)(a\beta + a'b)(b\beta + aa')}{(\beta + b + a' - a)(a + a' + b - \beta)(a + a' + \beta - b)(\beta + a + b - a')},$$

R étant le rayon du cercle auquel l'hexagone est inscrit.

La diagonale β satisfait donc à l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(c\beta + b'c')(c'\beta + cb')(b'\beta + cc')}{(\beta + b' + c - c')(\beta + c + c' - b')(\beta + b' + c' - c)(-\beta + b' + c + c')} \\ &= \frac{(a'\beta + ab)(a\beta + a'b)(b\beta + aa')}{(\beta + b + a' - a)(\beta + a + a' - b)(\beta + a + b - a')(-\beta + a + a' + b)}, \end{aligned}\right\} (3)$$

laquelle paraît être du *septième* degré.

(*) Voir, par exemple, la *Géométrie de Legendre,* Note V.

CLXXXVIII. — Sur la partition des nombres.

(*Novembre* 1878.)

I. La formule

$$-\ell(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots,$$

ou

$$\ell(x + x^2 + x^3 + \cdots) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots,$$

équivaut à

$$x + x^2 + x^3 + \cdots = e^x . e^{\frac{x^2}{2}} . e^{\frac{x^3}{3}} \ldots \tag{1}$$

Développant chaque exponentielle, on trouve, comme terme général du produit,

$$\frac{x^a}{\Gamma(a+1)} \cdot \frac{x^{2b}}{2^b\Gamma(b+1)} \cdot \frac{x^{3c}}{3^c\Gamma(c+1)} \cdots$$

Si donc

$$a + 2b + 3c + \cdots = n, \tag{2}$$

le coefficient x^n, dans le second membre de l'égalité (1), sera

$$\sum \frac{1}{\Gamma(a+1) . b^b\Gamma(b+1) . 3^c\Gamma(c+1) \ldots},$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes *les solutions entières, non négatives,* de l'équation (2). En conséquence, on a ce théorème d'Arithmétique :

La somme de toutes les fractions

$$\frac{1}{2^b . 3^c . 4^d \ldots \Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1) \ldots}$$

est 1.

II. *Remarques.* — 1° Le nombre de ces solutions est le coefficient de q^n, dans le développement de

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3) \ldots},$$

c'est-à-dire $\psi(n)$ (*).

(*) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 11.

2° *Il y a autant de manières de décomposer* n *en parties entières, égales ou inégales* (*), *qu'il y en a de décomposer* n *en un multiple de* 1, *augmenté d'un multiple de* 2, *augmenté d'un multiple de* 3, etc.

Soit, par exemple, $n = 5$. Les décompositions indiquées sont

a	b	c	d	e
5	0	0	0	0
1	2	0	0	0
3	1	0	0	0
2	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	0	0	0	1

D'après la proposition énoncée, on doit trouver

$$\frac{1}{120} + \frac{1}{2^2 . 2} + \frac{1}{2 . 6} + \frac{1}{2 . 3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 1.$$

C'est ce qui a lieu.

III. L'identité

$$\sum \frac{1}{2^b . 3^c . 4^d \ldots \Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1) \ldots} = 1$$

peut être écrite ainsi :

$$\sum \frac{1}{1 . 2 . 3 \ldots a \times 2 . 4 . 6 \ldots 2b \times 3 . 6 . 9 \ldots 3c \times \ldots} = 1.$$

(*) Ce nombre est $\psi(n)$.

Par conséquent :

Si un nombre n *est décomposé, de toutes les manières possibles, en parties* α, β, γ, ..., *appartenant aux progressions*

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & \dots \\ 2, & 4, & 6, & \dots \\ 3, & 6, & 9, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

la somme des fractions $\frac{1}{\alpha\beta\gamma\dots}$ *égale l'unité* (*).

IV. *Autre théorème.* — Il est visible (et connu) que

$$-\mathcal{L}[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots]=x+\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\dots+\frac{1}{n}\int nx^n+\dots \quad (3)$$

Le premier membre égale

$$\mathcal{L}.\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots}=\mathcal{L}[1+x+\dots+\psi(n)x^n+\dots]\ (^{**}).$$

Donc l'égalité (3) devient

$$1+x+\dots+\psi(n)x^n+\dots=e^{A_1x}.e^{A_2x^2}..e^{A_nx^n}\dots; \quad (4)$$

A_n désignant $\frac{1}{n}\int n$.

Si donc (comme précédemment)

$$a+2b+3c+\dots=n, \quad (2)$$

la somme des fractions

$$\frac{(\int 2)^b.(\int 3)^c\dots}{1.2\dots a\times 2.4\dots 2b\times 3.6.9\dots 3c\times\dots}$$

égale $\psi(n)$.

V. *Application.* — Soit, comme ci-dessus, $n=5$, d'où $\psi(n)=7$ (***).

(*) Chaque progression ne doit pas renfermer plus d'une partie.

(**) *Recherches...*, p. 11.

(***) *Ibid.*, p. 59.

Abstraction faite des zéros, les solutions de l'équation (2) sont :

$$a = 5;\quad a = 3,\quad b = 1;\quad a = 1,\quad b = 2;\quad a = 2,\quad c = 1;$$
$$b = 1,\quad c = 1;\quad a = 1,\quad d = 1;\quad e = 1.$$

De plus :

$$\int 2 = 3,\quad \int 3 = 4,\quad \int 4 = 7,\quad \int 5 = 6.$$

Donc

$$\frac{1}{120} + \frac{3}{6.2} + \frac{9}{2.4} + \frac{4}{2.3} + \frac{3.4}{2.3} + \frac{7}{4} + \frac{6}{5} = 7\,;$$

ce qui est exact.

VI. *Remarque. — Le nombre des fractions composant* $\psi(\mathrm{n})$ *égale* $\psi(\mathrm{n})$.

VII. *Généralisation d'une identité connue. — On a, quel que soit le nombre entier* p :

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x^p+x^{2p}+\cdots+x^{(p-1)p})(1+x^{pp}+x^{2pp}+\cdots+x^{(p-1)pp})\ldots$$
$$= 1 + x + x^2 + x^2 + \cdots$$

En effet, si l'on multiplie par $1 - x$, on trouve $1 = 1$ (*).

De là résulte la propriété suivante :

Tout nombre entier est décomposable, d'une seule manière, en parties appartenant, respectivement, aux progressions

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & \ldots\ p-1; \\ p, & 2p, & 3p, & \ldots\ (p-1)p; \\ p^2, & 2p^2, & 3p^2, & \ldots\ (p-1)p^2; \\ \ldots & & & \ldots\ (^{**}). \end{array}$$

VIII. *Exemple.* — Soit $p = 5$: les progressions sont, si l'on veut :

$$\begin{array}{rrrr} 1, & 2, & 3, & 4; \\ 5, & 10, & 15, & 20; \\ 25, & 50, & 75, & 100; \\ \ldots & & & \end{array}$$

(*) Avons-nous besoin de dire que la série est supposée convergente?

(**) Chaque progression ne contient qu'une partie, au plus.

On peut donc former tous les nombres, non supérieurs à 100, avec un terme de la première, un terme de la deuxième et un terme de la troisième. En particulier, $67 = 2 + 15 + 50$.

Addition. — (*Décembre* 1882.)

IX. Soit ce théorème connu :

Si $n = i + i' = 2i''d$,

$$\sum\left[\int i \times \int i'\right] = \sum d^3 \text{ (*)}.$$

Remplaçons n par $2n$: i'' ne change pas et d devient $2d$. Conséquemment :

$$\sum\left[\int i \times \int (2n - i)\right] = 8\sum\left[\int i \times \int (n - i)\right]. \qquad \text{(A)}$$

X. *Application.* — Lorsque $n = 6$, la relation est

$$\int 1 \times \int 11 + \int 3 \times \int 9 + \int 5 \times \int 7$$
$$= 4\left[\int 1 \times \int 5 + \int 3 \times \int 3 + \int 5 \times \int 1\right];$$

ou

$$1 . 12 + 4 . 13 + 6 . 8 = 4 [1 . 6 + 4 . 4 + 6 . 1];$$

ce qui est exact (**).

(*) *Recherches...*, p. 100.

(**) Dans le *Journal de Mathématiques*, Liouville a donné, avec ou sans démonstration, une foule de théorèmes analogues à celui qui est exprimé par l'égalité (A).

CLXXXIX. — Sur la série de Lamé.

(*Octobre* 1879) (*).

I. *Sommation.* — Des égalités

$$
\begin{aligned}
u_3 &= u_2 + u_1,\\
u_4 &= u_3 + u_2,\\
&\dots\dots\dots\\
u_n &= u_{n-1} + u_{n-2},
\end{aligned}
$$

on déduit, par addition :

$$S_n - u_1 - u_2 = S_n - u_1 - u_n + S_n - u_{n-1} - u_n,$$

ou

$$S_n = 2u_n + u_{n-1} - u_2 = u_n + u_{n+1} - 2 \text{ (**)},$$

ou enfin

$$S_n = u_{n+2} - 2; \tag{1}$$

formule connue.

II. Théorème. — *On a, entre trois termes équidistants,* u_{n-p}, u_n, u_{n+p}, *et le terme* u_{p-1}, *la relation*

$$u_n^2 - u_{n-p}u_{n+p} = (-1)^{n-p+1}(u_{p-1})^2. \tag{2}$$

Si l'on fait

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

une formule connue donne

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n+1} - b^{n+1}), \quad u_{n+p} = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n+p+1} - b^{n+p+1}),$$

$$u_{n-p} = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n-p+1} - b^{n-p+1}).$$

(*) Voir, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. V, p. 199), nos remarques sur l'*histoire* de cette série.

(**) On ne doit pas oublier que les premiers termes de la série sont

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Donc

$$u_n^2 - u_{n-p}u_{n+p} = \frac{1}{5}\left[(a^{n+1} - b^{n+1})^2 - (a^{n+p+1} - b^{n+p+1})(a^{n-p+1} - b^{n-p+1})\right].$$

La quantité entre parenthèses est réductible à

$$(ab)^{n-p+1}(a^p - b^p)^2$$

D'ailleurs, $ab = -1$. Par suite,

$$u_n^2 - u_{n-p}u_{n+p} = \frac{1}{5}(-1)^{n-p+1}\left(\sqrt{5} \,.\, u_{p-1}\right)^2;$$

etc.

III. *Remarque.* — Selon que $p = 1$ ou n, l'égalité (2) se réduit à

$$u_n^2 - u_{n-1} \,.\, u_{n+1} = (-1)^n \text{ (*)}, \tag{3}$$

ou à

$$u_n^2 + u_{n-1}^2 = u_{2n}. \tag{4}$$

Celle-ci a été donnée par M. Édouard Lucas (**).

IV. *Généralisation.* — Soit une série récurrente :

$$u_1, \quad u_2, \; \ldots \; u_{n-2}, \quad u_{n-1}, \quad u_n, \; \ldots .$$

dans laquelle

$$u_n = \frac{2}{c}u_{n-1} + u_{n-2} \text{ (***)}. \tag{5}$$

Soient, conformément à la méthode connue :

$$a = \frac{1 + \sqrt{c^2 + 1}}{c}, \quad b = \frac{1 - \sqrt{c^2 + 1}}{c}.$$

(*) On suppose $u_0 = 1$, afin que la formule (2) s'accorde avec les expressions :

$$2^2 - 3 = 1, \quad 3^2 - 2 \,.\, 5 = -1, \ldots$$

(**) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. I, p. 74. Nous avons déjà cité le beau Mémoire dans lequel notre savant Collègue a développé quelques-unes des propriétés dont jouit la *série de Fibonacci*, ou *série de Lamé*.

(***) Lorsque $c = 1$, cette série est semblable à celle qui donne les *cosinus des multiples d'un arc* x.

Si les termes u_1, u_2 sont tels que l'on ait, en général,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}(a^{n+1} - b^{n+1}), \tag{5}$$

on trouve, comme dans la série de Lamé :

$$u_n^2 - u_{n-p}u_{n+p} = (-1)^{n-p+1}(u_{p-1})^2. \tag{2}$$

V. *Exemple.* — Soit $c = \frac{1}{2}$, de manière que

$$a = 2 + \sqrt{5}, \quad b = 2 - \sqrt{5}.$$

L'application de la formule (5) donne

$$u_1 = 16, \quad u_2 = 68;$$

après quoi l'on obtient, par la *loi de récurrence* (5) :

$$u_3 = 288, \quad u_4 = 1\,220, \quad u_5 = 5\,168, \quad u_6 = 21\,982, \quad u_7 = 92\,736, \ldots$$

D'après ces valeurs,

$$u_4^2 - u_1u_7 = u_2^2,$$

ou

$$1\,220^2 - 16\,.\,92\,736 = 68^2,$$

conformément à la relation (2).

Addition. — (*Août* 1886.)

VI. *Remarques.* — 1° Cette relation (2) exprime que :

Dans toute série récurrente, de la forme indiquée, la somme ou la différence des carrés de deux termes quelconques est égale au produit de deux autres termes.

2° *Si, dans la série de Lamé, on fait la somme des carrés de deux termes séparés par un nombre pair de termes, cette somme est un nombre composé* (*).

(*) Dans les *Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries* (1883), on trouvera d'autres propriétés de cette remarquable série.

CXC. — Sur la formule du binôme.

(*Décembre* 1879.)

I. Si, dans la formule principale de la Note LXVIII :

$$k^m + C_{m,1}k^{m-1} + \cdots + C_{m,p}k^{m-p} = (p+1)C_{m,p+1}(1+k)^m \int_0^k \frac{t^{m-p-1}dt}{(1+t)^{m+1}}, \quad (1)$$

on change k en $\frac{1}{x}$, elle devient

$$1 + C_{m,1}x + \cdots + C_{m,p}x^p = (p+1)C_{m,p+1}(1+x)^m \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{t^{m-p-1}dt}{(1+t)^{m+1}}; \quad (A)$$

et celle-ci, comme on le reconnaît facilement, équivaut à la formule de Poisson (*).

II. Si l'on suppose $x = 1$, on obtient

$$1 + C_{m,1} + C_{m,2} + \cdots + C_{m,p} = (p+1)C_{m,p+1} . 2^m \int_0^1 \frac{t^{m-p-1}dt}{(1+t)^{m+1}}; \quad (B)$$

et, inversement,

$$\int_0^1 \frac{t^{m-p-1}dt}{(1+t)^{m+1}} = \frac{1}{(p+1)C_{m,p+1} . 2^m}\left[1 + C_{m,1} + \cdots + C_{m,p}\right]. \quad (C)$$

Ainsi, *l'intégrale définie, contenue dans le premier membre, est la somme de* p + 1 *fractions fort simples, ayant même dénominateur* (**).

(*) *Note* LXVIII, équat. (1).

(**) M. *Bierens de Haan* donne (T. IV), d'*après Legendre :*

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \left(\frac{1}{2}\right)^a \sum_0^\infty \binom{b-a-1}{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{a+n},$$

le symbole $\binom{b-a-1}{a}$ représentant *le coefficient* n$^{\text{ième}}$ *de la puissance* (b — a — 1)$^{\text{ième}}$ *du binôme* (p. 22).

De là résulte, avec les notations habituelles,

$$\int_0^1 \frac{t^{m-p-1}dt}{(1+t)^{m+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-p} \sum_0^\infty C_{p,n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{m-p+n}.$$

Il ne m'a pas été possible de vérifier si cette formule est exacte. (Sept. 1886.)

III. *Remarque.* — Le développement en série, de $(1+t)^{-(m+1)}$, donne, au lieu de cette formule,

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^{m-p-2}dt}{(1+t)^{m+1}} &= \frac{1}{m-p} - C_{m+1,1}\frac{1}{m-p+1}\\ &+ C_{m+2,2}\frac{1}{m-p+2} - C_{m+3,3}\frac{1}{m-p+3}+\cdots\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Par conséquent, *si* p *est entier positif, la série* contenue dans le second membre *est sommable,* quoique peu convergente.

Exemple :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7.6}{1.2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{8.7.6}{1.2.3}+\cdots=\frac{26}{2^7.5}.$$

IV. Il semble, d'après la relation (A), que

$$1-C_{m,1}x+C_{m,2}x^2-\cdots\pm C_{m,p}x^p=(p+1)\,C_{m,p+1}(1-x)^m\int_0^{-\frac{1}{x}}\frac{t^{m-p-1}dt}{(1+t)^{m+1}};$$

mais cette formule est *inadmissible.* En effet, si x est compris entre 0 et 1, l'*intégrale* contenue dans le second membre *est,* presque toujours, *infinie.* Il nous faut donc chercher, directement, la valeur du premier membre.

A cet effet, soit

$$y=\left[1-C_{m,1}x+C_{m,2}x^2-\cdots\pm C_{m,p}x^p\right](1-x)^{-m}\ (^*); \qquad (2)$$

d'où, par un calcul facile :

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}(-x)^{m+1}y'=(1-x)&\left[-1+C_{m-1,1}x-C_{m-1,2}x^2-\cdots\pm C_{m-1,p-1}x^{p-1}\right]\\ +&\left[\ 1-C_{m,1}x\ +C_{m,2}x^2\ -\cdots\pm C_{m,p}x^p\right].\end{aligned}$$

Le second membre égale

$$\begin{array}{r|r|r|r|r} -1+C_{m-1,1} & x-C_{m-1,2} & x^2+\cdots\pm C_{m-1,p-1} & x^{p-1} & x^p;\\ +1 & -C_{m-1,1} & +\cdots\pm C_{m-1,p-2} & \mp C_{m-1,p-1} & \\ +1-C_{m,1} & +C_{m,2} & -\cdots\mp C_{m,p} & \pm C_{m,p} & \end{array}$$

(*) Les signes supérieurs, si p est *pair.*

ou, d'après la théorie des combinaisons (*) :

$$\pm\, C_{m-1,p}x^p.$$

Ainsi

$$y' = \pm\, mC_{m-1,p-1}\frac{x^p}{(1-x)^{m+1}};$$

puis

$$y = 1 \pm mC_{m-1,p-1}\int_0^x \frac{x^p dx}{(1-x)^{m+1}}\ (^{**}). \tag{3}$$

Par conséquent, la relation cherchée est

$$\left.\begin{aligned} &1 - C_{m,1}x + C_{m,2}x^2 - \cdots \pm C_{m,p}x^p \\ &= \left[1 \pm mC_{m-1,p}\int_0^x \frac{x^p dx}{(1-x)^{m+1}}\right](1-x)^m. \end{aligned}\right\} \tag{D}$$

V. *Remarques.* — 1° Inversement :

$$\int_0^x \frac{x^p dx}{(1-x)^{m+1}} = \pm\frac{1}{mC_{m-1,p}}\left\{\frac{1-C_{m,1}x+C_{m,2}x^2-\cdots\pm C_{m,p}x^p}{(1-x)^m} - 1\right\}; \tag{E}$$

et, si m est un *nombre entier*,

$$\int_0^x \frac{x^p dx}{(1-x)^{m+1}} = \frac{1}{mC_{m-1,p}}\frac{C_{m,p+1}x^{p+1}-C_{m,p+2}x^{p+2}+\cdots\pm x^m}{(1-x)^m}\ (^{***}). \tag{F}$$

2° Si l'on suppose

$$(1-x)^m = 1 - C_{m,1}x + C_{m,2}x^2 - \cdots \pm C_{m,p}x^p \mp R, \tag{4}$$

il résulte, de l'égalité (D) :

$$R = mC_{m-1,p}(1-x)^m\int_0^x \frac{x^p dx}{(1-x)^{m+1}}. \tag{5}$$

(*) *Cours d'Analyse*, p. 44.

(**) Si, dans la formule (2), on fait $x = 0$, on trouve $y = 1$.

(***) Par exemple,

$$\int_0^x \frac{xdx}{(1-x)^4} = \frac{1}{6}\frac{3x^2 - x^3}{(1-x)^3}.$$

Addition. — (*Août* 1886.)

VI. La formule (D) est en défaut quand $x=1$. Mais, quand il en est ainsi, le premier membre se réduit à $\pm C_{m-1,p}$ (*). Conséquemment : x *tendant vers* 1,

$$C_{m-1,p} = m C_{m-1,p} . \, lim \int_0^x \frac{t^p dt}{(1-t)^{m+1}} (1-x)^m,$$

ou

$$lim \int_0^x \frac{t^p dt}{(1-t)^{m+1}} (1-x)^m = \frac{1}{m} \, (^{**}). \tag{6}$$

Afin de vérifier ce résultat, j'observe que

$$\int_0^x \frac{t^p dt}{(1-t)^{m+1}} = \frac{1}{m} x^p (1-x)^{-m} - \frac{p}{m} \int_0^x \frac{t^{p-1} dt}{(1-t)^m};$$

puis

$$(1-x)^m \int_0^x \frac{t^p dt}{(1-t)^{m+1}} = \frac{1}{m} x^p - \frac{p}{m} \frac{\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{-m} dt}{(1-x)^{-m}}.$$

Si $x = 1$, la fraction prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Le rapport des dérivées des deux termes est, lorsque $t = x$:

$$\frac{1}{m} x^{p-1}(1-x).$$

Et comme cette quantité a pour limite zéro, la relation (6) est démontrée.

(*) Théorème de M. Genocchi (*Nouvelles Annales*, 1869, p. 132).

(**) Pour plus de clarté, nous avons substitué, dans la différentielle, t à x.

CXCI. — Problème de probabilités (*).

(*Mars* 1882.)

I. *Un bijoutier possède un diamant brut, dont la valeur est* a *francs. On lui annonce que ce diamant est brisé en* n *morceaux. Un amateur, qui ne les a pas pesés, propose de les acheter. Combien doit-il les payer?*

Un raisonnement fort simple, développé dans le *Traité* de M. H. Laurent (**), prouve que le prix demandé est donné par la formule

$$P = a\iint \ldots \left[(1 - y - z - \cdots)^2 + y^2 + z^2 + \cdots\right] dy dz \ldots, \quad (1)$$

dans laquelle les $n-1$ variables, *positives*, satisfont à la condition

$$y + z + \cdots \overline{\overline{<}}\, 1. \quad (2)$$

V étant l'intégrale multiple qu'il s'agit d'évaluer, soient :

$$\left.\begin{array}{ll} A = \iint \ldots dy\, dz, & B = \iint \ldots y\, dy\, dz, \ \ldots, \\ C = \iint \ldots y^2 dy\, dz \ldots, & D = \iint \ldots yz\, dy\, dz \ldots \end{array}\right\} \quad (3)$$

Il est visible que

$$V = A - 2(n-1)B + 2(n-1)C + (n-1)(n-2)D. \quad (4)$$

Mais, d'après la *formule de Dirichlet* :

$$\iint \ldots y^{b-1} z^{c-1} \ldots dy\, dz \ldots = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)\ldots}{\Gamma(1 + b + c + \cdots)}, \quad (5)$$

$$A = \frac{1}{\Gamma(n)}, \quad B = \frac{1}{\Gamma(n+1)}, \quad C = \frac{2}{\Gamma(n+2)}, \quad D = \frac{1}{\Gamma(n+2)}. \quad (6)$$

(*) Extrait de mon Cours à l'Université de Liège. La même question a été traitée, dans le *Journal de Battaglini* (avril 1886), par M. Ernest Cesàro.

(**) Page 134. C'est dans cet ouvrage que j'ai pris l'énoncé de la question.

Donc

$$V = \frac{1}{\Gamma(n)} + \frac{2(n-1)}{\Gamma(n+1)} + \frac{4(n-1)}{\Gamma(n+2)} + \frac{(n-1)(n-2)}{\Gamma(n+2)};$$

et, après quelques réductions

$$V = \frac{2n}{\Gamma(n+2)}, \tag{7}$$

ou

$$P = \frac{2na}{\Gamma(n+2)}. \tag{8}$$

II. Si l'on fait $n = 1, 2, 3, 4$, on obtient, au moyen de cette formule :

$$P = \frac{2}{3}a, \quad P = \frac{1}{4}a \ (^*), \quad P = \frac{1}{15}a, \ldots$$

III. *Remarque.* — D'après la formule (3), *l'intégrale*

$$\iint \cdots (x^2 + y^2 + z^2 + \cdots) dy dz \cdots = \frac{2n}{\Gamma(n+2)},$$

si la somme des n *variables, positives, est un.*

CXCII. — Sur une formule d'Abel.

(*Septembre* 1886.)

I. On trouve, dans les *Œuvres* (**) de l'illustre Géomètre norwégien, la relation, bien remarquable,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \cdots = \frac{1}{2a} + 2\int_0^\infty \frac{tdt}{(a^2+t^2)(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}. \tag{1}$$

Il en résulte celle-ci :

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} - \cdots = \frac{1}{2a^2} + 4a\int_0^\infty \frac{t4}{(a^2+t^2)^2(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}; \tag{A}$$

(*) Au lieu de cette valeur, M. Laurent indique celle-ci : $\frac{1}{12}$.

(**) Édition de Holmböe, tome II, page 50.

puis, en supposant, successivement, $a = 1$, $a = \frac{1}{2}$:

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{2} + 4\int_0^\infty \frac{tdt}{(1+t^2)^2(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}, \tag{2}$$

$$G = \frac{1}{2} + 2\int_0^\infty \frac{tdt}{(1+t^2)^2\left(e^{\frac{\pi}{2}t} + e^{-\frac{\pi}{2}t}\right)} (*). \tag{3}$$

II. Dans (A), changeons a en $a + 1$, puis ajoutons. Le résultat est

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{8}\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2}\right] &= a\int_0^\infty \frac{tdt}{(a^2+t^2)^2(e^{\pi t} - e^{-\pi t})} \\ &+ (a+1)\int_0^\infty \frac{tdt}{\left[(a+1)^2 + t^2\right](e^{\pi t} - e^{-\pi t})}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Le second membre peut être écrit ainsi :

$$\frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{tdt}{(1+t^2)^2(e^{\pi at} - e^{-\pi at})} + \frac{1}{a+1}\int_0^\infty \frac{tdt}{(1+t^2)^2\left[e^{\pi(a+1)t} - e^{-\pi(a+1)t}\right]}.$$

Par conséquent, l'égalité (4) devient

$$\frac{2a+1}{8a(a+1)} = \int_0^\infty \frac{tdt}{(1+t^2)^2}\left[\frac{a+1}{e^{\pi at} - e^{-\pi at}} + \frac{a}{e^{\pi(a+2)t} - e^{-(a+2)t}}\right]. \tag{5}$$

Pour simplifier celle-ci, je suppose $\frac{a+1}{a} = k + 1$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{k}$, k étant un *nombre entier*. La quantité entre parenthèses se réduit à

$$a\left[\frac{1 + (k+1)\left[e^{\pi kat} + e^{\pi(k-2)at} + \cdots e^{-\pi kat}\right]}{e^{\pi(k+1)at} - e^{-\pi(k+1)at}}\right].$$

Le premier membre égale $\frac{(k+2)k}{8(k+1)}$. Donc enfin :

$$\frac{(k+2)k^2}{8(k+1)} = \int_0^\infty \frac{tdt}{(1+t^2)^2} \frac{1 + (k+1)\left[e^{\pi t} + e^{\pi(1-2a)t} + \cdots + e^{-\pi t}\right]}{e^{\pi(1+a)t} - e^{-\pi(1+a)t}}. \tag{B}$$

(*) Par le changement de t en $\frac{t}{2}$.

Voici donc une nouvelle suite d'intégrales définies, d'apparence très complexe, dont les valeurs sont fort simples.

Par exemple :

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{(1+t^2)^2} \frac{2e^{\pi t}+1+2e^{-\pi t}}{e^{2\pi t}-e^{-2\pi t}} = \frac{3}{16},$$

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{(1+t^2)^2} \frac{3e^{\pi t}+4+3e^{-\pi t}}{e^{\frac{3}{2}\pi t}-e^{-\frac{3}{2}\pi t}} = \frac{2}{3},$$

etc.

CXCIII. — Sur le théorème de Fermat.

(*Septembre* 1886.)

I. Si, dans la relation due à Fermat :

$$a^{p-1} - 1 = \mathcal{M}(p) \text{ (*)}, \tag{1}$$

p *ne divise pas* a + 1, elle devient

$$a^{p-1} - 1 = \mathcal{M}[p(a+1)], \tag{2}$$

parce que le premier membre est divisible par $a+1$ (**) et que $a+1$ est premier avec p.

De même, *si* p *ne divise pas* a — 1 :

$$a^{p-1} - 1 = \mathcal{M}[p(a-1)]. \tag{3}$$

Enfin, *si* p *ne divise ni* a + 1 *ni* a — 1 (***) :

$$a^{p-1} - 1 = \mathcal{M}[p(a^2-1)]. \tag{A}$$

(*) On admet, une fois pour toutes, que *a est un nombre entier, non divisible par le nombre premier* p, *supérieur à* 2.

(**) En effet, ce premier membre s'annule quand on y remplace *a* par (— 1). D'ailleurs, on peut l'écrire ainsi :

$$(a+1)^{p-1} - C_{p-1,1}(a+1)^{p-2} + \cdots + C_{p-1,1}(a+1).$$

(***) Les *trois* conditions sont remplies si p *surpasse* a + 1.

II. Le premier membre, divisé par $a^2 - 1$, donne le quotient

$$a^{p-3} + a^{p-5} + \cdots + a^2 + 1.$$

Par conséquent,

$$1 + a^2 + a^4 + \cdots + a^{p-3} = \mathfrak{M}(p). \tag{B}$$

III. *Remarque.* — L'équation *indéterminée*

$$1 + a^2 + a^4 + \cdots + a^{p-3} = p$$

est vérifiée par $a = 2$, $p = 3$. Elle n'admet pas d'autre solution. En effet, si $a = 2$ et que p surpasse 3, le terme 2^{2-p} surpasse p. La même conclusion subsiste, à plus forte raison, si l'on suppose a supérieur à 2.

IV. Dans l'égalité

$$a^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}[p(a+1)], \tag{2}$$

prenons $a + 1$ égal à un nombre premier q (*). Elle prend la forme

$$(q-1)^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}(pq). \tag{4}$$

De même, *si* p *ne divise pas* q + 1 :

$$(q+1)^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}(pq). \tag{5}$$

Et si les *trois* conditions sont remplies :

$$(q+1)^{p-1} - (q-1)^{p-1} = \mathfrak{M}(pq). \tag{C}$$

Nous avons donc ce théorème :

Soient p, q *deux nombres premiers, impairs et inégaux. Si* p *ne divise pas* $q^2 - 1$, *la quantité*

$$(q+1)^{p-1} - (q-1)^{p-1}$$

est divisible par pq.

(*) D'après les hypothèses précédentes, p *ne divise ni* q *ni* q — 1.

V. Corollaire. — *Si* p *ne divise pas* $q^2 - 1$, *et si* q *ne divise pas* $p^2 - 1$, *on a, simultanément :*

$$(q+1)^{p-1}-(q-1)^{p-1}=\mathfrak{M}(pq),\quad (p+1)^{q-1}-(p-1)^{q-1}=\mathfrak{M}(pq).$$

VI. *Remarques.* — 1° Le premier membre de (C) est décomposable en

$$\left[(q+1)^{\frac{p-1}{2}}+(q-1)^{\frac{p-1}{2}}\right]\left[(q+1)^{\frac{p-1}{2}}-(q-1)^{\frac{p-1}{2}}\right].$$

De plus, $q+1$ et $q-1$ sont des nombres *pairs*, premiers avec pq. Par conséquent,

$$\left[\left(\frac{q+1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}}+\left(\frac{q-1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}}\right]\left[\left(\frac{q+1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}}-\left(\frac{q-1}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}}\right]=\mathfrak{M}(pq). \quad \text{(D)}$$

2° Ce premier membre égale aussi

$$2q[C_{p-1,1}\,.\,q^{p-3}+C_{p-1,3}\,.\,q^{p-5}+\cdots+C_{p-1,p-2}\,.].$$

Donc

$$C_{p-1,1}\,.\,q^{p-3}+C_{p-1,3}\,.\,q^{p-5}+\cdots+C_{p-1,p-2}=\mathfrak{M}(p)\ (*). \quad \text{(E)}$$

3° Il est visible (et connu) que :

$$C_{p-1,1}=\mathfrak{M}(p)-1,\quad C_{p-1,3}=\mathfrak{M}(p)-1,\ldots$$

Donc la relation (E) se réduit à

$$q^{p-3}+q^{p-5}+\cdots+q^2+1=\mathfrak{M}(p);$$

en sorte qu'elle est un cas particulier de (B).

(*) Par exemple,

$$C_{10,1}\,.\,7^8+C_{10,3}\,.\,7^6+C_{10,5}\,.\,7^4+C_{10,7}\,.\,7^2+C_{10,9}\,.=\mathfrak{M}(11),$$

ou

$$10\,.\,7^8+120\,.\,7^6+252\,.\,7^4+120\,.\,7^2+10=\mathfrak{M}(11).$$

Si, rejetant des multiples de 11, on remplace 7^2 par 5, 7^4 par 3, etc.; on a

$$10\,.\,9+120\,.\,4+252\,.\,3+120\,.\,5+10=\mathfrak{M}(11),$$

ou enfin

$$1\,936=\mathfrak{M}(11);$$

ce qui est vrai.

VII. *Résidus de puissances.* — Dans l'égalité

$$a^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}(p), \qquad (1)$$

supposons

$$p = 2^n - 1\ (^*), \quad a = 2.$$

Alors,

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{p-2} = \mathfrak{M}(p). \qquad (6)$$

Divisons, par p, chacun des termes du premier membre. Les n premiers restes, ou *résidus,* sont

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^{n-1};$$

et *ces résidus, dont la somme est* p, *se reproduisent dans le même ordre* (**).

Cela posé, remplaçons 2 par 2^k, k étant inférieur à n, et considérons les *dividendes :*

$$1,\ 2^k,\ 2^{2k},\ 2^{3k},\ \ldots\ 2^{(n-1)k}. \qquad (7)$$

Leurs résidus par p *sont, dans un certain ordre, les termes de la ligne* (7).

En effet, soit, s'il est possible,

$$2^{k\beta} - 2^{k\alpha} = \mathfrak{M}(p),$$

α, β étant inférieurs à n et inégaux. On tire, de cette égalité,

$$2^{k(\beta-\alpha)} - 1 = \mathfrak{M}(2^n - 1).$$

Ainsi, le P.G.C.D entre $2^{k(\beta-\alpha)} - 1$ et $2^n - 1$ serait $2^n - 1$. Mais, d'après une propriété connue, ce P.G.C.D est $2^\Delta - 1$, Δ étant le P.G.C.D entre les deux exposants : dans le cas actuel, $\Delta = 1$; etc.

VIII. *Application.* — Soient $n = 5$, $p = 31$. On trouve les résidus suivants :

$a = 2$:	1,	2,	4,	8,	16;
$a = 4$:	1,	4,	16,	2,	8;
$a = 8$:	1,	8,	2,	16,	4;
$a = 16$:	1,	16,	8,	4,	2.

(*) D'après une propriété évidente et connue, n *est premier.*

(**) En effet,

$$2^n = p + 1, \quad 2^{n+1} = \mathfrak{M}(p) + 2, \text{ etc.}$$

IX. *Remarque.* — La question que nous venons de traiter sommairement tient à la *théorie des nombres parfaits.* Si l'on suppose

$$n = 2,\quad 3,\quad 5,\quad 13,\ldots,$$

ou trouve

$$p = 3,\quad 7,\quad 31,\quad 8\,191,\ldots;$$

et ces nombres p sont facteurs des *nombres parfaits :*

$$6,\quad 28,\quad 8\,128,\quad 33\,550\,336,\ \ldots\ (^*).$$

X. *Carrés magiques.* — Si, dans un *tableau de résidus* (analogue à celui qui précède), on fait abstraction de la première colonne, on obtient une sorte de *carré magique,* dans lequel les colonnes et les lignes sont composées des mêmes termes.

Exemple (**) :

2	4	8	16	32	64
4	16	64	2	8	32
8	64	4	32	2	16
16	2	32	4	64	8
32	8	2	64	16	4
64	32	16	8	4	2

Dans la Note suivante, nous allons développer ce sujet.

(*) Terquem, *Nouvelles Annales,* 1844, p. 218. Tout récemment, suivant M. Édouard Lucas, M. *Seelhoff* a trouvé *un nouveau nombre parfait;* savoir :

$$1\,152\,921\,504\,606\,846\,976 \times 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951.$$

Voir *Mathesis* (Août 1886).

(**) Répondant à $p = 127$.

CXCIV. — Propriétés de résidus.

(*Septembre* 1877.)

I. *Résidus de puissances.* — Dans ses admirables (*) *Recherches arithmétiques,* Gauss a considéré *les résidus, par un nombre premier* p, *des* puissances successives d'un nombre entier a (**); savoir

$$1, \quad a, \quad a^2, \ldots a^n, \quad a^{n+1}, \ldots \tag{1}$$

donnant les résidus :

$$1, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \ldots \rho_n, \quad 1, \quad \rho_1, \ldots \tag{2}$$

de manière que a^{n+1} soit, après 1, le premier terme qui, divisé par p, donne le résidu 1.

On sait, au moins depuis Gauss, que $n+1$ divise $p-1$ (***). Mais l'illustre Auteur n'a pas considéré le cas où $n+1$ *est premier.*

II. Supposons qu'il en soit ainsi ; et, avec les dividendes

$$1, \quad a, \quad a^2, \ldots a^n, \tag{3}$$

prenons

$$1, \quad a^2, \quad a^4, \ldots a^{2n}, \tag{4}$$

$$1, \quad a^3, \quad a^6, \ldots a^{3n}, \tag{5}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$1, \quad a^k, \quad a^{2k}, \ldots a^{nk}; \tag{6}$$

k étant inférieur à $n+1$.

La ligne (4) est composée des termes de la ligne (1), pris de deux en deux ; la ligne (5) est composée des termes de la ligne (1), pris de trois en trois ; etc.

(*) *Admirables,* sauf les *dénominations* et la *notation.* Poullet-Delisle, traducteur de Gauss, dit qu'*elles peuvent étonner.* De son côté, Legendre s'est raillé des *expressions incongrues,* adoptées par le Géomètre de Brunswick (*). Mais Legendre et Delisle avaient des oreilles françaises.

(**) *Recherches arithmétiques,* p. 31. Je n'emploie ni la notation, ni les dénominations de Gauss.

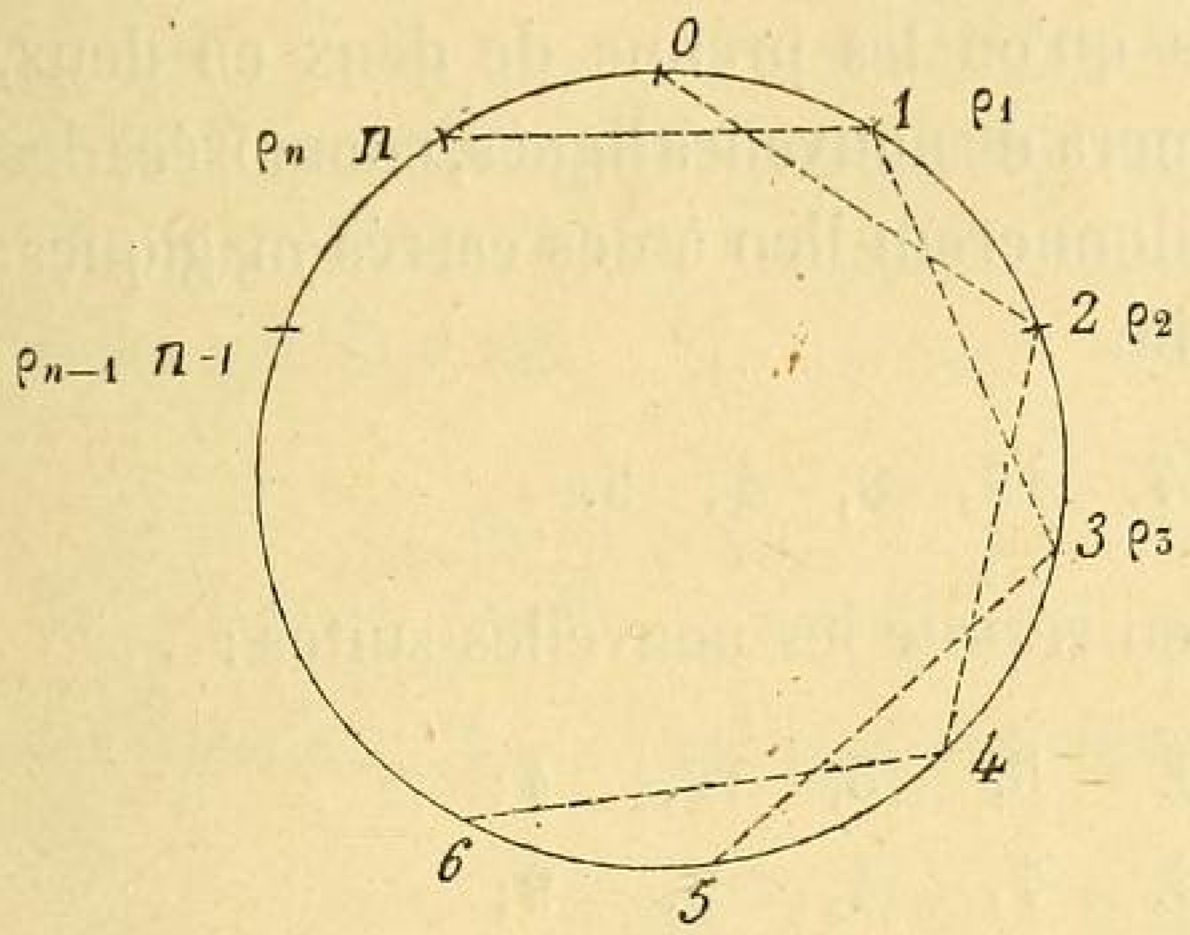
(***) *Recherches,* p. 32. On peut consulter aussi une *Note sur les fractions décimales périodiques,* publiée, en 1842, dans les *Nouvelles Annales.*

(*) *Recherches d'Analyse indéterminée,* p. 15 (1823).

Pour démontrer que toutes *ces suites donnent lieu aux résidus*

$$1, \ \rho_1, \ \rho_2, \cdots \rho_n,$$

pris dans un certain ordre; remplaçons la ligne (2) par une circonférence sur laquelle soient placés les résidus $1, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}, \rho_n$; puis, partant du point O, qui correspond à l'unité, joignons, de deux en deux, de trois en trois, ..., etc., les points de division. Chaque opération donne lieu à un polygone fermé (non convexe), dont les sommets sont, *dans un certain ordre,* les points 1, 2, 3, ... n ...(*).



III. *Application.* — Soient : $p = 31$, $n + 1 = 5$, $a = 4$. Les suites de résidus sont :

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 4, & 16, & 2, & 8; \\ 1, & 16, & 8, & 4, & 2; \\ 1, & 8, & 2, & 16, & 4; \\ 1, & 2, & 4, & 1, & 16. \end{array}$$

Si l'on supprime le résidu 1, on a le *carré magique :*

4	16	2	8
16	8	4	2
8	2	16	4
2	4	8	16

(*) Ce *tour* de démonstration est bien connu. Il vient d'être employé, avec avantage, par M. *Tarry,* dans la solution d'un problème relatif au *jeu de domino : De combien de manières peut-on placer, bout à bout, tous les dés, en observant la règle du jeu?* (Les *doubles* sont supprimés.)

IV. *Généralisation.* — Si l'on remplace les résidus 1, ρ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_n$, par $n+1$ nombres entiers inégaux :

$$1,\ a,\ b,\ c, \ldots f,\ g;$$

$n+1$ étant *premier,* puis qu'on les prenne de deux en deux, de trois en trois, ..., on formera de nouvelles lignes, composées des mêmes termes, lesquelles donneront lieu à des carrés magiques.

Soit, par exemple, la suite

$$1,\ 3,\ 7,\ 12,\ 9,\ 4,\ 5,$$

composée de 7 termes. Il en résulte les nouvelles suites :

$$\begin{array}{ccccccc}
1, & 7, & 9, & 5, & 3, & 12, & 4; \\
1, & 12, & 5, & 7, & 4, & 3, & 9; \\
1, & 9, & 3, & 4, & 7, & 5, & 12; \\
1, & 4, & 12, & 3, & 5, & 9, & 7; \\
1, & 5, & 4, & 9, & 12, & 7, & 3;
\end{array}$$

puis le carré suivant, au sujet duquel nous pourrions présenter diverses remarques (*) :

3	7	12	9	4	5
7	9	5	3	12	4
12	5	7	4	3	9
9	3	4	7	5	12
4	12	3	5	9	7
5	4	9	12	7	3

(*) Le lecteur voudra bien suppléer à ce que nous omettons, dans le dessein d'abréger.

CXCV. — Comparaison de deux séries (*).

(*Février* 1883.)

I. Théorème. — *Soient* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *des quantités positives, décroissantes. Soient* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *d'autres quantités positives, telles que l'on ait*

$$k_0 > \frac{v_1}{u_1} > k_1 > \frac{v_2}{u_2} > \cdots > k_{n-1} > \frac{v_n}{u_n} > k_n; \tag{1}$$

les limites $k_0, k_1, \ldots, k_n$ *étant positives et décroissantes. Si l'on fait*

$$S_n = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots \pm u_n, \tag{2}$$

$$\Sigma_n = v_1 - v_2 + v_3 - \cdots \pm v_n, \tag{3}$$

on aura

$$\Sigma_n > k_n S_n, \tag{A}$$

$$\Sigma_n < k_n S_n + (k_0 - k_n)u_1. \tag{B}$$

1° Des inégalités (1), on déduit :

$$v_1 > k_1 u_1, \quad -v_2 > -k_1 u_2, \quad v_3 > k_3 u_3, \ldots, v_n > k_n u_n \text{ (**)};$$

puis

$$\Sigma_n > k_1(u_1 - u_2) + k_3(u_3 - u_4) + \cdots + k_{n-2}(u_{n-2} - u_{n-1}) + k_n u_n.$$

Dans le second membre, tous les termes sont positifs. Donc, à plus forte raison,

$$\Sigma_n > k_n(u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + u_n),$$

ou

$$\Sigma_n > k_n S_n.$$

2° $v_1 < k_0 u_1, \quad -v_2 < -k_2 u_2, \quad v_3 < k_2 u_3, \ldots, v_n < k_{n-1} u_n;$

$$\Sigma_n < k_0 u_1 - k_2(u_2 - u_3) - \cdots - k_{n-1}(u_{n-1} - u_n).$$

(*) A propos d'un Mémoire de M. *Mansion*.

(**) Pour fixer les idées, je suppose n *impair*.

Dans le second membre, le premier terme, seul, est positif. De plus, on a

$$k_n[(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \cdots + (u_{n-1} - u_n)]$$
$$< k_2(u_2 - u_3) + k_4(u_4 - u_5) + \cdots + k_{n-1}(u_{n-1} - u_n).$$

Donc, par addition,

$$\Sigma_n + k_n(u_2 - u_3 + u_4 - \cdots + u_{n-1} - u_n) < k_0 u_1,$$

ou

$$\Sigma_n + k_n(u_1 - S_n) < k_0 u_1,$$

ou enfin

$$\Sigma_n < k_n S_n + (k_0 - k_n) u_1. \qquad \text{(B)}$$

II. *Remarques.* — 1° La différence entre les deux limites de Σ_n est $(k_0 - k_n)\, u_1$.

2° Cette différence est d'autant plus petite que les nombres k décroissent plus lentement.

3° Les nombres $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vont en diminuant.

4° *Si la série*

$$u_1 - u_2 + u_2 + \cdots$$

est convergente, la série

$$v_1 - v_2 + v_3 - \cdots$$

l'est également.

CXCVI. — Sur la théorie des ombilics.

(*Avril* 1883.)

I. La condition d'égalité entre les rayons principaux d'une surface est, avec les notations habituelles,

$$\left[(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2)\, t\right]^2 + 4(s^2 - rt)(1 + p^2 + q^2) = 0; \qquad (1)$$

relation dans laquelle on suppose

$$s^2 - rt < 0 \text{ (*)}. \qquad (2)$$

Poisson démontre que le premier membre est la somme de

(*) Voir, par exemple, l'*Analyse appliquée*, de Leroy.

deux carrés (*); mais la méthode qu'il emploie est *peu naturelle*. On peut la modifier comme il suit.

Regardons s comme une inconnue. Nous aurons

$$4As^2 + 4Bs + C = 0, \tag{3}$$

en posant :

$$A = (1 + p^2)(1 + q^2), \tag{4}$$

$$-B = pq[(1 + q^2)r + (1 + p^2)t], \tag{5}$$

$$C = \frac{B^2}{p^2q^2} - 4rt(1 + p^2 + q^2). \tag{6}$$

De l'équation (3), on tire

$$2s = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \tag{7}$$

Or,

$$\begin{aligned} B^2 - AC = {} & p^2q^2[(1 + q^2)^2r^2 + 2(1 + p^2)(1 + q^2)rt + (1 + p^2)^2t^2] \\ & -(1 + p^2)(1 + q^2)[(1 + q^2)^2r^2 + 2(1 + p^2)(1 + q^2)rt \\ & -4(1 + p^2 + q^2)rt + (1 + p^2)^2t^2]; \end{aligned}$$

ou, après quelques réductions faciles,

$$B^2 - AC = -(1 + p^2 + q^2)[(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]^2. \tag{8}$$

Cette expression étant négative (**), le premier membre de l'équation (3) est la somme de deux carrés; etc. (***).

II. *Une propriété numérique.* — Si l'on change de notation et que l'on fasse

$$N = (a^2 + c^2)^2f^2 - 2[(a^2 + b^2 + c^2)c^2 - a^2b^2]fg + (b^2 + c^2)^2g^2, \tag{9}$$

(*) *Loc. cit.*, p. 330.

(**) Excepté si

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{t}{1 + q^2}.$$

(***) Dès 1866, une démonstration, analogue à la précédente, a été donnée par MM. *Mister* et *Neuberg*, alors Professeurs au collège de Nivelles (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. V).

on a, *identiquement*,

$$\left.\begin{aligned}(a^2+c^2)^2\mathrm{N} = \{[(a^2+b^2+c^2)c^2 - a^2b^2]g - (a^2+c^2)^2f\}^2 \\ + 4a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)g^2.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Ainsi, *le produit* $(a^2+c^2)^2N$ *est une somme de quatre carrés.*

III. *Exemple.*

$$a=1,\quad b=3,\quad c=2,\quad f=1,\quad g=4.$$

On trouve :

$$N = 2\,353,\quad 25N = 163^2 + 48^2 + 96^2 + 144^2,$$

ou

$$25 \,.\, 2\,353 = 26\,569 + 2\,304 + 9\,216 + 20\,736;$$

ce qui est exact.

CXCVII. — Généralisation de propriétés de la cycloïde.

(*Juin* 1883.)

Théorème. — *Soit une courbe* Amb (*), *rapportée à des axes rectangulaires* Ax, Ay, *sur lesquels* b *se projette en* p, q. *Soit* mt *la tangente en un point quelconque de cette ligne,* t *étant le point d'intersection avec* Ax. *Si l'on construit le parallélogramme* mtAM, *le lieu du sommet* M *est une courbe* AMB, *transformée de* Amb (**). *Cela posé, si* B *est le point de* AMB, *correspondant au point* b *de* AmB :

1° *Les figures* Ambq, AMBq *sont équivalentes;*

2° *Si ces figures tournent autour de* Ax, *l'anneau engendré par la première équivaut à la moitié de l'anneau engendré par la seconde* (***).

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) On voit que la première courbe se déduit de la seconde, comme la cycloïde est déduite du cercle.

(***) Démonstration facile. Voir Mathesis, t. V, p. 185.

CXCVIII. — Lignes géodésiques d'un paraboloïde.

(*Mai* 1883.)

I. Soit le paraboloïde hyperbolique représenté par

$$z = xy. \tag{1}$$

En appliquant la méthode de *Joachimstal*, on trouve, comme équation différentielle des lignes géodésiques de cette surface :

$$\frac{d^2s}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dy} + \frac{xdx + ydy}{1 + x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Une intégrale première est

$$ds^2 = c(1 + x^2 + y^2)dxdy;$$

ou, à cause de

$$ds^2 = (1 + y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1 + x^2)dy^2 : \tag{3}$$

$$\frac{1 + y'^2 + (xy' + y)^2}{1 + x^2 + y^2)y'} = c. \tag{4}$$

II. L'équation générale des lignes géodésiques :

$$(1 + p^2 + q^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[r + 2s\frac{dy}{dx} + t\frac{dy^2}{dx^2}\right]\left(q - p\frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ (*)},$$

se réduit, dans le cas actuel, à

$$(1 + x^2 + y^2)y'' + 2(x - yy')y' = 0. \tag{5}$$

Cette équation (5) ne doit pas différer, au fond, de l'équation (2). Et puisque celle-ci admet l'intégrale (4), il en doit être de même pour l'équation (5).

En effet, si l'on différentie l'équation (4) et qu'on supprime le facteur

$$1 + y^2 - (1 + x^2)y'^2,$$

on trouve l'équation (5).

(*) Suivant l'usage, la même lettre s représente un *arc* et une *dérivée partielle*. Mais aucune confusion n'est possible.

Conséquemment, le premier membre de celle-ci devient une dérivée exacte, quand on le multiplie par la quantité

$$\frac{1+y^2-(1+x^2)y'^2}{(1+x^2+y^2)^2y'^2}.$$

CXCIX. — Problème d'Algèbre et d'Arithmétique.

(*Novembre* 1881.)

I. *Soit* p *un nombre premier, supérieur à* 2. *On forme la quantité*

$$X=\frac{x^p-1}{x-1}-(x-1)^{p-1},$$

réductible à Ppx, P *désignant un polynome entier, à coefficients entiers. Dans quel cas* P *est-il un carré* (*) ?

Lorsque $p=3$, on trouve $P=1$; et, lorsque $p=7$:

$$P=x^4-2x^3+3x^2-2x+1=(x^2-x+1)^2.$$

Soit, s'il est possible, $P=Q^2$ une autre solution du problème, de manière que

$$\frac{x^p-1}{x-1}-(x-1)^{p-1}=pxQ^2. \tag{1}$$

Si, dans cette égalité (1), on fait $x=2$, le polynôme Q devient un *nombre entier* N, et l'on a

$$2^p-2=2pN^2,$$

ou

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}=N^2. \tag{2}$$

Or, cette équation (2) n'est vérifiée que par

$$p=3,\quad N=1;\quad p=7,\quad N=3\ (^{**}).$$

(*) Cette question se rattache à la célèbre formule de Gauss :

$$4\frac{x^p-1}{x-1}=Y^2\pm pZ^2,$$

sur laquelle nous reviendrons.

(**) Mathesis, t. III, pp. 41 et 80.

Addition. — (*Septembre* 1886.)

II. Reprenons les égalités

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} - (x - 1)^{p-1} = \mathrm{P}px, \tag{3}$$

$$4\frac{x^p - 1}{x - 1} = \mathrm{Y}^2 \pm p\mathrm{Z}^2 \text{ (*)}. \tag{4}$$

Il en résulte

$$4[(x - 1)^{p-1} + \mathrm{P}px] = \mathrm{Y}^2 \pm p\mathrm{Z}^2,$$

ou

$$\mathrm{Y}^2 - 4(x - 1)^{p-1} = p[4\mathrm{P}x \mp \mathrm{Z}^2], \tag{5}$$

ou encore :

$$\left[\mathrm{Y} + 2(x - 1)^{\frac{p-1}{2}}\right]\left[\mathrm{Y} - 2(x - 1)^{\frac{p-1}{2}}\right] = p[4\mathrm{P}x \mp \mathrm{Z}^2]. \tag{6}$$

Tous les termes du second facteur sont divisibles par p (**). Donc

$$\frac{\mathrm{Y} - 2(x - 1)^{\frac{p-1}{2}}}{p} \quad \textit{divise} \quad 4\mathrm{P}x \mp \mathrm{Z}^2.$$

III. *Remarques.* — 1° *Si* $p = 4\mu - 1$, Y *est divisible par* $x - 1$ (***).

Donc, d'après l'égalité (5), $4\mathrm{P}x - \mathrm{Z}^2$ *est divisible par* $(x - 1)^2$.

2° Si $p = 4\mu + 1$ et que l'on suppose $x = 1$, la même relation prend la forme

$$\mathrm{B}^2 = p[4 + \mathrm{C}^2].$$

Mais $p = a^2 + b^2$; donc B *est une somme de deux carrés, divisible par* p. De plus,

$$4 + \mathrm{C}^2 = \mathcal{M}(p) \text{ (iv)}.$$

(*) On sait que le signe *supérieur* correspond au cas de $p = 4\mu - 1$.

(**) Propriété connue. Voir la *Théorie des Nombres*, de Legendre, t. II, p. 194.

(***) Propriété connue.

(iv) On peut consulter, relativement à cette question, le *Mémoire sur certaines décompositions en carrés.*

CC. — Sur un théorème de M. Delbœuf.

(*Septembre* 1886.)

I. Dans le dernier numéro de la *Revue scientifique,* le savant professeur à l'Université de Liège donne, sans démonstration, un *théorème sur la divisibilité des nombres,* que l'on peut énoncer ainsi :

Étant donné un nombre entier N, *on le décompose en deux parties* aa′, bb′ *telles, que les facteurs* a, b *soient premiers entre eux, et que les facteurs* a′, b′ *soient, aussi, premiers entre eux.*

D'autre part, x, x′ *étant deux nombres entiers, pris arbitrairement, on cherche quatre nombres entiers,* A, A′, B, B′, *satisfaisant aux conditions*

$$Aa + Bb = Nx, \quad A'a' + A'b' = Nx'.$$

Cela posé, on a

$$AA' + BB' = \mathfrak{M}(N).$$

Des relations

$$aa' + bb' = N, \quad Aa + Bb = Nx,$$

on déduit :

$$a(A - a'x) + b(B - b'x) = 0;$$

puis,

$$A = a'x + b\theta, \quad B = b'x - a\theta; \tag{1}$$

θ étant un entier quelconque, positif ou négatif.

De même,

$$A' = ax' + b'\theta', \quad B' = bx' - a'\theta'. \tag{2}$$

Par conséquent,

$$AA' + BB' = N(xx' + \theta\theta'). \tag{3}$$

II. *Remarque.* — Si $N = f^2 + g^2$ (*), prenons,

$$x' = x, \quad \theta' = \theta.$$

(*) Ce qui arrive, par exemple, lorsque N est un nombre premier $4\mu + 1$. Voir la Note précédente.

L'égalité (3) devient

$$AA' + BB' = (f^2 + g^2)(x^2 + \theta^2),$$

ou

$$AA' + BB' = (fx \pm g\theta)^2 + (f\theta \mp gx)^2. \qquad (4)$$

Ainsi, dans ce cas particulier, *la quantité* AA' + BB', *multiple de* N, *est une somme de deux carrés.*

III. *Exemple.*

$$N = 73, \quad a = 3, \quad b = 2, \quad a' = 5, \quad b' = 29, \quad x = 7.$$

On trouve :

$$A' = 21 + 29\theta, \quad B' = 14 - 5\theta, \quad A = 35 + 2\theta, \quad B = 205 - 3\theta;$$

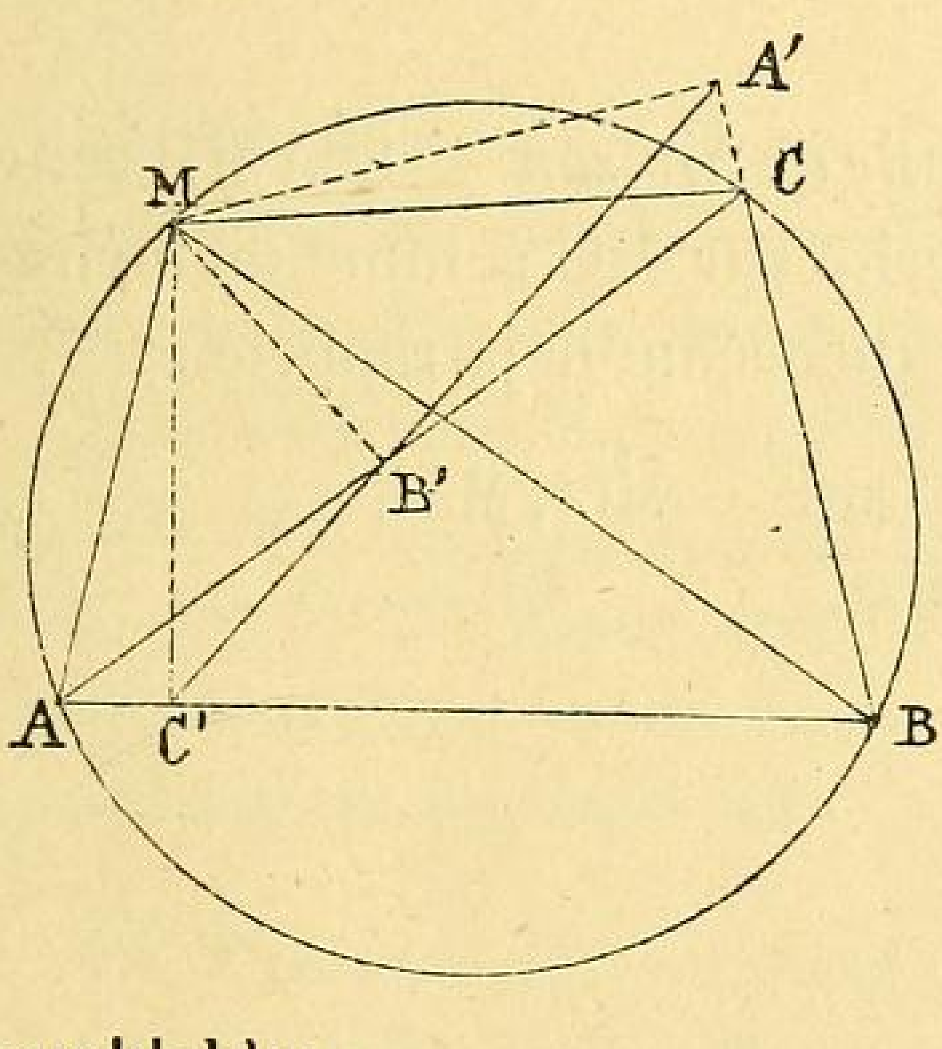
puis

$$AA' + BB' = 73(7^2 + \theta^2) = (56 \pm 3\theta)^2 + (21 \pm 8\theta)^2.$$

CCI. — Sur la droite de Simson.

(*Octobre* 1880.)

I. *Segments de la droite.*



1° Dans la figure ci-jointe(*), les triangles rectangles MAC', MCA' ont un angle aigu égal; donc ils sont semblables :

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MC'}{MA'}. \qquad (1)$$

2° Les triangles AMC, C'MA' ont un angle égal (AMC = C'MA'), compris entre deux côtés proportionnels (1°); donc ils sont semblables :

$$\frac{MA}{MC'} = \frac{MC}{MA'} = \frac{AC}{A'C'}. \qquad (2)$$

(*) Nous pensons qu'elle n'a pas besoin d'être expliquée.

3° Par un théorème connu,

$$MB \cdot MC = 2R \cdot MA',$$

ou

$$\frac{MC}{MA'} = \frac{2R}{MB};$$

R désignant le rayon.

4° La valeur commune des trois rapports (2) étant $\frac{2R}{MB}$, on a, en particulier,

$$A'C' = \frac{AC \cdot MB}{2R}. \qquad (3)$$

Telle est l'expression de la *droite de Simson,* limitée aux points A′, C′.

5° De même, par une simple permutation :

$$B'A' = \frac{BA \cdot MC}{2R}, \quad C'B' = \frac{CB \cdot MA}{2R}; \qquad (4)$$

valeurs des *segments.*

II. *Remarque.* — Des égalités (3), (4), on conclut

$$AC \cdot MB = BA \cdot MC + CB \cdot MA;$$

propriété connue.

III. *Distance du point* M *à la droite de Simson.* — Soit MP cette distance (*). La circonférence, décrite sur MC comme diamètre, passe en A′ et en B′. Donc, par le théorème déjà rappelé :

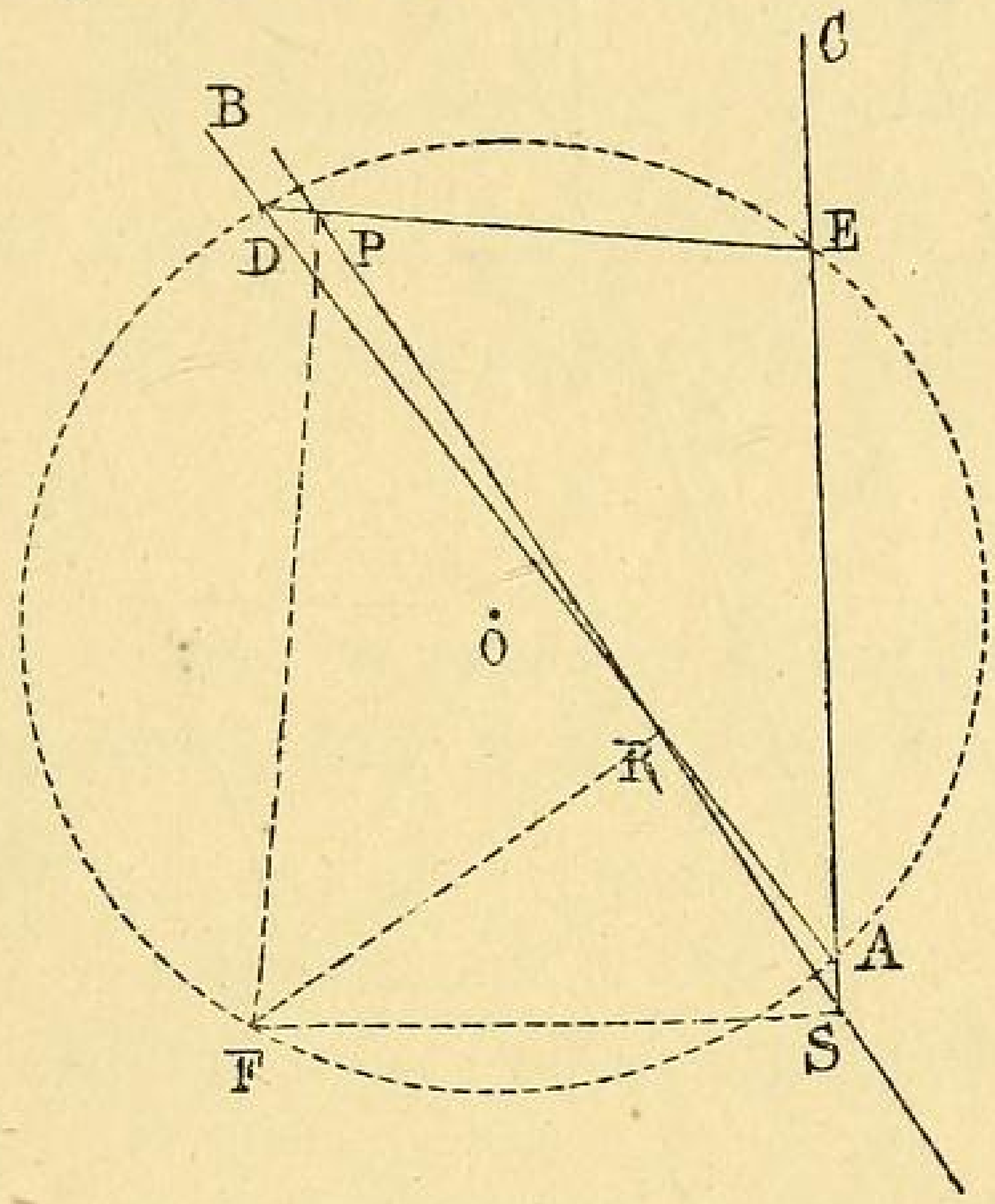
$$MP = \frac{MA' \cdot MB'}{MC} = \frac{MB' \cdot MC'}{MA} = \frac{MC' \cdot MA'}{MB}. \qquad (5)$$

(*) Non marquée sur la figure.

Addition. — (Février 1886.)

IV. Théorème I. — *On donne un angle* BAC *et un point* F. *Par les points* F, A, *on fait passer une circonférence* FADE. *Soit* P *la projection de* F *sur la corde* DE *déterminée par les côtés de l'angle. Soient, enfin,* R, S *les projections de* F *sur ces côtés. Le lieu du point* P *est la droite* RS.

En effet, les points A, E, D, F appartiennent à la circonférence; ADE est un triangle inscrit; etc.



V. *Remarques.* — 1° La *droite de Simson, lieu du point* P, est déterminée par le point F et l'angle BAC : elle est *indépendante* de la circonférence ADE.

2° Considérons la parabole ayant pour foyer F, et, pour tangente au sommet, la droite RS. La corde DE est perpendiculaire, en P, à la droite FP. Donc cette corde est tangente à la parabole. Autrement dit : *quand la circonférence* AF *varie, la corde* DE *enveloppe une parabole connue.*

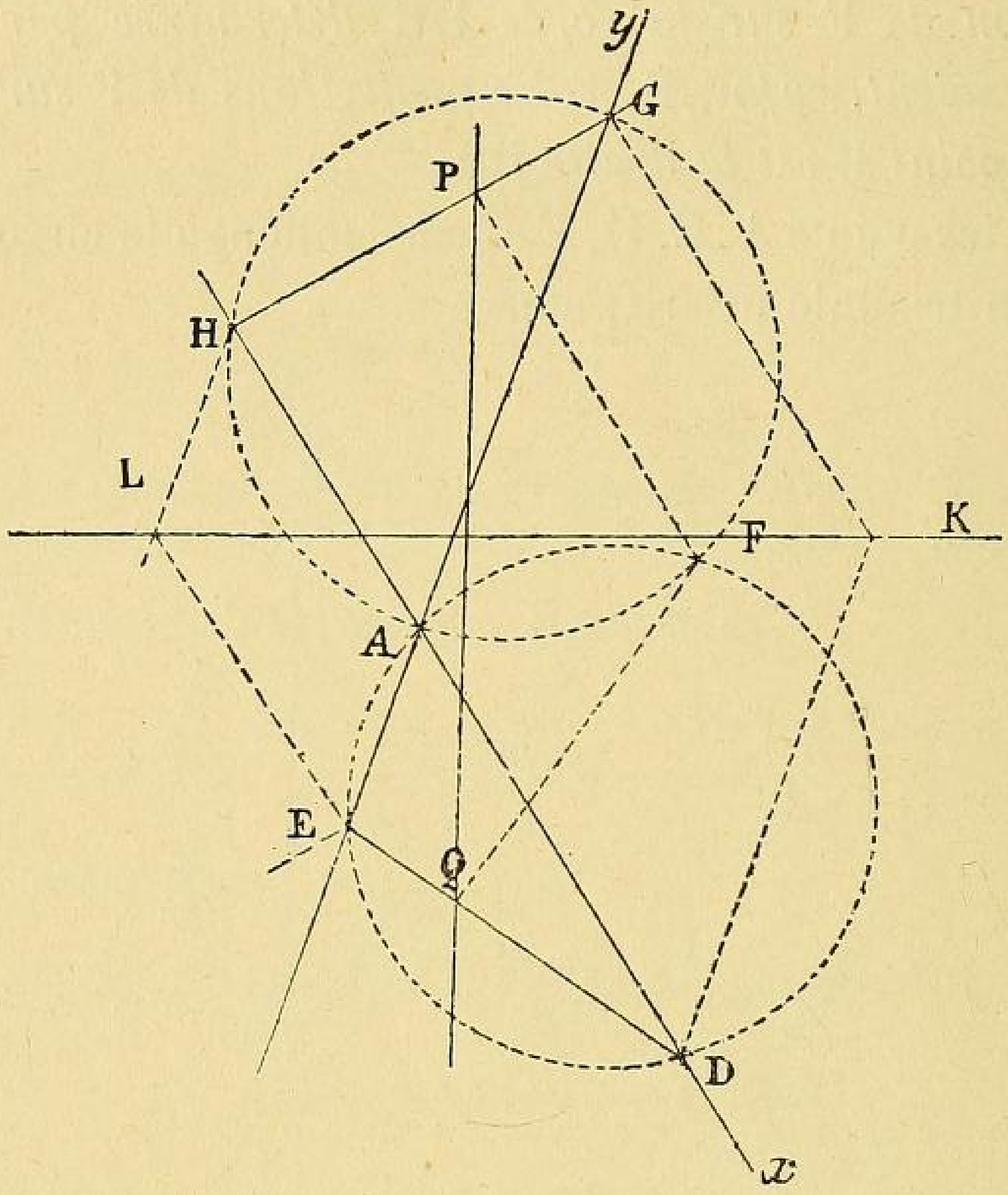
VI. Théorème II. — *Soient donnés un angle* xAy *et un point* F. *Soient* AFGH, AFDE *deux circonférences quelconques, passant en* A *et en* F, *et dont les cordes* GH, DE *déterminent* PQ, *droite de Simson* (*).

(*) Voir le théorème I.

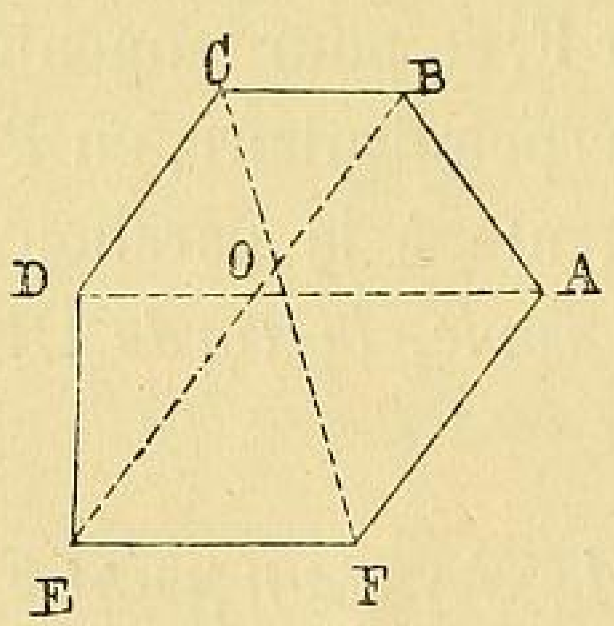
Si l'on construit les parallélogrammes GADK, EAHL, *et que l'on trace la droite* KL :

1° *Cette droite est perpendiculaire à* PQ;

2° *Elle contient le point de concours des cordes* DE, GE (*).



VII. *Remarque.* — L'*hexagone* GKDELH est décomposé en deux trapèzes GEDK, GELH, et en deux trapèzes HDKG, HDDL. Le théorème peut donc être énoncé ainsi :



Si un hexagone ABCDEF *est décomposé, de deux manières, en deux trapèzes :* 1° *les côtés opposés* AB, DE *se rencontrent sur la diagonale* CF; 2° *cette diagonale est perpendiculaire à la droite de Simson déterminée par les circonférences circonscrites aux triangles* AOB, DOE (**).

(*) Pour abréger, nous omettons la démonstration. Elle est fort simple si l'on prend, pour axes de coordonnées, les côtés de l'angle xAy.

(**) Le 1° est un cas particulier du théorème démontré à la page 251.

CCII. — Sur le quadrilatère inscrit.

(*Septembre* 1885.)

I. Théorème (*). — *Soit, dans un triangle* ABC, CF *la bissectrice intérieure, rencontrant, en* D, *la circonférence circonscrite. Soit* CG *la bissectrice extérieure, rencontrant, en* E, *la même circonférence. Soient* A′, B′, D′, F′ *les symétriques de* A, B, D, F, *relativement à* CG. *Soient* A″, B″, E″, G″ *les symétriques de* A, B, E, G, *relativement à* CD. *Les quatorze quadrilatères*

DA′F′B, DAF′B′, FA′BD′, FAD′B′, EA″G″B, EAF″B″, E″A″GB, E″AGB″, DEF′G, D′FFG, DE″P′G″, D′E″FG″, DF′EG, DFE″G

sont inscriptibles.

II. *Remarque.* — Si l'on opère de même sur les angles A, B, on aura donc *quarante-deux* quadrilatères inscriptibles, déduits du triangle ABC.

Addition. — (*Septembre* 1886.)

III. Théorème. — *Soit* ABCD *un quadrilatère inscrit. Si l'on projette un des sommets sur les côtés opposés à ce sommet, la distance des deux projections est constante.*

Dans la première figure de la Note CCI, remplaçons M par D. L'équation (3) devient

$$D'D'' = \frac{AC \, . \, BD}{2R};$$

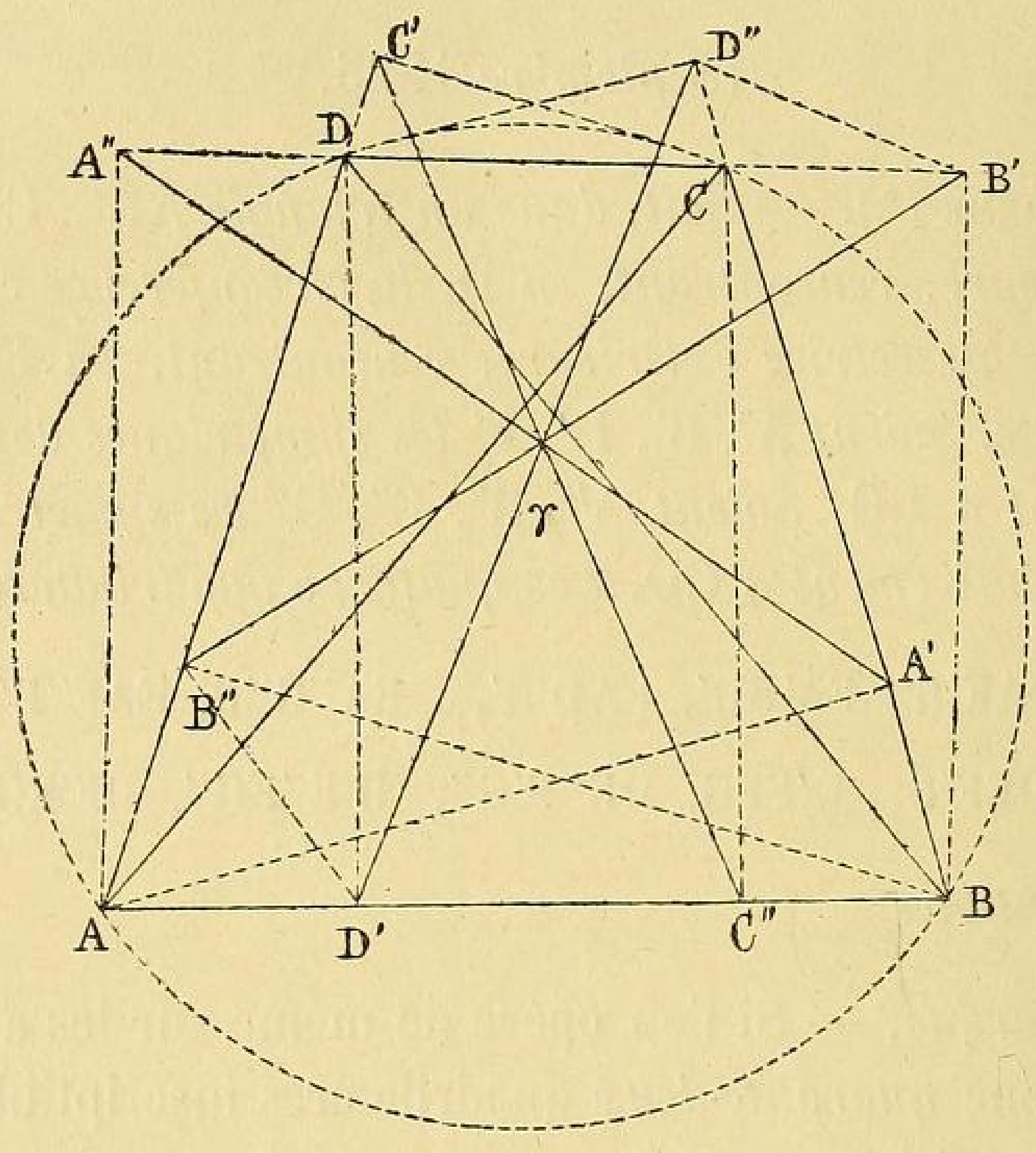
et celle-ci exprime le théorème énoncé; c'est-à-dire que

$$A'A'' = B'B'' = C'C'' = D'D''.$$

IV. Remarques. — 1° *Chacune de ces quatre distances est une*

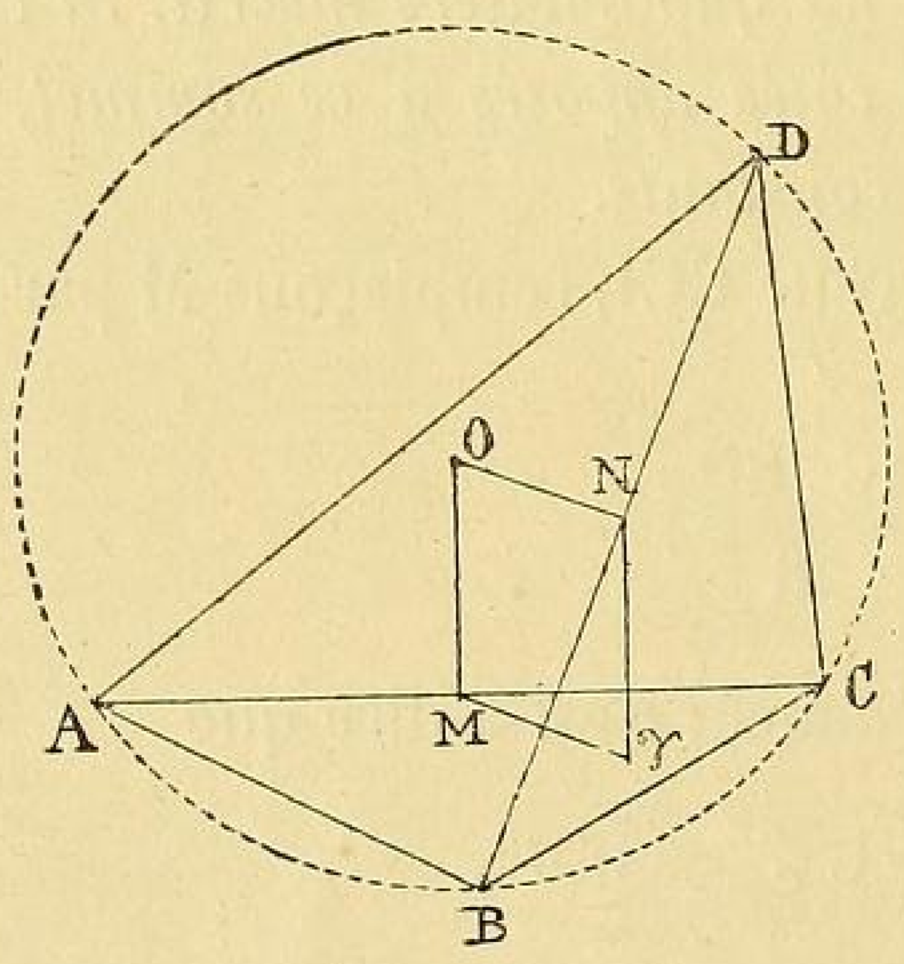
(*) A peu près évident. Proposé dans *Mathesis*. Le lecteur est prié de faire la figure.

quatrième proportionnelle aux diagonales du quadrilatère et au diamètre du cercle circonscrit.



2° A'A'' *est la droite de Simson, relative au sommet* A *et au triangle* BCD. De même pour B'B'', C'C'', D'D''.

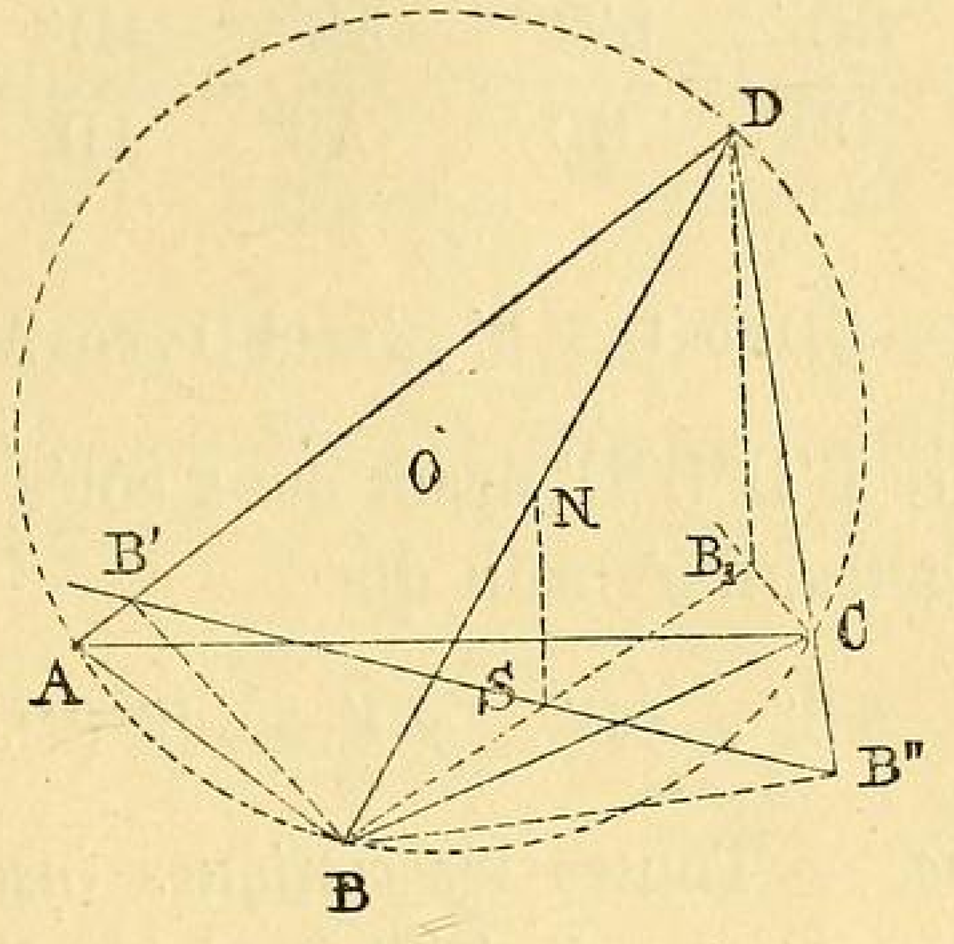
V. *Un point remarquable.* — ABCD étant un quadrilatère inscrit; soient Mγ la perpendiculaire à BD, menée par le milieu M de AC, et Nγ la perpendiculaire à AC, menée par le milieu N de BD. Le point γ, où se coupent ces deux perpendiculaires(*), jouit de quelques propriétés intéressantes.



1° *Le point* γ *est le centre de symétrie du quadrilatère* ABCD *et du quadrilatère* $A_1B_1C_1D_1$

(*) Autrement dit, le point γ est le quatrième sommet du parallélogramme déterminé par le *centre* O et les *distances* OM, ON. De là résulte que, *pour tous les quadrilatères ayant même* CENTRE O *et mêmes directions* *ayant pour sommets les* ORTHOCENTRES *des triangles* BCD, ACD, ABD, ABC (*).

B_1 étant l'orthocentre de ACD, soit S le centre de symétrie dont il s'agit : il est le milieu de BB_1. La droite NS est parallèle à BB_1 et égale à la moitié de BB_1. Mais cette dernière droite est,



par hypothèse, perpendiculaire à la diagonale AC; donc NS est perpendiculaire à cette diagonale. Comme le centre S est *unique*, il coïncide avec γ.

2° *Le point γ est l'intersection commune des droites* A'A'', B'B'', C'C'', D'D'', *déterminées par les projections de* A, B, C, D *sur les côtés du quadrilatère* (**).

Considérons la droite B'B''. Relativement au point B et au triangle ADC, elle est la *droite de Simson*. D'après un théorème connu (***), cette droite B'B'' contient le milieu de BB_1; c'est-à-dire le point γ.

3° *Le point γ est le centre commun de deux circonférences sur lesquelles sont situées, quatre à quatre, les huit projections* A', A'', B', ...

de diagonales, le point γ est invariable. En outre, d'après la première définition, *le point γ est invariable,* aussi, *pour toutes les coniques circonscrites à un quadrilatère donné.*

(*) *Théorèmes et Problèmes,* p. 40.

(**) Voir page 349. Cette propriété a été signalée par M. Émile Lemoine, en 1869 (*Nouvelles Annales,* p. 47).

(***) *Théorèmes et Problèmes,* p. 37.

Dans la première figure de la page 350, les points B', D'', B'', D' appartiennent à la circonférence décrite sur BD comme diamètre (*). Traçons B'D'', B''D'. Nous aurons

$$CB' . CD = CD'' . CB, \quad AB'' . AD = AD' . AB,$$

ou

$$\frac{CB'}{CB} = \frac{CD''}{CD} = \frac{B'D''}{BD}, \quad \frac{AB''}{AB} = \frac{AD'}{AD} = \frac{B''D'}{BD}.$$

Donc

$$B'D'' = -BD\cos C, \quad B''D' = BD . \cos A \cdot = B'D''.$$

Le quadrilatère B'D''B''D' ayant deux côtés opposés égaux et les diagonales égales, il s'ensuit que

$$\gamma B'' = \gamma D'', \quad \gamma D' = \gamma B' \ (^{**}).$$

VI. *Remarque.* — Toutes les *coniques inscrites au quadrilatère* ABCD admettent une *droite invariable,* lieu des centres de ces lignes (***) : c'est la droite MN. Toutes les *coniques circonscrites* à ce quadrilatère admettent un *point invariable :* c'est le point γ (IV).

CCIII. — Sur un théorème de Gauss (V).

(*Janvier* 1885.)

I. Dans l'égalité

$$4\frac{x^p - 1}{x - 1} = Y^2 \pm pZ^2, \tag{1}$$

qui exprime ce beau théorème, changeons x en x^q, q étant un

(*) A cause des quatre angles droits.

(**) Pour achever la démonstration, on peut, par exemple, considérer la circonférence passant par les sommets B', D'', B'', et employer la *réduction à l'absurde.*

(***) Théorème de Newton.

(IV) On pourra, peut-être, utiliser ce rapprochement, sur lequel nous n'insistons pas.

(V) Complément à la *Note* CXCIX.

nombre premier impair, différent de p. Soient Y_1, Z_1 les résultats de la substitution dans Y, Z. Nous avons

$$4\frac{x^{pq}-1}{x^q-1}=Y_1^2 \pm pZ_1^2; \tag{2}$$

puis, par division,

$$\frac{(x-1)(x^{pq}-1)}{(x^p-1)(x^q-1)}=\frac{Y_1^2 \pm pZ_1^2}{Y^2 \pm pZ^2}. \tag{3}$$

Dans la Note intitulée : *Remarques sur l'équation* $x^m - 1 = 0$ (*), j'ai démontré que le premier membre est un polynôme entier X, dont les coefficients sont $+1$, -1 ou 0 (**). Donc

$$\frac{Y_1^2 \pm pZ^2}{Y^2 \pm pZ^2}=X; \tag{4}$$

et aussi :

$$\frac{Y_1^2 - XY^2}{Z_1^2 - XZ^2}=\mp p. \tag{5}$$

Ainsi : 1° quelle que soit la valeur attribuée à x (***), le premier membre se réduit à $-p$ ou à $+p$; 2° *tous les coefficients du polynôme*

$$Y_1^2 - XY^2$$

sont divisibles par p; 3° si l'on fait la division, ce polynôme devient $\pm(Z_1^2 - XZ^2)$.

(*) *Bulletin de l'Académie*, mars 1870.

(**) La formation de X est fort simple. Voir la Note citée. Pour abréger, nous ne faisons pas d'applications. Le lecteur pourra, par exemple, supposer

$$p=7,\quad q=5;$$

valeurs d'où résulte

$$X = x^{24} - x^{23} + x^{19} - x^{18} + x^{17} - x^{16} + x^{14} - x^{13} + x^{12} - x^{11} + x^{10} - x^8 + x^7 - x^6 + x^5 - x + 1.$$

(*Loc. cit.*).

(***) Il y a exception pour $x = 1$: la fraction prend la forme $\frac{0}{0}$.

Addition. — (*Octobre* 1886.)

II. Par analogie avec l'égalité (1), prenons

$$4\frac{x^q-1}{x-1}=U^2\pm qV^2. \tag{6}$$

Soient U_1, V_1 ce que deviennent les polynômes U, V quand on y remplace x par x^p. Nous aurons l'équation *conjuguée* de (2) :

$$4\frac{x^{pq}-1}{x^p-1}=U_1^2\pm qV_1^2; \tag{7}$$

puis, au lieu de l'égalité (4) :

$$\frac{Y_1^2\pm pZ_1^2}{Y^2\pm pZ^2}=\frac{U_1^2\pm qV_1^2}{U^2\pm qV^2}=X. \tag{8}$$

Ainsi, *les deux fractions sont réductibles à un même polynôme entier* (*).

CCIV. — Sur une suite de fractions.

(*Juillet* 1881.)

Problème (**). — *Au moyen de deux fractions* $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, *on forme celles-ci :*

$$\frac{c}{c'}=\frac{a+b}{a'+b'},\quad \frac{d}{d'}=\frac{b+c}{b'+c'},\dots$$

Vers quelle limite tendent-elles?

$\frac{u_n}{v_n}$ étant la $n^{\text{ième}}$ fraction, on a

$$n_n=u_{n-1}+u_{n-2},\quad v_n=v_{n-1}+v_{n-2}.$$

(*) Dans chacune de ces fractions, on prend le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que le nombre premier correspondant a la forme $4\mu-1$ ou la forme $4\mu+1$ (LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, t. II, p. 195).

(**) Proposé par mon Collègue E. *Morren*, en 1868. La question, paraît-il, se rencontre en Botanique.

La méthode connue donne

$$u_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

$$v_n = A'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + B'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Par conséquent,

$$lim\,\frac{u_n}{v_n} = \frac{A}{A'}.$$

Or :

$$A + B = a,\quad A + B + (A - B)\sqrt{5} = 2b,$$

$$A' + B' = a',\quad A' + B' + (A' - B')\sqrt{5} = 2b'.$$

Donc :

$$2A\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)a + 2b,\quad 2A'\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)a' + 2b;$$

et enfin :

$$lim\,\frac{u_n}{v_n} = \frac{(\sqrt{5} - 1)a + 2b}{(\sqrt{5} - 1)a' + 2b'}.$$

CCV. — Trigonométrie sphérique. (1862.)

Théorème. — *Si un angle trièdre a pour faces un carré, un hexagone régulier et un décagone régulier, la somme des angles dièdres égale cinq angles droits* (*).

(*) Ce théorème, ou plutôt cette *remarque*, provient du *Mémoire sur la théorie des polyèdres* (Journal de l'École polytechnique, 41e Cahier).

CCVI. — Une application des déterminants.

(*Juin* 1881.)

I. Théorème I. — Soient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_n, \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_n, \\ . & . & . & . \\ l_1, & l_2, & \dots, & l_n \end{vmatrix}, \tag{1}$$

$$A = \sum a^2, \quad B = \sum b^2, \dots, \; L = \sum l^2. \tag{2}$$

S'il existe, entre les n^2 *quantités*

$$a_1, \quad a_2, \dots a_n, \quad b_1, \quad b_2, \dots b_n, \dots, \quad l_1, \quad l_2, \dots l_n,$$

les $\frac{n(n-1)}{2}$ *relations*

$$\sum ab = 0, \quad \sum ac = 0, \; \dots, \; \sum bc = 0, \; \dots, \tag{3}$$

le carré du déterminant Δ *est donné par la formule :*

$$\Delta^2 = ABC \dots L. \tag{4}$$

Cette proposition, que j'ai démontrée il y a quarante-sept ans (*) peut l'être, assez simplement, au moyen du théorème de Cauchy, sur le produit de deux déterminants (**).

II. Problème I. — *Trouver un carré égal au produit de* n *sommes de* n *carrés.*

(*) *Mémoire sur la transformation des variables...* (Acad. de Bruxelles, Mémoires couronnés, 1840, p. 17).

(**) Voir, par exemple, la *Théorie des déterminants,* par M. Dostor, p. 74. Le savant Professeur développe les valeurs *générales* de Δ^2, relatives aux cas de $n = 2$ et de $n = 3$; mais, chose singulière, il n'a pas songé, semble-t-il, à la réduction remarquable qu'éprouvent ces valeurs, lorsque les conditions (3) sont remplies. Autrement dit, M. Dostor ne signale pas la formule (4).

La solution résulte, *spontanément*, du Théorème I. Il suffira, dans chaque cas particulier, de trouver des *entiers, positifs ou négatifs*, satisfaisant aux équations (3), lesquelles, à partir de $n=3$, sont en nombre supérieur à celui des inconnues (*).

III. *Application.* — Soit $n=3$. Les équations à résoudre sont

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0,\quad a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0,$$
$$b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0.$$

Après quelques tâtonnements, on trouve qu'elles sont vérifiées par :

$$a_1=1,\quad a_2=3,\quad a_3=-2,\quad b_1=2,\quad b_2=4,\quad b_3=7,$$
$$c_1=-29,\quad c_2=11,\quad c_3=2.$$

On a donc

$$\Delta^2=(1^2+3^2+2^2)(2^2+4^2+7^2)(29^2+11^2+2^2)$$
$$=14.69.966.$$

En effet :

$$\Delta=\begin{vmatrix}1, & 3, & -2\\ 2, & 4, & 7\\ -29, & 11, & 2\end{vmatrix}=1(8-77)+2(-22-6)-29(21+8)$$
$$=-966;$$

puis

$$966^2=14.69.966.$$

Addition. — (*Octobre* 1886.)

IV. *Autre application.* — Soit $n=4$, auquel cas les équations (3) sont

$$\sum ab=0,\quad \sum ac=0,\quad \sum ad=0,\quad \sum bc=0,\quad \sum bd=0,\quad \sum cd=0.$$

(*) Les calculs nécessités par cette question incidente nous semblent plus longs que difficiles.

Dans les trois premières, je prends, arbitrairement :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad b_1 = 3, \quad b_2 = 1, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = -1. \quad (5)$$

Elles deviennent

$$a_3 b_3 + a_4 b_4 = -5, \quad b_3 c_3 + b_4 c_4 = -5, \quad a_3 c_3 + a_4 c_4 = 0;$$

puis, si

$$a_3 = 0, \quad c_4 = 0: \quad (6)$$

$$a_4 b_4 = -5, \quad b_3 c_3 = -5.$$

On satisfait à ces deux-ci par ces valeurs simples :

$$a_4 = 5, \quad b_4 = -1, \quad b_3 = -5, \quad c_3 = 1. \quad (7)$$

Cela fait, on doit résoudre les équations

$$d_1 + 2d_2 + 5d_4 = 0, \quad 3d_1 + d_2 - 5d_3 - d_4 = 0,$$
$$2d_1 - d_2 + d_3 = 0.$$

On en conclut :

$$16d_1 + 7d_2 - 25d_3 = 0, \quad 50d_1 - 18d_3 = 0;$$

puis, par exemple :

$$d_1 = 3, \quad d_2 = 11, \quad d_3 = 5, \quad d_4 = -5. \quad (8)$$

D'après les systèmes (5), (6), (7), (8) :

$$\Delta^2 = (1^2 + 2^2 + 5^2)(3^2 + 1^2 + 5^2 + 1^2)(2^2 + 1^2 + 1^2)(3^2 + 11^2 + 5^2 + 5^2)$$
$$= 30 . 36 . 6 . 180 = 180^2 . 6^2 = 1\,080^2.$$

D'un autre côté :

$$\pm \Delta = \begin{vmatrix} 0, & 5, & 1, & 2 \\ -5, & -1, & 3, & 1 \\ 1, & 0, & 2, & -1 \\ 5, & -5, & 3, & 11 \end{vmatrix} = 5\Delta_2 + \Delta_3 - 5\Delta_4;$$

en supposant :

$$\Delta_2 = 5(22 + 3) - 5(-1 - 4) = 150,$$
$$\Delta_3 = 5 . 30 - (6 - 11) - 5(1 - 6) = 180,$$
$$\Delta_4 = 5(-5) - 5 = -30.$$

Ainsi :

$$\pm \Delta = 750 + 180 + 150 = 1\,080.$$

V. Théorème II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le Théorème* I; *si l'on fait*

$$\Delta = a_1 D_1 + a_2 D_2 + \cdots + a_n D_n \text{ (*)},$$

on a

$$\Delta^2 = A(D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2) \text{ (**)}. \qquad (9)$$

VI. Problème II. — *Trouver un carré égal au produit d'une somme de* n *carrés par une somme de* n *carrés.*

La solution est contenue dans l'égalité (9). Soient, par exemple, comme au paragraphe IV :

$$\begin{array}{llll} a_1 = 1, & a_2 = 2, & a_3 = 0, & a_4 = 5, \\ b_1 = 3, & b_2 = 1, & b_3 = -5, & b_4 = -1, \\ c_1 = 2, & c_2 = -1, & c_3 = 1, & c_4 = 0, \\ d_1 = 3, & d_2 = 11, & d_3 = 5, & d_4 = -5. \end{array}$$

On trouve :

$$D_1 = 36, \quad D_2 = 72, \quad D_3 = 0, \quad D_4 = 180.$$

Conséquemment,

$$1080^2 = (1^2 + 2^2 + 5^2)(36^2 + 72^2 + 180^2) = 30 \,.\, 38\,880;$$

ce qui a lieu.

(*) Les déterminants D_1, D_2, ..., D_n sont ceux qui entrent, en *numérateur,* dans les formules de Cramer.

(**) Cette relation est une conséquence immédiate des formules

$$\Delta^2 = ABC \ldots L,$$
$$D_1^2 + D_2^2 + \cdot + D_n^2 = BC \ldots L,$$

données à l'endroit cité. En 1839, je ne m'en étais pas aperçu !

CCVII. — Sur un article de M. Perott (*).

(*Juillet* 1881.)

I. L'Auteur cherche, en premier lieu, $\sum_1^N \varphi(k)$. A cet effet, par des considérations un peu détournées, il trouve l'égalité

$$2\sum_1^N \varphi(k) = 1 + \sum_1^N \varphi(N, k), \tag{1}$$

dans laquelle $\varphi(N, k)$ est la *quotité des nombres premiers à* k *et non supérieurs à* N. On peut l'établir comme il suit.

Prenons, successivement, les nombres premiers à k et non supérieurs à 12.

Nous formerons le tableau ci-dessous.

k		$\varphi(k)$
1	1	1
2	1	1
3	1, 2	2
4	1, 3	2
5	1, 2, 3, 4	4
6	1, 5	2
7	1, 2, 3, 4, 5, 6	6
8	1, 3, 5, 7	4
9	1, 2, 4, 5, 7, 8	6
10	1, 3, 7, 9	4
11	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	10
12	1, 5, 7, 11	4

(*) *Bulletin de Darboux*, 1881, p. 37.

Considérons, pour fixer les idées, le nombre 5, qui est premier avec 6, 7, 8, 9, 11 et 12. Si, avec ces six nombres, on prend 1, 2, 3, 4, on aura tous *les nombres premiers à* 5, *et non supérieurs à* 12; c'est-à-dire que l'on a écrit autant de termes que l'indique $\varphi(12, 5)$. Et comme $4 = \varphi(5)$, le tableau contient 5, un nombre de fois égal à

$$\varphi(12, 5) - \varphi(5).$$

En général, le nombre k, inférieur à 12, est écrit autant de fois que l'indique

$$\varphi(12, k) - \varphi(k).$$

Le nombre total des termes du tableau, ou $\sum_1^{12} \varphi(k)$, est donc

$$\sum_1^{12} \varphi(12, k) - \sum_1^{12} \varphi(k).$$

Mais il y a exception pour le terme 1.

Conséquemment,

$$2\sum_1^{12} \varphi(k) = 1 + \sum_1^{12} \varphi(12, k);$$

etc.

II. M. Perott écrit la relation connue :

$$\varphi(N, k) = N - \sum \left(\frac{N}{a}\right) + \sum \left(\frac{N}{ab}\right) - \sum \left(\frac{N}{abc}\right) + \cdots, \tag{2}$$

dans laquelle $a, b, c, \ldots$ *sont les facteurs premiers de* k (*).

Il trouve ensuite cette formule remarquable :

$$2\sum_1^N \varphi(k) = 1 + N^2 - \sum \left[\left(\frac{N}{a}\right)\right]^2 + \sum \left[\left(\frac{N}{ab}\right)\right]^2 - \cdots; \tag{3}$$

$a, b, c, \ldots$ étant, cette fois, *les nombres premiers qui ne surpassent pas* N (**).

(*) *Mélanges mathématiques*, 1re édition (1868), p. 134. J'ai changé les notations de l'Auteur.

(**) Comme d'habitude, on ne compte pas l'unité.

Divisant par N^2, et faisant croître N indéfiniment, on a

$$2\, lim \frac{\sum_1^N \varphi(k)}{N^2} = 1 - \sum \left[\frac{1}{a}\right]^2 + \sum \left[\frac{1}{ab}\right]^2 - \sum \left[\frac{1}{abc}\right]^2 + \cdots,$$

ou

$$lim = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)\left(1 - \frac{1}{c^2}\right)\cdots; \quad (4)$$

$a, b, c, \ldots$ étant *tous les nombres premiers* : 2, 3, 5, 7, 11, ...

Euler (non cité par l'Auteur), a prouvé que

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{48}{49}\cdots = \frac{6}{\pi^2}\ (^*);$$

donc enfin

$$Lim. \frac{\sum_1^N \varphi(k)}{N^2} = \frac{3}{\pi^2}; \quad (5)$$

formule de M Perott.

CCVIII. — Représentation nouvelle de la surface des ondes.

(*Décembre* 1880) (**).

I. D'après le *théorème de Sedley Taylor*, les demi-axes d'une section diamétrale de l'ellipsoïde s, sont les racines positives de l'équation

$$a^2e^2(p^2-b^2)(p^2-c^2)+b^2f^2(p^2-c^2)(p^2-a^2)+c^2g^2(p^2-a^2)(p^2-b^2)=0 (^{***}), \quad (1)$$

dans laquelle e, f, g représentent les cosinus directifs de la normale au plan sécant. Si p est l'une de ces racines, et que q soit l'autre :

$$a^2e^2(q^2-b^2)(q^2-c^2)+b^2f^2(q^2-c^2)(q^2-a^2)+c^2q^2(q^2-a^2)(q^2-b^2)=0. \quad (2)$$

(*) *Introduction à l'Analyse*, t. I, p. 214.

(**) Supplément à la *Note* CXLVI.

(***) *Mémoire sur une transformation géométrique...*, p 41. Nous avons changé la notation, afin d'éviter toute erreur.

Lorsque p et q sont donnés, les équations (1), (2) déterminent e, f, g (*).

II. On tire, de ces équations :

$$\frac{e^2}{b^2c^2(p^2-a^2)(q^2-a^2)\left[(p^2-c^2)(q^2-b^2)-(p^2-b^2)(q^2-c^2)\right]}=const.,$$

ou

$$\frac{e^2}{b^2c^2(p^2-a^2)(q^2-a^2)(q^2-p^2)(b^2-c^2)}=const.,$$

ou

$$\frac{e^2}{b^2c^2(b^2-c^2)(p^2-a^2)(q^2-a^2)}=\frac{1}{\sum b^2c^2(b^2-c^2)(p^2-a^2)(q^2-a^2)}\ (^{**}). \quad (3)$$

Un calcul fort simple donne

$$\sum b^2c^2(b^2-c^2)(p^2-a^2)(q^2-a^2)=-(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)p^2q^2; \quad (4)$$

donc

$$\frac{e^2}{b^2c^2(p^2-a^2)(q^2-a^2)}=\frac{1}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)p^2q^2}. \quad (5)$$

III. Si l'on porte, sur la normale au plan, un demi-diamètre égal à p ou à q, chacun des points ainsi déterminés appartient à la surface des ondes. Cette surface S est donc représentée par le système des formules :

$$\left.\begin{aligned} x^2&=\frac{b^2c^2(p^2-a^2)(q^2-a\ )}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)q^2},\\ y^2&=\frac{c^2a^2(p^2-b^2)(q^2-b^2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)q^2},\\ z^2&=\frac{a^2b^2(p^2-c^2)(q^2-c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)q^2};\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

p, q étant deux *paramètres* (***) :

(*) Le problème revient à celui-ci : *Couper un ellipsoïde par un plan diamétral, de manière que la section soit une ellipse donnée.*

(**) A cause de

$$e^2+f^2+g^2=1.$$

(***) Il en résulte les relations connues :

$$\sum x^2=p^2,\quad \sum\frac{a^2x^2}{p^2-a^2}=0,\ \text{etc.}$$

IV. *Remarque.* — Dans le *Mémoire*, on trouve (*) :

$$x^2 = \frac{bc(p^2 - a^2)(bc - aw)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}; \tag{7}$$

w étant une *fonction du rayon vecteur* p *et de la distance* v *du centre au plan tangent* (**). La comparaison des deux formes de x^2 donne cette relation très simple :

$$q^2 w = abc. \tag{8}$$

Ainsi, *la quantité* w *varie en raison inverse du carré de la distance* q.

CCIX. — Sur les lignes de courbure.

(*Décembre* 1880.)

I. *Équation de ces lignes.* — Supposons qu'une surface S soit représentée par les formules

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \varpi(u, v), \quad z = \psi(u, v), \tag{1}$$

d'où résultent celles-ci :

$$dx = f du + l dv, \quad dy = g du + m dv, \quad dz = h du + n dv \text{ (***)}. \tag{2}$$

Si λ, μ, ν sont les cosinus directifs de la normale à la surface, les lignes de courbure de celle-ci ont pour équations, comme on sait :

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{d\mu}{dy} = \frac{d\nu}{dz}. \tag{3}$$

Pour les transformer, je considère les *courbes coordonnées,*

(*) Page 47.

(**) $$\frac{v^2}{p^2 - v^2} = \frac{abc(abc - p^2 w)}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)(p^2 - c^2)}.$$

(*Mémoire...*, p. 48.)

(***) Les lettres f, l, g, ... désignent, bien entendu, $\frac{dx}{du}$, $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{du}$, ...

passant au point (x, y, z), et représentées, respectivement, par

$$u = const., \quad v = const. \tag{4}$$

Les cosinus directifs de la tangente à la première sont proportionnels à f, g, h. De même, les cosinus directifs de la tangente à la seconde courbe sont proportionnels à l, m, n. Conséquemment (les axes étant supposés rectangulaires) :

$$f\lambda + g\mu + h\nu = 0, \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0;$$

puis

$$\frac{\lambda}{gn - hm} = \frac{\mu}{hl - fn} = \frac{\nu}{fm - gl}. \tag{4}$$

Soient encore, pour abréger :

$$gn - hm = \mathrm{A}, \quad hl - fn = \mathrm{B}, \quad fm - gl = \mathrm{C}, \tag{5}$$

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = \mathrm{V}^2. \tag{6}$$

Alors :

$$\lambda = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}, \quad \mu = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{V}}, \quad \nu = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}; \tag{7}$$

et, au lieu des équations (3) :

$$\frac{\mathrm{V}d\mathrm{A} - \mathrm{A}d\mathrm{V}}{dx} = \frac{\mathrm{V}d\mathrm{B} - \mathrm{B}d\mathrm{V}}{dy} = \frac{\mathrm{V}d\mathrm{C} - \mathrm{C}d\mathrm{V}}{dz}. \tag{8}$$

On a, identiquement,

$$\sum(\mathrm{V}d\mathrm{A} - \mathrm{A}d\mathrm{V})(\mathrm{B}d\mathrm{C} - \mathrm{C}d\mathrm{B}) = 0\ (^*). \tag{9}$$

Donc les *deux* équations (3) entraînent celle-ci :

$$(\mathrm{B}d\mathrm{C} - \mathrm{C}d\mathrm{B})dx + (\mathrm{C}d\mathrm{A} - \mathrm{A}d\mathrm{C})dy + (\mathrm{A}d\mathrm{B} - \mathrm{B}d\mathrm{A})dz = 0; \tag{A}$$

ou, ce qui revient au même,

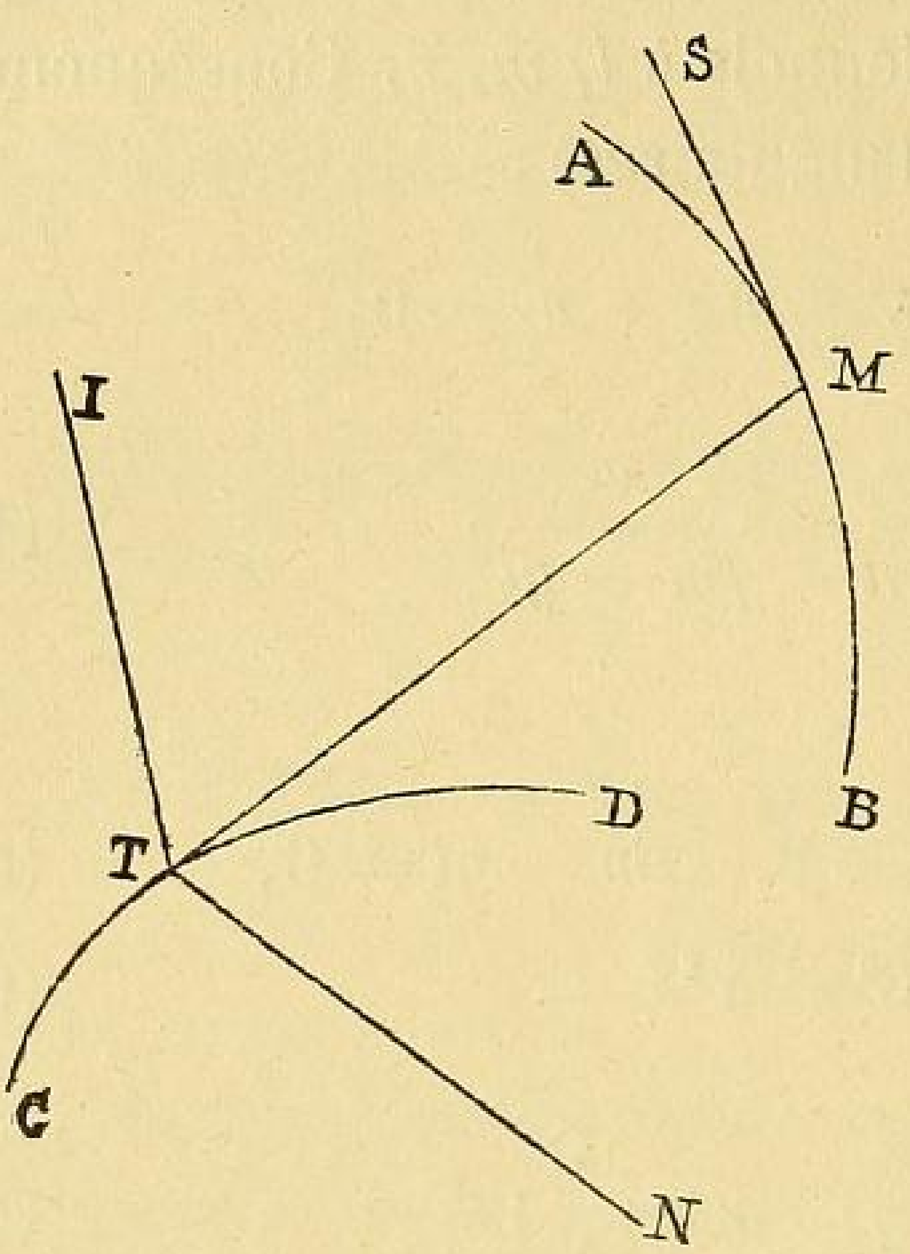
$$\sum(\mathrm{B}d\mathrm{C} - \mathrm{C}d\mathrm{B})(fdu + ldv) = 0. \tag{B}$$

(*) A cause de la relation connue :

$$\sum(bc' - cb')a = 0.$$

Les lignes de courbure sont donc représentées par cette équation (B), *du premier ordre et du second degré ;* ce qui devait être.

II. *Interprétation géométrique.* — AB étant une ligne de courbure, ayant MS pour tangente; soit CD l'arête de rebroussement de la *normalie* dont MT est une génératrice. Les cosinus directifs de MT sont proportionnels à A, B, C (*). Si donc TN est la *binormale* à CD, les cosinus directifs de cette droite sont proportionnels à



$$BdC - CdB, \quad CdA - AdC,$$
$$AdB - BdA.$$

L'équation (A) exprime que *les droites* MS, TN *sont perpendiculaires l'une à l'autre.* Et comme MS est perpendiculaire à MT, *la tangente* MS, *à la ligne de courbure, est perpendiculaire au plan rectifiant* MTN ; ou, ce qui est équivalent :

La tangente MS, *à la ligne de courbure* AB, *est parallèle à la normale principale* TI *de la courbe* CD, *arête de rebroussement de la normalie déterminée par* AB (**).

(*) Formules (7).

(**) Le *Calcul différentiel,* de M. Bertrand, ne signale point cette propriété. Dans celui de Serret, on lit (p. 487, 1868) : « Ainsi, pour qu'une » courbe donnée, tracée sur une surface, soit ligne de courbure de cette » surface, il faut et il suffit que la tangente de la courbe en chaque point » soit parallèle à la droite qui fait avec les axes des angles dont les cosinus » sont proportionnels aux différentielles

» $d\cos\alpha'$, $d\cos\beta'$, $d\cos\gamma'$,

» α', β', γ' étant les angles formés avec les axes par la normale à la sur- » face. » L'Auteur ne semble point s'être aperçu que la droite en question est NI. (Octobre 1886.)

III. *Remarque.* — λ, μ, ν étant les cosinus directifs de MT, ceux de TI sont, comme on sait, proportionnels à $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$. Donc les proportions (3) expriment le parallélisme des droites MS, TI; et, réciproquement, ce parallélisme donne lieu aux proportions (3).

IV. *Autre remarque.* — Si A, B, C sont des quantités proportionnelles aux cosinus directifs de MT, les cosinus directifs de TN sont, comme nous l'avons supposé, proportionnels aux quantités

$$\mathrm{B}d\mathrm{C}-\mathrm{C}d\mathrm{B},\quad \mathrm{C}d\mathrm{A}-\mathrm{A}d\mathrm{C},\quad \mathrm{A}d\mathrm{B}-\mathrm{B}d\mathrm{A};$$

mais *les cosinus directifs de* TI *ne sont point proportionnels à* dA, dB, dC.

1° La première proposition résulte des *identités :*

$$\sum \mathrm{A}(\mathrm{B}d\mathrm{C}-\mathrm{C}d\mathrm{B})=0,\quad \sum(\mathrm{A}+d\mathrm{A})(\mathrm{B}d\mathrm{C}-\mathrm{C}d\mathrm{B})=0.$$

2° Nous avons trouvé, ci-dessus,

$$\sum(\mathrm{V}d\mathrm{A}-\mathrm{A}d\mathrm{V})(\mathrm{B}d\mathrm{C}-\mathrm{C}d\mathrm{B})=0. \tag{9}$$

D'ailleurs,

$$\sum \mathrm{A}(\mathrm{V}d\mathrm{A}-\mathrm{A}d\mathrm{V})=0.$$

Par conséquent, *les cosinus directifs de la normale principale* TI *sont proportionnels aux quantités*

$$\mathrm{V}d\mathrm{A}-\mathrm{A}d\mathrm{V},\quad \mathrm{V}d\mathrm{B}-\mathrm{B}d\mathrm{V},\quad \mathrm{V}d\mathrm{C}-\mathrm{C}d\mathrm{V}.$$

CCX. — Sommation d'une série.

(*Décembre* 1883.)

I. Soit

$$\mathrm{S}=1+\frac{1}{2.3}x+\frac{1.2}{3.4.5}x^2+\cdots+\frac{1.2\ldots n}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}x^n+\cdots \tag{1}$$

On a

$$\frac{1.2\ldots n}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}=\frac{\left[\Gamma(n+1)\right]^2}{\Gamma(2n+2)}=\mathrm{B}(n+1,\,n+1)=\int_0^1(\theta-\theta^2)^n d\theta.$$

Donc

$$S = \int_0^1 d\theta \sum_0^\infty (\theta - \theta^2)^n x^n = \int_0^1 \frac{d\theta}{1-(\theta-\theta^2)x},$$

ou

$$S = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{d\theta}{\theta^2 - \theta + \frac{1}{x}}. \tag{2}$$

L'intégrale indéfinie est

$$2\sqrt{\frac{x}{4-x}}\,\text{arc tg}\,\frac{(2\theta-1)\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}.$$

Entre les limites 0 et 1, elle se réduit à

$$4\sqrt{\frac{x}{4-x}}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{4-x}}.$$

Conséquemment,

$$S = \frac{4}{\sqrt{x(4-x)}}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{4-x}}. \tag{3}$$

Telle est la somme demandée.

II. Pour $x = 1$ et $x = 2$, on obtient ces résultats particuliers :

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.2}{3.4.5} + \frac{1.2.3}{4.5.6.7} + \frac{1.2.3.4}{5.6.7.8.9} + \cdots,$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{2}{2.3} + \frac{2.4}{3.4.5} + \frac{2.4.6}{4.5.6.7} + \frac{2.4.6.8}{5.6.7.8.9} + \cdots$$

III. Si l'on change x en $4x^2$; la série (1) devient

$$1 + \frac{4}{2.3}x^2 + \frac{4.8}{3.4.5}x^4 + \frac{4.8.12}{4.5.6.7}x^{12} + \cdots;$$

et la formule (3) :

$$S = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

ou, sous une forme plus simple :

$$S = \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad (4)$$

IV. Nous avons donc cette autre égalité :

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{4}{2.3}x^3 + \frac{4.8}{3.4.5}x^5 + \frac{4.8.12}{4.5.6.7}x^7 + \cdots \qquad (5)$$

Celle-ci, qui est connue (*), est une conséquence de la formule de Clausen :

$$(\arcsin x)^2 = x^2 + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{4} + \cdots \; (^{**}).$$

CCXI. — Une transformation de la formule du binôme.

(*Juin* 1883.)

I. Si, dans l'expression

$$\frac{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n - \left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n}{2\sqrt{a^2-1}},$$

on fait $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ..., on est conduit *à supposer* que :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n - \left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n}{2\sqrt{a^2-1}}\\ &= (2a)^{n-1} - C_{n-2,1}(2a)^{n-3} + C_{n-3,2}(2a)^{n-5} - \cdots\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Pour essayer de démontrer cette relation remarquable, faisons $a = \cos\varphi$. Elle devient

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right)^n - \left(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi\right)^n}{2\sqrt{-1}\sin\varphi}\\ &= (2\cos\varphi)^{n-1} - C_{n-2,1}(2\cos\varphi)^{n-3} + C_{n-3,2}(2\cos\varphi)^{n-5} - \cdots,\end{aligned}$$

(*) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 60.

(**) *Traité élémentaire des séries*, p. 102.

ou

$$\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = (2\cos\varphi)^{n-1} - C_{n-2,1}(2\cos\varphi)^{n-3} + C_{n-3,2}(2\cos\varphi)^{n-5} - \cdots \quad (1)$$

Or, cette formule est connue (*). La relation (A) est donc vérifiée.

II. *Une identité.* — Si l'on développe, par la formule du binôme, chacune des quantités $(a+\sqrt{a^2-1})^n$, $(a-\sqrt{a^2-1})^n$, on trouve, comme expression du premier membre de (A) :

$$C_{n,1}a^{n-1} + C_{n,3}a^{n-3}(a^2-1) + C_{n,5}a^{n-5}(a^2-1)^2 + \cdots$$

Conséquemment :

$$\left.\begin{aligned} &C_{n,1}a^{n-1} + C_{n,3}a^{n-3}(a^2-1) + C_{n,5}a^{n-5}(a^2-1)^2 + \cdots \\ &= (2a)^{n-1} - C_{n-2,1}(2a)^{n-3} + C_{n-3,2}(2a)^{n-5} - \cdots \end{aligned}\right\} (2)$$

Si, par exemple, $n=9$, $a=\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} &9.16 + 84.8 + 126.4 + 36.2 + 1 \\ &= 4\,096 - 7.512 + 15.64 - 10.8 + 1, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 144 + 672 + 504 + 72 + 1 &= 4\,096 - 3\,584 + 960 - 80 + 1 \\ &= 1\,393. \end{aligned}$$

III. *Généralisation.* — Si, dans l'égalité (A), on remplace a par $\frac{a}{b}\sqrt{-1}$, on obtient cette *transformée* :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^n - \left(a-\sqrt{a^2+b^2}\right)^n}{2\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= (2a)^{n-1} + C_{n-2,1}(2a)^{n-3}b^2 + C_{n-3,2}(2a)^{n-5}b^4 + \cdots \end{aligned}\right\} (B)$$

En même temps, l'identité (3) devient

$$\left.\begin{aligned} &C_{n,1}a^{n-1} + C_{n,3}a^{n-3}(a^2+b^2) + C_{n,5}a^{n-5}(a^2+b^2)^2 + \cdots \\ &= (2a)^{n-1} + C_{n-2,1}(2a)^{n-3}b^2 + C_{n-3,2}(2a)^{n-5}b^4 + \cdots \end{aligned}\right\} (C)$$

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, p. 104.

Celle-ci donne une relation assez simple entre des nombres *combinatoires;* savoir :

$$C_{n,1} + 2C_{n,3} + 2^2C_{n,5} + \cdots = 2^{n-1} + 2^{n-3}C_{n-2,1} + 2^{n-5}C_{n-3,2} + \cdots \quad (D)$$

IV. *Autres développements.* — Soit

$$\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^n + \left(a-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = Aa^n + Ba^{n-2}b^2 + Ca^{n-4}b^4 + \cdots \quad (5)$$

On voit d'abord (en supposant $b = 0$), que $A = 2^{n-1}$.

En second lieu, si l'on prend les dérivées relatives à b, on a

$$n\frac{\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^{n-1} - \left(a-\sqrt{a^2+b^2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= 2Ba^{n-2} + 4Ca^{n-4}b^2 + 6Da^{n-6}b^4 + \cdots$$

D'après (B), le développement du premier membre est

$$n\left[(2a)^{n-2} + C_{n-3,1}(2a)^{n-4}b^2 + C_{n-4,2}(2a)^{n-6}b^4 + \cdots\right].$$

Par conséquent :

$$B = n2^{n-3},\quad C = \frac{n}{2}C_{n-3,1}2^{n-5},\quad D = \frac{n}{3}C_{n-4,2}2^{n-7},\ \cdots;$$

puis

$$\left.\begin{array}{l}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^n + \left(a-\sqrt{a^2+b^2}\right)^n = 2^n a^n \\ +n\left[2^{n-2}a^{n-2}b^2 + \frac{1}{2}C_{n-3,1}2^{n-4}a^{n-4}b^4 + \frac{1}{3}C_{n-4,2}2^{n-6}a^{n-6}b^6 + \cdots\right];\end{array}\right\} \quad (E)$$

et, en particulier :

$$\left.\begin{array}{l}\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n \\ = 2^n + n\left[2^{n-2} + \frac{1}{2}C_{n-3,1}2^{n-4} + \frac{1}{3}C_{n-4,2}2^{n-6} + \cdots\right].\end{array}\right\} \quad (F)$$

V. *Suite.* — Soient, pour abréger :

$$(2a)^{n-1} + C_{n-2,1}(2a)^{n-3}b^2 + C_{n-3,2}(2a)^{n-5}b^4 + \cdots = P,$$

$$2^{n-1}a^n + n\left[2^{n-3}a^{n-2}b^2 + \frac{1}{2}C_{n-3,1}2^{n-5}a^{n-4}b^4 + \frac{1}{3}C_{n-4,2}2^{n-7}a^{n-6}b^6 + \cdots\right] = Q.$$

Il est clair que :

$$\left.\begin{aligned}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^n &= \quad P\sqrt{a^2+b^2}+Q,\\ \left(a-\sqrt{a^2+b^2}\right)^n &= -P\sqrt{a^2+b^2}+Q.\end{aligned}\right\}\quad (G)$$

Par exemple :

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^7 = 169\sqrt{2}+239,\quad \left(1-\sqrt{2}\right)^7 = -169\sqrt{2}+239.$$

VI. *Remarques.* — 1° $(-b^2)^n = Q^2 - P^2(a^2+b^2)$.

Donc, *si* n *est pair,* Q^2 *est la somme de trois carrés;* et, *si* n *est impair,* P^2 *est le quotient d'une somme de deux carrés par une somme de deux carrés.*

2° *On a, identiquement :*

$$\begin{aligned}&2\left[\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^n + \left(a-\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\right]\sqrt{a^2+b^2}\\ &= \left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^{n+1} - \left(a-\sqrt{a^2+b^2}\right)^{n+1}\\ &+ b^2\left[\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^{n-1} - \left(a-\sqrt{a^2+b^2}\right)^{n-1}\right] (*).\end{aligned}$$

Par conséquent :

Si n *est pair* (supérieur à 2), *et que* a, b *soient des nombres entiers, la quantité*

$$\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^n + \left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^n$$

est une somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux (**).

Par exemple,

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{13}\right)^6 + \left(-2+\sqrt{13}\right)^6 &= 2(2^6+15.2^4.13+15.2^2.13^2+13^3)\\ &= 31\,042 = 136^2+75^2+75^2+36^2.\end{aligned}$$

(*) Vérification facile.

(**) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés,* p 30.

CCXII. — Sur quelques formules de Poisson.

(*Décembre* 1883) (*).

I. Dans la deuxième partie de son célèbre *Mémoire sur les intégrales définies* (**), Poisson adopte, comme point de départ, la formule

$$\left.\begin{aligned}&\frac{e^p - e^{-p}}{e^p + 2\cos\theta + e^{-p}}\\ &= 2\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{p}{[(2i-1)\pi-\theta]^2+p^2} + 2\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{p}{[(2i-1)\pi+\theta]^2+p^2},\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

conséquence immédiate de cette autre formule, due à Euler :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{e^p + 2\cos\theta + e^{-p}}{2(1+\cos\theta)}\\ &= \prod_{i=1}^{i=\infty}\left[1+\frac{p^2}{[(2i-1)\pi-\theta]^2}\right]\left[1+\frac{p^2}{[(2i-1)\pi+\theta]^2}\right] (^{***}).\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Mais l'*établissement* de celle-ci est un peu long. Au contraire, il est très facile de démontrer *directement*, ou plutôt de *vérifier*, la formule (1).

D'abord, si l'on change p en $p\sqrt{-1}$, elle devient

$$\frac{1}{2p}\frac{\sin p}{\cos p+\cos\theta} = \sum_1^\infty\left\{\frac{1}{[(2i-1)\pi-\theta]^2-p^2}+\frac{1}{[(2i-1)\pi+\theta]^2-p^2}\right\}. \quad (3)$$

On a :

$$\frac{1}{[(2i-1)\pi-\theta]^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left[\frac{1}{(2i-1)\pi-\theta-p}-\frac{1}{(2i-1)\pi-\theta+p}\right],$$

$$\frac{1}{[(2i-1)\pi+\theta]^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left[\frac{1}{(2i-1)\pi+\theta-p}-\frac{1}{(2i-1)\pi+\theta+p}\right]^2;$$

(*) Fragment d'une leçon à l'Université de Liège.

(**) *Journal de l'École polytechnique*, 18e Cahier, pp. 295, 296.

(***) *Introduction à l'Analyse*, t. I, p. 120.

donc la somme des deux fractions est

$$\frac{1}{2p}\left[\frac{1}{(2i-1)\pi-(\theta+p)}-\frac{1}{(2i-1)\pi+(\theta+p)}\right]$$
$$-\frac{1}{2p}\left[\frac{1}{(2i-1)\pi-(\theta-p)}-\frac{1}{(2i-1)\pi+(\theta-p)}\right]$$
$$=\frac{\theta+p}{p}\frac{1}{(2i-1)^2\pi^2-(\theta+p)^2}-\frac{\theta-p}{p}\frac{1}{(2i-1)^2\pi^2-(\theta-p)^2}.$$

Soient, pour abréger :

$$\theta+p=a\pi,\quad \theta-p=b\pi.$$

Alors l'égalité (3) se réduit à

$$\frac{1}{2}\frac{\sin p}{\cos p+\cos\theta}=\frac{a}{\pi}\sum_1^\infty\frac{1}{(2i-1)^2-a^2}-\frac{b}{\pi}\sum_1^\infty\frac{1}{(2i-1)^2-b^2}. \tag{4}$$

La première série représente $\frac{\pi}{4a}\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2}$ (*); la seconde, $\frac{\pi}{4b}\operatorname{tg}\frac{b\pi}{2}$. Donc

$$2\frac{\sin p}{\cos p+\cos\theta}=\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2}-\operatorname{tg}\frac{b\pi}{2}=\frac{\sin(a-b)\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{a\pi}{2}\cos\frac{b\pi}{2}};$$

etc. (**).

II. Dans le même Mémoire, Poisson donne l'importante formule

$$\int_0^\infty\frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}-p\right)x}+e^{-\left(\frac{\pi}{2}-p\right)x}}{e^{\frac{\pi}{2}x}+e^{-\frac{\pi}{2}x}}dx=\frac{1}{\sin p}. \tag{5}$$

On peut, comme il suit, la rattacher aux intégrales eulériennes. Soient :

$$p=\alpha\pi,\quad e^x=z^{-\frac{1}{2\alpha\pi}};\quad (\alpha<1)$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 116; formules 63 et 64.

(**) Partant de cette identité, et renversant l'ordre des calculs, on trouvera donc la formule (2).

Un calcul très simple donne, au lieu de l'égalité précédente,

$$\int_0^1 \frac{z^{\frac{1-2\alpha}{4\alpha}} + z^{-\frac{1-2\alpha}{4\alpha}}}{z^{\frac{1}{4\alpha}} + z^{-\frac{1}{4\alpha}}} \frac{dz}{z} = \frac{2\pi\alpha}{\sin \pi\alpha}. \tag{6}$$

Soit encore $z = u^{4\alpha}$; et, par conséquent,

$$\int_0^1 \frac{u^{1-2\alpha} + u^{-(1-2\alpha)}}{1 + u^2} du = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}. \tag{7}$$

Le second membre égale $\frac{1}{2}$ B$(\alpha, 1 - \alpha)$. Pour vérifier qu'il égale le premier, je pose

$$u = \operatorname{tg} \varphi.$$

J'obtiens

$$\mathrm{B}(\alpha, 1 - \alpha) = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right)^{1-2\alpha} + \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}\right)^{1-2\alpha}\right] d\varphi.$$

L'intégrale est la moitié de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right)^{1-2\alpha} + \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}\right)^{1-2\alpha}\right] d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right)^{1-2\alpha} d\varphi$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} = \int_0^1 \theta^{-\alpha}(1 - \theta)^{\alpha-1} d\theta.$$

Donc enfin

$$\mathrm{B}(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^1 \theta^{-\alpha}(1 - \theta)^{\alpha-1} d\theta ; \tag{8}$$

ce qui est identique.

Ainsi, en partant de cette égalité connue, et en transformant le second membre, on peut parvenir à la formule (5).

III. Soit enfin la relation

$$\int_0^\infty \frac{e^{2px} - e^{-2px}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} p, \tag{9}$$

également due à Poisson (*), et dont nous avons parlé autre part (**).

Si l'on pose :

$$p = \frac{1}{2}\alpha\pi, \quad e^x = u^{-\frac{1}{\pi}},$$

elle devient

$$\int_0^1 \frac{u^{-\alpha} - u^{\alpha}}{1 - u^2} du = \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \alpha\pi. \tag{10}$$

Celle-ci a été considérée par Svanberg et M. Hermite (***). Il est facile de la démontrer directement.

CCXIII. — Équations différentielles totales.

(*Mai* 1884) (IV).

Il y a quelques années, M. Joseph Bertrand a fait connaître une ingénieuse méthode, qui permet d'intégrer l'équation

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \tag{1}$$

quand la condition

$$X\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + Y\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + Z\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right) = 0. \tag{2}$$

est remplie (V). Je me propose de simplifier et de généraliser le procédé en question (VI).

(*) *Journal de l'École polytechnique,* 18e Cahier, p. 298.

(**) *Sur les Nombres de Bernoulli et d'Euler* (1867), p. 18.

(***) *Sur l'intégrale...; par* M. *Charles Hermite* (ACADÉMIE DE TURIN, 1878).

(IV) Leçons à l'Université de Liège.

(V) *Comptes rendus,* 18 décembre 1876. On verra, plus loin, pourquoi nous avons modifié les notations adoptées par M. Bertrand.

(VI) Il ressemble beaucoup à celui dont j'ai fait usage dans le Mémoire intitulé : *Recherche des lignes de courbure de la surface...* (ACADÉMIE DE BELGIQUE, 1864).

I. *Exposé de la méthode.* — L'équation (1) est, en vertu de la relation (2), une conséquence du système *auxiliaire* :

$$\frac{dx}{\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}}=\frac{dy}{\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}}=\frac{dz}{\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}}. \qquad (3)$$

Soient

$$\varphi(x, y, z)=\alpha, \quad \psi(x, y, z)=\beta \qquad (4)$$

deux intégrales de ce système. D'après un théorème connu, toute autre intégrale est réductible à

$$F(\alpha, \beta)=C. \qquad (5)$$

En particulier, *l'intégrale de la proposée* (1) *est réductible à cette forme* (5). Conséquemment, *si l'on prend* α, β *pour variables, l'équation* (1) *sera transformée en*

$$Md\alpha+Nd\beta=0; \qquad (6)$$

M, N étant, bien entendu, des fonctions de α, β (*).

II. *Remarques.* — 1° Si, des équations (4), on tire les valeurs de x, y, pour les substituer dans la proposée, la variable z devra disparaître (**). Donc, *pour abréger le calcul,* on peut supposer $dz=0$, et même $z=0$, si aucune des fonctions X, Y, Z ne devient infinie par suite de cette hypothèse.

2° D'après cela, l'équation (1) peut être réduite à

$$Xdx+Ydy=0. \qquad (7)$$

Et comme on déduit, des équations (3), (4), en faisant $z=0$:

$$\frac{d\alpha}{dx}dx+\frac{d\alpha}{dy}dy=d\alpha, \quad \frac{d\beta}{dx}dx+\frac{d\beta}{dy}dy=d\beta;$$

(*) A part les applications, la Note de M. Bertrand se réduit à ce qui précède.

(**) Propriété connue.

on peut prendre, dans la *transformée* (6) :

$$M = X\frac{d\beta}{dy} - Y\frac{d\beta}{dx}, \quad N = Y\frac{d\alpha}{dx} - X\frac{d\alpha}{dy}\ (^*). \tag{8}$$

3° Si, au lieu de $z = 0$, on faisait $x = 0$ ou $y = 0$, on trouverait, soit :

$$M = Y\frac{d\beta}{dz} - Z\frac{d\beta}{dy}, \quad N = Z\frac{d\alpha}{dy} - Y\frac{d\alpha}{dz}; \tag{9}$$

soit :

$$M = Z\frac{d\beta}{dx} - X\frac{d\beta}{dz}, \quad N = X\frac{d\alpha}{dz} - Z\frac{d\alpha}{dx}. \tag{10}$$

4° Les trois valeurs de M, et les trois valeurs de N, ne sont pas nécessairement *identiques :* il suffit qu'elles soient *proportionnelles,* afin que l'équation (6) ne change pas. On a donc la relation suivante, à laquelle satisfont X, Y, Z :

$$\frac{X\frac{d\beta}{dy} - Y\frac{d\beta}{dx}}{Y\frac{d\beta}{dz} - Z\frac{d\beta}{dy}} = \frac{Y\frac{d\alpha}{dx} - X\frac{d\alpha}{dy}}{Z\frac{d\alpha}{dy} - Y\frac{d\alpha}{dy}}.$$

5° Après quelques simplifications, elle devient

$$\left.\begin{aligned} X\left(\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dy}\right) + Y\left(\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dz}\right)& \\ + Z\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dz}\right) = 0.& \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

6° Au fond, cette *identité* ne diffère pas de la *condition d'intégrabilité* (2). En effet, les différentielles des équations (4) étant

$$\frac{d\alpha}{dx}dx + \frac{d\alpha}{dy}dy + \frac{d\alpha}{dz}dz = 0, \quad \frac{d\beta}{dx}dx + \frac{d\beta}{dy}dy + \frac{d\beta}{dz}dz = 0,$$

(*) A cause de

$$\frac{dx}{Y} = -\frac{dy}{X}, \tag{7}$$

ces valeurs rendent identique l'équation (6).

on a

$$\frac{dx}{\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dx}} = \frac{dy}{\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dz}} = \frac{dz}{\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}};$$

et, pour que ces équations simultanées s'accordent avec le système (4), on doit avoir

$$\frac{\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}}{\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dy}} = \frac{\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}}{\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dz}} = \frac{\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}}{\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}};$$

etc.

III. *Application.* — Soit pris, comme dans la Note de M. Bertrand, l'exemple *classique :*

$$(y^2 + yz + z^2)dx + (z^2 + zx + x^2)dy + (x^2 + xy + y^2)dz = 0;$$

de manière que

$$X = y^2 + yz + z^2, \quad Y = z^2 + zx + x^2, \quad Z = x^2 + xy + y^2.$$

Le système

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{x - y}$$

a pour intégrales

$$x + y + z = \alpha, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \beta.$$

Si l'on suppose $z = 0$, on trouve, par les formules (8) :

$$M = 2(y^3 - x^3), \quad N = x^2 - y^2;$$

ou, en supprimant un facteur :

$$M = -2(x^2 + xy + y^2), \quad N = x + y;$$

ou encore :

$$M = -(\alpha^2 + \beta), \quad N = \alpha.$$

L'équation auxiliaire (6) est donc

$$-(\alpha^2 + \beta)\,d\alpha + \alpha\,d\beta = 0 \ (^*).$$

L'intégrale de celle-ci étant

$$\alpha - \frac{\beta}{\alpha} = C,$$

on a, comme intégrale de la proposée,

$$\frac{yz + zx + xy}{x + y + z} = C;$$

résultat connu (**).

IV. *Équations homogènes.* — Si l'équation (1) est homogène, il est clair que

$$x = \alpha z, \quad y = \beta z \tag{11}$$

la transforme en

$$A(\alpha dz + z d\alpha) + B(\beta dz + z d\beta) + C dz = 0; \tag{12}$$

A, B, C ne contenant que α et β. Cette nouvelle équation étant écrite ainsi :

$$\frac{dz}{z} + \frac{A d\alpha + B d\beta}{A\alpha + B\beta + C} = 0, \tag{13}$$

on voit qu'elle sera intégrable si $\frac{A d\alpha + B d\beta}{A\alpha + B\beta + C}$ est une différentielle exacte (***). La condition est

$$\frac{d.\dfrac{A}{A\alpha + B\beta + C}}{d\beta} = \frac{d.\dfrac{B}{A\alpha + B\beta + C}}{d\alpha}.$$

(*) Dans la Note citée, M. Bertrand, qui ne fait point usage des formules (8), (9), (10), n'explique pas comment il parvient à la dernière équation.

(**) On peut comparer le calcul précédent avec celui que donne Lacroix (t. II, p. 508).

(***) Suivant M. Hoüel, dans cette équation (13), *les variables sont séparées* (*Cours de Calcul infinitésimal*, t. III, p. 144).

V. *Application.*

$$(y^2 + z^2)zdx + (x^2 + z^2)zdy - 2(x + y)xydz = 0 \; (^*).$$

On a :

$$A = \beta^2 + 1, \quad B = \alpha^2 + 1, \quad C = -2(\alpha + \beta)\alpha\beta,$$

$$A\alpha + B\beta + C = (\alpha + \beta)(1 - \alpha\beta);$$

puis

$$\frac{dz}{z} + \frac{(\beta^2 + 1)d\alpha + (\alpha^2 + 1)d\beta}{(\alpha + \beta)(1 - \alpha\beta)} = 0.$$

La seconde fraction égale

$$\frac{\beta d\alpha + \alpha d\beta}{1 - \alpha\beta} + \frac{d\alpha + d\beta}{\alpha + \beta}.$$

Donc

$$\mathcal{L} z + \mathcal{L}(\alpha + \beta) - \mathcal{L}(1 - \alpha\beta) = \mathcal{L} k,$$

ou

$$\frac{z(\alpha + \beta)}{1 - \alpha\beta} = k.$$

Conséquemment, l'intégrale de la proposée est

$$\frac{z^2(x + y)}{z^2 - xy} = k.$$

VI. *Remarque.* — La condition

$$X\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + Y\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + Z\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right) = 0 \qquad (2)$$

est susceptible d'une *interprétation géométrique* assez simple.

L'équation

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \qquad (1)$$

si elle est intégrable, représente une infinité de surfaces S, ayant pour équation

$$f(X, Y, Z) = 0.$$

(*) *Imité* de l'Exercice 24 de M. Hoüel (t. III, p. 234). Dans celui-ci, le premier terme est $(y^2+x^2)zdz$: la condition d'intégrabilité n'est pas remplie.

Les équations (3), ou leurs intégrales (4), représentent deux séries de lignes L : *ces lignes sont situées sur les surfaces* S, c'est-à-dire qu'*elles en sont les génératrices.*

En effet, les cosinus directifs de la tangente T, à L, au point (x, y, z), sont, d'après les équations (3), proportionnels aux binômes

$$\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz},\quad \frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx},\quad \frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}.$$

D'autre part, les cosinus directifs de la normale N, à S, sont proportionnels à X, Y, Z. Or, l'équation (4) prouve que ces deux droites sont orthogonales. En d'autres termes, *la tangente* T *est située dans le plan tangent à* S.

Addition. — (*Octobre* 1886.)

VII. *Conditions d'intégrabilité.* — Soit l'équation à quatre variables :

$$\mathrm{T}dt + \mathrm{X}dt + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0. \tag{14}$$

Si l'on exprime que le produit du premier membre, par un facteur λ, est une différentielle exacte, on trouve les conditions *connues :*

$$\mathrm{T}\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dz}-\frac{d\mathrm{Z}}{dy}\right)+\mathrm{Y}\left(\frac{d\mathrm{Z}}{dt}-\frac{d\mathrm{T}}{dz}\right)+\mathrm{Z}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dy}-\frac{d\mathrm{Y}}{dt}\right)=0, \tag{15}$$

$$\mathrm{X}\left(\frac{d\mathrm{Z}}{dt}-\frac{d\mathrm{T}}{dz}\right)+\mathrm{Z}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx}-\frac{d\mathrm{X}}{dt}\right)+\mathrm{T}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dz}-\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)=0, \tag{16}$$

$$\mathrm{Y}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx}-\frac{d\mathrm{X}}{dt}\right)+\mathrm{T}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dy}-\frac{d\mathrm{Y}}{dx}\right)+\mathrm{X}\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dt}-\frac{d\mathrm{T}}{dy}\right)=0\,(^*). \tag{17}$$

VIII. *Remarques.* — 1° Les équations précédentes se déduisent les unes des autres, par une *permutation tournante.* Si l'on continue cette permutation, on trouve une *quatrième condition* (surabondante) :

$$\mathrm{Z}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dy}-\frac{d\mathrm{Y}}{dx}\right)+\mathrm{X}\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dz}-\frac{d\mathrm{Z}}{dy}\right)+\mathrm{Y}\left(\frac{d\mathrm{Z}}{dx}-\frac{d\mathrm{X}}{dz}\right)=0. \tag{18}$$

(*) Dans son grand Traité (t. II, p. 516), Lacroix donne les équations (15), (17), (18); mais non l'éqnation (16).

Du reste, il est facile de vérifier que celle-ci est une conséquence des trois autres. En effet, si l'on divise par TYZ, par XZT, etc.; on peut, pour abréger, écrire ainsi ces quatre équations :

$$a + b + c = 0, \quad b + d + e = 0, \quad d + f - c = 0, \quad f + a - e = 0.$$

Donc

$$(a + b + c) - (b + d + e) + (d + f - c) - (f + a - e) = 0,$$

ou

$$0 = 0.$$

2° L'équation (18) ne diffère pas de l'équation (2). Ainsi, *pour que l'équation*

$$\mathrm{T}dt + \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0 \tag{11}$$

soit intégrable, l'équation auxiliaire

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0 \tag{1}$$

le doit être (*).

IX. *Intégration.* — Pour fixer les idées, prenons l'équation (18), écrite ainsi :

$$0 \,.\, \mathrm{T} + \mathrm{X}\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dz} - \frac{d\mathrm{Z}}{dy}\right) + \mathrm{Y}\left(\frac{d\mathrm{Z}}{dx} - \frac{d\mathrm{Z}}{dy}\right) + \mathrm{Z}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dy} - \frac{d\mathrm{Y}}{dx}\right) = 0. \tag{19}$$

La proposée (14) est, en vertu de cette condition (19), une conséquence du système *auxiliaire* (**) :

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{-\frac{d\mathrm{Y}}{dz} + \frac{d\mathrm{Z}}{dy}} = \frac{dy}{-\frac{d\mathrm{Z}}{dx} + \frac{d\mathrm{Z}}{dy}} = \frac{dz}{-\frac{d\mathrm{Y}}{dx} + \frac{d\mathrm{X}}{dy}}. \tag{20}$$

Celui-ci suppose $t = const. = \gamma$.

(*) Celle-ci suppose $t = const.$

(**) A chacune des quatre conditions d'intégrabilité correspond un système auxiliaire; par conséquent *quatre systèmes, entre lesquels on pourra choisir.*

Si, comme dans le paragraphe I, les intégrales des deux autres équations sont

$$\varphi(x, y, z) = \alpha, \quad \psi(x, y, z) = \beta; \tag{4}$$

on tirera, de ces égalités, les valeurs de x, y (en faisant varier t), pour les substituer dans la proposée : z disparaîtra, et l'on aura une équation différentielle entre α, β et t. Supposons que l'intégrale soit

$$F(\alpha, \beta, t) = C; \tag{21}$$

alors l'intégrale de l'équation (14) sera

$$F[\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), t] = C. \tag{22}$$

X. *Autre méthode.*— Elle résulte de la seconde Remarque (VIII). Soit,

$$f(t, x, y, z) = \theta \tag{23}$$

l'intégrale de l'équation (1), t étant supposé *constante*. Pour en déduire l'intégrale de l'équation (14), il suffit de remplacer la constante arbitraire θ par une fonction de t, convenablement choisie. A ce point de vue, on a

$$\frac{df}{dt}dt + \left(\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz\right) = d\theta.$$

La quantité entre parenthèses est égale au trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$, multiplié, s'il le faut, par un facteur λ. En conséquence,

$$d\theta = \left(\frac{df}{dt} - \lambda T\right) dt. \tag{24}$$

D'après ce que nous venons de dire, le second membre doit être indépendant de x, y, z, soit *actuellement*, soit en vertu de l'intégrale (23) (*).

(*) Cette méthode n'est pas nouvelle; mais nous croyons en avoir simplifié l'exposé.

XI. *Application.* — Soit l'équation connue (*) :

$$y(y+z)dt + z(y+z)dx + z(t-x)dy - y(t-x)dz = 0. \quad (25)$$

L'équation auxiliaire est

$$z(y+z)dx + z(t-x)dy - y(t-x)dz = 0. \quad (26)$$

Pour intégrer celle-ci, prenons, préalablement,

$$(y+z)dx + (t-x)dz = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{t-x} + \frac{dy}{y+z} = 0, \quad (27)$$

dont l'intégrale est

$$\frac{y+z}{t-x} = \gamma. \quad (28)$$

Cette formule représentera l'intégrale de l'équation (16), si γ est une fonction de z, convenablement choisie.

Différentiant, on a

$$(t-x)(dy+dz) + (y+z)dx = (t-x)^2 d\gamma;$$

puis, eu égard à la relation (16) :

$$(y+z)dz = z(t-x)d\gamma\,;$$

ou bien

$$\frac{dz}{z} = \frac{d\gamma}{\gamma}\,;$$

ou encore :

$$\gamma = z\theta.$$

Ainsi, l'intégrale de l'équation (26) est

$$\frac{y+z}{z(t-x)} = \theta. \quad (29)$$

Différentiant de nouveau (en faisant tout varier), on a

$$z(t-x)(dy+dz) - (y+z)(t-x)dz - z(y+z)(dt-dz) = z^2(t-x)^2 d\theta;$$

ou, en vertu de la proposée,

$$-(y+z)^2 dt = z^2(t-x)^2 d\theta,$$

(*) Moigno, *Calcul intégral*, p. 511.

ou :

$$dt = -\frac{d\theta}{\theta^2}.$$

L'intégrale est

$$t - C = \frac{1}{\theta}.$$

Par conséquent, la formule (19) devient

$$\frac{y-z}{z(t-x)} - \frac{1}{t-C} = 0;$$

ou enfin

$$\frac{ty+zx}{y+z} = C. \qquad (30)$$

Telle est l'intégrale de l'équation proposée.

XII. *Remarque.* — Si, au lieu de l'équation (27), nous avions pris

$$z(t-x)dy - y(t-x)dz = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

le calcul eût été abrégé.

CCXIV. — Théorème d'Arithmétique (*).

(*Décembre* 1883.)

n *et* p *étant des nombres entiers, la fraction*

$$f = \frac{1.3.5\ldots\overline{2p-1}.1.3.5\ldots\overline{2n-2p-1}}{1.2.3\ldots n}$$

est réductible à la forme

$$\frac{N}{2^k},$$

N *étant impair.*

(*) Extrait du *Mémoire sur certaines décompositions en carrés.*

I. On a

$$f = \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots 2p\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots\overline{2n-2p}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n\,.\,2^n\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots p\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots\overline{n-p}}.$$

Or, d'après un théorème connu (*),

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots 2p\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots\overline{2n-2p}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots p\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots\overline{n-p}} = \textit{entier}.$$

II. *Remarque.* — Le numérateur de f étant *impair*, l'exposant

$$k = \left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{8}\right) + \cdots\ (^{**}).$$

CCXV. — Sur le dernier théorème de Fermat.

(*Mars* 1884.)

M. de Jonquières vient de publier, sous ce titre (***), une très intéressante Note, contenant les remarquables théorèmes suivants :

Soient trois nombres entiers, a, b, c, *vérifiant l'équation*

$$a^n + b^n = c^n\ (^{\text{IV}}).$$

1° a *et* b *ne peuvent être, simultanément, premiers ;*

2° *Si* a, *supposé inférieur à* b, *est premier,* c = b + 1.

En suivant la voie indiquée par M. de Jonquières, on peut trouver d'autres *contributions* au théorème de Fermat.

I. *Préliminaires* ($^{\text{V}}$).

1° $$a^n - 1 = \mathfrak{M}(nb). \qquad (1)$$

(*) *Seconde Note sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques.*

(**) Voir, dans la *Note* CLXIII, le théorème d'Eisenstein.

(***) *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei* (20 janvier 1884; Rome).

(IV) Je suppose, une fois pour toutes, l'exposant n *premier, et supérieur à* 3. (Voir la *Note* XLVII.)

(V) Dans les deux premiers paragraphes, le nombre *a* est *premier.*

D'après le second théorème de M. de Jonquières,

$$\frac{a^n - 1}{b} = \frac{n}{1} b^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2} b^{n-3} + \cdots + \frac{n}{1}. \qquad (2)$$

n étant *premier*, tous les coefficients, dans le second membre, sont divisibles par n (*). Ainsi

$$a^n - 1 = b\,\mathfrak{M}(n) = \mathfrak{M}(nb). \qquad (3)$$

2° $$a - 1 = \mathfrak{M}(n). \qquad (4)$$

n *ne divise pas* a (1). Donc, par le premier théorème de Fermat :

$$(a^{n-1} - 1)a = \mathfrak{M}(n).$$

Et comme

$$a^n - 1 = \mathfrak{M}(n), \qquad (3)$$

on a l'égalité (4).

3° *Tout diviseur premier, de* c — a, *divise* a — 1.

On a

$$b^n = (b+1)^n - a^n = (b + 1 - a)\mathrm{E},$$

E étant un nombre entier. Soit p un nombre premier qui divise $b + 1 - a$. D'après un théorème connu, p divise b; donc il divise

$$b - (b + 1 - a) = a - 1.$$

4° a + b *et* c — a *sont premiers entre eux.*

Soient, s'il est possible :

$$a + b = \mathfrak{M}(p), \quad c - a = \mathfrak{M}(p).$$

A cause de $c = b + 1$, on aurait donc

$$2a - 1 = \mathfrak{M}(p).$$

On vient de voir que

$$a - 1 = \mathfrak{M}(p).$$

Or, ces égalités sont contradictoires; car leurs premiers membres sont premiers entre eux (**).

(*) Propriété connue.

(**) Si p divisait $2a - 1$ et $a - 1$, il diviserait $2a - 1 - 2(a - 1) = 1$.

5° 2a — 1 *et* 2b + 1 *sont premiers entre eux.*

Les nombres $a + b$, $b + 1 - a$ n'ayant aucun facteur commun, il en est de même pour leur somme $2b + 1$ et leur différence $2a - 1$.

II. *Inégalités.* — 1° *Le nombre premier,* a, *est compris entre*

$$\sqrt[n]{nb^{n-1}} \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{n(b+1)^{n-1}}.$$

Reprenons l'égalité

$$a^n = (b+1)^n - b^n. \tag{2}$$

Le second membre, divisé par $(b + 1) - b$, devient

$$(b+1)^{n-1} + (b+1)^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}.$$

Ce quotient est compris entre nb^{n-1} et $n(b + 1)^{n-1}$. Ainsi

$$n(b+1)^{n-1} > a^n > nb^{n-1}. \tag{5}$$

2° $$b > n. \tag{6}$$

D'après M. de Jonquières, b *surpasse* a. Donc

$$b^n > a^n > nb^{n-1},$$

puis

$$b^n > nb^{n-1};$$

etc.

3° *Le nombre* b, *qui satisfait à l'égalité*

$$(b+1)^n - b^n = a^n, \tag{2}$$

est compris entre

$$a\sqrt[n-1]{\frac{a}{n}} \quad \text{et} \quad -1 + a\sqrt[n-1]{\frac{a}{n}}.$$

III. *Remarques.* — 1° *Soit* b *un nombre entier, supérieur au nombre entier* n. *Entre* $\sqrt[n]{nb^{n-1}}$ *et* $\sqrt[n]{n(b+1)^{n-1}}$, *il y a, tout au plus, un nombre entier.*

Supposons qu'il puisse y en avoir deux, a_1 et a_2; de manière que, a_2 étant le plus grand, on ait :

$$\sqrt[n]{nb^{n-1}} < a_1 < a_2 < \sqrt[n]{n(b+1)^{n-1}},$$

ou

$$b < a_1 \sqrt[n-1]{\frac{a_1}{n}}, \quad a_2 \sqrt[n-1]{\frac{a_2}{n}} < b + 1.$$

On conclut, de ces deux inégalités,

$$a_2 \sqrt[n-1]{\frac{a_2}{n}} - a_1 \sqrt[n-1]{\frac{a_1}{n}} < 1,$$

et, à plus forte raison :

$$(a_2 - a_1) \sqrt[n-1]{\frac{a_1}{n}} < 1.$$

Celle-ci est absurde; car le premier facteur est, au moins, égal à 1; et le second surpasse 1 (*).

2° *Le nombre* c *est compris entre* a + b *et* $\frac{1}{2}$(a + b).

Soit a le plus grand des nombres a, b. Alors :

$$a > \frac{a+b}{2},$$

$$a^n > \left(\frac{a+b}{2}\right)^n;$$

et, à plus forte raison,

$$c^n > \left(\frac{a+b}{2}\right)^n;$$

ou

$$c > \frac{a+b}{2}.$$

Addition. — (*Octobre* 1886.)

IV. Théorème I. — *Si des nombres entiers* a, b, c, *premiers entre eux deux à deux, vérifient l'équation*

$$a^n + b^n = c^n, \tag{7}$$

la somme a + b *ne peut être un nombre premier.*

(*) A cause de

$$b > n, \quad a_1 > \sqrt[n]{nb^{n-1}}.$$

Soit, s'il est possible, $a + b = p$. Le nombre premier p, divisant c^n, doit diviser c. Ainsi $c = pc'$.

L'équation (7) devient, par l'élimination de b,

$$p^n - \frac{n}{1} ap^{n-1} + \cdots + \frac{n}{1} a^{n-1}p = p^n c'^n. \tag{8}$$

Tous les termes, sauf $na^{n-1}p$, sont divisibles par p^2; donc

$$na^{n-1} = \mathfrak{M}(p).$$

Cette relation exige que p divise a ou n. Mais p surpasse a; donc p divise n; ou, plutôt, $p = n$. Conséquemment,

$$(a + b)^n = n^n.$$

Or, $(a + b)^n$ surpasse $a^n + b^n$. Ainsi

$$n^n > n^n c'^n;$$

conclusion absurde.

V. Théorème II. — *Si la somme* a + b *est divisible par* n, *elle est divisible par* n^{n-1}.

Pour fixer les idées, et abréger, prenons $n = 5$; et soit, s'il est possible,

$$a + b = 5q; \tag{9}$$

puis, par conséquent,

$$c = 5c'. \tag{10}$$

L'équation

$$(5q - a)^5 + a^5 = (5c')^5,$$

ou

$$(5q)^5 - 5(5q)^4 a + 10(5q)^3 a^2 - 10(5q)^2 a^3 + 5(5q)a^4 = 5^5 c'^5, \tag{11}$$

est réductible à la forme

$$5^3 A q^2 + 5^2 q a^4 = 5^5 c'^5,$$

c'est-à-dire à celle-ci :

$$5Aq^2 + qa^4 = 5^3 c'^5.$$

a ne pouvant être divisible par 5 (*), on doit avoir

$$q = 5q'.$$

(*) A cause des relations (9), (10).

Par suite,

$$5^2Bq'^2 + q'a^4 = 5^2c'^5.$$

Cette équation exige que

$$q' = 5q'' \text{ (*)}.$$

Donc

$$5^3Cq''^2 + q''a^4 = 5c'^5;$$

puis

$$q'' = 5q''',$$

et enfin

$$a + b = 5^4q'''.$$

VI. Théorème III. — *Si la somme* a + b *est divisible par un nombre premier* p, *différent de* n, *elle est divisible par* p^n.

Prenons encore $n = 5$, et supposons

$$a + b = pq,$$

hypothèse d'où résulte

$$c = pc'.$$

L'équation (11) est remplacée par

$$(pq)^5 - 5(pq)^4a + 10(pq)^3a^2 - 10(pq)^2a^3 + 5(pq)a^4 = p^5c'^5,$$

laquelle peut être écrite ainsi :

$$Apq^2 + 5qa^4 = p^4c'^5.$$

Opérant comme ci-dessus, on trouve :

$$q = pq', \quad q' = pq'', \quad q'' = pq''', \quad q''' = pq^{\text{IV}};$$

puis

$$a + b = p^5q^{\text{IV}}.$$

VII. Théorème IV. — *Si la somme* a + b *est divisible par une puissance de* n, *supérieure à* n^{n-1}, *elle est divisible par* n^{2n-1}.

Prenant encore $n = 5$, supposons

$$a + b = 5^5q;$$

(*) On pourrait écrire, tout de suite,

$$q' = 5^2q''';$$

mais nous croyons rendre la démonstration plus claire en divisant, successivement, par q.

et, par conséquent,

$$c = 5^5 c'.$$

De là résulte, sous forme abrégée, l'équation

$$5^6 A q^2 + 5 q a^4 = c'^5.$$

Celle-ci exige que

$$c' = 5c'', \quad q = 5^4 q'.$$

Donc

$$a + b = 5^9 q'.$$

VIII. Théorème V. — *Si la somme* a + b *est divisible par une puissance du nombre premier* p (différent de n), *supérieure à* p^n, *elle est divisible par* p^{2n}.

Même démonstration.

IX. Théorème VI. — *La somme* a + b *a la forme* $\frac{1}{n}\mathrm{P}^n$, *ou la forme* P^n, *selon qu'elle est divisible ou non divisible par* n.

Cette proposition est un simple corollaire de celles qui précèdent.

X. Théorème VII. — *La différence* c — a *ne peut être un nombre premier autre que* n (*).

Si, dans l'équation de Fermat, on change c en $-c$, elle devient

$$a^n + b^n + c^n = 0.$$

A cause de cette forme symétrique, employée par Legendre, toutes les propriétés relatives à la somme $a + b$ subsistent pour $a + c$ et $b + c$; c'est-à-dire, en reprenant la notation primitive, pour $c - a$ et $c - b$. Le Théorème I, seul, peut faire exception.

En effet, si l'on suppose $c - a = p$, et que l'on répète les raisonnements employés ci-dessus (IV), on trouve $p = n, b = nb'$; puis

$$n^n < n^n b'^n;$$

inégalité *évidente* (**).

(*) De même pour $c - b$.

(**) On ne peut supposer $b' = 1$; car cette hypothèse donne

$$a^n + n^n = (a + n)^n.$$

Ce cas d'exception étant mis de côté (*), nous pouvons nous contenter d'énoncer la proposition suivante.

XI. Théorème VIII. — *Chacune des différences* c — a, c — b *a la forme* $\frac{1}{n}$ P^n, *ou la forme* P^n.

XII. Corollaire. — *Aucun des nombres* a + b, c — a, c — b *n'est premier.*

XIII. *Suite.* — Soient, s'il est possible :

$$a+b=c'^n, \quad c-a=b'^n, \quad c-b=a'^n. \qquad (12)$$

On tire, de ces équations :

$$a=\frac{1}{2}(a'^n-b'^n+c'^n), \quad b=\frac{1}{2}(b'^n-a'^n+c'^n), \quad c=\frac{1}{2}(a'^n+b'^n+c'^n); \qquad (13)$$

puis

$$a+b-c=\frac{1}{2}(-a'^n-b'^n+c'^n). \qquad (14)$$

La relation (7) devient donc

$$(a'^n+c'^n-b'^n)^n+(b'^n+c'^n-a'^n)^n=(a'^n+b'^n+c'^n)^n. \qquad (15)$$

Dans les développements de

$$(a'+b'+c')^n, \quad (b'+c'-a')^n, \quad (c'+a'-b')^n,$$

tous les termes, sauf $\pm a'^n$, $\pm b'^n$, $\pm c'^n$, sont divisibles par n (**). Ainsi

$$-a'^n-b'^n+c'^n=\mathfrak{M}(n);$$

ou, par l'égalité (14) :

$$a+b-c=\mathfrak{M}(n).$$

(*) On va voir qu'il n'existe pas.

(**) En effet,

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots(n-\alpha-\beta)}=\mathfrak{M}(n),$$

si α, β *et* n — α — β *sont différents de* n.

XIV. Théorème IX.

$$
\left.\begin{aligned}
1^\circ \qquad (x+y)^n - x^n - y^n &= nxy(x+y)\,\mathrm{P},\\
\mathrm{P} &= \mathrm{H}_1 x^{n-3} + \mathrm{H}_2 x^{n-4} y + \cdots + \mathrm{H}_1 y^{n-3}.
\end{aligned}\right\} \quad (15)
$$

2° *Les coefficients sont donnés par la formule*

$$\mathrm{H}_p = \frac{1}{n}\left[\mathrm{C}_{n-1,p} \pm 1\right],$$

le signe + répondant au cas où p *est impair.*

3° *Le polynôme* **P** *est divisible par* $x^2 + xy + y^2$ (*).

1° n étant premier, impair, la première partie est évidente.

2° Pour établir la deuxième, il suffit d'observer que

$$\mathrm{P} = \frac{1}{n}\left[(x+y)^{n-1} - (x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + y^{n-1})\right],$$

$$= \frac{1}{nxy}\left[(\mathrm{C}_{n-1,1}+1)x^{n-3} + (\mathrm{C}_{n-1,2}-1)x^{n-4} + \cdots + (\mathrm{C}_{n-1,1}+1)y^{n-3}\right].$$

3° Enfin, si l'on fait $y = zx$, l'équation $\mathrm{P} = 0$ entraîne celle-ci :

$$(z+1)^n - z^n - 1 = 0,$$

laquelle est vérifiée par

$$z = \cos\frac{2\pi}{3} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{3},$$

comme on le reconnaît aisément. En outre, chacune de ces expressions est racine de l'équation dérivée :

$$(z+1)^{n-1} - z^{n-1} = 0,$$

quand n a la forme $6\mu + 1$ (**).

(*) Et même par $(x^2 + xy + y^2)^2$, si $n = \mathfrak{M}(6) + 1$ (Cauchy, *Journal de Liouville*, t. V, p. 213).

(**) Ce procédé, plus simple que celui de Cauchy, est dû, je pense, à M. Stern.

XV. *Remarques.* — 1° *Si*

$$n = 7, \quad P = (x^2 + xy + y^2)^2 \text{ (*)}.$$

2° $$H_p + H_{p+1} = \frac{1}{n}(C_{n-1,p} + C_{n-1,p+1}) = \frac{1}{n} C_{n,p+1},$$

ou

$$H_p + H_{p+1} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{2.3..(p+1)}.$$

3° $H_1 = 1$; donc

$$H_2 = \frac{n-1}{2} - 1, \quad H_3 = \frac{(n-1)(n-2)}{2.3} - \frac{n-1}{2} + 1,$$

$$H_4 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} - \frac{(n-1)(n-2)}{2.3} + \frac{n-1}{2} + 1;$$

etc.

4° Si l'on fait $y = x$, l'égalité (14) se réduit à

$$\frac{2^{n-1}-1}{n} = H_1 + H_2 + H_3 + \cdots + H_3 + H_2 + H_1 \text{ (**)}. \qquad (15)$$

Voici donc une décomposition du nombre $\frac{2^{n-1}-1}{n}$, en parties entières, additives, différente de celle qui est exprimée par la formule (à peu près évidente) :

$$\frac{2^{n-1}-1}{n} = 1 + \frac{1}{3}C_{n-1,2} + \frac{1}{5}C_{n-1,4} + \cdots + \frac{1}{n-2}C_{n-1,n-3} \text{ (***)}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 1885, p. 520.

(**) Par exemple,

$$\frac{2^{10}-1}{11} = 93 = 1 + 4 + 11 + 19 + 23 + 19 + 11 + 4 + 1.$$

(***) Voir ci-dessus, p. 301. Dans la Note intitulée : *Sur quelques développements de sin* nx *et de cos* nx, on trouve cette autre décomposition :

$$\frac{2^{n-1}-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}[1 - C_{n-2,1} \cdot 2^{n-3} + C_{n-3,2} \cdot 2^{n-5} + \cdots].$$

Mais elle doit être attribuée à M. *Baehr* (*Nouvelles Annales*, 1869, p. 562).

XVI. Théorème X. — *La différence entre les puissances* n$^{\text{ièmes}}$ *de deux nombres entiers consécutifs,* a, a + 1, *étant diminuée de l'unité, est divisible* par $na(a+1)(a^2+a+1)$ (*).

Conséquence immédiate du Théorème IX.

XVII. Corollaire. — *Si, dans l'équation de Fermat, le nombre* a *est premier,*

$$a^n - 1 = \mathfrak{M}\left[nb(b+1)(b^2+b+1)\right] (^{**}).$$

XVIII. Soit, dans cette même équation (7),

$$c = a + b - \gamma.$$

Elle devient

$$\frac{n}{1}(a+b)^{n-1}\gamma - \cdots + \gamma^n = (a+b)^n - a^n - b^n;$$

ou, par les formules (15) :

$$\frac{n}{1}(a+b)^{n-1}\gamma - \cdots + \gamma^n = nab(a+b)\mathrm{P}, \tag{16}$$

P représentant la quantité

$$\mathrm{H}_1 a^{n-3} + \mathrm{H}_2 a^{n-4} b + \cdots + \mathrm{H}_1 b^{n-3}.$$

Le premier membre est divisible par γ. Ainsi :

Le nombre γ (s'il existe), *compris entre zéro et* $\frac{1}{2}$(a + b) (***), *divise* nab(a + b) P ($^{\text{IV}}$).

(*) Ce théorème suppose $n > 3$. Les facteurs a, $a+1$, a^2+a+1 sont premiers entre eux, deux à deux. En outre, le troisième égale le produit des deux autres, augmenté de 1.

(**) Par le théorème de M. de Jonquières.

(***) A cause de

$$c > \frac{1}{2}(a+b).$$

($^{\text{IV}}$) J'essaierai de revenir sur cette question. (Décembre 1886.)

NOTE POUR LA PAGE 352.

On sait : 1° que *le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère* ABCD *est une conique* H (*); 2° que *le centre* I, *de* H, *est le milieu de* MN.

Cela posé : *γ est le point de l'hyperbole* H, *diamétralement opposé au centre* O *du cercle* ABCD; ou encore : *le point γ est le centre de la circonférence circonscrite au quadrilatère* A'B'C'D', *symétrique de* ABCD, *relativement au milieu* I *de* MN.

(*) Une hyperbole, dans le cas où les données ont la disposition actuelle.

FIN DU TOME DEUXIÈME.

ERRATA DU TOME I.

Page 24 La première note doit être rectifiée ainsi :

J'ai publié ce théorème en 1844, dans le *Cours de Mathématiques,* d'Auguste Blum. Dans les *Nouvelles Annales* (1858), il est attribué à M. Hermite. D'après une Note de M. de Longchamps (*Journal,* janvier 1886), il est dû à *Paoli.* Mais Le Besgue, cité par mon honorable Collègue et ami, attribue, au Géomètre italien, un théorème différent de celui dont il s'agit.

Page 205, paragraphe VIII, *au lieu de* $\frac{1}{30}$, *lisez* $\frac{1}{50}$.

ERRATA DU TOME II.

Page 39, ligne 6, *au lieu de* $(xy'' + yx'')^2$, *lisez* $(xy'' - yx'')^2$.

— 41, paragraphe XV, *au lieu de* $N = 42^2 + 64^2 + 22^2 + 16^2$, *lisez* $N = 41^2 + 33^2 + 17^2 + 7^2$.

— 62, ligne 7, *au lieu de* $\frac{1}{y} = 1 - \sqrt{1 - 4x}$, *lisez* $\frac{1}{y} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{4x}$.

— 67, — avant-dernière. Le facteur 37 doit être suivi de 41.

— 91, — 4, en remontant, *au lieu de* $\int^p \left(1 + \frac{1}{1-x}\right)$, *lisez* $\int^p \left(1 + \frac{x}{1-x}\right)$.

— — — 2, — — — $\frac{x}{x-1}$, *lisez* $\frac{x}{1-x}$.

— 129, — 4, — — — $\frac{q^5}{1-q^{10}} +$, *lisez* $\frac{q^5}{1-q^{10}} -$.

TABLE DES MATIÈRES.