This page intentionally left blank.

# MÉLANGES

# MATHÉMATIQUES

PAR

**Eugène-Charles CATALAN,**

Ancien élève de l'École polytechnique, Professeur émérite à l'Université de Liège;
Associé de l'Académie de Belgique, de l'Académie des sciences de Toulouse
et de la Société des sciences de Lille;
Correspondant des Académies de St-Pétersbourg, de Turin, des *Nuovi Lincei;*
Membre de la Société des sciences de Liège,
de la Société mathématique de France et de la Société philomathique de Paris;
Correspondant de la Société mathématique d'Amsterdam,
de l'Institut national génevois, de la Société havraise d'études diverses
et de la Société d'agriculture de la Marne.

---

« Ceci est mon testament. »

---

TOME PREMIER.

---

# AVERTISSEMENT.

J'aurais voulu, dans une courte préface, faire connaître l'origine de ce livre, en expliquer l'épigraphe, et remercier la Société des sciences, de Liège, pour la généreuse hospitalité qu'elle m'accorde. Une grave maladie m'empêche, quant à présent, d'exécuter ces projets.

E. C.

Liège, 25 avril 1885.

# MÉLANGES

# MATHÉMATIQUES.

## I. — Sur les combinaisons avec répétition. (1838) (*).

Le terme général du développement de

$$(a + b + c + \cdots + t)^m$$

est, comme l'on sait,

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\alpha \times 1.2.3\ldots\beta \times \ldots \times 1.2.3\ldots\theta} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots t^\theta, \qquad (1)$$

les exposants $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., $\theta$ satisfaisant à la condition

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \theta = m. \qquad (2)$$

Le nombre des termes de ce développement est celui des solutions, en nombres entiers non négatifs (**), de l'équation (2),

(*) Cette Note, qui a paru dans le *Journal de Liouville* (t. III), a été écrite à l'occasion d'un Mémoire de Brianchon (*Journal de l'École polytechnique*, 25e Cahier).

(**) C'est afin d'éviter toute ambiguïté que j'emploie cette locution : *nombres non négatifs,* bien qu'elle me paraisse constituer un véritable pléonasme : *un nombre,* c'est-à-dire le rapport de deux grandeurs de même espèce, *est essentiellement positif.*

qui renferme $n$ inconnues, $n$ étant le nombre des termes du polynôme proposé; ou le nombre de manières dont il est possible de former une somme $m$ avec $n$ nombres entiers, positifs ou nuls; ou enfin le nombre de combinaisons que l'on peut effectuer avec $n$ lettres différentes, prises $m$ à $m$, chaque lettre pouvant entrer 0, 1, 2, ..., $m$ fois dans chaque combinaison. C'est de ce dernier point de vue que je considère la question, et je représente par N le nombre cherché.

Afin de trouver N, j'observe que, pour former les *combinaisons avec répétition* dont il s'agit, on pourrait employer le moyen suivant :

$a$, $b$, $c$ étant, pour fixer les idées, trois lettres qu'il s'agit de combiner 7 à 7 :

1° Prenons la quantité $a'b'c'd'e'f'g'$, qui renferme 7 lettres accentuées, écrites dans l'ordre alphabétique;

2° Dans un terme quelconque égal à celui-là, effaçons 1, 2 ou 3 lettres (en général, $n$ lettres au plus si $n$ est $< m$, $m$ lettres au plus si $n$ est $> m$); puis remplaçons chaque lettre effacée par une des lettres $a$, $b$, $c$ (en général, par une des lettres $a, b, c, ..., t$), en ayant soin que, dans chaque terme ainsi formé, les lettres sans accents n'offrent pas d'inversion alphabétique; qu'aucune ne soit répétée; et qu'une suite de lettres accentuées soit toujours précédée d'une lettre sans accent (ce qui exige que l'on efface toujours la lettre $a'$).

Nous obtiendrons ainsi une suite de termes tels que

$$ab'c'be'f'g', \quad abc'd'e'cg', \quad bb'c'd'cf'g', ...; \qquad \text{(A)}$$

3° Enfin, dans chacun des termes de la suite (A), remplaçons chaque lettre accentuée par la lettre sans accent qui la précède. Nous aurons la nouvelle suite :

$$aaabbbb, \quad abbbbcc, \quad bbbbccc... \qquad \text{(B)}$$

Si l'on a effectué sur la quantité $a'b'c'd'e'f'g'$ les opérations indiquées, de toutes les manières possibles, la suite (B) renfermera toutes les *combinaisons avec répétition* demandées.

Or, la suite (A), qui contient autant de termes que la suite (B), est formée des *combinaisons simples* des 6 lettres $b'$, $c'$, $d'$, $e'$, $f'$, $g'$ et des 3 lettres $a$, $b$, $c$, prises 7 à 7. Donc, en général,

$$N = C_{n+m-1,\, m} = C_{n+m-1,\, n-1};$$

savoir

$$N = \frac{n+m-1}{1} \cdot \frac{n+m-2}{2} \cdots \frac{n}{m}, \tag{3}$$

ou

$$N = \frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \cdots \frac{m+n-1}{n-1}. \tag{4}$$

Les formules (3) et (4) donnent le nombre des termes du développement dont (1) est le terme général.

*Addition.* — (*Mars* 1881.)

La démonstration précédente peut être abrégée (*).

Soient les combinaisons

$$aaabbbb, \quad abbbbcc, \quad bbccccc, \quad aaaaacc, \ldots \tag{B}$$

Dans chacune, substituons, à chaque lettre *répétée*, le rang qu'elle occupe : la suite (B) sera remplacée par

$$a23b567, \quad ab345c7, \quad b2c4567, \quad a2345c7, \ldots$$

Cette nouvelle suite contient toutes les combinaisons, *simples*, des 3 lettres $a$, $b$, $c$ et des 6 nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7 ; etc. (**).

(*) *Cours d'analyse de l'Université de Liège.*

(**) Un récent numéro des *Comptes rendus* renferme une démonstration de la formule

$$N = C_{n+m-1,\, m}$$

remarquable par la longueur : elle contient trois pages !

## II. — Aire de l'hyperboloïde à une nappe. (1839.)

I. Soit

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} - \frac{z'^2}{\gamma^2} = 1 \tag{1}$$

l'équation de l'hyperboloïde. L'aire de la partie de cette surface comprise entre le plan des $xy$ et un plan parallèle au premier est déterminée par la formule

$$A = 4\iint dx'dy' \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)\frac{x'^2}{\alpha^2} + \left(1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\frac{y'^2}{\beta^2} - 1}{\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} - 1}}, \tag{2}$$

dans laquelle $x'$ et $y'$ doivent recevoir toutes les valeurs positives satisfaisant aux conditions

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} \geqq 1, \tag{3}$$

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} \leqq 1 + \frac{h^2}{\gamma^2}: \tag{4}$$

$h$ est la distance des deux plans-limites, ou la hauteur de la zone hyperboloïdique.

II. Si nous posons, pour abréger :

$$\frac{x'}{\alpha} = x, \quad \frac{y'}{\beta} = y, \quad 1 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = a^2, \quad 1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2} = b^2, \quad \frac{h^2}{\gamma^2} = c^2, \tag{5}$$

les relations précédentes deviennent

$$A = 4\alpha\beta\iint dxdy\sqrt{\frac{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 1}}, \tag{6}$$

$$x^2 + y^2 \geqq 1, \tag{7}$$

$$x^2 + y^2 \leqq 1 + c^2. \tag{8}$$

III. Afin de réduire l'intégrale double (6) à une intégrale simple, j'emploie la méthode exposée dans mon *Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples,* c'est-à-dire que je suppose, simultanément :

$$F(v) = \iint dxdy \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}, \tag{9}$$

$$x^2 + y^2 - 1 \overline{\gtrless} 0, \quad x^2 + y^2 - 1 \overline{\lessgtr} v^2; \tag{10}$$

alors la formule (6) devient

$$A = 4\alpha\beta \int_0^e \frac{d.F(v)}{v}; \tag{11}$$

et le problème est réduit à trouver l'intégrale (9), ou seulement sa dérivée relative à $v$.

IV. A cet effet, soient

$$x = u \cos\varphi, \quad y = u \sin\varphi;$$

d'où

$$F(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{1+v^2}} udu \sqrt{(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)\, u^2 - 1};$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{v}\frac{d.F(v)}{dv} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{(a \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)(1 + v^2) - 1}. \tag{12}$$

Au moyen de cette valeur, la formule (11) devient

$$A = 4\alpha\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^e dv \sqrt{(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)(1 + v^2) - 1}. \tag{13}$$

V. En général,

$$\int_0^v dv\sqrt{Pv^2+Q} = \frac{1}{2}\left\{ v\sqrt{Pv^2+Q} + \frac{Q}{\sqrt{P}}\, \mathfrak{L}^{(*)}\, \frac{v\sqrt{P}+\sqrt{Pv^2+Q}}{\sqrt{Q}} \right\};$$

(*) Cette lettre désigne un logarithme népérien.

donc

$$\int_0^c dv\sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(1+v^2) - 1}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ c\sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(1+c^2) - 1} + \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}\,\mathcal{L}\,\Phi \right\};$$

en posant, pour abréger,

$$\Phi = \frac{c\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} + \sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(1+c^2) - 1}}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - 1}}.$$

La substitution dans la formule (13) donne

$$\mathrm{A} = 2c\alpha\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(1+c^2) - 1}$$

$$+ 2\alpha\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}\,\mathcal{L}\,\Phi\,;$$

d'où enfin, à cause des valeurs (5) :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{2h}{\gamma^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{h^2\alpha^2\beta^2 + (h^2+\gamma^2)\gamma^2(\beta^2\cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi)} \\ &+ 2\gamma^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\frac{\beta^2\cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi}{\sqrt{\alpha^2\beta^2 + \gamma^2(\beta^2\cos^2\varphi + \alpha\sin^2\varphi)}}\,\mathcal{L}\,\Phi_1, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$\Phi_1$ représentant la quantité

$$\frac{h\sqrt{\alpha^2\beta^2 + \gamma^2(\beta^2\cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi)} + \sqrt{h^2\alpha^2\beta^2 + \gamma^2(h^2+\gamma^2)(\beta^2\cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi)}}{\gamma^2\sqrt{\beta^2\cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi}}.$$

### *Addition.* — (*Août* 1865.)

VI. Les trajectoires orthogonales des sections parallèles au plan des $xy$ sont caractérisées par l'équation

$$\alpha^2 y'dx' - \beta^2 x'dy' = 0. \qquad (15)$$

Soient $ds$ l'élément d'une section parallèle, $d\sigma$ l'élément d'une trajectoire : $dA = dsd\sigma$.

Premièrement, si l'on différencie l'équation (1) en y supposant $z'$ constante, et que l'on fasse, pour plus de symétrie,

$$\frac{x'}{\alpha} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{z'^2 + \gamma^2}\cos\theta, \quad \frac{y'}{\beta} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{z'^2 + \gamma^2}\sin\theta,$$

on trouve

$$ds = \frac{\sqrt{z'^2 + \gamma^2}}{\gamma}\sqrt{\beta^2\cos^2\theta + \alpha^2\sin^2\theta}\, d\theta. \tag{16}$$

En second lieu, l'équation (1), différenciée par rapport aux trois variables, donne

$$\beta^2 x'dx' + \alpha^2 y'dy' = \frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2} z'dz';$$

d'où, à cause de la relation (15) :

$$dx' = \frac{\alpha^2\beta^4 x'z'}{\gamma^2(\alpha^4 y'^2 + \beta^4 x'^2)}dz', \qquad dy' = \frac{\alpha^4\beta^2 y'z'}{\gamma^2(\alpha^4 y'^2 + \beta^4 x'^2)}dz';$$

ou, ce qui est équivalent :

$$dx' = \frac{\alpha\beta^2}{\gamma}\frac{z'dz'}{\sqrt{z'^2 + \gamma^2}}\frac{\cos\theta}{\alpha^2\sin^2\theta + \beta^2\cos^2\theta},$$

$$dy' = \frac{\alpha^2\beta}{\gamma}\frac{z'dz'}{\sqrt{z'^2 + \gamma^2}}\frac{\sin\theta}{\alpha^2\sin^2\theta + \beta^2\cos^2\theta}.$$

Il résulte, de ces valeurs,

$$d\sigma = dz'\sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2 z'^2}{\gamma^2(z'^2 + \gamma^2)(\alpha^2\sin^2\theta + \beta^2\cos^2\theta)} + 1}. \tag{17}$$

Par suite,

$$dA = \frac{1}{\gamma^2}d\theta dz'\sqrt{[\alpha^2\beta^2 + \gamma^2(\alpha^2\sin^2\theta + \beta^2\cos^2\theta)]z'^2 + \gamma^4(\alpha^2\sin^2\theta + \beta^2\cos\theta)};$$

ou plutôt

$$A = \frac{8}{\gamma^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^h dz' R, \tag{18}$$

avec

$$R = \sqrt{[\alpha^2\beta^2 + \gamma^2(\alpha^2 \sin^2\theta + \beta^2 \cos^2\theta)] z'^2 + \gamma^4 (\alpha^2 \sin^2\theta + \beta^2 \cos^2\theta)}.$$

A cause des notations (5), la relation (18) ne diffère pas de la formule (13).

VII. Ce rapprochement donne lieu à la remarque suivante : la méthode dont j'ai fait usage, en 1839, pour ramener aux quadratures l'aire de l'ellipsoïde, équivaut à la décomposition de la surface en rectangles curvilignes. Cette décomposition, très laborieuse quand les rectangles sont déterminés par les lignes de courbure (*), devient incomparablement plus simple lorsque ces éléments résultent de sections parallèles à l'un des plans principaux, et de leurs trajectoires orthogonales.

*Autre addition.* — (*Octobre* 1881.)

A la fin d'une *Note sur la détermination de l'aire de l'ellipsoïde* (**), j'ai donné la relation suivante :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - a^2 \sin^2\varphi - b^2 \cos^2\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}} \, \mathcal{l} \, \frac{1 + \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}}{1 - \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}} \, d\varphi$$

$$= \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} - 1 + a\,E(k, \mu) + \frac{1 - a^2}{a} F(k, \mu),$$

dans laquelle :

$$a = \sin \mu, \quad b = ak, \quad k < 1.$$

(*) Voyez LEGENDRE, *Théorie des fonctions elliptiques*, t. I, p. 354.
(**) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, t. XXX.

Elle devient, pour $a = 1$ :

$$\frac{1-b^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-(1-b^2)\cos^2\varphi}}\, \mathcal{L}\frac{1+\sqrt{1-(1-b^2)\cos^2\varphi}}{1-\sqrt{1-(1-b^2)\cos^2\varphi}}$$
$$= -1 + E_1(b);$$

ou, si l'on a fait

$$1 - b^2 = c^2, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta :$$

$$E_1(b) = 1 + \frac{c^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}}\, \mathcal{L}\frac{1+\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}}{1-\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}}.$$

### III. — Sur l'intégrale $\iint dxdy \sqrt{\dfrac{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 1}}$.

Au lieu de prendre, pour conditions aux limites,

$$x^2 + y^2 \overline{>} 1, \quad x^2 + y^2 \overline{<} 1 + c^2,$$

comme dans la Note II, admettons que l'intégrale doive être étendue à toutes les valeurs de $x$ et de $y$ satisfaisant aux relations

$$x^2 + y^2 \overline{>} 1, \quad (c^2 - a^2)x^2 + (c^2 - b^2)y^2 \overline{<} c^2 - 1;$$

et supposons, en outre,

$$c > a > b > 1.$$

Soit

$$z^2 = \frac{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 1}:$$

l'intégrale, que je désignerai par V, représente le volume compris entre le plan des $xy$, la surface représentée, elle-même, par l'équation précédente, et les cylindres dont les équations seraient

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (c^2 - a^2)x^2 + (c^2 - b^2)y^2 = c^2 - 1.$$

Conséquemment (*)

$$V = \pi \int_{\infty}^{c} zd \,.\, XY,$$

en supposant

$$X = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2 - a^2}}, \quad Y = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2 - b^2}}.$$

On trouve ensuite, par un calcul facile,

$$V = \pi (a^2 - 1) \int_{c}^{\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 - a^2) \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}}$$

$$+ \pi (b^2 - 1) \int_{c}^{\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 - b^2) \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}};$$

puis, en prenant

$$z^2 - a^2 = (z^2 - b^2) \sin^2 \varphi, \quad b = ea, \quad \sin \lambda = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2 - a^2 e^2}}:$$

$$V = \frac{\pi (a^2 - 1)}{a(1 - e^2)} \int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi}$$

$$+ \frac{\pi (a^2 e^2 - 1)}{a(1 - e^2)} \int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi};$$

ou encore

$$V = \frac{\pi (a^2 - 1)}{a} \int_0^{\mu} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} + \frac{\pi (a^2 e^2 - 1)}{a} \int_0^{\mu} \frac{d\theta}{(1 - e^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}},$$

pourvu que l'on suppose

$$\sin \theta = \frac{a}{z}, \quad \sin \mu = \frac{a}{c}.$$

(*) *Mémoire sur la réduction*, etc. (*Journal de Liouville*), t. IV, p. 525.

## IV. — Démonstration d'une formule de Dirichlet.

Cette formule, célèbre autant que remarquable, est

$$\iiint \ldots x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots=\frac{\alpha^a\beta^b\gamma^c\ldots}{pqr\ldots}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\cdots}{\Gamma\left(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\cdots\right)}. \quad \text{(A)}$$

On suppose les $n$ variables $x, y, z, \ldots$, positives et satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p+\left(\frac{y}{\beta}\right)^q+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^r+\cdots \overline{\overline{<}}\, 1,$$

dans laquelle les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\, p, q, r, \ldots$ sont positives.

Pour établir la relation (A), je commence, comme le fait M. Liouville (*), par la réduire à celle-ci :

$$A=\iiint \ldots x^{\frac{a}{p}-1}\,y^{\frac{b}{q}-1}\,z^{\frac{c}{r}-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots=\frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\cdots}{\Gamma\left(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\cdots\right)}, \quad \text{(B)}$$

dans laquelle

$$x+y+z+\cdots \overline{\overline{<}}\, 1.$$

Soit maintenant

$$B=\iint \ldots y^{\frac{b}{q}-1}\,z^{\frac{c}{r}-1}\ldots dy\,dz\ldots,$$

la condition aux limites étant

$$y+z+\cdots \overline{\overline{<}}\, 1;$$

et soit V ce que devient la même intégrale B, lorsque la condition aux limites est

$$y+z+\cdots \overline{\overline{<}}\, 1-x.$$

(*) *Journal de mathématiques*, t. IV, p. 225.

Il est visible que

$$V = (1 - x)^{n - 1 + \frac{b}{q} - 1 + \frac{c}{r} - 1 + \cdots} B,$$

ou

$$V = (1 - x)^{\frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \cdots} B.$$

D'ailleurs

$$A = B \int_0^1 x^{\frac{a}{p} - 1} (1 - x)^{\frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \cdots} dx;$$

ou, d'après une formule connue,

$$A = B \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \cdots\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \cdots\right)}. \tag{C}$$

Cette relation (C), qui réduit le cas de $n$ variables à celui de $n - 1$ variables, équivaut au théorème proposé; car, dans le cas d'une seule variable $u$, l'on a

$$\int_0^1 u^{\frac{f}{t} - 1} du = \frac{t}{f} = \frac{\Gamma\left(\frac{f}{t}\right) \Gamma(1)}{\Gamma\left(1 + \frac{f}{t}\right)}.$$

## V. — Réduction d'une intégrale multiple (*).

Soit

$$A_n = \int dx dy dz \ldots \sqrt{\frac{1 - (x^2 + y^2 + z^2 + \cdots)}{1 + (x^2 + y^2 + z^2 + \cdots)}}, \tag{1}$$

les $n$ variables, supposées positives, satisfaisant à la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 + \cdots \overline{\underline{<}}\ 1.$$

(*) Cette Note est extraite, en partie, du *Journal de Liouville* (t. IV).

Je pose, à l'ordinaire (*),

$$\frac{1-(x^2+y^2+z^2+\cdots)}{1+(x^2+y^2+z^2+\cdots)}=v^2;$$

d'où résulte

$$x^2+y^2+z^2+\cdots=\frac{1-v^2}{1+v^2}:$$

les limites de $v$ sont 1 et 0. Si donc je représente par $F(v)$ l'intégrale

$$\int dxdydz\ldots,$$

la condition aux limites étant

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{1-v^2}{1+v^2}}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{1-v^2}{1+v^2}}}\right)^2+\cdots \overline{\overline{<}}\, 1,$$

j'aurai

$$A_n=\int^1 vd\,.\,F(v). \tag{2}$$

Par la formule de Dirichlet,

$$F(v)=\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^{\frac{n}{2}};$$

donc

$$A_n=\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\int_1^0 vd\,.\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^{\frac{n}{2}};$$

ou

$$A_n=2n\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\int_0^1\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\frac{v^2dv}{(1+v^2)^2}. \tag{3}$$

(*) *Mémoire sur la réduction*, etc.

Soit

$$v = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi;$$

d'où

$$\frac{1 - v^2}{1 + v^2} = \cos \varphi, \quad v^2 = \frac{1 - \cos \varphi}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}, \quad \frac{dv}{(1 + v^2)^2} = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} \varphi d\varphi :$$

la formule (3) devient

$$A_n = \frac{n}{2} \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{2} - 1} \varphi (1 - \cos \varphi) \, d\varphi,$$

ou

$$A_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{2} - 1} \varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{2} + 1} \varphi d\varphi \right]. \tag{4}$$

On a, par des formules connues :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{2} - 1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} (1 - \theta)^{\frac{n}{4} - 1} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n + 2}{4}\right)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{2} + 1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} (1 - \theta)^{\frac{n - 2}{4}} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n + 2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4} + 1\right)};$$

donc

$$A_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n + 2}{4}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{n + 2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4} + 1\right)} \right]. \tag{5}$$

Lorsque $n = 1$,

$$A_1 = \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right].$$

Mais

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)};$$

donc

$$\int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{4}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}.$$

Si l'on pose $x = \cos\varphi$, l'intégrale se transforme en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1-1+\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \sqrt{2}\left[F^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - E^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Ainsi, l'intégrale eulérienne, $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, et les intégrales elliptiques complètes, $E^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, $F^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, satisfont à la relation

$$F^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - E^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{8}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{\sqrt{\pi}} - \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}. \qquad (6)$$

*Additions.* — (*Octobre* 1881.)

I. Cette relation (6) est connue. En effet (*),

$$F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2;$$

donc, par le théorème de Legendre,

$$E_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{8\sqrt{\pi}} + \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2};$$

et, en conséquence,

$$F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - E_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{8\sqrt{\pi}} - \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}.$$

II. Si $n$ est un nombre pair $2n'$, la formule (4) devient

$$A_{2n'} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n'}}{\Gamma(n')}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n'-1}\varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n'+1}\varphi d\varphi\right].$$

Maintenant, il y a deux cas à distinguer.

1° Si $n'$ est *pair :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n'-1}\varphi d\varphi = \frac{2.4.6\ldots(n'-2)}{3.5.7\ldots(n'-1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n'+1}\varphi d\varphi = \frac{2.4.6\ldots n'}{3.5.7\ldots(n'+1)}.$$

(*) LEGENDRE, t. II, p. 382. L'illustre auteur écrit

$$\left(\frac{1}{1}\right) = 2^{\frac{1}{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-24}};$$

puis

$$\left(\frac{1}{1}\right) = F_1(\sin 45^\circ).$$

2° Si $n'$ est *impair :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n'-1} \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{1.3.5 \ldots (n'-2)}{2.4.6 \ldots (n'-1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n'+1} \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{1.3.5 \ldots n}{2.4.6 \ldots (n'+1)}.$$

Dans le premier cas,

$$A_{2n'} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n'}}{\Gamma(n')} \frac{2.4.6 \ldots (n'-2)}{3.5.7 \ldots (n'+1)}.$$

Dans le second :

$$A_{2n'} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n'+1}}{\Gamma(n')} \frac{1.3.5 \ldots (n'-2)}{4.6.8 \ldots (n'+1)}.$$

En résumé, *lorsque* n *est pair, l'intégrale* $A_n$ *dépend, uniquement, de la transcendante* $\pi$.

## VI. — Autre intégrale multiple.

Soit

$$B_n = \int \frac{dxdydz \ldots}{\sin(x+y+z+\ldots)},$$

les $n$ variables $x, y, z, \ldots$ étant positives et satisfaisant à la condition

$$x + y + z + \cdots \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on pose

$$x + y + z + \cdots = v,$$

on aura

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \,.\, F(v)}{\sin v},$$

pourvu que

$$F(v) = \int dx dy dz \ldots,$$

et que, dans cette intégrale multiple, les variables vérifient la relation

$$x + y + z + \cdots \overline{\overline{<}}\, v.$$

Or, par la Formule de Dirichlet (Note IV),

$$F(v) = \frac{v^n}{\Gamma(n+1)};$$

donc

$$B_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v^{n-1}\,dv}{\sin v}.$$

*Addition. — (Septembre* 1865.)

Si $n = 1$, l'intégrale est infinie.
Si $n = 2$,

$$B_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v\,dv}{\sin v} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{L}\operatorname{tg}\frac{v}{2}\,dv;$$

ou, en supposant $\operatorname{tg}\frac{1}{2}v = u$ :

$$B_2 = -2\int_0^1 \frac{\mathcal{L}u}{1+u^2}\,du = 2G\ (^*).$$

Dans le cas général, la détermination de l'intégrale simple, dont dépend $B_n$, paraît exiger l'emploi de séries compliquées (**).

(*) *Mémoire sur la transformation des séries et sur quelques intégrales définies.* (*Académie royale de Belgique, Savants étrangers,* t. XXXIII.) La constante G, égale à la somme de la série $1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \frac{1}{81} - \ldots$, a pour valeur 0,915 965 594 177 21...

Plus loin, nous reviendrons sur cette transcendante. Dans le petit Mémoire intitulé : *Recherches sur les déterminants* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique,* t. XIII, 1861), on trouve d'autres exemples d'intégrales multiples.

(**) Bierens de Haan, T. 239.

## VII. — Sur la partition des nombres.

Problème. — *Trouver le nombre* N *des solutions entières, positives, de l'équation*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = s,$$

*dans laquelle* s *est un nombre entier donné.*

La solution résulte immédiatement de ce que l'on a vu dans la Note I. En effet, l'équation ci-dessus peut être écrite ainsi :

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_n - 1) = s - n.$$

Donc *le nombre* N *des décompositions de la somme* s, *en* n *parties positives, est égal au nombre des décompositions de* s — n *en* n *parties, nulles ou positives* (*). Donc aussi, d'après la formule de la page 3,

$$N = C_{s-1,n-1} = \frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}.$$

*Addition.* — (*Septembre* 1865.)

Dans le développement de

$$(a + b + c + \cdots + k)^s,$$

le nombre des termes contenant *une seule* lettre est, d'après la formule précédente,

$$C_{s-1,0} \times \frac{n}{1},$$

$n$ désignant le nombre des lettres $a$, $b$, $c$, ... $k$.

(*) Il est bien entendu qu'il ne s'agit pas ici des décompositions *essentiellement différentes :* 3 + 2 et 2 + 3 sont considérées comme *deux décompositions* du nombre 5.

De même, les termes contenant *deux lettres* sont en nombre

$$C_{s-1,1} \times \frac{n(n-1)}{1.2};$$

et ainsi de suite.

Enfin, parmi les termes du développement considéré, le nombre de ceux qui contiennent les $n$ lettres est

$$C_{s-1,n-1} \times 1.$$

D'ailleurs, le nombre total des termes est, comme on l'a vu dans la Note I,

$$C_{n+s-1,s}.$$

On a donc la relation suivante, qui peut être démontrée directement :

$$C_{p,0} \times C_{n,1} + C_{p,1} \times C_{n,2} + \cdots + C_{p,n-1} \times C_{n,n} = C_{n+p,p+1}.$$

Par exemple, si $p = 12$ et $n = 5$ :

$$1 \times \frac{5}{1} + \frac{12}{1} \times \frac{5.4}{1.2} + \frac{12.11}{1.2} \times \frac{5.4}{1.2} + \frac{12.11.10}{1.2.3} \times \frac{5}{1}$$
$$+ \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} \times 1 = \frac{17.16.15.14}{1.2.3.4},$$

ou

$$5 + 12.10 + 66.10 + 220.5 + 495 = 2\,380;$$

ce qui est exact.

## VIII. — Sur la décomposition d'un produit en facteurs.

Problème. — *De combien de manières le produit* $abcd...k = N$, *composé de* n *facteurs premiers, inégaux, peut-il être décomposé en* p *facteurs?*

Soit $x_{n,p}$ ce nombre inconnu.

Si nous introduisons un nouveau facteur premier $l$, différent de $a, b, c, \ldots, k$, nous pourrons décomposer le produit $Nl$ en $p$ facteurs, soit en multipliant par $l$ un quelconque des $p$ facteurs dont le produit est N, soit en multipliant par $l$ le nombre N décomposé en $p - 1$ facteurs.

Par conséquent

$$x_{n+1,p} = px_{n,p} + x_{n,p-1},$$

ou

$$x_{n,p} = px_{n-1,p} + x_{n-1,p-1}. \qquad (1)$$

On conclut aisément de cette équation, à cause de $x_{p,p} = 1$ :

$$x_{n,p} = x_{n-1,p-1} + px_{n-2,p-1} + p^2x_{n-3,p-1} + \cdots + p^{n-p-1}x_{p,p-1} + p^{n-p}. \qquad (2)$$

Cette nouvelle *équation aux différences finies* est moins simple que la précédente : néanmoins, nous allons pouvoir en conclure, par induction, l'intégrale de celle-ci.

1° Soit d'abord $p = 2$ : l'équation (2) devient

$$x_{n,2} = x_{n-1,1} + 2.x_{n-2,1} + 2^2.x_{n-3,1} + \cdots + 2^{n-3}x_{2,1} + 2^{n-2}.$$

Mais, évidemment,

$$x_{n-1,1} = x_{n-2,1} = \cdots = x_{2,1} = 1;$$

donc

$$x_{n,2} = 2^{n-1} - 1 = \Delta(1^{n-1}). \qquad (3)$$

2° Soit $p = 3$ :

$$\begin{aligned} x_{n,3} &= (2^{n-2} - 1) + 3(2^{n-3} - 1) + 3^2(2^{n-4} - 1) + \cdots \\ &\quad + 3^{n-4}(2^2 - 1) + 3^{n-3}(2 - 1) \\ &= 2(2^{n-3} + 3.2^{n-4} + 3^2.2^{n-5} + \cdots + 3^{n-4}.2 + 3^{n-3}) \\ &\quad - (1 + 3 + \cdots + 3^{n-3}) \\ &= 2(3^{n-2} - 2^{n-2}) - \frac{3^{n-2} - 1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2.2^{n-1} + 1), \end{aligned}$$

ou

$$x_{n,3} = \frac{1}{2}\Delta^2(1^{n-1}). \qquad (4)$$

3° Soit encore $p = 4$ : l'équation (2) se réduit à

$$x_{n,4} = \frac{1}{2}(3^{n-2} - 2.2^{n-2} + 1) + 4.\frac{1}{2}(3^{n-3} - 2.2^{n-3} + 1)$$

$$+ 4^2\frac{1}{2}(3^{n-4} - 2.2^{n-4} + 1) + \cdots + 4^{n-5}\frac{1}{2}(3^3 - 2.2^3 + 1)$$

$$+ 4^{n-4}\frac{1}{2}(3^2 - 2.2^2 + 1)$$

$$= \frac{1}{2}3^2(3^{n-4} + 4.3^{n-5} + \cdots + 4^{n-4}) - 2^2(2^{n-4} + 4.2^{n-5} + \cdots + 4^{n-4})$$

$$+ \frac{1}{2}(1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-4})$$

$$= \frac{1}{2}.\,3^2(4^{n-3} - 3^{n-3}) - 2(4^{n-3} - 2^{n-3}) + \frac{1}{2.3}(4^{n-3} - 1)$$

$$= \frac{1}{2.3}(4^{n-1} - 3.3^{n-1} + 3.2^{n-1} - 1),$$

ou

$$x_{n,4} = \frac{1}{2.3}\Delta^3(1^{n-1}).$$

La loi des résultats est maintenant évidente; et l'on a, en général,

$$x_{n,p} = \frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)}\Delta^{p-1}(1^{n-1}). \qquad \text{(A)}$$

*Addition. — (Septembre* 1865.)

I. La valeur (A), substituée dans l'équation (1), conduit à la relation

$$\Delta^{p-1}(1^{n-1}) = p\,\Delta^{p-1}(1^{n-2}) + (p-1)\,\Delta^{p-2}(1^{n-2}),$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$\Delta^{p}(1^{n+1}) = (p+1)\,\Delta^{p}(1^{n}) + p\,\Delta^{p-1}(1^{n}). \qquad \text{(B)}$$

Celle-ci ne diffère pas de celle que j'ai employée dans ma Note *sur les différences de* $1^p$ *et sur le calcul des Nombres de*

*Bernoulli* (*). La concordance de ces relations est une vérification nouvelle de la formule (A).

II. Les valeurs de $x_{n,p}$ sont celles que j'ai désignées par $A_p$, $B_p$, $C_p$, ..., dans une Note *sur la somme des puissances semblables des nombres naturels* (**). De là résulte un rapprochement, assez inattendu, entre deux problèmes dont les énoncés sont bien différents.

III. Si l'on veut savoir *de combien de manières le nombre* N *est décomposable en facteurs,* il suffit de calculer

$$S_n = x_{n,1} + x_{n,2} + \cdots + x_{n,n}.$$

Soit, par exemple, $n = 6$ : la table contenue dans la Note dont il vient d'être question donne

$$x_{6,1} = 1,\quad x_{6,2} = 31,\quad x_{6,3} = 90,\quad x_{6,4} = 65,\quad x_{6,5} = 15,\quad x_{6,6} = 1;$$

donc

$$S_6 = 203.$$

## IX. — Analyse indéterminée du premier degré (***).

Si les coefficients $a$, $b$ sont entiers, premiers entre eux, et que $c$ soit entier, les solutions entières de l'équation

$$ax + by = c \tag{1}$$

sont, comme l'on sait, données par les formules :

$$x = \alpha - b\theta,\quad y = \beta + a\theta, \tag{2}$$

dans lesquelles $\alpha$, $\beta$ représentent un système de valeurs entières de $x$, $y$ : $\theta$ est un entier quelconque, positif, négatif ou nul.

(*) *Annali di matematica pura ed applicata,* t. II.

(**) *Nouvelles Annales de mathématiques,* t. XV, p. 210.

Plus loin, on trouvera ces deux Notes.

(***) *Nouv. Ann.,* 1844.

Supposons $a$, $b$, $c$ positifs. Alors les *solutions positives,* nécessairement en nombre limité, sont déterminées par les inégalités

$$\theta < \frac{a}{b}, \quad \theta > -\frac{a}{\beta}. \tag{3}$$

A cause de

$$a\alpha + b\beta = c,$$

on a

$$-\frac{\beta}{a} = \frac{a\alpha - c}{ab};$$

donc les inégalités (3) équivalent à celles-ci

$$\theta < \frac{a\alpha}{ab}, \quad \theta > \frac{a\alpha - c}{ab}. \tag{4}$$

La différence entre les deux limites de $\theta$ est $\frac{c}{ab}$. Conséquemment, la *partie entière de* $\frac{c}{ab}$, *ou cette partie entière augmentée d'une unité, indique le nombre des valeurs que l'on peut attribuer à* $\theta$. En d'autres termes : *le nombre des solutions positives de l'équation* (1) *est égal à l'un des deux quotients entiers de* c *par* ab (*).

*Addition.* — (*Septembre* 1865.)

Considérons d'abord le cas où $c$ serait un multiple de $ab$ : $c = abq$. On peut prendre $\beta = 0$, $\alpha = bq$ ; et il est clair, par les formules (2), que $\theta$ peut recevoir *les* $q+1$ *valeurs* $0, 1, 2, \ldots q$ (**).

En second lieu, supposons $c = abq + c'$, $c'$ étant positif et moindre que $ab$ ; puis prenons simultanément les équations

$$ax + by = abq + c', \tag{A}$$

$$ax' + by' = c', \tag{B}$$

(*) Ce petit théorème, que je trouve dans mes notes de 1839, est souvent attribué à M. Hermite. J'ignore si ce profond Géomètre l'a publié quelque part.

(**) A vrai dire, les solutions $x = 0$, $y = aq$ ; $x = bq$, $y = 0$ ne sont pas *essentiellement positives ;* néanmoins on peut les compter, parce qu'elles sont *non-négatives.*

d'où résulte celle-ci :

$$a(x - x') + b(y - y') = abq. \qquad (C)$$

Si l'équation (B), qui ne peut avoir plus d'une solution positive, en a réellement une, nous aurons, en désignant par $\alpha'$, $\beta'$, ces valeurs positives de $x'$, $y'$ :

$$y - \beta' = a\theta, \quad x - \alpha' = bq - b\theta;$$

ou

$$y = \beta' + a\theta, \quad x = \alpha' + b(q - \theta). \qquad (D)$$

A cause de $c' < ab$, on a

$$\beta' < a, \quad \alpha' < b:$$

donc les deux dernières formules donneront des valeurs positives si l'on fait $\theta = 0, 1, 2, \ldots q$.

Ainsi, *quand l'équation* (B) *admet un système de valeurs positives, l'équation* (A) *en admet* q + 1.

Si l'équation (B) n'a aucune solution positive, on peut supposer, dans les formules (D),

$$0 < \beta' < a, \quad 0 > \alpha' > -b:$$

ceci résulte des préliminaires de la théorie. Par suite, les seules valeurs admissibles pour $\theta$ sont $0, 1, 2, 3, \ldots q - 1$. Donc, *lorsque l'équation* (B) *n'admet aucune solution positive, l'équation* (A) *en admet seulement* q.

En résumé :

1° *Si* c = qab, *l'équation*

$$ax + by = c$$

*admet* q + 1 *solutions non-négatives;*

2° *Si* c = qab + c', *cette même équation admet* q + 1 *ou* q *solutions positives, suivant que l'équation auxiliaire*

$$ax' + by' = c'$$

*a ou n'a pas de solution positive.*

## X. — Sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^n}\, dx$ (*).

I. D'après une remarque faite par Poisson (**), si l'on appelle $y_n$ cette intégrale définie, on trouve aisément l'équation linéaire, d'ordre $2n$ :

$$y_n - \frac{n}{1}\frac{d^2 y_n}{d\alpha^2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^4 y_n}{d\alpha^4} - \dots \pm \frac{d^{2n} y_n}{d\alpha^{2n}} = y_0, \qquad (1)$$

dans laquelle « $y_0$ représente l'intégrale $\int_0^\infty \cos \alpha x dx$.

» Cette intégrale est, en général, indéterminée ; mais ici on
» peut la supposer nulle ; car, en adoptant cette valeur, on est
» conduit à

$$y_1 = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha},$$

» valeur exacte (***). »

II. A cause de $y_0 = 0$, l'équation (1) est vérifiée par $y_n = e^t$, $t$ représentant une racine quelconque de

$$1 - \frac{n}{1}t^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}t^4 - \dots + t^{2n} = 0,$$

ou de

$$(1-t^2)^n = 0. \qquad (2)$$

Cette équation (2) a $n$ racines égales à $+1$, et $n$ racines égales à $-1$. D'ailleurs l'intégrale proposée ne peut croître

(*) Le texte de cette Note, tel qu'il a paru dans le *Journal de Liouville* (t. V), renferme quelques fautes de calcul et d'impression.

(**) *Journal de l'École polytechnique* (16e Cahier, p. 222).

(***) M. Serret a critiqué, avec raison (*Journal de Liouville*, t. VIII, p. 191), l'emploi que j'ai fait de l'intégrale indéterminée $\int_0^\infty \cos \alpha x dx$, à l'exemple de Poisson. J'avais prévu l'objection qui pouvait être faite; car la phrase *guillemetée,* que je n'ai pas reproduite dans le *Journal de Liouville,* est tirée de ma rédaction primitive (15 février 1840). Du reste, je donne cette démonstration pour ce qu'elle vaut.

indéfiniment avec $\alpha$; par conséquent, la valeur de cette intégrale doit être donnée par la formule

$$y_n = e^{-\alpha}\left[A_0 + \frac{A_1}{1}\alpha + \frac{A_2}{1.2}\alpha^2 + \cdots + \frac{A_{n-1}}{1\ldots(n-1)}\alpha^{n-1}\right], \quad (3)$$

$A_0$, $A_1$, ... $A_{n-1}$ étant des constantes, qu'il s'agit de déterminer.

III. Pour cela, je représente par P le polynôme entre parenthèses, et je prends les $n-1$ premières dérivées des deux membres de l'égalité (3), ce qui donne généralement

$$\frac{d^i y_n}{d\alpha^i} = (-1)\,e^{i-\alpha}\left[P - \frac{i}{1}\frac{dP}{d\alpha} + \frac{i(i-1)}{1.2}\frac{d^2P}{d\alpha^2} - \cdots \pm \frac{d^iP}{d\alpha^i}\right]. \quad (4)$$

Faisant $\alpha = 0$ dans les équations (3) et (4), j'obtiens

$$(y_n) = A_0,$$

$$\left(\frac{d^iy}{d\alpha^i}\right) = (-1)^i\left[A_0 - \frac{i}{1}A_1 + \frac{i(i-1)}{1.2}A_2 - \cdots \pm A_i\right]: \quad (5)$$

$(y_n)$ et $\left(\frac{d^iy_n}{dx^i}\right)$ représentent les valeurs de $y_n$ et $\frac{d^iy_n}{dx}$ répondant à $\alpha = 0$.

La nature des équations (5) permet de les résoudre facilement: on trouve

$$A_i = (y_n) + \frac{i}{1}\left(\frac{dy_n}{d\alpha}\right) + \frac{i(i-1)}{1.2}\left(\frac{d^2y_n}{d\alpha^2}\right) + \cdots + \left(\frac{d^iy_n}{d\alpha_n}\right). \quad (6)$$

IV. J'observe, actuellement, que :

$$y_n = \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x dx}{(1+\alpha^2)^n},$$

$$\frac{dy_n}{d\alpha} = -\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x \,.\, x dx}{(1+\alpha^2)^n},$$

$$\frac{d^2y_n}{d\alpha^2} = -\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x \,.\, x^2 dx}{(1+x^2)^n},$$

$$\frac{d^3y_n}{d\alpha^3} = + \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \,.\, x^3 dx}{(1 + \alpha^2)^n},$$

$$\frac{d^4y_n}{d\alpha_n} = + \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \,.\, x^4 dx}{(1 + x^2)^n},$$

. . . . . . . . . . ;

d'où :

$$(y_n) = \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^n},$$

$$\left(\frac{dy_n}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2y}{d\alpha^2}\right) = - \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^n},$$

$$\left(\frac{d^3y}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^4y}{d\alpha n}\right) = + \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{(1 + x^2)^n},$$

. . . . . . . . . . .

Pour évaluer ces diverses intégrales définies, je considère généralement

$$B_p = \int_0^\infty \frac{x^{2p}\, dx}{(1 + x^2)^n}, \tag{7}$$

l'exposant $2p$ étant moindre que $n$ (*).

Si l'on pose

$$x^2 = \frac{\theta}{1 - \theta},$$

la formule (7) devient

$$B_p = \frac{1}{2} \int_0^1 \theta^{p - \frac{1}{2}} (1 - \theta)^{n - p - \frac{3}{2}} d\theta, \tag{8}$$

(*) L'intégrale $B_p$ ne devient infinie que pour $2p = 2n$; mais, dans la formule (6), $i$ est inférieur à $n$; et le nombre pair $2p$ remplace $i$.

ou

$$B_p = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-p-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}. \tag{9}$$

Par conséquent, à cause de l'égalité (6),

$$A_i = \frac{1}{2\Gamma(n)}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) - \frac{i(i-1)}{1.2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}\right)+\cdots\right]. \tag{10}$$

Lorsque $i$ est pair, le dernier terme de la quantité entre parenthèses est

$$\pm\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{i+1}{2}\right);$$

et, quand $i$ est impair, ce dernier terme égale

$$\pm i\,\Gamma\left(\frac{i}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{i}{2}\right).$$

V. La valeur de $A_i$ peut être écrite autrement.

Si l'on fait

$$x = \operatorname{tg}\varphi,$$

on trouve

$$B_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\varphi \cos^{2n-2p-2}\varphi d\varphi. \tag{11}$$

Par suite

$$A_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left[\cos^{2n-2}\varphi - \frac{i(i-1)}{1.2}\sin^2\varphi\cos^{2n-4}\varphi+\cdots\right]$$

La quantité entre parenthèses est la partie réelle du développement de $\cos^{2n-i-2}\varphi\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^i$; donc, par le Théorème de Moivre,

$$A_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-2}\varphi\cos i\varphi d\varphi. \tag{12}$$

VI. On a, identiquement,

$$\cos i\varphi = \cos\varphi\cos(i-1)\varphi - \sin\varphi\sin(i-1)\varphi;$$

donc

$$A_i=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-i-1}\varphi\cos(i-1)\varphi d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-i-2}\varphi\sin\varphi\sin(i-1)\varphi d\varphi;$$

ou, en intégrant par parties et observant que le terme

$$\frac{1}{2n-i-1}\cos^{2n-i-1}\varphi\sin(i-1)\varphi$$

s'annule aux deux limites :

$$A_i=2\frac{n-i}{2n-i-1}A_{i-1}. \tag{13}$$

D'ailleurs,

$$A_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}\varphi d\varphi=\frac{1}{2\Gamma(n)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right);$$

ou, par une formule de Legendre,

$$A_0=\frac{\pi}{2^{2n-2}}\frac{\Gamma(2n-2)}{\Gamma(n)\Gamma(n-1)}; \tag{14}$$

donc, après quelques réductions,

$$A_i=\frac{\pi}{2^{2n-i-1}}\frac{\Gamma(2n-i-1)}{\Gamma(n)\Gamma(n-1)}. \tag{15}$$

La comparaison des valeurs (10), (12) et (15) donne

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)-\frac{i(i-1)}{1.2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\&+\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}\right)-\ldots=\frac{\pi}{2^{2n-i-2}}\frac{\Gamma(2n-i-1}{\Gamma(n-i)},\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

ou

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-i-2}\varphi\cos i\varphi d\varphi=\frac{\pi}{2^{2n-i-1}}\frac{\Gamma(2n-i-1)}{\Gamma(n)\Gamma(n-i)}(^*). \tag{17}$$

(*) Cette formule, qui subsiste pour toutes les valeurs positives de $n$ et de $n-i-1$, paraît due à Cauchy (*Journal de Liouville*, t. VIII, p. 2) (septembre 1865).

VII. Revenant à l'intégrale proposée, je substitue les valeurs (15) dans la formule (3), et j'obtiens

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x dx}{(1+x^2)^n}\\ &=\frac{\pi e^{-\alpha}}{2^{2n-1}[\Gamma(n)]^2}\left[\Gamma(2n-1)+\frac{n-1}{1}(2\alpha)\Gamma(2n-2)+\cdots+(2\alpha)^{n-1}\Gamma(n)\right].\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Si, dans cette formule (18), on remplace les symboles $\Gamma$ par les intégrales eulériennes qu'ils représentent, on pourra l'écrire ainsi :

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x dx}{(1+x^2)^n}=\frac{\pi e^{-\alpha}}{2^{2n-1}[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty e^{-y}y^{n-1}(y+2\alpha)^{n-1}dy, \quad (19)$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x dx}{(1+x^2)^n}=\frac{\pi e^{-\alpha}}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty e^{-2z}z^{n-1}(z+\alpha)^{n-1}dz, \quad (20)$$

ou enfin, en représentant $\alpha+2z$ par $\alpha t$ :

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x dx}{(1+x^2)^n}=\frac{\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n-1}}{[\Gamma(n)]^2}\int_1^\infty e^{-\alpha t}(t^2-1)^{n-1}dt. \quad (21)$$

## XI. — Problème de minimum. (1841.)

*Mener un plan tangent à un ellipsoïde donné, de manière que le triangle formé par les intersections de ce plan avec les plans principaux, ait une aire minimum* (*).

I. L'ellipsoïde étant rapporté à ses axes, et $x, y, z$ désignant les coordonnées du point de contact, on a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \quad (1)$$

(*) Note rédigée à l'occasion d'une solution inexacte, publiée dans le tome III du *Journal de mathématiques*.

Le plan tangent coupe les axes en des points dont les distances au centre sont

$$\frac{a^2}{x}, \quad \frac{b^2}{y}, \quad \frac{c^2}{z}.$$

Les faces du tétraèdre tri-rectangle déterminé par les quatre plans ont donc pour aires, respectivement :

$$\frac{1}{2}\frac{b^2c^2}{yz}, \quad \frac{1}{2}\frac{c^2a^2}{zx}, \quad \frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{xy}.$$

Par suite, l'aire cherchée est

$$\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{yz}\right)^2 + \left(\frac{c^2a^2}{zx}\right)^2 + \left(\frac{a^2b^2}{xy}\right)^2},$$

ou

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{a^2b^2c^2}{xyzp}, \tag{2}$$

en supposant

$$\frac{1}{p^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}: \tag{3}$$

on sait que $p$ est la distance du centre au plan tangent.

II. Soient

$$\frac{x^2}{a^2} = u, \quad \frac{y^2}{b^2} = v, \quad \frac{z^2}{c^2} = w; \tag{4}$$

alors les équations (1), (2) peuvent être remplacées par

$$u + v + w = 1, \tag{5}$$

$$\varphi^2 = \frac{1}{4}\frac{a^2b^2c^2}{uvw}\left(\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2} + \frac{w}{c^2}\right). \tag{6}$$

La condition $d\varphi = 0$ équivaut à

$$\left(\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2} + \frac{w}{c^2}\right)\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}\right) - \left(\frac{du}{a^2} + \frac{dv}{b^2} + \frac{dw}{c^2}\right) = 0,$$

ou, plus simplement, à

$$\left(\frac{v}{b^2}+\frac{w}{c^2}\right)\frac{du}{u}+\left(\frac{w}{c^2}+\frac{u}{a^2}\right)\frac{dv}{v}+\left(\frac{u}{a^2}+\frac{v}{b^2}\right)\frac{dw}{w}=0. \tag{7}$$

D'ailleurs

$$du+dv+dw=0. \tag{8}$$

Si l'on combine par soustraction ces deux égalités, après avoir divisé tous les termes de la seconde par une indéterminée $\lambda^2$, et que l'on égale ensuite à zéro les coefficients des différentielles *du, dv, dw,* on aura

$$-\frac{u}{\lambda^2}+\frac{v}{b^2}+\frac{w}{c^2}=0,\ \frac{u}{a^2}-\frac{v}{\lambda^2}+\frac{w}{c^2}=0,\ \frac{u}{a^2}+\frac{v}{b^2}-\frac{w}{\lambda^2}=0; \tag{9}$$

relations d'où l'on tire aisément

$$2\lambda^6+(a^2+b^2+c^2)\lambda^4-a^2b^2c^2=0. \tag{10}$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{a^2+\lambda^2}+\frac{1}{b^2+\lambda^2}+\frac{1}{c^2+\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}, \tag{11}$$

ou encore sous celle-ci :

$$\frac{a^2}{a^2+\lambda^2}+\frac{b^2}{b^2+\lambda^2}+\frac{c^2}{c^2+\lambda^2}=2. \tag{12}$$

D'un autre côté, si l'on compare deux à deux les équations (9), on trouve

$$\frac{u}{\left(\frac{a^2}{a^2+\lambda^2}\right)}=\frac{v}{\left(\frac{b^2}{b^2+\lambda^2}\right)}=\frac{w}{\left(\frac{c^2}{c^2+\lambda^2}\right)}=\frac{1}{2}; \tag{13}$$

à cause des relations (1) et (12). Par suite :

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{2(a^2+\lambda^2)}},\quad y=\frac{b^2}{\sqrt{2(b^2+\lambda^2)}},\quad z=\frac{c^2}{\sqrt{2(c^2+\lambda^2)}}; \tag{14}$$

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2+\lambda^2}+\frac{1}{b^2+\lambda^2}+\frac{1}{c^2+\lambda^2}\right],$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (12) :

$$p = \lambda\sqrt{2}. \tag{15}$$

Enfin, le minimum cherché a pour valeur

$$\varphi = \frac{1}{\lambda}\sqrt{(\lambda^2 + a^2)(\lambda^2 + b^2)(\lambda^2 + c^2)}\ (^*). \tag{16}$$

*Addition.* — (*Octobre* 1865.)

III. On reconnaît, de diverses manières, que les équations (10), (11) ou (12) donnent, pour $\lambda^2$, une valeur positive et deux valeurs négatives. D'après les équations (9) ou (15), la valeur positive satisfait seule à la question. Pour simplifier l'équation (10), on peut faire

$$\lambda^2 = \frac{abc}{t}, \tag{17}$$

d'où l'on conclut

$$t^3 - (a^2 + b^2 + c^2)t - 2abc = 0. \tag{18}$$

Cette nouvelle équation, qui est bien connue, se rapporte au problème suivant : *Trouver le diamètre* t *d'un demi-cercle auquel on puisse inscrire trois cordes consécutives, égales à des droites données* a, b, c (**). On voit que si ce demi-cercle était tracé, il serait facile de construire les diverses lignes qui déterminent le triangle minimum. Ce rapprochement, entre deux problèmes d'apparences bien différentes, paraît assez curieux.

(*) Pour le détail des calculs, on peut consulter le *Cours d'analyse*.

(**) *Arithmétique universelle*, de Newton, t. I, pp. 120 et suiv.

*Autre addition.* — (*Octobre* 1880.)

I. Soit, généralement,

$$U = \frac{1}{uvw\ldots}\left(\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2} + \frac{w}{c^2} + \cdots\right), \tag{1}$$

les variables satisfaisant à la condition

$$u + v + w + \cdots = 1. \tag{2}$$

On trouve, en suivant la même marche que ci-dessus :

$$\frac{u}{\lambda^2} = \frac{v}{b^2} + \frac{w}{c^2} + \cdots, \quad \frac{v}{\lambda^2} = \frac{u}{a^2} + \frac{w}{c^2} + \cdots, \quad \frac{w}{\lambda^2} = \frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2} + \cdots \tag{3}$$

Je pose

$$\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2} + \frac{w}{c^2} + \cdots = X; \tag{4}$$

égalité d'où résulte :

$$u\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{a^2}\right) = X, \quad v\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{b^2}\right) = X, \quad w\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{c^2}\right) = X, \ldots; \tag{5}$$

puis, par substitution dans la formule (3),

$$\frac{1}{a^2 + \lambda^2} + \frac{1}{b^2 + \lambda^2} + \frac{1}{c^2 + \lambda^2} + \cdots = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Cette équation, dans laquelle $\lambda$ est l'inconnue, peut être écrite ainsi :

$$\frac{a^2}{a^2 + \lambda^2} + \frac{b^2}{b^2 + \lambda^2} + \frac{c^2}{c^2 + \lambda^2} + \cdots = n - 1, \tag{6}$$

$n$ étant le nombre des variables.

II. On tire, des relations (5), (2) et (6),

$$X = \frac{1}{(n-1)\lambda^2}. \tag{7}$$

Donc

$$u = \frac{1}{n-1}\,\frac{a^2}{a^2+\lambda^2}, \quad v = \frac{1}{n-1}\,\frac{b^2}{b^2+\lambda^2}, \quad w = \frac{1}{n-1}\,\frac{c^2}{c^2+\lambda^2}, \ldots; \quad (8)$$

puis

$$U = (n-1)^{n-1}\,\frac{(a^2+\lambda^2)(b^2+\lambda^2)(c^2+\lambda^2)\ldots}{\lambda^2.a^2.b^2.c^2\ldots} \quad (9)$$

## XII. — Problème de géométrie. (1841.)

*Déterminer le rayon du cercle circonscrit à un triangle, connaissant les distances des côtés au centre du cercle.*

ABC étant le triangle cherché (*), soient $p$, $q$, $r$ les distances des côtés BC, CA, AB au centre O. Désignons par $x$ le rayon inconnu, par $\beta$, $\gamma$ les angles OAB, OAC. On a

$$\sin\beta = \frac{r}{x}, \quad \sin\gamma = \frac{q}{x}, \quad \cos(\beta+\gamma) = \frac{p}{x} \text{ (**)}.$$

D'un autre côté,

$$\sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos(\beta+\gamma) + \cos^2(\beta+\gamma) = 1.$$

Donc, par l'élimination des angles,

$$x^3 - (p^2+q^2+r^2) - 2pqr = 0.$$

D'après cette équation, *le rayon* x *est le diamètre d'un demi-cercle auquel seraient inscrites trois cordes consécutives, égales aux distances* p, q, r (***). Des considérations géométriques conduisent à la même conclusion.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.
(**) En effet, $\frac{1}{2}$ BOC = A = $(\beta+\gamma)$.
(***) Voir la Note précédente.

## XIII. — Théorème de géométrie. (1840) (*).

*De toutes les pyramides ayant même hauteur et même angle polyèdre au sommet, la plus petite en volume a pour centre de gravité de la base, le pied de la hauteur.*

La base est déterminée par un plan tangent à une sphère ayant pour centre le sommet de la pyramide, et pour rayon la hauteur, que nous adoptons comme unité. Le sommet étant pris pour origine des coordonnées rectangulaires, soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées du point où le plan de la base touche la sphère : nous aurons

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{1}$$

Soient $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ les angles que forme, avec les axes, une première arête, et $x_1$, $y_1$, $z_1$ les coordonnées du point où elle perce le plan tangent. Nous aurons encore

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 1, \tag{2}$$

$$\frac{x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y_1}{\cos\beta_1} = \frac{z_1}{\cos\gamma_1} = l_1; \tag{3}$$

en représentant par $l_1$ la longueur de l'arête considérée. D'après ces équations,

$$\frac{1}{l_1} = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1. \tag{4}$$

Projetons, sur le plan des $xy$, la base de la pyramide. C étant l'aire de cette projection, la formule de Stainville donne

$$2C = \sum (x_1 y_2 - x_2 y_1). \tag{5}$$

Soient $\delta$, $\delta_2$, ... les rayons vecteurs menés, de l'origine des coordonnées, aux sommets du polygone situé sur le plan des $xy$;

(*) Publié dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, t. VI. Cette première rédaction présente quelques inexactitudes.

soient $\theta_1$, $\theta_2$, ... les angles formés par ces droites avec la partie positive de l'axe des $x$ :

$$x_1 = \delta_1 \cos \theta_1, \quad x_2 = \delta_2 \cos \theta_2,$$
$$y_1 = \delta_1 \sin \theta_1, \quad y_2 = \delta_2 \sin \theta_2;$$

donc

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \delta_1 \delta_2 \sin (\theta_2 - \theta_1).$$

Et comme

$$\delta_1 = l_1 \sin \gamma_1, \quad \delta_2 = l_2 \sin \gamma_2,$$

la formule (5) devient

$$2C = \sum l_1 l_2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin (\theta_2 - \theta_1). \tag{6}$$

L'angle formé par la base de la pyramide, avec le plan $xy$, a pour cosinus $z$; donc, P étant l'aire de la base,

$$2P = \frac{1}{z} \sum l_1 l_2 \sin \gamma_2 \sin \gamma_2 \sin (\theta_2 - \theta_2). \tag{7}$$

Dans cette équation (7), $l_1$, $l_2$, $l_3$, ... sont des fonctions de $x$, $y$, $z$; les autres quantités sont indépendantes de ces variables. D'ailleurs, le *minimum* du volume répond au *minimum* de P; donc la question est ramenée à un simple problème de Calcul différentiel.

Posons

$$\sum l_1 l_2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin (\theta_2 - \theta_1) = F(x, y, z):$$

en égalant à zéro la différentielle de $\frac{1}{z} F(x, y, z)$, nous avons

$$z \left( \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz \right) - dz\, F(x, y, z) = 0. \tag{8}$$

De plus, à cause de l'équation (1),

$$x dx + y dy + z dz = 0. \tag{9}$$

On conclut aisément, de ces deux relations,

$$y \frac{dF}{dx} = x \frac{dF}{dy}. \tag{10}$$

Pour interpréter ce résultat, observons que, d'après la valeur de $\frac{1}{l_1}$ (4) :

$$\frac{d\,(l_1 l_2)}{dx} = l_2 \frac{dl_1}{dx} + l_1 \frac{dl_2}{dx} = -\,l_1 l_2 (l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2),$$

ou

$$\frac{d\,(l_1 l_2)}{dx} = -\,l_1 l_2\,(x_1 + x_2).$$

Le premier membre de l'équation (10) équivaut donc à

$$-y \sum l_1 l_2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)(x_1 + x_2) = -y \sum \delta_1 \delta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)(x_1 + x_2).$$

$\delta_1 \delta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$ représente le double de l'aire du triangle déterminé par les rayons vecteurs $\delta_1$, $\delta_2$ ; $x_1 + x_2$ est le double de l'abscisse du milieu de la base correspondante. Désignant donc par $t_1$ l'aire de ce triangle, et par $g_1$ l'abscisse de son centre de gravité, nous avons

$$\sum \delta_1 \delta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)(x_1 + x_2) = 6 \sum t_1 g_1\,;$$

ou encore

$$\sum \delta_1 \delta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)(x_1 + x_2) = 6\mathrm{CX},$$

X étant l'abscisse du centre de gravité du polygone C.

On aurait, semblablement,

$$\sum \delta_1 \delta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)(y_1 + y_2) = 6\mathrm{CY}.$$

L'équation (10) devient donc

$$\frac{\mathrm{X}}{x} = \frac{\mathrm{Y}}{y}.$$

Ainsi, les coordonnées du point de contact cherché sont proportionnelles aux coordonnées du centre de gravité de la base ; ce qui démontre le théorème.

## XIV. — Problème d'analyse indéterminée. (1842.)

*Trouver un triangle dont les trois côtés et la surface soient représentés par des nombres entiers.*

I. D'après la formule

$$T^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \tag{1}$$

le périmètre $2p$ doit être un nombre *pair;* donc les nombres entiers $a, b, c$ doivent être *pairs;* ou bien l'un d'eux doit être *pair,* les deux autres étant *impairs.*

Soient

$$c = 2n, \quad p - a = \alpha, \quad p - b = \beta; \tag{2}$$

d'où

$$\alpha + \beta = 2n, \tag{3}$$

$$T^2 = p\alpha\beta(p - 2n). \tag{4}$$

La dernière équation donne

$$p = n + \sqrt{n^2 + \frac{T^2}{\gamma}}, \tag{5}$$

en supposant

$$\alpha\beta = \gamma; \tag{6}$$

ainsi $n^2 + \frac{T^2}{\gamma}$ est un carré. D'ailleurs, en vertu des équations (3) et (6), $n^2 - \gamma$ doit aussi être un carré. La question est donc ramenée à la résolution, en nombres entiers, des deux équations

$$n^2 - \gamma = x^2, \tag{7}$$

$$n^2 + \frac{T^2}{\gamma} = y^2. \tag{8}$$

Si l'on prend arbitrairement $n$ et $x$, l'équation (7) donnera pour $\gamma$ une valeur entière, après quoi l'on trouvera T et $y$ au moyen de l'équation (8), si toutefois cette équation admet des solutions entières.

II. Si $\gamma$ contient un facteur carré $\lambda^2$, T doit être divisible par $\lambda$, et l'équation (8) se simplifie immédiatement, sans changer de forme. Supposons donc que $\gamma$ ne renferme aucun facteur carré; alors T doit être divisible par $\gamma$; ainsi

$$T = \gamma z; \tag{9}$$

puis

$$y^2 - \gamma z^2 = n^2. \tag{10}$$

III. Si cette équation (10) admet un système de valeurs entières,

$$y = B, \quad z = C, \tag{11}$$

on aura

$$T = C\gamma, \quad x = \sqrt{n^2 - \gamma} = A, \quad p = n + B, \quad \alpha = n + A, \quad \beta = n - A;$$

et enfin

$$a = B - A, \quad b = B + A. \tag{12}$$

IV. Prenons, par exemple,

$$n = 17, \quad x = A = 4.$$

Il résulte, de ces valeurs, $\gamma = 273$; en sorte que l'équation (10) devient

$$y^2 - 273z^2 = 289. \tag{13}$$

En supposant

$$y = 17y', \quad z = 17z',$$

on réduit l'équation (13) à

$$y'^2 - 273z'^2 = 1.$$

Au moyen des Tables de Legendre (*), on trouve que cette dernière relation est vérifiée par

$$y' = 727, \quad z' = 44;$$

donc

$$y = B = 12\,359, \quad z = C = 748;$$

puis

$$T = 748.273 = 204\,204, \quad a = 12\,355, \quad b = 12\,363, \quad c = 34.$$

(*) *Théorie des nombres*, t. I, table X.

## XV. — Quelques théorèmes empiriques. (1842-43.)

En étudiant la série

$$1+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{7.8}+\frac{1}{8.9}+\frac{1}{15.16}+\frac{1}{24.25}+\cdots,$$

dont le terme général a la forme $\frac{1}{(p-1)p}$, $p$ étant une *puissance* (*), je fus conduit, par induction, au théorème suivant :

*Deux nombres entiers consécutifs, autres que* 8 *et* 9, *ne peuvent être des puissances exactes.* Après avoir perdu près d'une année à la recherche d'une démonstration qui fuyait toujours, j'abandonnai cette recherche fatigante. Néanmoins, elle ne fut pas complètement inutile, parce qu'elle me conduisit à quelques propositions sur la Théorie des nombres, dont je donne aujourd'hui les *énoncés.* On voudra bien regarder ces propositions comme de simples *théorèmes empiriques,* attendu que, depuis longtemps, les démonstrations, ou plutôt les *tentatives de démonstration,* de la plupart d'entre elles, sont égarées. Vrais ou faux, ces théorèmes empiriques pourront peut-être provoquer d'utiles travaux.

I. *L'équation* $(x+1)^x - x^x = 1$ *est impossible en nombres entiers, excepté pour* $x=0$, $x=1$.

II. $x^y - y^x = 1$ *est impossible en nombres entiers, excepté pour* $x=3$, $y=2$ (**).

III. *L'équation* $x^p - 1 = P$, *dans laquelle* p *et* P *sont premiers, n'est vérifiée que par* $x=2$, $p=3$, $P=7$.

IV. $x^n - 1 = P^2$ *est impossible.*

V. *L'équation* $x^2 - 1 = p^m$ *n'est vérifiée que par* $x=3$, $p=2$, $m=3$ ; *ou* $x=2$, $p=3$, $m=1$.

VI. *L'équation* $x^p - q^y = 1$, *dans laquelle* p *et* q *sont premiers, est impossible, excepté lorsque* $x=3$, $p=2$, $q=2$, $y=3$.

(*) *Journal de Liouville*, t. VII, p. 9.

(**) On ne compte pas la solution insignifiante : $x=1$, $y=0$. La même restriction subsiste pour quelques-uns des énoncés suivants.

VII. $x^3 + y^3 = p^2$ *est impossible, sauf le cas de* $x = 2$, $y = 1$, $p = 3$.

VIII. *L'équation*

$$x^n = \frac{(2^{n-2} - 1)^n + 1}{2^{n-2}}$$

*est impossible en nombres entiers, excepté dans le cas de* $n = 3$, $x = 1$.

## XVI. — Lieu géométrique. (1843.)

Problème. — *Une ellipse, dont le plan est immobile, tourne autour de son centre* O (*). *Dans chacune de ses positions, on mène à la courbe une tangente* TT', *parallèle à une direction donnée. Quel est le lieu du point de contact* M ?

Soient $a$, $b$ les demi-axes de l'ellipse; $OM = u$; $OA = a'$, le demi-diamètre parallèle à TT'; $AOM = \omega$.

On a, par les théorèmes d'Apollonius :

$$a'^2 + u^2 = a^2 + b^2, \quad a'u \sin \omega = ab;$$

ou, en remplaçant les coordonnées polaires par des coordonnées rectangulaires,

$$a'^2 + x^2 + y^2 = a^2 + b^2, \quad a'y = ab;$$

d'où

$$x^2 = \frac{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}{y^2}. \qquad (1)$$

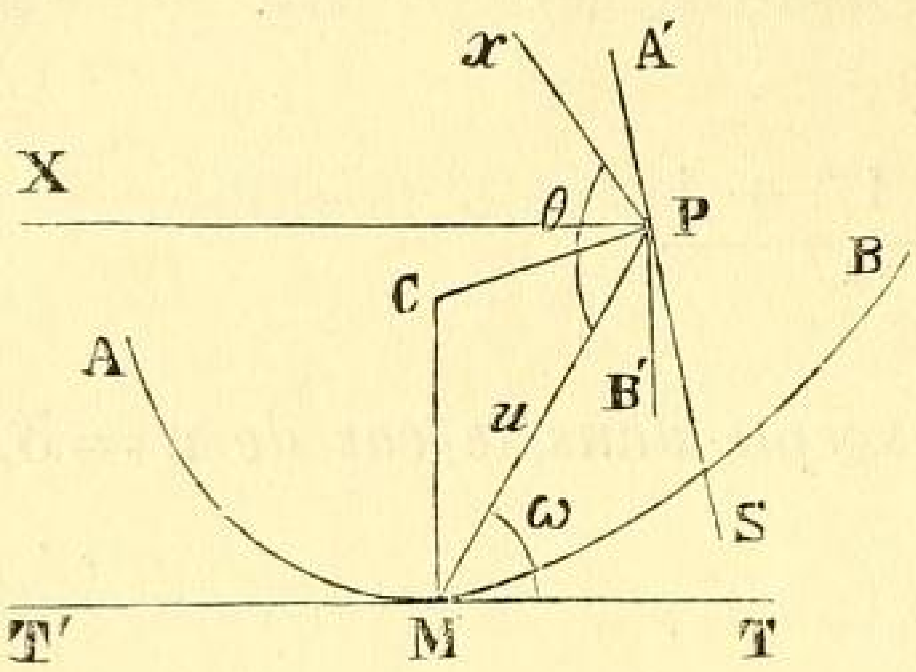
### *Addition.* — (*Décembre* 1865.)

I. L'équation (1) appartient au *lieu décrit par le centre d'une ellipse donnée, glissant et roulant sur une droite fixe, de manière que le point de contact soit immobile sur la droite* (**).

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) *Manuel des candidats à l'École polytechnique*, t. I, p. 424.

Cette propriété est générale. En effet, si la courbe AMB tourne autour du point P, et que TT' soit la tangente parallèle à la direction donnée, *les coordonnées du point de contact* M, *relativement au pôle* P *et à l'axe* PX (parallèle à TT'), *sont les mêmes que les coordonnées de* P, *relativement au pôle* M *et à l'axe* MT.




II. D'après cela, si l'équation de AMB est

$$u = f(\theta), \tag{1}$$

l'axe P$x$ faisant corps avec la courbe, on aura

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{u\,d\theta}{du}; \tag{2}$$

d'où, en éliminant $\theta$, on trouvera l'équation de la courbe décrite par le point P.

III. Si cette dernière équation est donnée, l'égalité (2) prend la forme

$$d\theta = \varphi(u)\,du; \tag{3}$$

en sorte que, par une simple quadrature, on retombera sur l'équation (1). D'après cela, *une courbe quelconque* A'B' *peut être décrite par un point* P, *lié invariablement à une courbe* AB, *glissant et roulant sur une droite fixe;* ou, sous une forme plus concise,

*Toute courbe plane est une tractoire* (*).

IV. On tire, de l'équation (2),

$$d\omega = \frac{u\,d^2u - du^2}{du^2}\,d\theta\,.\cos^2\omega. \tag{4}$$

(*) Ce théorème a une grande analogie avec celui que j'ai donné, en 1855, dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* (t. XV, p. 103). Ordinairement, on appelle *tractoire* une courbe dont la génération diffère de celle qui est indiquée ici; néanmoins j'ai conservé cette dénomination, pour n'avoir pas à créer un mot.

Mais, si l'on désigne par $d\sigma$ l'élément de AMB et par $\rho$ le rayon de courbure MC, on a

$$d\sigma^2 = du^2 + u^2\,d\theta^2, \quad \rho = \frac{d\sigma^3}{d\theta\,(d\sigma^2 + du^2 - ud^2u)}.$$

Au moyen de ces valeurs, et à cause de

$$\cos^2\omega = \frac{du^2}{d\sigma^2},$$

la formule (4) devient

$$d\omega = d\theta - \frac{d\sigma}{\rho}. \tag{5}$$

Ainsi, *l'accroissement infiniment petit de* $\omega$ *est égal à l'accroissement infiniment petit de l'angle* $\theta$, *moins l'angle de contingence de la courbe* AMB. Ce résultat est évident par la Géométrie.

V. Si l'on désigne par V l'angle MPS que fait la tangente PS avec le rayon vecteur $u$, on a

$$\operatorname{tg} V = \frac{ud\omega}{du} = \frac{u}{du}\left(d\theta - \frac{d\sigma}{\rho}\right) = -\operatorname{tg}\omega - \frac{ud\sigma}{\rho du},$$

ou

$$\operatorname{tg} V + \operatorname{tg}\omega = \frac{u}{\rho\cos\omega},$$

ou encore

$$\frac{\sin(V+\omega)}{\cos V} = \frac{u}{\rho}. \tag{6}$$

Le second membre est égal à $\frac{\sin MCP}{\sin MPC}$; donc

$$\frac{\sin(V+\omega)}{\cos V} = \frac{\sin MCP}{\sin MPC}.$$

Cette proportion prouve que PS est perpendiculaire à CP. Ainsi *la droite* PC, *qui joint le centre de courbure de la* GLISSANTE AMB *au point décrivant* P, *est normale à la tractoire.*

VI. Si la glissante est une *développante de cercle,* la tractoire est *une perpendiculaire à* TT'; si la glissante est une *spirale logarithmique,* la tractoire est une *ligne droite,* etc.

## XVII. — Théorème sur les surfaces développables. (1843) (*).

Lemme. — *Soit un triangle sphérique* ABC (**), *dans lequel le côté* BC $= \varepsilon$ *est infiniment petit, ainsi que l'excès* $\delta$ *du côté* AB *sur le côté* AC. *On a*

$$\cos B = \frac{\delta}{\varepsilon}. \tag{1}$$

La *formule fondamentale* donne

$$\cos b = \cos(b + \delta)\cos\varepsilon + \sin(b + \delta)\sin\varepsilon . \cos B;$$

ou, si l'on néglige les infiniment petits du deuxième ordre :

$$\cos b = (\cos b - \delta \sin b) + (\sin b)\,\varepsilon \cos B,$$

ou

$$0 = -\delta + \varepsilon \cos B.$$

Théorème. — *Soient :* $\rho$, *le rayon de courbure d'une ligne* c, *tracée sur une surface développable* $\Sigma$ ; R, *le rayon de courbure de la transformée par développement;* $\theta$, *l'angle du plan osculateur de* c *avec le plan tangent à* $\Sigma$. *On a*

$$\rho = R\cos\theta. \tag{2}$$

Remplaçons la courbe *c* par un polygone ABCD... Soit BG une génératrice de $\Sigma$ : ABG est le plan tangent; ABC est le plan osculateur.

Soient encore BB′ le prolongement de AB : CBB′ $= \varepsilon$ est l'angle de contingence de *c*. Quand on développe $\Sigma$, les angles

(*) Publié dans les *Comptes rendus* (t. XVII). La première démonstration exigeant, pour être *complète,* d'assez longs développements, nous en proposons une autre, qui remonte à 1874, et dont le principe se trouve dans la *Géométrie descriptive,* de La Gournerie.

(**) Le lecteur est prié de faire les figures.

GBC, GBB′ se conservent; et, en conséquence, GBC — GBB′ = E est l'*angle de contingence de la transformée de* c.

Le lemme, appliqué au trièdre B, dans lequel *dièdre* AB $= \theta$, donne

$$\cos\theta = \frac{E}{\varepsilon}.$$

Mais

$$E = \frac{ds}{R}, \quad \varepsilon = \frac{ds}{\rho};$$

donc

$$\cos\theta = \frac{\rho}{R}.$$

*Remarques.* — (*Décembre* 1865.)

I. Si la courbe *c* est tracée sur une surface quelconque S, on peut remplacer celle-ci par la *développable* $\Sigma$, circonscrite à S suivant *c*. Au moyen de cette modification, le théorème devient beaucoup plus général (*).

II. L'équation (4) étant mise sous la forme

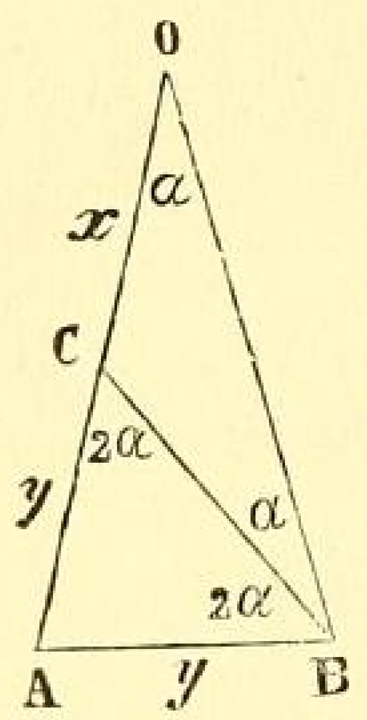
$$\frac{1}{R} = \frac{\cos\lambda}{\rho},$$

on voit que *la courbure de la transformée* C ne diffère pas de ce que l'on appelle, depuis quelques années, *courbure géodésique d'une courbe* c.

(*) Ce théorème se trouve, *sans citation d'auteur,* dans le *Calcul des variations,* de l'abbé Moigno (1861), et dans le *Calcul différentiel,* de M. Bertrand (1865).

## XVIII. — Sur le tétradécagone régulier. (1843.)

I. La construction au moyen de laquelle on établit le théorème relatif au côté du décagone régulier s'applique, jusqu'à un certain point, aux polygones réguliers de quatorze côtés, de dix-huit côtés, etc. (*).




Considérons, par exemple, le *tétradécagone régulier*. Soit AB le côté de ce polygone, OA étant le rayon du cercle circonscrit. En désignant par $\alpha$ l'angle au centre, et en prenant l'angle droit pour unité, on a $\alpha = \frac{2}{7}$ ; donc

$$ABO = BAO = \frac{6}{7} = 3\alpha.$$

De là résulte que si l'on fait l'angle $OBC = \alpha$, on aura $ACB = ABC = 2\alpha$; en sorte que le triangle ABC est isoscèle.

Soient maintenant

$$OC = BC = x, \quad AB = AC = y, \quad AO = BO\ 1:$$

les équations du problème sont

$$1 = 2x \cos \alpha, \qquad (1)$$

$$x = 2y \cos 2\alpha, \qquad (2)$$

$$x + y = 1. \qquad (3)$$

Par suite,

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0. \qquad (4)$$

(*) Le polygone de *trente-quatre* côtés donne lieu à une *épure* intéressante, dont voici l'indication :

O *étant le centre, soit* AB *le côté du polygone. Construisez les quatorze triangles isoscèles* ABC, BDC, DCE, DFE, FEG, FHG, HGI, HKI, KIL, KML, MLN, MPN, PNQ, PRQ, *dont les sommets sont situés sur* OA *ou* OB : *le triangle restant,* QOR, *est égal à* CBA.

De ce réseau de triangles, on conclut des équations qui peuvent servir à la résolution du problème connu :

*Au moyen de la règle et du compas, inscrire, à un cercle donné, un polygone régulier de trente-quatre côtés.* (*Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire.*)

II. Cette équation (4) a deux racines positives et une racine négative. *Elle ne change pas quand on y remplace* x *par* $1 - \frac{1}{x}$. Il s'ensuit que si $c$, $b$, $a$ sont ces racines, rangées par ordre de grandeur décroissante, elles satisfont aux relations :

$$a = 1 - \frac{1}{b}, \quad b = 1 - \frac{1}{c}, \quad c = 1 - \frac{1}{a}.$$

En même temps, à cause de l'équation (3), les valeurs de $y$ sont indifféremment représentées par

$$1 - a, \quad 1 - b, \quad 1 - c,$$

ou par

$$\frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{a}.$$

III. La racine $b$, comprise entre 0 et 1, est celle qui répond au problème. Elle donne, pour le côté $y$ du tétradécagone, environ 0,445. Les deux autres racines de l'équation (4) correspondent aux *tétradécagones réguliers étoilés*, dont les angles au centre sont $\frac{6}{7}$ et $\frac{10}{7}$ d'angle droit. On trouve aisément que les systèmes d'équations, relatifs à ces deux polygones, sont, pour l'un :

$$x = 2y \cos \alpha, \quad y = 2 \cos 2\alpha, \quad x - y = 1 ;$$

et, pour l'autre :

$$1 = -2x \cos 2\alpha, \quad y = 2 \cos \alpha, \quad -x + 1 = y.$$

Dans les deux cas, l'élimination de $y$ et de $\alpha$ fait retomber sur l'équation (4).

## XIX. — Sur la toroïde. (1843) (*).

On appelle *toroïdes* les *parallèles à l'ellipse*, c'est-à-dire les courbes qui ont mêmes normales qu'une ellipse donnée. Cette dénomination est fondée sur ce que *la projection du contour*

(*) Note extraite des *Nouvelles Annales*, t. III, p. 553.

*apparent d'un tore, sur un plan quelconque, est une toroïde* (*).

Pour trouver l'équation de cette courbe, il faut éliminer $\theta$ entre les équations

$$\frac{a^2x^2}{(\theta + a^2)^2} + \frac{b^2y^2}{(\theta + b^2)^2} = 1, \qquad \frac{\theta^2x^2}{(\theta + a^2)^2} + \frac{\theta^2y^2}{(\theta + b^2)^2} = k^2 \text{ (**)}.$$

Cette élimination se fait assez simplement de la manière suivante.

Chassant les dénominateurs, on a d'abord :

$$a^2(\theta + b^2)^2 x^2 + b^2(\theta + a^2)^2 y^2 = (\theta + a^2)^2(\theta + b^2)^2, \tag{1}$$

$$\theta^2(\theta^2 + b^2)^2 x^2 + \theta^2(\theta + a^2)^2 y^2 = k^2(\theta + a^2)^2(\theta + b^2)^2. \tag{2}$$

Multipliant par $\theta^2$, par $a^2$; retranchant membre à membre, et supprimant le facteur $(\theta + a^2)^2$, j'obtiens

$$(a^2 - b^2)\,\theta^2y^2 = (\theta + b^2)^2(a^2k^2 - \theta^2). \tag{3}$$

De même,

$$(a^2 - b^2)\,\theta^2x^2 = (\theta + a^2)^2(\theta^2 - b^2k^2). \tag{4}$$

Si l'on ajoute membre à membre les équations (3), (4), et si l'on supprime le facteur commun $(a^2 - b^2)$, on trouve

$$\theta^2(x^2 + y^2) = \theta^2(a^2 + b^2 + 2\theta) + k^2(\theta^2 - a^2b^2). \tag{5}$$

Multiplions l'équation (3) par $a^2$, l'équation (4) par $b^2$; ajoutons, et supprimons le facteur $(a^2 - b^2)$ : il vient

$$\theta(a^2y^2 + b^2x^2) = \theta(a^2b^2 - \theta^2) + k^2\theta(a^2 + b^2) + 2a^2b^2k^2. \tag{6}$$

Les équations (5), (6) peuvent être écrites ainsi :

$$2\theta^3 - (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2)\,\theta^2 - a^2b^2k^2 = 0, \tag{5'}$$

$$\theta^3 + (a^2y^2 + b^2x^2 - a^2k^2 - b^2k^2 - a^2b^2)\,\theta - 2a^2b^2k^2 = 0. \tag{6'}$$

(*) Je crois que cette remarque est due à mon regretté camarade de l'École de Dessin et de l'École polytechnique, *Fleur Saint-Denis*, si connu par les beaux travaux qu'il a exécutés au pont de Kehl.

(**) CAUCHY, *Comptes rendus*, t. XIII, p. 1062.

J'élimine tour à tour, entre ces deux dernières équations, le terme en $\theta^3$ et le terme indépendant; je trouve ainsi :

$$A\theta^2 + 2B\theta - 3C = 0, \tag{7}$$

$$3\theta^2 - 2A\theta - B = 0; \tag{8}$$

en posant, pour abréger :

$$A = x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2, \quad B = a^2y^2 + b^2x^2 - a^2k^2 - b^2k^2 - a^2b^2,$$
$$C = a^2b^2k^2.$$

Les équations (7), (8), traitées comme les deux précédentes, donnent

$$2(A^2 + 3B)\theta + AB - 9C = 0, \tag{9}$$

$$(AB - 9C)\theta + 2(B^2 + 3AC) = 0. \tag{10}$$

Enfin, l'élimination de $\theta$, entre ces deux dernières équations, conduit à

$$(AB - 9C)^2 = 4(A^2 + 3B)(B^2 + 3AC).$$

L'équation de la toroïde est donc

$$\left.\begin{aligned}&(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^2(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^2\\&\quad+4a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^3-27a^4b^4k^4\\&+18a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)\\&+4(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^3=0.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

## *Addition.* — (*Juin* 1866.)

Si $a = b$, et que l'on fasse $x^2 + y^2 = u^2$, l'équation (11) se réduit à

$$\left.\begin{aligned}&(u^2-2a^2-k^2)^2(u^2-a^2-2k^2)^2+4k^2(u^2-2a^2-k^2)^3+4a^2(u^2-2k^2-a^2)^3\\&\quad+18a^2k^2(u^2-2a^2-k^2)(u^2-2k^2-a^2)-27a^4k^4=0.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Pour simplifier celle-ci, je pose $u^2 - a^2 - k^2 = t^2$ : la transformée est

$$(t^2 - a^2)^2(t^2 - k^2)^2 + 4k^2(t^2 - a^2)^3 + 4a^2(t^2 - k^2)^3$$
$$+ 18a^2k^2(t^2 - a^2)(t^2 - k^2) - 27a^4k^4 = 0,$$

ou

$$t^8+2(a^2+k^2)t^6+(a^2-k^2)^2t^4-8a^2k^2(a^2+k^2)t^2-4a^2k^2(a^2+k^2)^2=0. \quad (13)$$

Lorsque $a=b$, l'ellipse devient un cercle; par conséquent, la toroïde doit se réduire au système de deux cercles concentriques avec le premier, et dont les rayons sont $u=a\pm k$ : le premier membre de l'équation (13) est donc divisible par $(t^2+2ak)(t^2-2ak)$. Si l'on fait la division, on trouve, pour quotient, $(t^2+a^2+k^2)^2$, c'est-à-dire $u^4$. Conséquemment, l'équation (12) est vérifiée par $u^2=0$; ce qui prouve que l'on a, *identiquement,*

$$\left[(2a^2+k^2)(a^2+2k^2)+9a^2k^2\right]^2=4k^2(2a^2+k^2)^3+4a^2(2k^2+a^2)^3+108a^4k^4;$$

ou

$$(a^4+7a^2k^2+k^4)^2=k^2(2a^2+k^2)^3+a^2(2k^2+a^2)^3+27a^4k^4; \quad (14)$$

ou encore, en faisant $a^2=\alpha^3$, $k^2=\beta^3$ :

$$(\alpha^6+7\alpha^3\beta^3+\beta^6)^2=(2\alpha^3\beta+\beta^4)^3+(\alpha^4+2\alpha\beta^3)^3+(3\alpha^2\beta^2)^3. \quad (15)$$

Cette identité (15) donne une infinité de solutions entières de l'équation

$$x^3+y^3+z^3=u^2. \quad (16)$$

En voici deux :

1° $\alpha=2$, $\beta=1$, $x=17$, $y=20$, $z=12$, $u=121$;

2° $\alpha=2$, $\beta=5$, $x=705$, $y=516$, $z=3\,000$, $u=22\,689$.

En effet,

$$121^2=17^3+20^3+12^3,$$

et

$$22\,689^2=705^3+516^3+3\,000^3.$$

*Remarque.* — L'identité (15) ne fait pas connaître toutes les solutions de l'équation (16). Par exemple, on n'en pourrait tirer celle-ci :

$$1^3+2^3+3^3=6^2.$$

## XX. — Sur la toroïde.

D'après la définition (p. 49) *les trajectoires orthogonales, d'une suite de normales à l'ellipse, sont des toroïdes.*

Une de ces normales étant représentée par

$$y = mx + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}},$$

l'équation différentielle des toroïdes est

$$y = -x\frac{dx}{dy} - \frac{c^2 dx}{\sqrt{a^2 dy^2 + b^2 dx^2}}. \tag{1}$$

D'un autre côté, l'équation générale de ces courbes est

$$\left.\begin{aligned} &(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2)^2 (a^2y^2 + b^2x^2 - a^2k^2 - b^2k^2 - a^2b^2)^2 \\ &\quad + 4a^2b^2k^2 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2)^3 - 27a^4b^4k^4 \\ &+ 18a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2) \\ &\qquad + 4(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2k^2 - b^2k^2 - a^2b^2)^3 = 0\ (^*), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$k$ représentant la distance arbitraire prise sur la normale, à partir de l'ellipse. Cette équation (2) est donc l'intégrale générale de l'équation (1). Il serait peut-être difficile d'arriver directement à ce résultat.

### *Addition.* — (*Juillet* 1866.)

Généralement, soit

$$f(\alpha, \beta) = 0, \tag{1}$$

l'équation d'une courbe donnée C. Si l'on fait

$$-\frac{d\alpha}{d\beta} = m, \tag{2}$$

on pourra mettre, sous la forme

$$y = mx + \varphi(m), \tag{3}$$

(*) Page 51.

l'équation

$$y - \beta = -\frac{d\alpha}{d\beta}(x - \alpha)$$

de la normale D au point $(\alpha, \beta)$.

Cela posé, l'équation différentielle des courbes qui coupent orthogonalement les droites D; ou, ce qui est équivalent, l'équation différentielle des courbes parallèles à C, est

$$y = -x\frac{dx}{dy} + \varphi\left(-\frac{dx}{dy}\right). \tag{4}$$

Bien que cette équation différentielle puisse échapper à toutes les classifications connues, il est facile d'en trouver l'intégrale générale.

En effet, cette intégrale appartient à l'enveloppe des cercles représentés par

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = k^2. \tag{5}$$

Par conséquent, si l'on élimine $\alpha$, $\beta$ entre les équations (1), (5) et

$$\frac{x - \alpha}{\dfrac{df}{d\alpha}} = \frac{y - \beta}{\dfrac{df}{d\beta}}; \tag{6}$$

l'équation résultante,

$$F(x, y, k) = 0, \tag{7}$$

sera cette intégrale générale.

## XXI. — Sur l'intégration des équations simultanées. (1844.)

Problème (*). — *Intégrer les deux équations*

$$\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 9y - 2x = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 6x + y = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + t^4}}. \tag{2}$$

(*) Proposé au concours d'Agrégation des Collèges, en 1844. — La solution suivante a paru dans les *Nouvelles Annales* (t. IV, p. 245).

Mettons l'équation (1) sous la forme

$$\frac{dx}{dt} - 2x = 2\frac{dy}{dt} - 9y. \tag{3}$$

Regardant le second membre comme une fonction de $t$, inconnue, nous aurons, par la méthode de la variation des constantes :

$$x = Ae^{2t}, \quad \frac{dA}{dt} = e^{-2t}\left(2\frac{dy}{dt} - 9y\right).$$

La valeur de $x$ donne

$$\frac{dx}{dt} = e^{2t}\left(2A + \frac{dA}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{2t}\left(4A + 4\frac{dA}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), nous la transformons d'abord en

$$\frac{dy}{dt} + y + e^{2t}\left(\frac{dA}{dt} - \frac{d^2A}{dt^2}\right) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}. \tag{4}$$

Mais

$$\frac{d^2A}{dt^2} = e^{-2t}\left(18y - 15\frac{dy}{dt} + 2\frac{d^2y}{dt^2}\right);$$

d'où

$$\frac{dA}{dt} - \frac{d^2A}{dt^2} = e^{-2t}\left(-27y + 15\frac{dy}{dt} - 2\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

L'équation (4) devient donc

$$-2\frac{d^2y}{dt^2} + 16\frac{dy}{dt} - 26y = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}; \tag{5}$$

et le calcul n'offre plus de difficulté (*).

(*) Ce procédé, applicable à un grand nombre de cas, a quelque analogie avec celui que l'on peut employer dans l'*Analyse indéterminée du premier degré* (*Cours de mathématiques*, par Auguste Blum, t. I, Appendice).

## XXII. — Sur la partition des nombres. (1848) (*).

Soit $(n, q)$ le nombre de manières de former une somme $n$, avec $q$ nombres entiers, *inégaux;* et soit $[n, q]$ le nombre de manières de former cette même somme par l'addition de $q$ nombres entiers, *égaux* ou *inégaux*. On peut toujours supposer que les $q$ nombres entiers qui concourent à former la somme $n$ sont rangés par ordre de grandeur *non décroissante*. Par exemple, s'il s'agit de former la somme 37 par l'addition de 3 entiers, on pourra considérer ces groupes :

$$12,\quad 12,\quad 13;$$
$$5,\quad 8,\quad 24;$$

mais non ceux-ci :

$$13,\quad 12,\quad 12;$$
$$24,\quad 5,\quad 8.$$

Cela posé, on aura les théorèmes suivants (**) :

Théorème I. $(n, q) = (n - q, q - 1) + (n - q, q)$. (1)

*Démonstration.* — Si l'on considère un groupe quelconque formé de $q$ termes et que l'on retranche *une* unité de chacun d'eux, on obtient un nouveau groupe dans lequel la somme des termes est seulement $n - q$. D'ailleurs, ce nouveau groupe est formé de $q - 1$ termes ou de $q$ termes, suivant que le premier groupe commençait par 1 ou par un nombre supérieur à 1. La même remarque subsiste pour chacun des groupes proposés ; donc, etc.

Théorème II. $[n, q] = [n - 1, q - 1] + [n - q, q]$. (2)

*Démonstration.* — Partageons nos groupes en deux séries ; mettons, dans la première, ceux qui commencent par 1 ; et, dans la seconde, ceux qui commencent par un nombre supérieur à 1.

(*) Les démonstrations suivantes, que je retrouve dans une lettre adressée autrefois à M. Terquem, m'avaient été demandées par ce savant Géomètre.

(**) Ils ont été démontrés par Euler.

Supprimons le premier terme dans tous les groupes composant la première série, puis retranchons 1 de chacun des termes formant les autres groupes. Nous obtiendrons ainsi deux espèces de sommes : les unes égales à $n-1$ et composées de $q-1$ termes, les autres égales à $n-q$ et composées de $q$ termes. C'est là ce qu'exprime l'équation (2).

THÉORÈME III. $$(n, q) = \left[n - \frac{q(q-1)}{2}, q\right]. \qquad (3)$$

*Démonstration.* — Soit un groupe formé de $q$ termes inégaux, dont la somme est $n$. Retranchons 0 du premier terme, 1 du deuxième, 2 du troisième, et ainsi de suite. Il est évident que nous obtiendrons un nouveau groupe dont un terme quelconque sera *égal* ou *inférieur* à celui qui le suit (*). D'ailleurs, la somme des termes de ce nouveau groupe est

$$n - (1 + 2 + 3 + \cdots + \overline{q-1}),$$

ou

$$n - \frac{q(q-1)}{2}.$$

L'équation (3) est ainsi démontrée.

THÉORÈME IV. $$[n, q] = \sum_{i=1}^{i=q} [n-q, i]. \qquad (4)$$

*Démonstration.* — Prenons un groupe de $q$ termes, *égaux* ou *inégaux,* dont la somme soit $n$, et dont les $q-i$ premiers soient égaux à 1. Si nous retranchons 1 de chaque terme, nous formerons un nouveau groupe de $q$ termes, ayant pour somme $n-q$, et dont les $q-i$ premiers termes seront des zéros ; ou, ce qui est équivalent, un groupe composé de $i$ termes, égaux ou inégaux, et dont la somme est $n-q$. Donc, etc.

THÉORÈME V. $$(n, q) = \sum_{i=1}^{i=p-1} (n - iq, q-1), \qquad (5)$$

$p$ étant le quotient entier de $n+1$ par $q$.

(*) Réciproquement : Si, à des termes rangés par ordre de grandeur non décroissante, on ajoute, respectivement, 0, 1, 2, ... unités, les nouveaux termes ainsi formés seront *inégaux* et *croissants.*

*Démonstration.* — Considérons un groupe dont le premier terme soit $i$, et retranchons $i$ de chacun de ses termes. A cause de $i - i = 0$, nous obtiendrons ainsi un nouveau groupe composé de $q - 1$ termes, formant la somme $n - iq$. Et comme $n - iq$ doit être *égal* ou *supérieur* à $q - 1$, on doit supposer $i$ *égal* ou *inférieur* au quotient de $n + 1$ par $q$, ce quotient étant pris par *défaut*.

*Remarque.* — Les équations (1), (2), (4), (5) supposent $n \overline{>} 2q$. Si $n = 2q$, elles se réduisent à :

$$(2q, q) = (q, q - 1)\ (^*), \tag{1'}$$

$$[2q, q] = [2q - 1, q - 1] + 1, \tag{2'}$$

$$[2q, q] = [q, 1] + [q, 2] + \cdots + [q, q]. \tag{4'}$$

*Applications et vérifications.* — Soient $n = 15$, $q = 5$ ; les relations démontrées ci-dessus deviennent :

$$(15, 5) = (12, 2) + (12, 5),$$
$$[15, 5] = [14, 2] + [12, 5],$$
$$(15, 5) = [12, 5],$$
$$[15, 5] = [12, 1] + [12, 2] + [12, 5],$$
$$(15, 5) = (12, 2) + (9, 2) + (6, 2) + (5, 2).$$

D'un autre côté, le calcul direct donne :

$$(15, 5) = 12, (12, 2) = 5, (12, 5) = 7, [15, 5] = 19, [14, 2] = 7,$$
$$[12, 5] = 12, [12, 1] = 1, [12, 2] = 6, (9, 2) = 4, (6, 2) = 2. (5, 2) = 1\ ;$$

donc

$$12 = 5 + 7,$$
$$19 = 7 + 12,$$
$$12 = 12,$$
$$19 = 1 + 6 + 12,$$
$$12 = 5 + 4 + 2 + 1\ ;$$

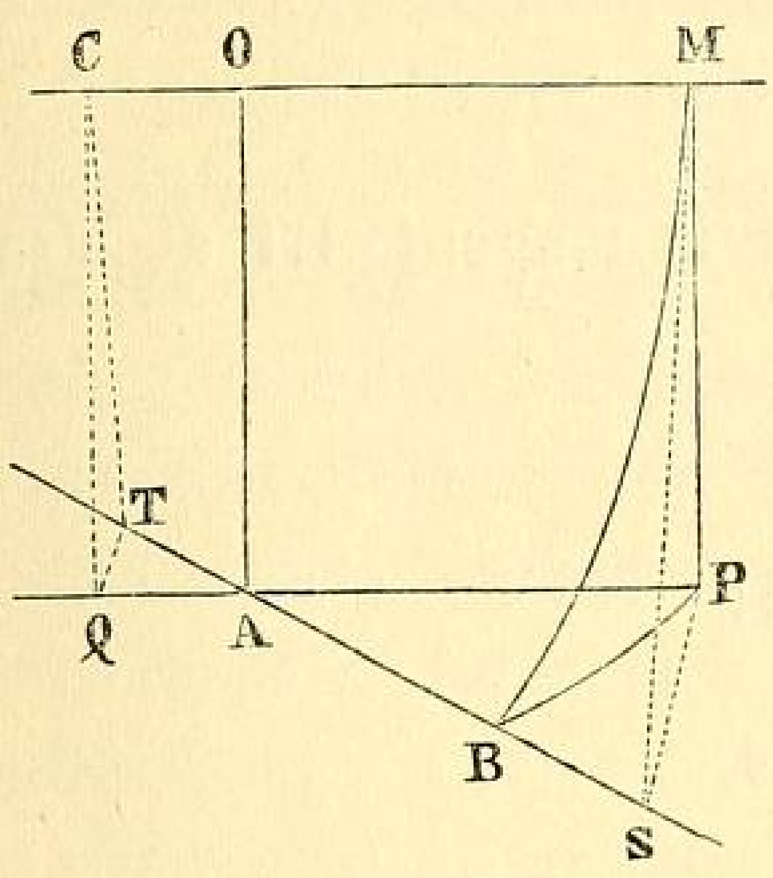
ce qui est exact.

(*) La quantité $(q, q)$ égale zéro.

## XXIII. — Sur l'héliçoïde de raccordement.

I. Soit M un point quelconque de l'hélice BM, tracée sur un cylindre de révolution dont AO est l'axe. Soit C le centre de courbure relatif au point M. On a, par une formule connue,

$$CM = OM\,(1 + tg^2\alpha), \tag{1}$$




$\alpha$ étant l'angle que fait la tangente MS avec sa projection PS.

Cette relation équivaut à

$$CO = OM\,tg^2\alpha = OM\left(\frac{MP}{PS}\right)^2.$$

Pour une autre hélice B'M', tracée sur l'héliçoïde déterminé par AO et BM, on aurait

$$C'O = OM'\left(\frac{MP}{P'S'}\right)^2;$$

donc

$$\frac{CO}{C'O} = \frac{OM}{OM'}\left(\frac{P'S'}{PS}\right)^2.$$

Mais

$$\frac{P'S'}{PS} = \frac{AP'}{AP} = \frac{OM'}{OM}:$$

l'équation précédente devient

$$\frac{CO}{C'O} = \frac{OM'}{OM},$$

ou

$$CO\,.\,OM = C'O\,.\,OM' = const. \tag{2}$$

Ainsi, *pour toutes les hélices tracées sur un même héliçoïde à plan directeur, les distances d'un point et du centre de courbure correspondant, à l'axe du cylindre, forment un rectangle constant.*

II. Soit R le rayon du cylindre pour lequel $\alpha = 45^\circ$. Dans ce cas, $C''O = OM'' = R$; donc, en général,

$$CO \,.\, OM = R^2. \tag{3}$$

III. Cette relation est symétrique; en sorte que CM *est le rayon de courbure commun des hélices décrites par les points* C, M.

IV. On a, par l'équation (1),

$$OM = CM \cos^2\alpha.$$

De même, $\beta$ étant l'angle formé par la tangente CT avec sa projection QT :

$$OC = CM \cos^2\beta.$$

Mais

$$OM + OC = CM;$$

donc

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Ainsi, *les angles aigus* S, T *sont complémentaires;* d'où il résulte que *les plans tangents à l'héliçoïde, aux points* M, C, *sont perpendiculaires entre eux* (*).

V. Le lieu des tangentes MS est évidemment un paraboloïde hyperbolique : ces deux surfaces ont, en chacun des points de OM, même plan tangent; c'est-à-dire que, suivant l'expression consacrée, *elles se raccordent le long de la génératrice commune.* Conséquemment, *on peut toujours déterminer un héliçoïde de raccordement avec une surface gauche donnée : l'axe de l'héliçoïde* est la commune perpendiculaire à la génératrice donnée et à la génératrice infiniment voisine; le *plan directeur* est perpendiculaire à l'axe, etc. (**).

(*) Ce résultat est compris dans un théorème de Chasles (*Journal de Liouville*, t. II, p. 415).

(**) Aujourd'hui, l'on dirait simplement : *L'axe est la perpendiculaire au plan asymptotique, passant par le point central* (mai 1866).

### XXIV. — Sur l'héliçoïde à plan directeur.

Théorème. — *L'héliçoïde à plan directeur est la seule surface gauche à courbure moyenne nulle* (*).

Soient G, G', G'' trois génératrices consécutives de la surface cherchée S. Par un point *m*, situé sur la première, faisons passer un plan P, perpendiculaire à cette droite G, et soient *m'*, *m''* les points où il coupe G', G''. La section normale passant par G ayant une courbure nulle, il en doit être de même pour la section faite par le plan P; c'est-à-dire que *les points* m, m', m'' *sont en ligne droite* (**). Conséquemment, la surface du second degré, *osculatrice de* S *le long de* G (***), est un paraboloïde *rectangulaire,* dont l'un des plans directeurs est le plan P, et dont l'autre plan directeur, Q, est perpendiculaire à P. Trois génératrices consécutives quelconques étant parallèles à un même plan, il s'ensuit que *la surface* S *admet un plan directeur,* savoir, le plan Q.

Remarquons maintenant que, parmi les génératrices du paraboloïde osculateur, il en est une qui rencontre orthogonalement G, G', G''; donc la *surface* S *est un conoïde droit.*

Le reste est évident.

(*) Dans le *Journal de Liouville* (t. VII, p. 203) le même théorème est démontré par le calcul. A défaut d'autre mérite, cette *première démonstration* a celui de la priorité. Néanmoins, on peut lire, dans le 32e Cahier du *Journal de l'École polytechnique* (1848, p. 134) : « Meunier a le premier démontré cette proposition remarquable dans son Mémoire sur les surfaces, qui a été inséré au *Recueil des Savants étrangers* ». Cette assertion si précise atteste un grand *effort d'imaginative :* Meusnier prouve seulement que, parmi les surfaces engendrées par une droite *horizontale,* l'héliçoïde satisfait seul à la propriété énoncée; ce qui est bien différent.

Pour comprendre le procédé que je relève ici, on doit se rappeler les maximes de Bertrand et de Raton (*La Fontaine,* livre IX, fable XVII) — (mai 1866).

(**) Autrement dit, la surface S est de telle nature que *toute section plane, perpendiculaire à une génératrice, présente une inflexion au point où elle coupe cette génératrice.* Cette propriété appartient, en effet, à l'héliçoïde (mai 1866).

(***) Leroy, *Géométrie descriptive,* p. 360.

## XXV. — Sur un cas particulier de l'hyperboloïde gauche. (1849.)

On sait que si les faces d'un angle dièdre droit passent respectivement par deux droites AB, CD (*), non situées dans un même plan, l'arête du dièdre engendre un hyperboloïde dont les trois axes satisfont à une équation de condition. Cette surface jouit de quelques propriétés qui n'avaient peut-être pas été remarquées.

I. Si l'on prend pour origine le milieu de la plus courte distance des directrices AB, CD; pour axe des $z$, une parallèle à la droite AB; pour axe des $x$, la plus courte distance; et si l'on désigne par $\gamma$ l'angle des directrices, ces droites sont représentées par

$$\left.\begin{aligned} x &= -a, \\ y &= 0; \end{aligned}\right\} \text{(AB)} \qquad \left.\begin{aligned} x &= +a, \\ y &= z \operatorname{tg} \gamma; \end{aligned}\right\} \text{(CD)}$$

et l'équation de l'hyperboloïde est

$$x^2 + y^2 - yz \operatorname{tg} \gamma = a^2. \tag{1}$$

II. A l'inspection de cette équation, on voit que l'hyperboloïde peut être engendré par une circonférence dont le plan resterait perpendiculaire à AB, et qui couperait, aux extrémités B, D d'un même diamètre, les deux directrices. Des considérations de Géométrie descriptive conduisent au même résultat.

III. L'équation (1) est vérifiée par $x = \pm a$, $y = 0$; donc *les sections circulaires de l'hyperboloïde rencontrent deux génératrices, perpendiculaires aux plans de ces sections* (**).

Puisqu'il en est ainsi, *les trajectoires orthogonales des sections circulaires se projettent, sur un plan perpendiculaire aux deux*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) Il s'agit ici d'un des deux systèmes de sections circulaires : le second système jouit d'une propriété semblable.

*génératrices, suivant des circonférences ayant leurs centres situés sur la droite qui joint les pieds des génératrices.*

Ces circonférences sont déterminées par l'équation

$$x^2 + y^2 + \lambda x + a^2 = 0, \qquad (2)$$

$\lambda$ étant un paramètre variable.

IV. Si les sections circulaires sont considérées comme des *lignes de niveau* de l'hyperboloïde, les projections des *lignes de plus grande pente* sont donc des circonférences (*). Ce résultat est d'autant plus remarquable que, dans le cas général, les trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un hyperboloïde sont des courbes très compliquées (**).

V. *Remarque.* — Le diamètre BP du cercle générateur est la normale, en B, à l'hyperboloïde (***). De là résulte que le lieu décrit par ce diamètre est le *paraboloïde normal* suivant AB; etc.

## XXVI. — Problème d'algèbre. (1849.)

*Décomposer un polynôme, égal à la somme de deux carrés, en une autre somme de deux carrés.*

I. Si A, B sont des polynômes, et que l'on veuille rendre identique l'équation

$$A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2,$$

(*) Voyez, sur ce point, le *Journal de Liouville* (t. XIX, p. 132).

(**) *Journal de Liouville* (t. XII, p. 483).

(***) Il y a un théorème plus général : « Pour obtenir la normale en un » point P de la surface gauche engendrée par l'arête d'un angle dièdre droit, » dont les faces sont normales à une courbe donnée, menez, par le point P, » un plan perpendiculaire à l'arête; construisez les points Q, R où ce plan » perpendiculaire est rencontré par les axes des cercles osculateurs à la » courbe donnée, pour les points où cette courbe est normale aux faces » de l'angle dièdre; avec PQ et QR comme côtés, construisez un rectangle » PQNR : la diagonale de ce rectangle sera la normale demandée ». (*Société » Philomathique*, 4 novembre 1848.)

il suffit que l'on prenne, soit

$$A' = A\cos\varphi + B\sin\varphi,$$
$$B' = A\sin\varphi - B\cos\varphi;$$

soit

$$A' = A\cos\varphi - B\sin\varphi,$$
$$B' = A\sin\varphi + B\cos\varphi;$$

$\varphi$ étant un arc quelconque : pour plus de simplicité, on peut le choisir de manière que $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ soient rationnels.

II. De cette remarque, il résulte d'abord que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

étant l'équation d'un hyperboloïde à une nappe, les deux systèmes de génératrices rectilignes peuvent être représentés par

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi, \qquad \frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi - \sin\varphi,$$
$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi - \cos\varphi; \qquad \frac{y}{b} = \frac{c}{z}\sin\varphi + \cos\varphi \text{ (*)}.$$

III. De plus, si A, B sont des fonctions de $x$, $y$, $z$, *du premier degré*, l'équation

$$A^2 + B^2 = 0,$$

qui, en général, représente une ligne droite, peut, de *deux infinités de manières*, être remplacée par

$$A'^2 + B'^2 = 0.$$

Soit, par exemple,

$$A = x + 2y - 3z + 1,$$
$$B = 2x - y + z.$$

Si l'on prend

$$\cos\varphi = \frac{3}{5}, \quad \sin\varphi = \frac{4}{5},$$

(*) Cette méthode, que j'ai enseignée il y a bien longtemps, me paraît préférable à celle qui est généralement suivie en France. (Juillet 1866.)

on pourra substituer, à l'équation

$$(x + 2y - 3z + 1)^2 + (2x - y + z)^2 = 0,$$

soit

$$(11x + 2y - 5z + 3)^2 + (-2x + 11y - 15z + 4)^2 = 0,$$

soit

$$(-5x + 10y - 15z + 3)^2 + (10x + 5y - 9z + 4)^2 = 0.$$

En effet, ces trois équations deviennent respectivement, étant développées :

$$5x^2 + 5y^2 + 10z^2 - 14yz - 2zx + 2x + 4y - 6z + 1 = 0,$$

$$125x^2 + 125y^2 + 250z^2 - 350yz - 50zx + 50x + 100y - 150z + 25 = 0,$$

$$125x^2 + 125y^2 + 250z^2 - 350yz - 50zx + 50x + 100y - 150z + 25 = 0;$$

et il est visible que les deux dernières équivalent à la première.

## XXVII. — Sur le problème des partis. (1855.)

Je rappelle l'énoncé de ce problème :

*A chaque coup, l'un des deux joueurs* A, B *gagne un point. Pour que la partie soit terminée, il manque* a *points au joueur* A, *et il en manque* b *au joueur* B. *Sachant que les probabilités de gagner un point sont* $\alpha$ *pour* A *et* $\beta$ *pour* B, *on demande quelle est, pour chacun des joueurs, la probabilité de gagner la partie.*

I. En désignant par $p$ la probabilité relative à A, on trouve, par diverses méthodes :

$$p = \alpha^a\left[1 + \frac{a}{1}\beta + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2}\beta^2 + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+b-2)}{1 \cdot 2 \dots (b-1)}\beta^{b-1}\right], \quad (1)$$

$$p = \alpha^{a+b-1} + \frac{a+b-1}{1}\alpha^{a+b-2}\beta + \dots + \frac{a+b-1}{1}\dots\frac{a+1}{b-1}\alpha^a\beta^{b-1}, \quad (2)$$

$$p = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left[\frac{\alpha^a}{a} - \frac{b-1}{1}\frac{\alpha^{a+1}}{a+1} + \frac{(b-1)(b-2)}{1 \cdot 2}\frac{\alpha^{a+2}}{a+2} - \dots \pm \frac{\alpha^{a+b-1}}{a+b-1}\right]. \quad (3)$$

De même, la probabilité $q$, relative à B, peut être mise sous ces trois formes :

$$q = \beta^b\left[1 + \frac{b}{1}\alpha + \frac{b(b+1)}{1 \cdot 2}\alpha^2 + \dots + \frac{b(b+1)\dots(a+b-2)}{1 \cdot 2 \dots (a-1)}\alpha^{a-1}\right], \quad (4)$$

$$q = \beta^{a+b-1} + \frac{a+b-1}{1}\beta^{a+b-2}\alpha + \cdots + \frac{a+b-1}{1}\cdots\frac{b+1}{a-1}\beta^{b}\alpha^{a-1}, \quad (5)$$

$$q = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left[\frac{\beta^{b}}{b} - \frac{a-1}{1}\frac{\beta^{b+1}}{b+1} + \frac{(a-1)(a-2)}{1\,.\,2}\frac{\beta^{b+2}}{b+2} - \cdots \pm \frac{\beta^{a+b-1}}{a+b-1}\right]. \quad (6)$$

II. Si l'on fait $\alpha = \frac{x}{x+y}$, $\beta = \frac{y}{x+y}$, et que l'on combine, par addition, les égalités correspondantes, on trouve :

$$\left.\begin{aligned}(x+y)^{a+b-1} &= x^{a}\left[(x+y)^{b-1} + \frac{a}{1}y(x+y)^{b-2} + \cdots + \frac{a(a+1)\ldots(a+b-2)}{1.2\ldots(b-1)}y^{b-1}\right]\\ &+ y^{b}\left[(x+y)^{a-1} + \frac{b}{1}x(x+y)^{a-2} + \cdots + \frac{b(b+1)\ldots(a+b-2)}{1.2\ldots(a-1)}x^{a-1}\right],\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}(x+y)^{a+b-1} &= x^{a}\left[x^{b-1} + \frac{a+b-1}{1}x^{b-2}y + \cdots + \frac{(a+b-1)\ldots(a+1)}{1.2\ldots(b-1)}y^{b-1}\right]\\ &+ y^{b}\left[y^{a-1} + \frac{a+b-1}{1}xy^{a-2} + \cdots + \frac{(a+b-1)\ldots(b+1)}{1.2\ldots(a-1)}x^{a-1}\right],\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned}(x+y)^{a+b-1} &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a}\left[\frac{1}{a}(x+y)^{b-1} - \frac{b-1}{1}\frac{x}{a+1}(x+y)^{b-2} + \cdots \pm \frac{x^{b-1}}{a+b-1}\right]\\ &+ \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}y^{b}\left[\frac{1}{b}(x+y)^{a-1} - \frac{a-1}{1}\frac{y}{b+1}(x+y)^{a-2} + \cdots \pm \frac{a+b-1}{y^{a-1}}\right].\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

III. Soit $y = (m-1)\,x$, $m$ étant entier. Les trois dernières relations se réduisent à :

$$\left.\begin{aligned}m^{a+b-1} &= m^{b-1} + \frac{a}{1}(m-1)m^{b-2} + \cdots + \frac{a(a+1)\ldots(a+b-2)}{1.2\ldots(a-1)}(m-1)^{b-1}\\ &+ (m-1)^{b}\left[m^{a-1} + \frac{b}{1}m^{a-2} + \cdots + \frac{b(b+1)\ldots(a+b-1)}{1.2\ldots(b-1)}\right],\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned}m^{a+b-1} &= 1 + \frac{a+b-1}{1}(m-1) + \cdots + \frac{(a+b-1)\ldots(a+1)}{1.2\ldots(b-1)}(m-1)^{b-1}\\ &+ (m-1)^{b}\left[(m-1)^{a-1} + \frac{a+b-1}{1}(m-1)^{a-2} + \cdots + \frac{(a+b-1)\ldots(b+1)}{1.2\ldots(a-1)}\right],\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned}m^{a+b-1} &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left[\frac{1}{a}m^{b-1} - \frac{b-1}{1}\frac{1}{a+1}m^{b-2} + \cdots \pm \frac{1}{a+b-1}\right]\\ &+ \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(m-1)^{b}\left[\frac{1}{b}m^{a-1} - \frac{a-1}{1}\frac{m-1}{b+1}m^{a-2} + \cdots \pm \frac{(m-1)^{a-1}}{a+b-1}\right].\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

IV. Les égalités (10), (11) prouvent que *les nombres entiers*

$$m^{a+b-1}-\left[m^{b-1}+\frac{a}{1}(m-1)m^{b-2}+\cdots+\frac{a(a+1)\ldots(a+b-2)}{1.2\ldots(b-1)}(m-1)^{b-1}\right],$$

$$m^{a+b-1}-\left[1+\frac{a+b-1}{1}(m-1)+\cdots+\frac{(a+b-1)\ldots(a+1)}{1.2\ldots(b-1)}(m-1)^{b-1}\right]$$

*sont divisibles par* $(m-1)^b$; les quotients sont

$$m^{a-1}+\frac{b}{1}m^{a-2}+\cdots+\frac{b(b+1)\ldots(a+b-2)}{1\,.\,2\ldots(a-1)},$$

$$(m-1)^{a-1}+\frac{a+b-1}{1}(m-1)^{a-2}+\cdots+\frac{(a+b-1)\ldots(b+1)}{1\,.\,2\ldots(a-1)}.$$

Par exemple :

$$\frac{3^7-[3^4+3\,.\,2\,.\,3^3+6.2^2.3^2+10.2^3.3+15.2^4]}{2^5}=3^2+5.3+15,$$

$$\frac{3^7-[1+7\,.\,2+21\,.\,2^2+35\,.\,2^3+35\,.\,2^4]}{2^5}=2^2+7.2+21;$$

ou

$$\frac{2\,187-939}{32}=39,\quad \frac{2\,187-939}{32}=39;$$

ce qui est exact.

V. Dans l'application précédente, les parties négatives des deux dividendes sont égales entre elles : il en est toujours ainsi. En effet, ces quantités sont des expressions différentes de $p$, multipliées par un même facteur. On a donc

$$m^{b-1}+\frac{a}{1}(m-1)\,m^{b-2}+\cdots+\frac{a(a+1)\ldots(a+b-2)}{1\,.\,2\ldots(b-1)}(m-1)^{b-1}$$

$$=1+\frac{a+b-1}{1}(m-1)+\cdots+\frac{(a+b-1)\ldots(a+1)}{1\,.\,2\ldots(b-1)}(m-1)^{b-1}$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left[\frac{1}{a}m^{b-1}-\frac{b-1}{1}\,\frac{1}{a+1}m^{b-2}+\cdots\pm\frac{1}{a+b-1}\right].$$

Conséquemment, le dernier nombre est *entier;* ce qui n'était pas évident *a priori.*

*Addition.* — (1878) (*).

VI. On a, en série convergente,

$$\alpha^{-a} = (1 - \beta)^{-a} = 1 + \frac{a}{1}\beta + \frac{a(a+1)}{1.2}\beta^2 + \cdots$$

Donc, à cause de $1 = p + q$ :

$$p + q = \alpha^a \left[ 1 + \frac{a}{1}\beta + \frac{a(a+1)}{1.2}\beta^2 + \cdots \right]; \tag{13}$$

puis, par soustraction,

$$q = \alpha^a [C_{a+b-1,\,b}\, \beta^b + C_{a+b,\,b+1}\, \beta^{b+1} + \cdots]. \tag{14}$$

De même,

$$p = \beta^b [C_{a+b-1,\,a}\, \alpha^a + C_{a+b,\,a+1}\, \alpha^{a+1} + \cdots]. \tag{15}$$

Ainsi, *les probabilités* p, q *sont développées en séries.*

VII. Avant de chercher l'interprétation de ces formules, reprenons l'égalité (13), mise sous la forme

$$1 = \alpha^a + \frac{a}{1}\beta\alpha^a + \frac{a(a+1)}{1.2}\beta^2\alpha^a + \cdots \tag{16}$$

Dans le second membre :

$\alpha^a$ est la probabilité que A fera $a$ points en $a$ coups;

$\frac{a}{1}\beta\alpha^a$ est la probabilité que A fera $a - 1$ points en $a$ coups, et un point au coup dont le rang est $a + 1$;

$\frac{a(a+1)}{1.2}\beta^2\alpha^a$ est la probabilité que A fera $a - 1$ points en $a + 1$ coups, et un point au coup dont le rang est $a + 2$;

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (**).

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. IV.

(**) Ce raisonnement est celui dont Poisson fait usage (*Recherches sur les probabilités des jugements*, p. 190).

L'équation (15) exprime donc ce fait évident :

*Si l'on prolonge suffisamment la partie, le joueur* A *finira par gagner les* a *points qui lui manquent.*

VIII. Revenons à la formule (15), ainsi écrite :

$$p = C_{a+b-1,\,b-1}\,\alpha^a\beta^b + C_{a+b,\,b-1}\,\alpha^{a+1}\beta^b + C_{a+b+1,\,b-1}\,\alpha^{a+2}\beta^b + \cdots \quad (17)$$

1° $C_{a+b-1,b-1}\,\alpha^a\,\beta^b = C_{a+b-1,b-1}\,\alpha^a\,\beta^{b-1} \times \beta$ : c'est la *probabilité que le joueur* B, *ayant gagné* b — 1 *points en* a + b — 1 *coups, gagnera encore un point au coup dont le rang est* a + b ;

2° $C_{a+b,b-1}\,\alpha^{a+1}\,\beta^b = C_{a+b,b-1}\,\alpha^{a+1}\,\beta^{b-1} \times \beta$ : *probabilité que le joueur* B, *ayant gagné* b — 1 *points en* a + b *coups, gagnera encore un point au coup dont le rang est* a + b + 1 ; etc.

Donc, le second membre de la formule (7) représente *la probabilité que le joueur* B *gagnera* b *points, en un nombre de coups égal ou supérieur à* b + a. Si l'on se reporte à l'énoncé du problème, on voit que *cette probabilité est la même que celle du joueur* A, *de gagner* a *points en* a + b — 1 *coups.*

IX. Soient $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Alors, comme le fait remarquer Laplace, on peut imaginer une urne renfermant une boule blanche et une boule noire; la première pour A, la seconde pour B : à chaque tirage, on remet, dans l'urne, la boule tirée. Cela posé, la comparaison des valeurs (1), (17) conduit à cette proposition :

*La probabilité que la boule blanche sortira* a *fois, en* a + b — 1 *tirages, est égale à la probabilité que la boule noire sortira* b *fois, en un nombre de tirages égal ou supérieur à* b + a (*).

(*) Voir une Note d'*Émile Ghysens,* jeune Géomètre enlevé à la Science (*Nouvelle Correspondance mathématique,* t. IV, p. 85).

## XXVIII. — Sur les fractions continues. (1849) (*).

I. Soit l'équation

$$a_1x^2 - 2b_0x - a_0 = 0, \tag{1}$$

$a_0$, $a_1$, $b_0$ étant des nombres entiers tels, que

$$b_0^2 + a_0a_1 = A \tag{2}$$

ne soit pas un carré.

*La plus grande racine* est donnée par les deux formules

$$x = \frac{b_0 + \sqrt{A}}{a_1} = q_1 + \frac{1}{x_1}. \tag{3}$$

Nommons N la racine carrée entière de A, et posons

$$b_0 + N = d_1, \quad d_1 = a_1q_1 + r_1;$$

nous aurons, de même :

$$b_1 + N = d_2, \quad d_2 = a_2q_2 + r_2,$$
$$b_2 + N = d_3, \quad d_3 = a_3q_3 + r_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Mais

$$b_1 = a_1q_1 - b_0 = b_0 + N - r_1 - b_0 = N - r_1;$$

conséquemment

$$d_2 = 2N - r_1,$$
$$d_3 = 2N - r_2,$$
$$\cdots\cdots$$

La *loi des dividendes* est donc connue.

D'un autre côté, la relation

$$a_2 = a_0 + 2b_0q_1 - a_1q_1^2 \ (^{**})$$

(*) Note extraite d'une *Théorie des fractions continues périodiques*, publiée dans les *Nouvelles Annales*.

(**) Voir le travail cité.

donne

$$a_2 = a_0 + q_1(2b_0 - a_1q_1) = a_0 + q_1(2b_0 - b_1 - b_0)$$
$$= a_0 + q_1(b_0 - b_1) = a_0 + q_1(d_1 - d_2) = a_0 + q_1(r_1 - r_0).$$

De là le tableau suivant, qui montre la marche du calcul :

$$d_1 = b_0 + \mathrm{N} = 2\mathrm{N} - r_0,$$
$$d_1 = a_1q_1 + r_1, \quad d_2 = 2\mathrm{N} - r_1, \quad a_2 = a_0 + q_1(r_1 - r_0),$$
$$d_2 = a_2q_2 + r_2, \quad d_3 = 2\mathrm{N} - r_2, \quad a_3 = a_1 + q_2(r_2 - r_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

II. S'il s'agit de l'équation

$$a_1x^2 - 2b_0x + a_0 = 0,$$

il suffit de changer le signe de $a_0$.

III. En appliquant cette méthode à l'équation

$$3x^2 - 8x - 5 = 0,$$

on a

$$a_1 = 3, \quad b_0 = 4, \quad a_0 = 5, \quad \mathrm{A} = 31, \quad \mathrm{N} = 5;$$

puis

$$\begin{array}{lll}
 & d_1 = 9, & a_1 = 3, \\
9 = 3.\ 3 + 0, & d_2 = 10, & a_2 = 5 - 3 = 2, \\
10 = 2.\ 5 + 0, & d_3 = 10, & a_3 = 3, \\
10 = 3.\ 3 + 1, & d_4 = 9, & a_4 = 2 + 3 = 5, \\
9 = 5.\ 1 + 4, & d_5 = 6, & a_5 = 3 + 3 = 6, \\
6 = 6.\ 1 + 0, & d_6 = 10, & a_6 = 5 - 4 = 1, \\
10 = 1.10 + 0, & d_7 = 10, & a_7 = 6, \\
10 = 6.\ 1 + 4, & d_8 = 8, & a_8 = 1 + 4 = 5, \\
6 = 5.\ 1 + 1, & d_9 = 9, & a_9 = 6 - 3 = 3, \\
9 = 3.\ 3 + 0, & d_{10} = 10, & a_{10} = 5 - 3 = 2 \ldots;
\end{array}$$

donc

$$x' = (3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, 1).$$

IV. Pour la seconde racine, prise positivement, on aurait

$$a_1 = 3, \quad b_0 = -4, \quad a_0 = 5, \quad \mathrm{A} = 31, \quad \mathrm{N} = 5;$$

puis

$$
\begin{array}{lll}
 & d_1 = 1, & a_1 = 3, \\
1 = 3.\ 0 + 1, & d_2 = 9, & a_2 = 5, \\
9 = 5.\ 1 + 4, & d_3 = 6, & a_3 = 3 + 3 = 6, \\
6 = 6.\ 1 + 0, & d_4 = 10, & a_4 = 5 - 4 = 1, \\
10 = 1.10 + 0, & d_5 = 10, & a_5 = 6, \\
10 = 6.\ 1 + 4, & d_6 = 6, & a_6 = 1 + 4 = 5, \\
6 = 5.\ 1 + 1, & d_7 = 9, & a_7 = 6 - 3 = 3, \\
9 = 3.\ 3 + 0, & d_8 = 10, & a_8 = 5 - 3 = 2, \\
10 = 2.\ 5 + 0, & d_9 = 10, & a_9 = 3, \\
10 = 3.\ 3 + 1, & d_{10} = 9, & a_{10} = 2 + 3 = 5, \\
9 = 5.\ 1 + 4, \ldots; & &
\end{array}
$$

donc

$$-x'' = 0,\quad (1, 1, 10, 1, 1, 3, 5, 3).$$

V. Prenons encore l'équation

$$62x^2 - 400x + 645 = 0,$$

laquelle donne

$$x' = \frac{200 + \sqrt{10}}{62},\qquad x'' = \frac{200 - \sqrt{10}}{62}.$$

Pour la première racine :

$$a_1 = 62,\quad a_0 = -645,\quad N = 3,\quad d_1 = 203;$$

puis

$$
\begin{array}{lll}
203 = 62.3 + 17, & d_2 = -11, & a_2 = -645 + 3(203 + 11) = -3, \\
-11 = -3.3 - 2, & d_3 = 8, & a_3 = 62 - 3.19 = 5, \\
8 = 5.1 + 3, & d_4 = 3, & a_4 = -3 + 5 = 2, \\
3 = 2.1 + 1, & d_5 = 5, & a_5 = 5 - 2 = 3, \\
5 = 3.1 + 2, & d_6 = 4, & a_6 = 2 + 1 = 3, \\
4 = 3.1 + 1, & d_7 = 5, & a_7 = 3 - 1 = 2, \\
5 = 2.2 + 1, & d_8 = 5, & a_8 = 3, \\
5 = 3.1 + 2, & d_9 = 4, & a_9 = 2 + 1 = 3, \ldots
\end{array}
$$

A cause de $d_9 = d_6$ et de $a_9 = a_6$, la période est en évidence; et

$$x' = 3, 3, 1, 1, (1, 1, 2).$$

On trouve, semblablement,

$$x'' = 3,\ 5,\ (1,\ 2,\ 1) = 3,\ 5,\ 1,\ (2,\ 1,\ 1).$$

VI. Pour terminer, résolvons les équations du second degré auxquelles on est conduit lorsqu'on cherche la valeur d'une fraction continue périodique.

D'abord, l'équation :

$$Q'y^2 + (P' - Q)\,y - P = 0$$

donne

$$y = \frac{-(P' - Q) \pm \sqrt{(P' - Q)^2 + 4PQ'}}{2Q'}.$$

Mais $PQ' - P'Q = \pm 1$ (*); donc

$$y = \frac{-(P' - Q) \pm \sqrt{(P' + Q)^2 \pm 4}}{2Q'}.$$

Plus généralement, soit l'équation :

$$Q'(D'x - D)^2 - (P' - Q)(D'x - D)(E'x - E) - P(E'x - E)^2 = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} &\left[Q'D'^2 - (P' - Q)\,D'E' - PE'^2\right] x^2 \\ -&\left[2(Q'DD' - PEE') - (P' - Q)(DE' + D'E)\right] x \\ +&\ Q'D^2 - (P' - Q)\,DE - PE^2 = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$x = \frac{2(Q'DD' - PEE') - (P' - Q)(DE' + D'E) \pm \sqrt{L}}{2\left[Q'D'^2 - PE'^2 - (P' - Q)\,D'E'\right]},$$

L désignant la fonction

$$\begin{aligned} &\left[2(Q'DD' - PEE') - (P' - Q)(DE' + D'E)\right]^2 \\ -\,4&\left[Q'D'^2 - PE'^2 - (P' - Q)\,D'E'\right]\left[Q'D^2 - PE^2 - (P' - Q)\,DE\right]. \end{aligned}$$

En développant cette fonction, et ayant égard aux relations $PQ' - P'Q = \pm 1$, $DE' - D'E = \pm 1$, on trouve qu'elle se réduit à $(P' + Q)^2 \pm 4$.

(*) *Loc. cit.*

Il suit de là que si l'on cherche la valeur d'une fraction continue périodique, le radical contenu dans cette valeur a la forme $\sqrt{u^2 \pm 4}$, laquelle, si $u$ est pair, se réduit à $2\sqrt{u'^2 \pm 1}$. Par suite, d'après le théorème de Lagrange (*), l'irrationnelle $\sqrt{A}$, dans laquelle A est un nombre entier, ne doit différer, de l'irrationnelle $\sqrt{u^2 \pm 4}$, que par un facteur commensurable $\lambda$. En d'autres termes, on peut toujours satisfaire à l'équation

$$A\lambda^2 = u^2 \pm 4.$$

## XXIX. — Analyse indéterminée.

(*Janvier* 1867) (**).

Problème. — *Trouver plusieurs cubes entiers, consécutifs, dont la somme soit un carré* (***).

I. A cause de la relation

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

on a

$$x^3+(x+1)^3+\cdots+(x+y-1)^3=\frac{y}{8}(2x+y-1)\left[4x^2+4(y-1)x+2y(y-1)\right];$$

ou, en représentant par $s$ la somme des $y$ cubes, et en posant

$$2x + y - 1 = z: \tag{1}$$

$$16s = 2yz(y^2 + z^2 - 1). \tag{2}$$

(*) *Loc. cit.*

(**) Résumé de deux Notes publiées dans les *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.*

(***) Cette question m'a été suggérée par la lecture d'un beau Mémoire de M. Angelo Genocchi (*Note sur quelques sommations de cubes*). Bien que ce savant Géomètre y donne les solutions *rationnelles* de l'équation *générale*

$$x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 + \cdots + (x+nr-r)^3 = y^2,$$

il m'a semblé intéressant de chercher les solutions *entières* de l'équation *particulière*

$$x^3 + (x+1)^3 + \cdots + (x+n-1)^3 = y^2.$$

D'après l'égalité (1), $y$ et $z$ sont de *parités différentes.* Par suite, $2yz$ et $y^2 + z^2 - 1$ sont divisibles par 4.

Soient :

$$2yz = 4\alpha, \tag{3}$$

$$y^2 + z^2 - 1 = 4\beta, \tag{4}$$

$$s = t^2 = \alpha\beta. \tag{5}$$

Soient encore

$$\alpha = \theta u^2, \quad \beta = \theta' v^2;$$

$\theta$, $\theta'$ ne contenant aucun facteur carré ; autrement dit :

$$\theta = abcde \ldots, \quad \theta' = a'b'c'd'e' \ldots;$$

$a, b, c, d, e, \ldots$, d'une part, et $a', b', c', d', e', \ldots$, de l'autre, étant des facteurs premiers *inégaux*. A cause de l'équation ($d$), $\theta\theta'$ doit être un carré ; donc

$$a' = a, \quad b' = b, \quad c' = c, \ldots$$

ou

$$\theta' = \theta,$$

et, par conséquent,

$$\alpha = 4\theta u^2, \quad \beta = 4\theta v^2. \tag{f}$$

Prenons

$$y = p\gamma, \quad z = q\gamma, \tag{g}$$

$p$, $q$ étant deux nombres donnés, l'un *pair,* l'autre *impair, premiers entre eux.* Les équations ($b$), ($c$) deviennent, à cause des valeurs ($f$) :

$$pq\gamma^2 = 2\theta u^2, \tag{h}$$

$$(p^2 + q^2)\gamma^2 - 1 = 4\theta v^2. \tag{k}$$

Éliminant $\theta$, on trouve

$$(p^2 + q^2)u^2 - 2pqv^2 = \frac{u^2}{\gamma^2};$$

donc $u$ est divisible par $\gamma$ :

$$u = \gamma u'; \tag{l}$$

et la relation ($h$) devient

$$pq = 2\theta u'^2. \tag{A}$$

II. Dans chaque cas particulier, on décomposera donc $\frac{pq}{2}$ en deux facteurs $u'^2$, $\theta$, dont l'un soit un carré, l'autre n'admettant aucun facteur carré; après quoi l'on cherchera les solutions entières de l'équation

$$(p^2 + q^2)\gamma^2 - 4\theta v^2 = 1. \tag{B}$$

Si elle en admet, on emploiera les formules

$$\left.\begin{array}{c} x = \dfrac{(q-p)\gamma + 1}{2}, \quad x + y - 1 = \dfrac{(q+p)\gamma - 1}{2}, \\ s = (u'v\theta\gamma)^2. \end{array}\right\} \text{(C)}$$

III. *Applications.* — 1° $p = 5$, $q = 4$. L'équation (A) donne

$$\theta = 6, \quad u' = 1;$$

en sorte que (B) devient :

$$(5\gamma)^2 - 6(2v)^2 = 1. \tag{1}$$

La solution la plus simple est

$$\gamma = 1, \quad v = 1;$$

d'où l'on déduit, par exemple,

$$\gamma = 97, \quad v = 99;$$

puis

$$x = 49, \quad x + y - 1 = 539, \quad s = (6.97.99)^2.$$

Conséquemment

$$49^3 + 50^3 + 51^3 + \cdots + 539^3 = (6\ 97\ 99)^2;$$

ce qui est exact.

2° $p = 5$, $q = 8$. On trouve $\theta = 5$, $u' = 2$, puis

$$89\gamma^2 - 5(2v)^2 = 1. \tag{2}$$

Le développement de

$$\sqrt{\frac{89}{5}} = \frac{\sqrt{445}}{5} = \frac{R}{5}$$

en fraction continue donne, comme fractions *complètes* :

$$\frac{R}{5},\ \frac{R+20}{9},\ \frac{R+16}{21},\ \frac{R+5}{20},\ \frac{R+15}{11},\ \frac{R+18}{11},\ \frac{R+15}{20},$$
$$\frac{R+5}{21},\ \frac{R+16}{9},\ \frac{R+20}{5},\ \frac{R+20}{9},\ \frac{R+16}{21},\ \text{etc.}$$

Par conséquent (*), l'équation (2) n'admet aucune solution entière.

3° $p=5$, $q=12$. On a $u'=1$, $\theta=30$ ; donc

$$(13\gamma)^2 - 120\,v^2 = 1. \qquad (3)$$

Cette équation est vérifiée par

$$13\gamma = 11, \quad v = 1;$$

mais, comme la valeur de $\gamma$ est fractionnaire, on doit recourir à la relation

$$(11+\sqrt{120})^n = 13\gamma + v\sqrt{120},$$

en disposant convenablement de $n$. Après quelques essais, l'on trouve que $n=9$ donne

$$\gamma = 45\,575\,339\,447, \qquad v = 54\,085\,723\,209.$$

On conclut, de ces valeurs :

$$169\gamma^2 = 351\,031\,854\,604\,867\,350\,921\,721,$$
$$120v^2 = 351\,031\,854\,604\,867\,350\,921\,720,$$
$$x = 159\,513\,698\,065,$$
$$x + y - 1 = 387\,390\,395\,299,$$
$$s = (30\,.\,45\,575\,339\,447\,.\,54\,085\,723\,209)^2.$$

(*) *Théorie des Nombres*, t. I, p. 108. — La Table X renferme une faute typographique : au lieu de 1 850, on doit lire 7 850.

*Addition.* — (*Mai* 1881.)

IV. *Examen d'un cas particulier.* Si l'on suppose $y = x + 1$, on est conduit à l'équation

$$\lambda^2 - 15\mu^2 = 1, \tag{12}$$

dans laquelle

$$\lambda = \frac{1}{2}(5x + 5), \quad \mu^2 = \frac{s}{9x^2}.$$

Les solutions de cette équation (12) sont données par les formules

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[(4 + \sqrt{15})^{2n+1} + (4 - \sqrt{15})^{2n+1}\right],$$

$$\mu = \frac{1}{2\sqrt{15}}\left[(4 + \sqrt{15})^{2n+1} - (4 - \sqrt{15})^{2n+1}\right];$$

d'où il résulte :

$$x = \frac{1}{5}\left[(4 + \sqrt{15})^{2n+1} + (4 - \sqrt{15})^{2n+1} - 5\right],$$

$$y = \frac{1}{5}\left[(4 + \sqrt{15})^{2n+1} + (4 - \sqrt{15})^{2n+1} + 2\right],$$

$$z = \frac{5}{500}\left[(4+\sqrt{15})^{2n+1} - (4-\sqrt{15})^{2n+1}\right]^2 \left[(4+\sqrt{15})^{2n+1} + (4-\sqrt{15})^{2n+1} - 5\right]^2.$$

Si, pour abréger, on fait

$$(4 + \sqrt{15})^{2n+1} = \mathrm{A}, \quad (4 - \sqrt{15})^{2n+1} = \mathrm{B},$$

on a donc, *identiquement*,

$$(\mathrm{A} + \mathrm{B} - 5)^3 + (\mathrm{A} + \mathrm{B} + 2)^3 + (\mathrm{A} + \mathrm{B} + 7)^3 + \cdots + (2\mathrm{A} + 2\mathrm{B} - 6)^3$$
$$= \frac{5}{4}(\mathrm{A} - \mathrm{B})^2 (\mathrm{A} + \mathrm{B} - 5)^2.$$

V. *Vérifications.* 1° $n = 0$, $\mathrm{A} = 4 + \sqrt{15}$, $\mathrm{B} = 4 - \sqrt{15}$.

On doit trouver

$$5^3 + 10^3 = \frac{5}{4}.4.15.5^2,$$

ou

$$1 + 8 = 9.$$

2° $\quad n = 1, \quad A = (4 + \sqrt{15})^3 = 244 + 63\sqrt{15},$

$$B = (4 - \sqrt{15})^3 = 244 - 63\sqrt{15}.$$

L'identité devient

$$485^3 + 490^3 + 495^3 + \cdots + 970^3 = 3 \cdot 63^2 \cdot 15 \cdot 485^2,$$

ou

$$97^3 + 98^3 + 99^3 + \cdots + 194^3 = 9 \cdot 63^2 \cdot 97^2.$$

Le premier membre égale $(97 \cdot 195)^2 - (97 \cdot 48)^2$; donc

$$195^2 - 48^2 = 9 \cdot 63^2;$$

etc.

## XXX. — Modification à la méthode de Newton. (1855.)

I. Si, dans l'équation

$$f(\alpha) + hf'(\alpha) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(\alpha) + \cdots + \frac{h^m}{1 \cdot 2 \ldots m} f^m(\alpha) = 0,$$

on conserve les trois premiers termes, on obtient

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{1}{2} h^2 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

puis, en appliquant la *méthode des approximations successives* (*),

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{1}{2} \frac{[f(\alpha)]^2 f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^3}.$$

La formule due à Newton peut donc être remplacée par celle-ci :

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{f}{f'} - \frac{f''}{2f'} \left(\frac{f}{f'}\right)^2,$$

(*) *Manuel des Candidats*, t. I, p. 25.

dans laquelle nous avons écrit $f$, $f'$, $f''$ au lieu de $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$.

II. Cette nouvelle formule, qui donnera souvent une valeur fort approchée de la racine inconnue $a$, peut, comme celle de Newton, être interprétée géométriquement. En effet, *si l'on remplace la courbe dont l'ordonnée est* f(x), *par une parabole osculatrice, ayant son axe parallèle à l'axe des* x, *l'abscisse du point d'intersection de ces deux dernières lignes est* $\alpha_1$.

III. *Application.* $f(x) = x^3 - 7x + 7 = 0$.

Nous prendrons $\alpha = 1{,}357$ (*). Cette valeur donne

$$f = -0{,}000\,153\,707, \quad f' = -1{,}475\,653, \quad f'' = 8{,}142;$$

puis

$$\alpha_1 = 1{,}357 - \frac{0{,}000\,153\,707}{1{,}475\,653} + \frac{4{,}071}{1{,}475\,653}\left(\frac{0{,}000\,153\,707}{1{,}475\,653}\right)^2.$$

La fraction $\frac{0{,}000\,153\,707}{1{,}475\,653}$ égale, à peu près, 0,000 1. De même, $\frac{4{,}071}{1{,}475\,653} = 3$, environ. Par conséquent, le dernier terme de $\alpha_1$ diffère peu de 0,000 000 03. Il suffit donc de calculer chacun des deux derniers termes avec neuf décimales exactes. A ce degré d'approximation,

$$\frac{0{,}000\,153\,707}{1{,}475\,653} = 0{,}000\,104\,162, \quad \left(\frac{0{,}000\,153\,707}{1{,}475\,653}\right)^2 = 0{,}000\,000\,011,$$

$$\frac{4{,}071}{1{,}475\,653}\left(\frac{0{,}000\,153\,707}{1{,}475\,653}\right)^2 = 0{,}000\,000\,030;$$

puis

$$\alpha_1 = 1{,}357 - 0{,}000\,104\,162 + 0{,}000\,000\,030,$$

ou

$$\alpha_1 = 1{,}356\,895\,868.$$

La différence entre ce résultat et la valeur exacte est inférieure à 0,000 000 000 11 (**).

(*) *Manuel des Candidats,* t. I, p. 220.

(**) *Loc. cit.*

## XXXI. — Sur la somme des puissances semblables des nombres naturels. (1855) (*).

La plupart des Traités d'Algèbre donnent la relation générale

$$(n+1)\left[(n+1)^p-1\right]=\frac{p+1}{1}S_p+\frac{(p+1)p}{1.2}S_{p-1}+\cdots+\frac{p+1}{1}S_1,$$

dans laquelle $S_p$ représente la somme des puissances $p$ des $n$ premiers nombres entiers. Cette relation permet de calculer, assez rapidement, les valeurs de $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ ; mais elle devient presque illusoire dès que l'indice $p$ surpasse 4. Il y a dix ans, M. Puiseux, probablement frappé de cet inconvénient, donna, dans le *Journal* de M. Liouville, la valeur de $S_p$, en fonction *explicite* de $n$ et de $p$. Malheureusement, la méthode employée par ce savant Géomètre est assez compliquée (**); en outre, les valeurs qu'il trouve, pour les coefficients de $S_p$, très satisfaisantes en théorie, le seraient fort peu s'il s'agissait de passer aux applications numériques (***).

La méthode suivante, dont le germe se trouve dans le grand ouvrage de Lacroix, sera peut-être, à cause de sa simplicité, capable d'intéresser les Géomètres.

(*) Les quatre Notes suivantes ont paru dans divers Recueils. Si je les réimprime (avec quelques modifications), c'est parce qu'elles me semblent pouvoir être regardées comme les prolégomènes d'une théorie des *Nombres de Bernoulli.*

(**) Cette observation, qui n'est pas une critique, s'applique également au Mémoire de M. Pépin, inséré aux *Nouvelles Annales* (janvier 1856). Du reste, l'auteur, dont je n'ai connu le travail qu'après avoir terminé le mien, dit expressément, en parlant de la formule trouvée par M. Puiseux : « L'expression générale de la fonction $\varpi_{m,\alpha}$ est fort mal appropriée au calcul ».

(***) Par exemple, le coefficient 350 exigerait ces opérations :

$$\frac{4^6-3.3^6+3.2^6-1}{1.2.3}=\frac{4\,096-2\,187+192-1}{6}=\frac{2\,100}{6}=350.$$

I. On a, identiquement,

$$n^2 = n(n-1) + n.$$

En multipliant les deux membres par

$$n = (n-2) + 2 = (n-1) + 1,$$

on trouve

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + \left.\begin{matrix} 2 \\ +1 \end{matrix}\right| n(n-1) + n,$$

ou

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$

Multipliant les deux membres de cette nouvelle égalité par

$$n = (n-3) + 3 = (n-2) + 2 = (n-1) + 1,$$

on a encore

$$n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + \left.\begin{matrix} 3 \\ +3 \end{matrix}\right| n(n-1)(n-2) + \left.\begin{matrix} 6 \\ +1 \end{matrix}\right| n(n-1) + n,$$

ou

$$n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n.$$

La loi des résultats est actuellement évidente; de sorte qu'en désignant par $A_{n,p}$ le nombre des arrangements de $n$ lettres prises $p$ à $p$, et par $B_p$, $C_p$, ..., $L_p$, $(p-2)$ coefficients, indépendants de $n$, on peut écrire :

$$n^p = A_{n,p} + B_p A_{n,p-1} + C_p A_{n,p-2} + \cdots + L_p A_{n,2} + n. \quad \text{(A)}$$

II. Pour démontrer, par le raisonnement connu, la généralité de cette relation, et pour trouver la loi des coefficients, supposons

$$n^{p-1} = A_{n,p-1} + B_{p-1} A_{n,p-2} + C_{p-1} A_{n,p-3} + \cdots + K_{p-1} A_{n,2} + n,$$

et multiplions les deux membres de cette égalité par

$$n = (n-p+1) + (p-1) = (n-p+2) + (p-2) = \cdots = (n-1) + 1;$$

nous aurons

$$n^p = A_{n,p} + \left.\begin{array}{c}(p-1)\\ +B_{p-1}\end{array}\right| A_{n,p-1} + \left.\begin{array}{c}(p-2)\,B_{p-1}\\ +C_{p-1}\end{array}\right| A_{n,p-2} + \cdots + \left.\begin{array}{c}2K_{p-1}\\ +1\end{array}\right| A_{n,2} + n\,;$$

et, par conséquent :

$$\left.\begin{array}{l} B_p = B_{p-1} + (p-1), \\ C_p = C_{p-1} + (p-2)\,B_{p-1}, \\ D_p = D_{p-1} + (p-3)\,C_{p-1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L_p = 1 + 2\,K_{p-1}. \end{array}\right\} \qquad (B)$$

III. Ainsi que l'a fait remarquer Lacroix (*), le calcul des coefficients $B_p$, $C_p$, ..., $L_p$ est fort simple. En effet, si l'on suppose, successivement,

$$p = 1, 2, 3, 4, \ldots,$$

on trouve, par les formules (B) :

| $p$ | $A_p$ | $B_p$ | $C_p$ | $D_p$ | $E_p$ | $F_p$ | $G_p$ | $H_p$ | $K_p$ | $L_p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 1 | 6 | 7 | 1 | | | | | | |
| 5 | 1 | 10 | 25 | 15 | 1 | | | | | |
| 6 | 1 | 15 | 65 | 90 | 31 | 1 | | | | |
| 7 | 1 | 21 | 140 | 350 | 301 | 63 | 1 | | | |
| 8 | 1 | 28 | 266 | 1 050 | 1 701 | 966 | 127 | 1 | | |
| 9 | 1 | 36 | 462 | 2 646 | 6 951 | 7 770 | 3 025 | 255 | 1 | |
| 10 | 1 | 45 | 750 | 5 880 | 22 827 | 42 525 | 34 105 | 9 330 | 511 | 1 |

(*) Et aussi M. Pépin.

Il résulte, de la formation de ce tableau, que *le* $l^{\text{ième}}$ *terme d'une colonne verticale quelconque est égal au terme écrit au-dessus, augmenté de* $l$ *fois le terme placé à la gauche de celui-ci* (*). Par exemple,

$$1701 = 301 + 4 \,.\, 350.$$

IV. Si l'on écrit ainsi les nombres contenus dans le tableau précédent :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | 127 | 225 | 511 | |
| 1 | 6 | 25 | 90 | 301 | 966 | 3 025 | 9 330 | | |
| 1 | 10 | 65 | 350 | 1 701 | 7 770 | 34 105 | | | |
| 1 | 15 | 140 | 1 050 | 6 951 | 42 525 | | | | |
| 1 | 21 | 266 | 2 646 | 22 827 | | | | | |
| 1 | 28 | 462 | 5 880 | | | | | | |
| 1 | 36 | 750 | | | | | | | |
| 1 | 45 | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | |

on voit que les termes de la première ligne horizontale sont tous égaux à l'unité, et que ceux de la deuxième sont égaux aux puissances successives de 2, diminuées de 1. En outre, *un terme quelconque* $N_{r,l}$, *occupant le rang* $r$ *dans la* $l^{\text{ième}}$ *ligne*

(*) Pour plus de régularité, on a représenté par $A_p$ le coefficient de $A_{n,p}$, coefficient égal à l'unité. Le Mémoire de M. Pépin contient également le tableau ci-dessus.

*horizontale, est égal à* l *fois le terme écrit à gauche, augmenté du terme écrit au-dessus.* Il n'est pas bien difficile de conclure de là :

$$1.2.3\ldots(l-1)\,N_{r,l}=l^{r+l-2}-\frac{l-1}{1}(l-1)^{r+l-2}+\ldots\pm 1. \quad \text{(C)}$$

Cette formule générale, beaucoup moins commode que la règle précédente, a été trouvée par M. Puiseux.

V. Revenant à l'équation (A), nous aurons, en changeant $n$ en $n-1$, $n-2$, ... 3, 2, 1, et ajoutant :

$$S_p=\frac{1}{p+1}A_{n+1,p+1}+\frac{B_p}{p}A_{n+1,p}+\frac{C_p}{p-1}A_{n+1,p-1}+\cdots+\frac{L_p}{3}A_{n+1,3}+\frac{1}{2}A_{n+1,2}, \quad \text{(D)}$$

ou

$$\left.\begin{aligned}S_p={}&\frac{1}{p+1}(n+1)\,n(n-1)\ldots(n-p+1)\\&+\frac{B_p}{p}(n+1)\,n\ldots(n-p+2)\\&+\frac{C_p}{p-1}(n+1)\,n\ldots(n-p+3)\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{L_p}{3}(n+1)\,n(n-1)\\&+\frac{1}{2}(n+1)n.\end{aligned}\right\}\quad \text{(E)}$$

Par exemple, si $n=10$ :

$$S_6=\frac{1}{7}11.10.9.8.7.6.5+\frac{15}{6}11.10.9.8.7.6+\frac{65}{5}11.10.9.8.7$$
$$+\frac{90}{4}11.10.9.8+\frac{31}{3}11.10.9+\frac{1}{2}11.10$$
$$=110(2\,160+7\,560+6\,552+1\,620+93)+55=1\,978\,405.$$

En effet,

$$1^6 + 2^6 + \cdots + 10^6 = 1 + 64 + 729 + 4\,096 + 15\,625 + 46\,656$$
$$+ 117\,649 + 262\,144 + 531\,441 + 1\,000\,000 = 1\,978\,405\ (^*).$$

## XXXII. — Sur les différences de $1^p$, et sur le calcul des Nombres de Bernoulli.

(*Juillet* 1859.)

I. La formule

$$\Delta^n u_0 = u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} u_{n-2} + \cdots \pm u_0$$

donne, en supposant $u_0 = 1^p$ :

$$\Delta^n(1^p) = (n+1)^p - \frac{n}{1}\,.\,n^p + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-1)^p - \cdots \mp \frac{1}{2}\,.\,2^p \pm 1^p,$$

$$\Delta^{n-1}(1^p) = n^p - \frac{n-1}{1}(n-1)^p + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}(n-2)^p - \cdots \pm \frac{n-1}{1} 2^p \mp 1^p.$$

On conclut, de ces deux équations,

$$(n+1)\Delta^n(1^p) + n\Delta^{n-1}(1^p) =$$
$$(n+1)^{p+1} - \left[\frac{n+1}{1} - 1\right] n^{p+1}$$
$$+ \left[\frac{(n+1)n}{1\,.\,2.} - \frac{n}{1}\right](n-1)^{p+1} - \cdots \mp \left[(n+1)n - n(n-1)\right]2^p \pm \left[(n+1) - n\right]1^p$$
$$= (n+1)^{p+1} - \frac{n}{1} n^{p+1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-1)^{p+1} - \cdots \mp \frac{n}{1} 2^{p+1} \pm 1^{p+1}.$$

Donc

$$\Delta^n(1^{p+1}) = (n+1)\Delta^n(1^p) + n\Delta^{n-1}(1^p). \tag{A}$$

II. La relation (A) donne le moyen d'obtenir, de proche en

(*) On peut rapprocher le développement (E) de celui qui résulte d'une remarquable formule due à M. Prouhet (*Cours d'Analyse*, de Sturm, t. II, p. 557) (octobre 1866).

proche, et par un calcul assez simple, les différences successives de $1^2$, $1^3$, $1^4$, $1^5$, ...

En effet, si l'on prend les nombres naturels :

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

dont les différences premières et secondes sont

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots$$
$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots$$

on en conclut que les quantités

$$1^1,\quad \Delta(1^1),\quad \Delta^2(1^1)$$

ont pour valeurs

$$1,\ 1,\ 0.$$

Multipliant ces derniers nombres, respectivement, par

$$1,\ 2,\ 3,$$

ce qui donne

$$1,\ 2,\ 0,$$

on a, par la formule (A) :

$$\Delta(1^2) = 1 + 2 = 3,\quad \Delta^2(1^2) = 2 + 0 = 2,\quad \Delta^3(1^2) = 0.$$

Ainsi, la quantité $1^2$ et ses différences successives ont pour valeurs

$$1,\ 3,\ 2,\ 0.$$

En continuant, on forme le tableau suivant (*) :

(*) Ce tableau est tiré, en grande partie, d'une brochure intitulée *Table des quarrés et des cubes, par C. Séguin l'aîné* (1801). L'auteur, après avoir donné, sous forme empirique, la relation (A), indique le développement de

$$S_p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p,$$

ordonné suivant les puissances de $n$. Je dois la connaissance de ce curieux opuscule, très rare aujourd'hui, au savant M. Terquem.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1^1$ | 1 | 1 | | | | | | | |
| $1^2$ | 1 | 2 | | | | | | | |
| | 1 | 3 | 2 | | | | | | |
| $1^3$ | 1 | 6 | 6 | | | | | | |
| | 1 | 7 | 12 | 6 | | | | | |
| $1^4$ | 1 | 14 | 36 | 24 | | | | | |
| | 1 | 15 | 50 | 60 | 24 | | | | |
| $1^5$ | 1 | 30 | 150 | 240 | 120 | | | | |
| | 1 | 31 | 180 | 390 | 360 | 120 | | | |
| $1^6$ | 1 | 62 | 540 | 1 560 | 1 800 | 720 | | | |
| | 1 | 63 | 602 | 2 100 | 3 360 | 2 520 | 720 | | |
| $1^7$ | 1 | 126 | 1 806 | 8 400 | 16 800 | 15 120 | 5 040 | | |
| | 1 | 127 | 1 932 | 10 206 | 25 200 | 31 920 | 20 160 | 5 040 | |
| $1^8$ | 1 | 254 | 3 796 | 40 824 | 126 000 | 191 520 | 141 120 | 40 320 | |
| | 1 | 255 | 6 050 | 46 620 | 166 824 | 317 520 | 332 640 | 181 440 | 40 320 |

III. Dans une *Note sur la somme des puissances semblables des nombres naturels*, insérée aux *Nouvelles Annales de mathématiques* (*), j'ai démontré la formule

$$\left.\begin{aligned}
S_p = {} & \frac{A_p}{p+1}(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n-p+1) \\
& + \frac{B_p}{p}(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n-p+2) \\
& + \frac{C_p}{p-1}(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n-p+3) + \cdots \\
& + \frac{L_p}{3}(n+1)\,n\,(n-1) + \frac{1}{2}(n+1)\,n.
\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

(*) Tome XV, page 230. — Cette Note est celle qu'on vient de lire (novembre 1866).

Les coefficients $A_p$, $B_p$, $C_p$, ... ont les valeurs contenues dans cet autre tableau :

| $p$ | $A_p$ | $B_p$ | $C_p$ | $D_p$ | $E_p$ | $F_p$ | $G_p$ | $H_p$ | $K_p$ | $L_p$ | $M_p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 1 | | | | | | | | |
| 4 | 1 | 6 | 7 | 1 | | | | | | | |
| 5 | 1 | 10 | 25 | 15 | 1 | | | | | | |
| 6 | 1 | 15 | 65 | 90 | 31 | 1 | | | | | |
| 7 | 1 | 21 | 140 | 350 | 301 | 63 | 1 | | | | |
| 8 | 1 | 28 | 266 | 1 050 | 1 701 | 966 | 127 | 1 | | | |
| 9 | 1 | 36 | 462 | 2 646 | 6 951 | 7 770 | 3 025 | 255 | 1 | | |
| 10 | 1 | 45 | 750 | 5 880 | 22 827 | 42 525 | 34 105 | 9 330 | 511 | 1 | |
| 11 | 1 | 55 | 1 155 | 25 980 | 162 687 | 179 687 | 246 430 | 145 750 | 28 501 | 1 023 | 1 |

Avec un peu d'attention, on reconnait que les nombres placés *en diagonale,* dans ce second tableau, sont égaux à ceux qui constituent le tableau précédent, divisés par les produits 1 . 2, 1 . 2 . 3, 1 . 2 . 3 . 4, ... Autrement dit :

$$3 = \Delta(1^2), \qquad 7 = \Delta(1^3), \qquad 15 = \Delta(1^4), \dots$$

$$6 = \frac{1}{2}\Delta^2(1^3), \qquad 25 = \frac{1}{2}\Delta^2(1^4), \qquad 90 = \frac{1}{2}\Delta^2(1^5), \dots$$

$$10 = \frac{1}{2 . 3}\Delta^3(1^4), \qquad 65 = \frac{1}{2 . 3}\Delta^3(1^5), \qquad 250 = \frac{1}{2 . 3}\Delta^5(1^6), \dots$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

De là résulte que l'on peut écrire ainsi la formule (B) :

$$\left.\begin{aligned} S_p &= \frac{1}{2}(n+1)n + \frac{1}{3}(n+1)n(n-1)\Delta(1^{p-1}) \\ &+ \frac{1}{4.2}(n+1)n(n-1)(n-2)\Delta^2(1^{p-1}) + \cdots \\ &+ \frac{1}{(p+1).2.3..(p-1)}(n+1)n...(n-p+1)\Delta^{p-1}(1^{p-1}). \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

Cette seconde expression de $S_p$ (trouvée par M. Puiseux) va nous donner les Nombres de Bernoulli sous une forme beaucoup plus commode, pour le calcul effectif, que toutes celles que l'on connaît jusqu'à présent.

En effet, *le* $(p-1)^e$ *Nombre de Bernoulli est égal au coefficient de* $n$, *dans le développement de* $S_p$, *ordonné suivant les puissances de* $n$ (*). Donc, d'après l'équation (C) :

$$B_{p-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Delta(1^{p-1}) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^{p-1}) - \cdots \pm \frac{1}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1});$$

ou, pour plus de régularité dans la notation,

$$B_q = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Delta(1^q) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^q) - \cdots \pm \frac{1}{q+2}\Delta^q(1^q). \quad (D)$$

IV. Cette relation générale donne successivement, d'après le premier tableau :

$$B_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$B_2 = \frac{1}{2} - \frac{8}{3} + \frac{2}{4} = 0,$$

$$B_3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{3} + \frac{12}{4} - \frac{6}{5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30},$$

$$B_4 = \frac{1}{2} - \frac{15}{3} + \frac{50}{4} - \frac{60}{5} + \frac{24}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0;$$

etc. (**).

(*) Lacroix, t. III, p. 84.

(**) On sait que $B_q = 0$, si l'indice $q$ est pair.

V. Le *Tableau des quarrés et des cubes* donne, sous forme empirique, une règle qui équivaut à la formule

$$B_q = 1 - \frac{1}{2}\Delta(1^{q+1}) + \frac{1}{3}\Delta^2(1^{q+1}) - \cdots \pm \frac{1}{q+1}\Delta^q(1^{q+1}) \pm \frac{1}{q+2}\Delta^{q+1}(1^{q+1}), \quad \text{(E)}$$

laquelle est un peu moins simple que la nôtre. Pour en vérifier l'accord, il suffit de prouver que

$$1 - \frac{1}{2}[\Delta(1^{q+1}) + 1^q] + \frac{1}{3}[\Delta^2(1^{q+1}) + \Delta(1^q)] - \frac{1}{4}[\Delta^3(1^{q+1}) + \Delta^2(1^q)] + \cdots$$

$$\mp \frac{1}{q+2}[\Delta^{q+1}(1^{q+1}) + \Delta^q(1^q)] = 0. \quad \text{(F)}$$

Or, la relation (A) peut être écrite sous cette forme :

$$\Delta^n(1^{p+1}) + \Delta^{n-1}(1^p) = (n+1)[\Delta^n(1^p) + \Delta^{n-1}(1^p)],$$

puis sous celle-ci :

$$\frac{\Delta^n(1^{p+1}) + \Delta^{n-1}(1^p)}{n+1} = \Delta^{n-1}(2^p);$$

donc l'équation (F) équivaut à

$$1 - (2\ ) + \Delta(2^q) - \Delta^2(2^q) + \cdots \mp \Delta^q(2^q) = 0.$$

Enfin cette dernière relation est identique, si l'on a égard à la formule presque évidente :

$$u_1 - \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 - \cdots \mp \Delta^p u_1 = u_0 \pm \Delta^{p+1}(u_0).$$

## XXXIII. — Sur les Nombres de Bernoulli, et sur quelques formules qui en dépendent.

(*Mai* 1862.)

I. *Développement de* $\frac{x}{e^x - 1}$. — On peut, de bien des manières, prouver que, pour des valeurs réelles ou imaginaires de $x$ dont le module soit suffisamment petit, l'on a

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \cdots, \quad \text{(A)}$$

les coefficients $A_2$, $A_4$, $A_6$, ... étant donnés, en fonction des Nombres de Bernoulli, par les formules :

$$A_2 = \frac{B_1}{1.2}, \quad A_4 = \frac{B_3}{1.2.3.4}, \quad A_6 = \frac{B_5}{1.2.3.4.5.6}, \dots \qquad (1)$$

II. *Développement de* x *cot* x. — Si, dans l'équation (A), on change $x$ en $x\sqrt{-1}$, on obtient, comme l'on sait,

$$x \cot x = 1 - 4 A_2 x^2 + 4^2 A_4 x^4 - 4^3 A_6 x^6 + \cdots \qquad (B)$$

III. *Développement de* $\frac{x}{\sin x}$. — On a, identiquement,

$$\cot \frac{1}{2} x - \cot x = \frac{1}{\sin x};$$

donc, à cause de la formule (B),

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + 2(2-1) A^2 x^2 - 2(2^3 - 1) A_4 x^4 + 2(2^5 - 1) A_6 x^6 - \dots \quad (C)$$

IV. *Développement de tang* x. — On a aussi

$$\cot x - 2 \cot 2x = \operatorname{tang} x;$$

d'où l'on conclut

$$\operatorname{tang} x = 4(4-1) A_2 x - 4^2 (4^2 - 1) A_4 x_3 + 4^3 (4^3 - 1) A_6 x^5 \dots (^*). \quad (D)$$

V. *Développement de* $\frac{1}{\cos x}$. — Parmi les différentes manières d'y parvenir, la plus simple (quant à présent) nous paraît consister à écrire

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{P_2 x^2}{1.2} + \frac{P_4 x^4}{1.2.3.4} + \frac{P_6 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots,$$

ou

$$1 = \left(1 + \frac{P_2 x^2}{1.2} + \frac{P_4 x^4}{1.2.3.4} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots\right).$$

(*) M. Schlömilch s'est occupé de cette série (*Archives mathématiques de Grunert*, t. XVI).

Il résulte, de cette égalité :

$$P_2-1=0,\quad P_4-\frac{4.3}{1.2}P_2+1=0,\quad P_6-\frac{6.5}{1.2}P_4+\frac{6.5}{1.2}P_2-1=0,\ldots;$$

et, en général,

$$P_{2n}-\frac{2n(2n-1)}{1.2}P_{2n-2}+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4}P_{2n-4}-\cdots\pm1=0.$$

Conséquemment

$$P_2=1,\quad P_4=5,\quad P_6=61,\quad P_8=1\,385,\ldots;$$

puis

$$\frac{1}{\cos x}=1+\frac{1}{1.2}x^2+\frac{5}{1.2.3.4}x^4+\frac{61}{1\ldots.6}x^6+\frac{1\,385}{1\ldots.8}x^8+\cdots \quad \text{(E)}$$

VI. *Développement de tang* $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. — L'identité

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\text{tang}\,x+\frac{1}{\cos x}$$

donne, au moyen des formules (D), (E), en mettant pour les coefficients A leurs valeurs :

$$\left.\begin{aligned}\text{tang}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)&=1+x+\frac{1}{1.2}x^2+\frac{1}{1.3}x^3+\frac{5}{1.2.3.4}x^4\\&+\frac{4}{1.2.1.3.5}x^5+\frac{61}{1.2.3.4.5.6}x^6+\frac{31}{1.2.3.1.3.5.7}x^7\\&+\frac{1\,385}{1.2\ldots8}x^8+\frac{496}{1.2.3.4.1.3.5.7.9}x^9+\cdots\end{aligned}\right\}\quad\text{(F)}$$

VII. *Développement de* $\mathcal{L}\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. — De

$$\int_0^x\frac{dx}{\cos x}=\mathcal{L}\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right),$$

on conclut

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)&=x+\frac{1}{1.2.3}x^3+\frac{5}{1.2.3.4.5}x^5\\&+\frac{61}{1.2\ldots7}x^7+\frac{1\,385}{1.2\ldots9}x^9+\cdots\end{aligned}\right\}\quad\text{(G)}$$

VIII. *Relation nouvelle entre les Nombres de Bernoulli.* — On a, identiquement,

$$x \cot x \,.\, \sin x = x \cos x\,;$$

donc, à cause de la formule (B) et des équations (1),

$$4^n \frac{B_{2n-1}}{1\,.\,2\,...\,(2n)} + 4^{n-1} \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} \frac{B_{2n-3}}{1\,.\,2\,...\,(2n-2)} + \cdots + 4 \frac{1}{1\,.\,2\,...\,(2n-1)} \frac{B_1}{1\,.\,2} = \frac{2n}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,(2n+1)},$$

ou

$$\left.\begin{aligned} 4^n \frac{2n+1}{1} B_{2n-1} + 4^{n-1} \frac{(2n+1)\,2n(2n-1)}{1\,.\,2\,.\,3} B_{2n-3} + \cdots \\ + 4 \frac{(2n+1)\,2n}{1\,.\,2} B_1 = 2n. \end{aligned}\right\} \text{(H)}$$

Cette relation générale diffère de celles qui sont indiquées dans Lacroix (*).

Si l'on suppose

$$B_{2n-1} = \frac{B'_{2n-1}}{2^{2n-1}},$$

on remplace l'équation (H) par

$$\left.\begin{aligned} B'_{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{2\,.\,3} B'_{2n-3} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} B'_{2n-5} + \cdots \\ + \frac{2n}{2} B'_1 = \frac{n}{2n+1}. \end{aligned}\right\} \text{(H')}$$

Celle-ci serait précisément la relation connue, si l'on supprimait les accents, et si l'on écrivait, au lieu du second membre, $\frac{2n-1}{2(2n+1)}$.

IX. *Détermination d'une intégrale définie.* — Dans les

(*) Tome III, page 84 (1819). Celles-ci renferment une faute de signe : au lieu de $(+\frac{1}{2})$, on doit lire, partout, $(-\frac{1}{2})$.

*Mémoires de l'Académie de Turin* (1820), M. Plana démontre la formule

$$B_{2n-1} \pm = 4n \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Il en résulte, à cause de la relation générale dont il vient d'être question,

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\left[\frac{2n}{1}t^{2n-1} - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}t^{2n-3} + \cdots \pm \frac{2n}{1}t\right]$$
$$= \pm \frac{2n-1}{4(2n+1)}.$$

La quantité entre parenthèses est égale à

$$\frac{(t+\sqrt{-1})^{2n}-(t-\sqrt{-1})^{2n}}{2\sqrt{-1}}.$$

Si l'on suppose $t = \cot\alpha$, on arrive à la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\alpha d\alpha}{(e^{2\pi\cot\alpha}-1)\sin^{2n+2}\alpha} = \pm\frac{2n-1}{4(2n+1)}, \qquad \text{(L)}$$

dans laquelle on doit prendre le signe + si $n$ est *impair*.

X. *Autres intégrales.* — L'équation (H), traitée de la même manière, donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\alpha d\alpha}{(e^{\pi\cot\alpha}-1)\sin^{2n+2}\alpha} = \pm\frac{n}{2n+1}. \qquad \text{(M)}$$

De plus, la comparaison de cette seconde formule avec la précédente conduit à ce résultat remarquable :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\alpha d\alpha}{(e^{\pi\cot\alpha}-e^{-\pi\cot\alpha})\sin^{2n+2}\alpha} = \pm\frac{1}{4}.$$

XI. Si, dans la formule (L), on suppose $n = 1, 2, 3, \ldots, 2p$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{(e^{2\pi \cot \alpha} - 1)\sin^2\alpha} \sum_1^{2p} \frac{\cos 2n\alpha}{\sin^{2n}\alpha} = \frac{1}{4} \sum_1^{p} \left( \frac{4n-3}{4n-1} - \frac{4n-1}{4n+1} \right).$$

La valeur du second membre est

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots - \frac{1}{4p+1}\right),$$

ou

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+\beta^{4p+2}}{1+\beta^2} d\beta.$$

D'un autre côté, à cause de la formule connue :

$$x \sin a + x^2 \sin 2a + \cdots + x^{2p} \sin 2pa = x \frac{\sin a - x^{2p}\sin(2p+1)a + x^{2p+1}\sin 2pa}{1 - 2x\cos a + x^2},$$

on a

$$\sum_1^{2p} \frac{\sin 2n\alpha}{\sin^{2n}\alpha} = \frac{1}{\sin^{4p}\alpha} \frac{\sin 2\alpha \sin^{4p+2}\alpha - \sin^2\alpha \sin(4p+2)\alpha + \sin 4p\alpha}{1 - 2\cos 2\alpha \sin^2\alpha + \sin^4\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{(e^{2\pi\cot\alpha} - 1)\sin^{2p+4}\alpha} \frac{\sin 2\alpha \sin^{4p+2}\alpha - \sin^2\alpha\sin(4p+2)\alpha + \sin 4p\alpha}{1 - 2\cos 2\alpha \sin^2\alpha + \sin^4\alpha} \\ &\quad = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+\beta^{4p+2}}{1+\beta^2} d\beta. \end{aligned}\right\} \text{(N)}$$

On peut observer que, si le nombre entier $p$ augmente indéfiniment, le second membre tend vers $\frac{\pi - 4}{8}$. Il en est donc de même du premier membre, bien que la fonction contenue sous le signe $\int$ n'ait aucune limite déterminée.

## XXXIV. — Sur le calcul des Nombres de Bernoulli.

(*Juin* 1864.)

Les relations nombreuses qui existent entre les Nombres de Bernoulli donnent lieu à des calculs pénibles, parce qu'il s'y introduit, nécessairement, des fractions de plus en plus compliquées. Dans la présente Note, j'établis les formules

$$B_1 = \frac{P_1}{2.3}, \quad B_3 = -\frac{P_3}{2.15}, \ldots \quad B_{2n-1} = \pm \frac{P_{2n-1}}{2(4^n-1)},$$

$$P_{2n-1} - \frac{2n(2n-1)}{2.3} P_{2n-3} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2.3.4.5} P_{2n-5} - \cdots \pm \frac{2n}{2} P_1 = 1;$$

$P_1$, $P_3 \ldots$, $P_{2n-1}$, ..., étant des *nombres entiers impairs*.

I. En partant du développement de $\frac{x}{e^x-1}$, on trouve (*)

$$\operatorname{tang} x = 4(4-1)\frac{B_1}{1.2}x - \cdots + \cdots \pm 4^n(4^n-1)\frac{B_{2n-1}}{1.2.3\ldots 2n}x_{2n-1} \pm \cdots \quad (A)$$

Pour développer directement tang $x$, il suffit de prendre l'équation

$$y \cos x = \sin x,$$

et d'employer ensuite la formule de Mac-Laurin. On obtient ainsi

$$\operatorname{tang} x = y_1 x + y_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + y_{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)} + \cdots, \quad (B)$$

$y_1$, $y_3$, $y_5$, ..., étant des *nombres entiers*, déterminés par la relation

$$\left.\begin{aligned} &y_{2n-1} - \frac{(2n-1)(2n-2)}{1.2} y_{2n-3} \\ &+ \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)}{1.2.3.4} y_{2n-5} - \cdots \pm \frac{2n-1}{1} y_1 = \pm 1. \end{aligned}\right\} (C)$$

(*) Page 92.

II. La comparaison des formules (A), (B), donne

$$B_{2n-1} = \pm \frac{2n}{4^n(4^n-1)} y_{2n-1}. \qquad \text{(D)}$$

D'un autre côté, à cause des relations

$$4^n B_{2n-1} + 4^{n-1}\frac{2n(2n-1)}{2.3} B_{2n-3} + \cdots + 4\frac{2n}{2} B_1 = \frac{2n}{2n+1},$$

$$B_{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{2.3} B_{2n-3} + \cdots + \frac{2n}{2} B_1 = \frac{2n-1}{2(2n+1)} \text{ (*)},$$

on a

$$(4^n-1) B_{2n-1} + (4^{n-1}-1)\frac{2n(2n-1)}{2.3} B_{2n-3} + \cdots + (4-1)\frac{2n}{2} B_1 = \frac{1}{2};$$

d'où, en posant

$$B_{2n-1} = \pm \frac{P_{2n-1}}{2(4^n-1)}: \qquad \text{(E)}$$

$$\left.\begin{aligned} & P_{2n-1} - \frac{2n(2n-1)}{2.3} P_{2n-3} \\ & + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2.3.4.5} P_{2n-5} - \cdots \pm \frac{2n}{2} P_1 = 1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(F)}$$

III. Si, dans la dernière équation, on suppose $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ..., on trouve

$$P_1 = 1,\quad P_3 = 1,\quad P_5 = 3,\quad P_7 = 17,\quad P_9 = 155,\quad P_{11} = 2\,073, \ldots;$$

en sorte que les premières valeurs de $P_{2n-1}$ sont entières. Pour démontrer que toutes le sont, je m'appuie sur les remarques suivantes :

1° A cause des formules (D), (E) :

$$y_{2n-1} = \frac{4^{n-1}}{n} P_{2n-1}. \qquad \text{(G)}$$

Donc, *si* $P_{2n-1}$ *est entier, ce nombre est divisible par tous les diviseurs impairs de* n (**);

(*) Page 94.

(**) Autrement dit, si $n = 2^k n'$, $n'$ étant *impair*, $P_{2n-1}$ est divisible par $n'$.

2° $\frac{N}{D}$ *étant la fraction irréductible équivalente à*

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)} = C\ (^*),$$

*le dénominateur* D *divise* a *et* b ; d'où il résulte que C *se réduit à un nombre entier, lorsque* a *et* b *sont premiers entre eux;*

3° Le terme général de l'équation (F) est, abstraction faite du signe,

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2p+2)\,\Gamma(2n-2p+1)}\,P_{2n-2p-1}. \tag{H}$$

Le dénominateur de la fraction irréductible équivalente au coefficient de $P_{2n-2p-1}$ est un diviseur commun à $2p+1$ et $2n-2p$, ou commun à $2p+1$ et $n-p$ (2°); si donc $P_{2n-2p-1}$ est un nombre entier, ce dénominateur divise $P_{2n-2p-1}$ (1°);

4° Conséquemment, si $P_1$, $P_3$, $P_5$, ..., $P_{2n-3}$ sont des nombres entiers, $P_{2n-1}$ est un nombre entier.

IV. Les nombres entiers

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2p+2)\,\Gamma(2n-2p+1)}\,P_{2n-2p-1}, \qquad \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2p+1)\,\Gamma(2n-2p+1)}$$

sont tous deux pairs ou tous deux impairs, lorsque $P_{2n-2p-1}$ est impair. *Si donc* $P_1$, $P_3$, ..., $P_{2n-3}$ *sont impairs,*

$$P_{2n-1} \equiv \frac{2n\,(2n-1)}{1.2}$$

$$+\frac{2n\,(2n-1)\,(2n-2)\,2n-3)}{1.2.3.4} + \cdots + \frac{2n\,(2n-1)}{1.2} + 1 \pmod{2};$$

ou, d'après la formule du binôme,

$$P_{2n=1} \equiv 2^{2n-1} - 1 \equiv -1 \pmod{2}:$$

$P_{2n-1}$ *est impair* (**).

(*) $a$ et $b$ sont des nombres entiers.

(**) Les démonstrations précédentes sont longues et difficiles. M. le lieutenant Mangon, l'un de mes meilleurs élèves, en a trouvé d'autres, remarquablement simples. (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V, p. 129.)

V. *Remarque.* — D'après la formule (D), on pourrait calculer les Nombres de Bernoulli au moyen des nombres entiers $y_1, y_3, y_5, \ldots$; mais ceux-ci croissent beaucoup plus rapidement que $P_1, P_3, P_5 \ldots$

*Addition aux deux dernières Notes.* — (*Novembre* 1866.)

I. *Développement de $tg\,\frac{1}{2}x$.* — La formule (D) (p. 92) équivaut à

$$\operatorname{tg} x = 4(4-1)\frac{B_1}{1.2}x - 4^2(4^2-1)\frac{B_2}{1.2.3.4}x^3 + \cdots \pm 4^q(4^q-1)\frac{B_{2q-1}}{1.2\ldots 2q}x^{2q-1} \mp \cdots$$

Soit, comme ci-dessus,

$$B_{2q-1} = \pm \frac{P_{2q-1}}{2(4^q-1)}. \tag{1}$$

La formule devient

$$\operatorname{tg} x = \frac{P_1}{1.2}(2x) + \frac{P_3}{1.2.3.4}(2x)^3 + \cdots + \frac{P_{2q-1}}{1.2\ldots 2q}(2x)^{2q-1} + \cdots;$$

ou, par le changement de $x$ en $\frac{1}{2}x$ :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \frac{P_1}{1.2}x + \frac{P_3}{1.2.3.4}x^3 + \cdots + \frac{P_{2q-1}}{1.2\ldots 2q}x^{2q-1} + \cdots \tag{A}$$

II. *Développement de $tg^2\,\frac{1}{2}x$.* — A cause de $P_1 = 1$, on conclut de l'équation (A), en prenant les dérivées des deux membres :

$$\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} =$$

$$\frac{P_3}{2.4}x^2 + \frac{P_5}{2.3.4.6}x^4 + \cdots + \frac{P_{2q-1}}{2.3\ldots(2q-2)2q}x^{2q-2} + \cdots,$$

ou

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x = \frac{P_3}{4}x^2 + \frac{P_5}{3.4.6}x^4 + \cdots + \frac{P_{2q-1}}{3.4\ldots(2q-2)2q}x^{2q-2} + \cdots \tag{B}$$

III. *Calcul des nombres* P. — Le calcul de ces nombres, tel qu'il résulte de la relation (F), exige des *additions* et des *soustractions*. Il serait abrégé si, pour déduire un de ces nombres de tous les précédents, on n'avait à faire que des *additions*. Une relation qui conduit à un tel calcul se tire de la comparaison des formules (A), (B) (*).

En partant de

$$P_1 = 1,\quad P_3 = 1,\quad P_5 = 3,\quad P_7 = 17,\quad P_9 = 155,\quad P_{11} = 2\,073,$$

on trouve

$$P_{13} = 38\,227,\quad P_{15} = 929\,569,\quad P_{17} = 28\,820\,619\ (^{**})\ \ldots;$$

puis, par la relation (1) :

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_3 = -\frac{1}{30},\ B_5 = \frac{1}{42},\ B_7 = -\frac{1}{30},\ B_9 = \frac{5}{66},\ B_{11} = -\frac{691}{2\,730},$$

$$B_{13} = \frac{7}{6},\ B_{15} = -\frac{3\,617}{510},\ B_{17} = \frac{43\,867}{798}\ldots,$$

*Autre addition.* — (*Août* 1884.)

I. On a

$$B_{2q-1} = \pm\frac{P_{2q-1}}{2(4^q-1)}.$$

D'un autre côté, par le *Théorème de Staudt et Clausen* (***),

$$B_{2q-1} = \pm\frac{N_{2q-1}}{2.3.n'.n''.n'''\ldots}\ (^{\text{IV}}).$$

(*) Voir la Note XXXV.

(**) $3 = 2^2 - 1,\ \ 17 = 2^4 + 1,\ \ 155 = 5(2^5 - 1),\ \ 2\,073 = 691(2^2 - 1),$
$38\,227 = 5\,461(2^3 - 1),\ \ 929\,569 = 3\,617(2^8 + 1),$
$28\,820\,619 = 3\,202\,291(2^3 + 1);$

ainsi, chacun des nombres considérés admet un diviseur *premier*, de la forme $2^k \pm 1$. Cette propriété est-elle générale?

(***) Voir, dans le *Bulletin de M. Darboux* (1880), notre démonstration de ce beau théorème.

(IV) n', n'', n''', ... *sont les nombres premiers, supérieurs à* 3, *qui, diminués de* 1, *divisent* 2q. En outre, *la fraction est irréductible.*

La comparaison des deux formules donne l'égalité

$$3n'n''n'''\dots P_{2q-1} = (2^{2q} - 1) N_{2q-1},$$

dans laquelle $N_{2q-1}$ *n'est divisible par aucun des nombres premiers* 3, $n'$, $n''$... Ainsi, tous ces nombres divisent $2^{2q} - 1$.

II. Parmi les diviseurs premiers de $2^{2q} - 1$, il peut y en avoir qui aient la forme $2^k \pm 1$, et qui, en outre, surpassent $2q + 1$. Dans ce cas, $P_{2q-1}$ *admet un diviseur de cette même forme* (*).

Soit, par exemple, $2q = 64$. Alors

$$2^{64} - 1 = (2^{32} + 1)(2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2^1 + 1),$$

ou

$$2^{64} - 1 = 3.5.17.257\,(2^{32} + 1).$$

D'ailleurs :

$$n' = 5, \quad n'' = 17.$$

Donc

$$P_{63} = (2^4 + 1)(2^{32} + 1) N_{63}.$$

III. D'après le théorème cité :

$$2q = (n' - 1) f' = (n'' - 1) f'' = \cdots;$$

puis

$$3n'n''n'''\dots P_{2q-1} = \left[2^{(n'-1)f'} - 1\right] N_{2q-1} = \left[2^{(n''-1)f''} - 1\right] N_{2q-1} = \cdots$$

En vertu du Théorème de Fermat, le premier binôme est divisible par $n'$; le deuxième (*égal au premier*) est divisible par $n''$; etc. (**).

(*) Ceci est un *acheminement* à la démonstration de la propriété énoncée ci-dessus.

(**) Le Théorème de Staudt et Clausen serait-il un simple corollaire du Théorème de Fermat?

## XXXV. — Sur les Nombres de Bernoulli et d'Euler.

(*Mars* 1867) (*).

I. On a (**) :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \sum_1^\infty \frac{P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)} x^{2q-1}, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x = 2\sum_2^\infty \frac{(2q-1)P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)} x^{2q-2}. \tag{2}$$

Par conséquent,

$$2\sum_2^\infty \frac{(2q-1)P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)} x^{2q-2} = \left\{\sum_1^\infty \frac{P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)} x^{2q-1}\right\}^2,$$

ou

$$2\sum_1^\infty \frac{(2q+1)P_{2q+1}}{\Gamma(2q+3)} x^{2q-2} = \left\{\sum_1^\infty \frac{P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)} x^{2q-2}\right\}^2. \tag{3}$$

Dans le second membre, le coefficient de $x^{2q-2}$ est

$$\frac{P_1P_{2q-1}}{\Gamma(3)\Gamma(2q+1)} + \frac{P_3P_{2q-3}}{\Gamma(5)\Gamma(2q-1)} + \cdots + \frac{P_{2q-1}P_1}{\Gamma(2q+1)\Gamma(3)};$$

donc

$$P_{2q+1} = \frac{1}{2(2q+1)}\left[\frac{\Gamma(2q+3)}{\Gamma(3)\Gamma(2q+1)}P_1P_{2q-1}\right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma(2q+3)}{\Gamma(5)\Gamma(2q-1)}P_3P_{2q-3} + \cdots + \frac{\Gamma(2q+3)}{\Gamma(2q+1)\Gamma(3)}P_{2q-1}P_1\right];$$

(*) Ce travail, qui vient de paraître dans les *Mémoires de l'Académie royale de Belgique,* complète mes précédentes recherches sur les *Nombres de Bernoulli* (pp. 90 et suiv.).

On peut consulter encore : *Démonstration du théorème de Staudt et Clausen, Mémoires sur les fonctions* $X_n$, *Sur une suite de polynômes entiers, Recherches sur la constante* G, etc. (1884).

(**) Page 100.

ou, plus simplement,

$$\left.\begin{aligned}P_{2q+1} = \frac{q+1}{2}\Big[P_{2q-1} + \frac{2q(2q-1)}{3.4}P_3P_{2q-3} \\ + \frac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-3)}{3.4.5.6}P_5P_{2q-5} + \cdots + \frac{2q(2q-1)}{3.4}P_{2q-3}P_3 + P_{2q-1}\Big].\end{aligned}\right\}(4)$$

II. Le nombre des termes contenus dans la parenthèse est égal à $q$. Si $q$ est *pair*, on peut écrire, au lieu de la formule (4) :

$$\left.\begin{aligned}P_{2q+1} = (q+1)\Big[P_{2q-1} + \frac{2q(2q-1)}{3.4}P_3P_{2q-3} + \cdots \\ + \frac{2q(2q-1)\ldots(q+3)}{3.4\ldots q}P_{q-1}P_{q+1}\Big].\end{aligned}\right\}(5)$$

Si $q$ est *impair*, il y a un *terme du milieu*, ayant pour expression

$$\frac{2q(2q-1)\ldots(q+2)}{3.4\ldots(q+1)}P_qP_q;$$

donc, dans ce cas,

$$\left.\begin{aligned}P_{2q+1} = (q+1)\Big[P_{2q-1} + \frac{2q(2q-1)}{3.4}P_3P_{2q-3} + \cdots \\ + \frac{2q(2q-1)\ldots(q+4)}{3.4\ldots(q-1)}P_{q-2}P_{q+2} + \frac{1}{2}\frac{2q(2q-1)\ldots(q+2)}{3.4\ldots(q+1)}(P_q)^2\Big].\end{aligned}\right\}(6)$$

Le calcul des nombres P, par les formules (4), (5), (6), est plus simple que par la relation démontrée à la page 98.

III. D'après la *définition* des nombres P, jointe à une formule de Plana,

$$P_{2q-1} = 8q(4^q-1)\int_0^\infty \frac{t^{2q-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1}. \tag{7}$$

Au moyen de cette valeur, l'équation (2) devient

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x = 16\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\sum_2^\infty \frac{q(2q-1)(4^q-1)\,t^{2q-1}x^{2q-2}}{\Gamma(2q+1)},$$

ou

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x = 8\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\sum_1^\infty \frac{(4^{q+1}-1)\,t^{2q+1}x^{2q}}{\Gamma(2q+1)}. \tag{8}$$

On a, identiquement,

$$\sum_1^\infty \frac{(4^{q+1}-1)\,t^{2q+1}x^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = 4t\sum_1^\infty \frac{(2tx)^{2q}}{\Gamma(2q+1)} - t\sum_1^\infty \frac{(tx)^{2q}}{\Gamma(2q+1)};$$

donc, à cause de

$$e^x + e^{-x} = 2\sum_0^\infty \frac{x^{2q}}{\Gamma(2q+1)}:$$

$$\sum_1^\infty \frac{(2tx)^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = \frac{1}{2}(e^{2tx}+e^{-2tx}) - 1,$$

$$\sum_1^\infty \frac{(tx)^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = \frac{1}{2}(e^{tx}+e^{-tx}) - 1;$$

et, par conséquent,

$$\sum_1^\infty \frac{(4^{q+1}-1)\,t^{2q+1}x^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = 2t\,(e^{2tx}+e^{-2tx}-2) - \frac{1}{2}(e^{tx}+e^{-tx}-2),$$

ou

$$\sum_1^\infty \frac{(4^{q+1}-1)\,t^{2q+1}x^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = \frac{1}{2}t\left(e^{\frac{tx}{2}} - e^{-\frac{tx}{2}}\right)^2 (4e^{tx} + 7 + 4e^{tx}). \qquad (9)$$

La substitution dans l'équation (11) donne

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}\left(e^{\frac{tx}{2}} - e^{-\frac{tx}{2}}\right)^2 (4e^{tx} + 7 + 4e^{-tx}) = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x;$$

ou, par le changement de $x$ en $2x$ :

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}(e^{tx}-e^{-tx})^2(4e^{2tx}+7+4e^{-2tx}) = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 x. \qquad (A)$$

Cette intégrale définie, que je ne trouve pas dans les *Tables* dues à M. Bierens de Haan, peut en donner beaucoup d'autres, dont quelques-unes sont connues.

IV. Soit, par exemple, $x = \frac{\pi}{8}$ : la formule (A) devient

$$\int_n^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}\left(e^{\frac{\pi t}{8}} - e^{-\frac{\pi t}{8}}\right)^2\left(4e^{\frac{\pi t}{4}} + 7 + 4e^{-\frac{\pi t}{4}}\right) = \frac{1}{4}(3-2\sqrt{2});$$

et, si l'on pose

$$e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{z}:$$

$$\int_0^1 \frac{z^5(1-z)(4+7z+4z^2)}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)} \mathcal{L} z\, dz = -\frac{\pi^2}{64}(3-2\sqrt{2}). \quad (10)$$

La fraction

$$\frac{z^5(1-z)(4+7z+4z^2)}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}$$

est décomposable en

$$1-4z-\frac{1}{2(1+z)}+\frac{7z}{2(1+z^2)}-\frac{1-z^2}{2(1+z^4)}+\frac{3z^3}{1+z^4}.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 \mathcal{L} z\, dz - 4\int_0^1 z \mathcal{L} z\, dz - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathcal{L} z\, dz}{1+z}$$

$$+\frac{7}{2}\int_0^1 \frac{z \mathcal{L} z\, dz}{1+z^2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-z^2)\mathcal{L} z\, dz}{1+z^4}$$

$$+3\int_0^1 \frac{z^3 \mathcal{L} z\, dz}{1+z^4} = -\frac{\pi^2}{64}(3-2\sqrt{2});$$

ou, à cause des valeurs connues :

$$\int_0^1 \mathcal{L} z\, dz = -1, \quad \int_0^1 z \mathcal{L} z\, dz = -\frac{1}{4}, \quad \int_0^1 \frac{\mathcal{L} z\, dz}{1+z} = -\frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{z \mathcal{L} z\, dz}{1+z} = -\frac{\pi^2}{48}, \quad \int_0^1 \frac{(1-z^2)\mathcal{L} z\, dz}{1+z^4} = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16},$$

$$\int_0^1 \frac{z^3 \mathcal{L} z\, dz}{1+z^4} = -\frac{\pi^2}{192}:$$

$$-1+1+\frac{\pi^2}{24}-\frac{7\pi^2}{96}+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}-\frac{\pi^2}{64} = -\frac{\pi^2}{64}(3-2\sqrt{2});$$

ce qui est identique. On a ainsi une vérification de (A).

V. En passant, nous signalerons une sommation de série, probablement connue.

Il est visible que

$$-\int_0^1 \frac{\ell z\, dz}{1+z^4} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(4n+1)^2}, \quad -\int_0^1 \frac{z^2 \ell z\, dz}{1+z^4} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(4n+3)^2}.$$

D'ailleurs,

$$\int_0^1 \frac{(1-z^2)\ell^2 z\, dz}{1+z^4} = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} \text{ (*)};$$

donc

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{2n+1}{\left[(4n+1)(4n+3)\right]^2} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{128}. \tag{11}$$

VI. Dans la relation (A), supposons

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{\sqrt{z}}:$$

elle devient

$$\int_0^1 \frac{(1-z)(4+7z+4z^2)}{1+z+z^2} \ell z\, dz = -\frac{\pi^2}{3}. \tag{12}$$

La fraction

$$\frac{(1-z)(4+7z+4z^2)}{1+z+z^2} = 1 - 4z + 3\frac{2z+1}{1+z+z^2}.$$

Par suite, la formule (12) se réduit à

$$\int_0^1 \frac{2z+1}{1+z+z^2} \ell z\, dz = -\frac{\pi^2}{9};$$

ce qui est exact (**).

(*) Cette intégrale remarquable a été déterminée par Euler (Bierens de Haan, T. 152). On voit qu'elle résulte de la formule (A).

(**) Bierens, T. 153.

VII. Plus généralement, soit $x = \frac{\pi}{n}$, $n$ étant un nombre entier. Si l'on fait

$$e^{tx} = e^{\frac{\pi t}{n}} = \frac{1}{\sqrt{z}},$$

on transforme la relation (A) en celle-ci :

$$\int_0^1 \frac{z^{n-3}(1-z)(4+7z+4z^2)}{1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}} \mathcal{L} z \, dz = -\frac{\pi^2}{n^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}. \qquad \text{(B)}$$

La fraction

$$\frac{z^{n-3}(1-z)(4+7z+4z^2)}{1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}} =$$

$$1 - 4z + \frac{6z^{n-2} + 7z^{n-3} + 3z^{n-4} + 3z^{n-5} + \cdots + 3z - 1}{1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}}.$$

De plus,

$$\int_0^1 (1-4z) \mathcal{L} z \, dz = 0;$$

donc

$$\int_0^1 \frac{6z^{n-2}+7z^{n-3}+3z^{n-4}+3z^{n-5}+\cdots+3z-1}{1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}} \mathcal{L} z \, dz = -\frac{\pi^2}{n^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}. \quad \text{(C)}$$

Cette formule, qui en donne une infinité d'autres, n'est encore qu'un cas particulier : en remplaçant, dans (A), $e^{tx}$ par $\frac{1}{\sqrt{z}}$, on trouve la relation générale

$$\int_0^1 \frac{z^{\frac{\pi}{x}-3}(1-z)^2(4+7z+4z^2)}{1-z^{\frac{\pi}{x}}} \mathcal{L} z \, dz = -x^2 tg^2 x. \quad \text{(D)}$$

Celle-ci subsiste pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On en trouverait d'autres, aussi générales, en différenciant ou en intégrant par rapport à $x$. Enfin, l'égalité

$$\frac{z^{n-3}(1-z)(4+7z+4^2)}{1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}} = z^{n-3}(1-z)^2(4+7z+4z^2)\sum_{i=0}^{i=\infty} z^{in}$$

conduit à un développement de $\left(\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^2$, assez remarquable. Je laisse de côté ces détails, afin de passer à un autre sujet.

VIII. Si l'on suppose

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_0^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)} x^{2n}, \tag{13}$$

on trouve

$$E_0 = 1,\ E_2 = 1,\ E_4 = 5,\ E_6 = 61,\ E_8 = 1\,385, \ldots,$$

puis (*)

$$\left.\begin{aligned} E_{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1\,.\,2} E_{2n-2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} E_{2n-4} - \cdots \\ \pm \frac{2n(2n-1)}{1\,.\,2} E_2 \mp E_0 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Les nombres *entiers* E sont appelés, par M. Sylvester, *Nombres d'Euler* (**). De la relation (14), on conclut qu'ils sont *impairs* (***). On peut représenter $E_{2n}$ par une intégrale définie.

A cet effet, j'observe que la formule connue

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2\int_0^\infty \frac{(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x} - 1)}{e^{2\pi\alpha} - 1} d\alpha$$

devient, par le changement de $x$ en $\frac{\pi}{2} - x$ :

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 - \frac{2x}{\pi}}$$

$$+ 2\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1}\left[e^{\alpha(\pi-2x)} - e^{-\alpha(\pi-2x)} - e^{\alpha\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + e^{-\alpha\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]. \tag{15}$$

(*) (Page 93).

(**) *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences,* t. LII, p. 161.

(***) La démonstration est plus simple que pour les nombres P (p. 99). On vérifie aisément que les Nombres d'Euler ont la forme $4k + 1$. Cette propriété a été signalée par M. Sylvester.

Si l'on suppose le second membre ordonné suivant les puissances croissantes de $x$, le coefficient de $x^{2n}$ est

$$C_{2n} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}$$
$$+ \frac{2}{\Gamma(2n+1)} \int_0^\infty \frac{\alpha^{2n} d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} \left[ 2^{2n} (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}) - \left(e^{\alpha\frac{\pi}{2}} - e^{-\alpha\frac{\pi}{2}}\right) \right].$$

L'intégrale se décompose en

$$2^{2n} \int_0^\infty e^{-\pi\alpha} \alpha^{2n} d\alpha - \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\frac{\pi}{2}} \alpha^{2n} d\alpha}{e^{\pi\alpha} + 1}$$
$$= \frac{2^{2n}}{\pi^{2n+1}} \Gamma(2n+1) - \frac{2^{2n+1}}{\pi^{2n+1}} \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{2n} du}{e^{2u} + 1};$$

donc

$$C_{2n} = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1} - \frac{2}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1} \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{2n} du}{e^{2u} + 1}.$$

Et comme

$$C_{2n} = 2 \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)},$$

on a

$$E_{2n} = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1} \Gamma(2n+1) - 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1} \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{2n} du}{e^{2u} + 1}. \tag{16}$$

Pour simplifier cette expression, je remplace $\Gamma(2n+1)$ par $\int_0^\infty e^{-u} u^{2n} du$ : j'obtiens

$$E_{2n} = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1} \int_0^\infty \frac{u^{2n} dn}{e^u + e^{-u}}; \tag{17}$$

ou, en posant $u = \pi t$ :

$$E_{2n} = 4^{n+1} \int_0^\infty \frac{t^{2n} dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}, \tag{E}$$

formule analogue à celle de Plana :

$$B_{2n-1} = \pm 4n \int_0^\infty \frac{t^{2n-1} dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

IX. Dans le second membre de l'équation (15), le coefficient de $x^{2n-1}$ est

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} + 2\int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}+1}\left[-\frac{(e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi})(2\alpha)^{2n-1}}{\Gamma(2n)} + \frac{\left(e^{\alpha\frac{\pi}{2}}+e^{-\alpha\frac{\pi}{2}}\right)\alpha^{2n-1}}{\Gamma(2n)}\right].$$

Il doit être nul, car $\frac{1}{\cos x}$ est une *fonction paire;* donc

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2n-1}\,d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}\left[2^{2n-1}(e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}) - \left(e^{\alpha\frac{\pi}{2}}+e^{-\alpha\frac{\pi}{2}}\right)\right] = \frac{2^{2n-1}\,\Gamma(2n)}{\pi^{2n}}.$$

On reconnaît facilement que cette relation est une identité.

X. On peut déterminer les Nombres de Bernoulli au moyen des Nombres d'Euler; et réciproquement.

1° Écrivons ainsi la formule (1) :

$$\operatorname{tg} x = \sum_0^{\infty} \frac{P_{2n+1}}{\Gamma(2n+3)}(2x)^{2n+1}, \tag{18}$$

puis prenons les dérivées des deux membres; nous aurons

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \sum_0^{\infty} \frac{(2n+1)\,P_{2n+1}}{\Gamma(2n+3)}\,2^{2n+1}x^{2n}.$$

Ainsi, le coefficient de $x^{2n}$, dans le développement de $\frac{1}{\cos^2 x}$, est

$$\frac{(2n+1)\,P_{2n-1}}{\Gamma(2n+3)}\,2^{2n+1}.$$

D'après l'équation (13), ce coefficient a pour valeur

$$\frac{E_0E_{2n}}{\Gamma(1)\Gamma(2n+1)} + \frac{E_2E_{2n-2}}{\Gamma(3)\Gamma(2n-1)} + \cdots + \frac{E_{2n}E_0}{\Gamma(2n+1)\Gamma(1)};$$

donc

$$P_{2n+1} = \frac{n+1}{4_n}\Gamma(2n+1)\left[\frac{E_0E_{2n}}{\Gamma(1)\Gamma(2n+1)} + \frac{E_2E_{2n-2}}{\Gamma(3)\Gamma(2n-1)} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{E_{2n}E_0}{\Gamma(2n+1)\Gamma(1)}\right];$$

ou, avec la notation des combinaisons :

$$P_{2n+1} = \frac{n+1}{4^n}\left[E_0E_{2n} + C_{2n,2}E_2E_{2n-2} + C_{2n,4}E_4E_{2n-4} + \cdots + E_{2n}E_0\right] (^*). \quad (F)$$

2° On tire, de l'équation (13), en prenant les dérivées des deux membres :

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sum_1^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)} x^{2n-1}.$$

Le premier membre égale $(1 + \operatorname{tg}^2 x)\sin x$. Par conséquent, si l'on multiplie les deux séries

$$\frac{\Gamma(3)}{P_1}2 + \frac{3P_3}{\Gamma(5)}2^3x^2 + \frac{5P_5}{\Gamma(7)}2^5x^4 + \cdots + \frac{(2n-1)P_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)}2^{2n-1}x^{2n-2} + \cdots = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$$

$$\frac{x}{\Gamma(2)} - \frac{x^3}{\Gamma(4)} + \frac{x^5}{\Gamma(6)} - \cdots \pm \frac{x^{2n-1}}{\Gamma(2n)} \mp \cdots = \sin x,$$

le coefficient de $x^{2n-1}$, dans le produit, sera $E_{2n}$. De là résulte la formule

$$E_{2n} = (2n-1)\,2^{2n-1}\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(2)\Gamma(2n+1)}P_{2n-1}$$
$$-(2n-3)\,2^{2n-3}\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(4)\Gamma(2n-1)}P_{2n-3} + \cdots \pm 2\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(2n)\Gamma(3)}P_1,$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned} E_{2n} = \frac{1}{n(2n+1)}\big[&(2n-1)4^{n-1}C_{2n+1,1}P_{2n-1} \\ &-(2n-3)4^{n-2}C_{2n+1,3}P_{2n-3} + \cdots \pm C_{2n+1,2n-1}P_1\big]. \end{aligned}\right\} \quad (G)$$

Par exemple,

$$E_8 = \frac{1}{4.9}[7.4^3.9.17 - 5.4^2.84.3 + 3.4.126.1 - 36.1];$$

ou, en effectuant,

$$E_8 = 1\,385.$$

(*) D'après la relation (F), *si* n *est pair : 1° le nombre entre parenthèses est divisible par* $4^n$, *et le quotient est un nombre impair; 2°* $P_{2n+1}$ *est divisible par* $n+1$.

XI. Les relations (F), (G) ne sont pas les seules qui existent entre les Nombres d'Euler et les Nombres de Bernoulli.

1° A cause de

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} = \sum_1^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)} x^{2n-1}, \tag{19}$$

on a, par les formules (13) et (18) :

$$\sum_0^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)} x^{2n} \times \sum_1^\infty \frac{P_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)} (2x)^{2n-1} = \sum_1^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)} x^{2n-1};$$

donc

$$\frac{E^{2n}}{\Gamma(2n)} = \frac{P_{2n-1}E}{\Gamma(2n+1)\Gamma(1)} 2^{2n-1} + \frac{P_{2n-3}E_2}{\Gamma(2n-1)\Gamma(3)} 2^{2n-3} + \ldots + \frac{P_1E_{2n-2}}{\Gamma(3)\Gamma(2n-1)} 2,$$

ou

$$\left.\begin{aligned} &E_{2n} = \\ &\frac{1}{n}\Big[4^{n-1}P_{2n-1}E_0 + 4^{n-2}C_{2n,2}P_{2n-3}E_2 + 4^{n-3}C_{2n,4}P_{2n-5}E_4 + \cdots \\ &\qquad + C_{2n,2}P_1E_{2n-2}\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{H}$$

2° L'équation (19) donne aussi

$$\sum_1^\infty \frac{P_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)} (2x)^{2n-1} = \sum_1^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} \times \sum_0^\infty \frac{(-x)^{2n}}{\Gamma(2n+1)};$$

et, par conséquent,

$$P_{2n-1} = \frac{n}{4^{n-1}} \left[E_{2n} - C_{2n-1,2}E_{2n-2} + C_{2n-1,4}E_{2n-4} - \cdots \pm C_{2n-1,1}E_2\right]. \tag{K}$$

XII. Dans les relations (G), (K), qui sont, pour ainsi dire, *conjuguées* l'une de l'autre, substituons, aux nombres P, E, les intégrales dont ils représentent les valeurs. En commençant par l'équation (K), nous trouvons

$$\frac{4^{n-2}}{n} P_{2n-1} = 2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \left[(2t)^{2n-1} - C_{2n-1,2}(2t)^{2n-3} + \cdots \pm C_{2n-1,1}2t\right].$$

La quantité entre parenthèses égale

$$\frac{1}{2}\left[\left(2t + \sqrt{-1}\right)^{2n-1} + \left(2t - \sqrt{-1}\right)^{2n-1}\right].$$

Conséquemment

$$\frac{4^{n-2}}{n} P_{2n-1} = \int_0^\infty \frac{tdt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \left[ \left(2t + \sqrt{-1}\right)^{2n-1} + \left(2t - \sqrt{-1}\right)^{2n-1} \right]. \quad (20)$$

Soit $2t = \cot \omega$, d'où

$$tdt = -\frac{1}{4} \frac{\cos \omega}{\sin^3 \omega} d\omega, \quad \left(2t + \sqrt{-1}\right)^{2n-1} + \left(2t - \sqrt{-1}\right)^{2n-1} = 2 \frac{\cos(2n-1)\omega}{\sin^{2n-1}\omega}:$$

l'équation (20) se réduit à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \omega \cos (2n-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\cot \omega} + e^{-\frac{\pi}{2}\cot \omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2n+2}\omega} = \frac{2^{2n-3}}{n} P_{2n-1} \ (^*). \quad (L)$$

XIII. La formule (G), traitée de la même manière, devient d'abord

$$n(2n+1) E_{2n} = \int_0^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t} - 1} T;$$

T représentant le polynôme

$$2n(2n-1)(4^n 4^n - 1) C_{2n+1,1} t^{2n-2} - (2n-2)(2n-3) 4^{n-1}(4^{n-1} - 1) C_{2n+1,3} t^{2n-4}$$
$$+ (2n-4)(2n-5) 4^{n-2}(4^{n-2} - 1) C_{2n+1,5} t^{2n-6} - \cdots \pm 2.1.4(4-1) C_{2n+1,2n-1}.$$

Pour simplifier cette quantité, je suppose

$$\varphi(t) = C_{2n+1,1}(4t)^{2n} - C_{2n+1,3}(4t)^{2n-2} + C_{2n+1,5}(4t)^{2n-4} - \cdots \pm C_{2n+1,2n-1}(4t)^2,$$
$$\psi(t) = C_{2n+1,1}(2t)^{2n} - C_{2n+1,3}(2t)^{2n-2} + C_{2n+1,5}(2t)^{2n-4} - \cdots \pm C_{2n+1,2n-1}(2t)^2:$$

il est visible que

$$T = \varphi''(t) - \psi''(t).$$

Mais

$$\varphi(t) = \frac{\left(4t + \sqrt{-1}\right)^{2n+1} - \left(4t - \sqrt{-1}\right)^{2n+1}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\psi(t) = \frac{\left(2t + \sqrt{-1}\right)^{2n+1} - \left(2t - \sqrt{-1}\right)^{2n+1}}{2\sqrt{-1}};$$

(*) D'après la note de la page 112, n *étant impair, cette intégrale définie est égale à un nombre entier pair,* excepté quand $n = 1$.

donc

$$\varphi''(t) = 4n(2n+1)\frac{\left(4t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1} - \left(4t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\psi''(t) = 2n(2n+1)\frac{\left(2t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1} - \left(2t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}}{2\sqrt{-1}};$$

et, par conséquent,

$$E_{2n} = 2\int_0^{\infty} \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}$$

$$\left[2\frac{\left(4t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1}-\left(4t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}}{\sqrt{-1}} - \frac{\left(2t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1}-\left(2t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}}{\sqrt{-1}}\right];$$

ou

$$\left.\begin{aligned} E_{2n} = 4\int_0^{\infty} \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{\left(4t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1}-\left(4t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}}{\sqrt{-1}} \\ -2\int_0^{\infty} \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{\left(2t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1}-\left(2t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}}{\sqrt{-1}}. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Si, dans la première intégrale, on fait $t = \frac{1}{4}\cot\omega$; et, dans la seconde, $t = \frac{1}{2}\cot\omega$, on change cette équation en

$$E_{2n} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)\,\omega\cos\omega d\omega}{\left(e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega}-1\right)\sin^{2n+2}\omega} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)\,\omega\cos\omega d\omega}{\left(e^{\pi\cot\omega}-1\right)\sin^{2n+2}\omega}.$$

Le second membre est réductible à

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)\,\omega\cos\omega\, d\omega}{\left(e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega}+1\right)\sin^{2n+2}\omega};$$

donc enfin

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)\,\omega\cos\omega\, d\omega}{\left(e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega}+1\right)\sin^{2n+2}\omega} = 2E_{2n}\ (*). \qquad (M)$$

(*) Cette formule est en défaut dans le cas de $n = 0$. Cela devait arriver, attendu qu'elle n'est qu'une transformation de (G).

XIV. Dans la Note citée au commencement de ce Mémoire, j'ai démontré la formule remarquable

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\omega d\omega}{\left(e^{\pi \cot \omega} - e^{-\pi \cot \omega}\right) \sin^{2n+2} \omega} = \pm \frac{1}{4} \text{(*)}, \tag{N}$$

que l'on peut regarder comme une conséquence des relations (2) et (7). De même, la combinaison des équations (14) et (E) donne d'abord

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \left[ (2t)^{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1.2} (2t)^{2n-2} + \ldots \pm \frac{2n(2n-1)}{1.2} (2t) \mp 1 \right] = 0;$$

puis, par la transformation employée plusieurs fois,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2n\omega d\omega}{\left( e^{\frac{\pi}{2} \cot \omega} + e^{-\frac{\pi}{2} \cot \omega} \right) \sin^{2n+2} \omega} = 0. \tag{P}$$

XV. Cette intégrale étant nulle (excepté lorsque $n = 0$), il s'ensuit que la formule (L) peut être remplacée par celle-ci :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \omega \sin (2n-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2} \cot \omega} + e^{-\frac{\pi}{2} \cot \omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2n+2} \omega} = \frac{2^{2n-3}}{n} \mathrm{P}_{2n-1}; \tag{Q}$$

d'où l'on conclut aisément

$$\frac{4^{n-1}}{n} \mathrm{P}_{2n-1} = \mathrm{C}_{2n-1,1} \mathrm{E}_{2n-2} - \mathrm{C}_{2n-1,3} \mathrm{E}_{2n-4} + \cdots \pm \mathrm{E}_0. \tag{R}$$

Cette relation, différente de (K), peut être déduite de celle-ci, jointe à l'équation (14).

(*) On doit prendre le signe + si $n$ est *impair*.

*Addition.* — (*Mai* 1867.)

XVI. On peut substituer, aux équations (2) et (14), une relation unique, donnant à la fois les Nombres de Bernoulli et les Nombres d'Euler. Pour la découvrir, reprenons les égalités

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \sum_1^\infty \frac{P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)} x^{2q-1}, \quad \frac{1}{\cos x} = \sum_0^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)} x^{2n},$$

et posons

$$y = \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x, \quad P_{2n-1} = \frac{n}{4^{n-1}} G_{2n-1}, \quad E_{2n} = G_{2n};$$

nous aurons

$$y = \sum_0^\infty G_i \frac{x^i}{\Gamma(i+1)}, \tag{22}$$

$$y' = \sum_1^\infty G_i \frac{x^{i-1}}{\Gamma(i)}.$$

Mais

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{1-\sin x};$$

donc

$$\left(G_1 + G_2\frac{x}{1} + G_3\frac{x^2}{1.2} + G_4\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\right) = 1.$$

De là résultent les formules

$$G_1 = 1, \quad G_2 - G_1 = 0, \quad G_3 - 2G_2 = 0, \ldots;$$

et, en général,

$$G_i - C_{i-1,1}.G_{i-1} + C_{i-1,3}.G_{i-3} - C_{i-1,5}.G_{i-5} + \cdots = 0. \tag{S}$$

Les valeurs des nombres G sont, d'après cette équation aux différences :

$$G_1 = 1, \quad G_2 = 1, \quad G_3 = 2, \quad G_4 = 5, \quad G_5 = 16, \quad G_6 = 61, \quad G_7 = 272,$$
$$G_8 = 1\,385, \quad G_9 = 7\,936, \quad G_{10} = 50\,521, \ldots$$

Par conséquent,

$$E_2 = 1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = 61, \quad E_8 = 1\,385, \quad E_{10} = 50\,521, \ldots$$

et

$$P_1 = G_1 = 1, \quad P_3 = \frac{2}{4} G_3 = 1, \quad P_5 = \frac{3}{4^2} . G_5 = 3,$$

$$P_7 = \frac{4}{4^3} G_7 = 17, \quad P_9 = \frac{5}{4^4} . G_9 = 155, \ldots;$$

comme précédemment.

XVII. Dans le dix-huitième Cahier du *Journal de l'École polytechnique*, Poisson a démontré les formules

$$\operatorname{tg} x = 2 \int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} d\alpha, \qquad \frac{1}{\cos x} = 2 \int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}} d\alpha.$$

Il en résulte immédiatement, à cause des égalités (1) et (13) :

$$P_{2q-1} = 8q \int_0^\infty \frac{\alpha^{2q-1}\, d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}, \tag{T}$$

$$E_{2q} = 4^{q+1} \int_0^\infty \frac{\alpha^{2q}\, d\alpha}{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}} \cdot \tag{U}$$

De ces deux relations, la seconde a été trouvée ci-dessus ; et la première, comme on le vérifie aisément, ne diffère pas, au fond, de la formule :

$$P_{2q-1} = 8q\,(4^q - 1) \int_0^\infty \frac{\alpha^{2q-1}\, d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} \cdot \tag{7}$$

Du reste, en partant de l'équation (22), et en y remplaçant $y$ par

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} = 4 \int_0^\infty \frac{e^{(\pi+2x)\alpha} - e^{-(\pi+2x)\alpha}}{e^{2\pi\alpha} - e^{-2\pi\alpha}} d\alpha,$$

on trouve

$$G_i = 2^{i+2} \int_0^\infty \frac{e^{\pi\alpha} - (-1)^i e^{-\pi\alpha}}{e^{2\pi\alpha} - e^{2\pi\alpha}} \alpha^i dx; \tag{V}$$

et, suivant que $i$ est *impair* ou *pair*, cette formule reproduit (T) ou (U).

XVIII. La formule

$$P_{2q-1} = 8q\,(4^q - 1)\int_0^\infty \frac{t^{2q-1}\,dt}{e^{2\pi t} - 1} \tag{8}$$

nous a donné

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t} - 1}(e^{tx} - e^{-tx})^2\,(4e^{2tx} + 7 + 4e^{-2tx}) = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 x. \tag{A}$$

En adoptant la nouvelle valeur de $P_{2q-1}$, on trouve, absolument de la même manière que ci-dessus,

$$\int_0^\infty \frac{tdt\,(e^{tx} - e^{-tx})^2}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 x. \tag{A'}$$

## XXXVI. — Sur la théorie des nombres. (1857.)

I. Problème I. — *De* 1 *à* $n$ (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers donnés,* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \pi$?

Dans la suite

$$1, 2, 3, \ldots, n, \tag{1}$$

les multiples de $\alpha$ sont

$$\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, \left(\frac{n}{\alpha}\right)\alpha \;(^*) : \tag{2}$$

il y en a $\left(\frac{n}{\alpha}\right)$. Conséquemment, le nombre des termes de la suite (1), non divisibles par $\alpha$, est

$$N_1 = n - \left(\frac{n}{\alpha}\right). \tag{2}$$

Supprimons maintenant les multiples de $\beta$, *premiers avec* $\alpha$.

(*) Pour abréger, je représente généralement par $\left(\frac{a}{b}\right)$ le quotient entier de $a$ par $b$. Cette notation équivaut à celle-ci : $E\left(\frac{a}{b}\right)$, due à Legendre.

D'après la formule (2), appliquée à $\frac{n}{\beta}$, les multiples dont il s'agit sont au nombre de

$$\left(\frac{n}{\beta}\right)-\left(\frac{\left(\frac{n}{\alpha}\right)}{\beta}\right).$$

Mais, par un théorème relatif à la division,

$$\left(\frac{\left(\frac{n}{\beta}\right)}{\alpha}\right)=\left(\frac{\left(\frac{n}{\alpha}\right)}{\beta}\right)=\left(\frac{n}{\alpha\beta}\right).$$

Retranchant de $N_1$ la quantité $\left(\frac{n}{\beta}\right)-\left(\frac{n}{\alpha\beta}\right)$, nous trouvons donc, pour le nombre des termes de la suite (1), premiers avec $\alpha$ et $\beta$ :

$$N_2=n-\left(\frac{n}{\alpha}\right)-\left(\frac{n}{\beta}\right)+\left(\frac{n}{\alpha\beta}\right). \tag{3}$$

En continuant, on voit que le nombre demandé est

$$N=n-\sum\left(\frac{n}{\alpha}\right)+\sum\left(\frac{n}{\alpha\beta}\right)-\sum\left(\frac{n}{\alpha\beta\gamma}\right)+\ldots\pm\left(\frac{n}{\alpha\beta\gamma\ldots\pi}\right). \tag{A}$$

Soient, par exemple :

$$n=60,\quad \alpha=5,\quad \beta=7,\quad \gamma=13;$$

on aura

$$N=60-(12+8+4)+1=37.$$

En effet, de 1 à 60, il y a 37 nombres premiers avec 5, 7 et 13; savoir :

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 41, 43, 44, 46, 47, 48, 51, 53, 54, 57, 58, 59.

II. Remarques. — 1° *Si* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., $\pi$ *sont tous les nombres premiers qui ne surpassent pas* n, $N=1$.

2° *Si* $n=\alpha^a\beta^b\gamma^c\ldots\pi^p$, N *est le nombre des entiers inférieurs et premiers à* n : on trouve

$$N=\alpha^{a-1}\beta^{b-1}\gamma^{c-1}\ldots\pi^{p-1}(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)\ldots(\pi-1)\ (^*).$$

(*) Cette démonstration d'un théorème connu ne diffère pas de celle que j'ai donnée dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* (t. I, p. 466). La *Théorie des Nombres* (t. I, p. 8) en contient une autre, peu satisfaisante.

3° *Si* n = 1 . 2 . 3 ... i, *et que* $\pi$ *soit le plus grand nombre premier qui ne surpasse pas* i,

$$N = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdots \frac{\pi - 1}{\pi} \; (*).$$

III. Problème II. — *De* n + 1 *à* $n^2$ (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres premiers?*

Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., $\pi$ les nombres premiers qui ne surpassent pas $n$. Les termes de la suite

$$1, 2, 3, 4, \ldots n^2,$$

non divisibles par ces facteurs premiers, sont ceux que l'on cherche (l'unité exceptée). Donc

$$N' = n^2 - 1 - \sum\left(\frac{n^2}{\alpha}\right) + \sum\left(\frac{n^2}{\alpha\beta}\right) - \sum\left(\frac{n^2}{\alpha\beta\gamma}\right) + \cdots \qquad \text{(B)}$$

Si, par exemple, $n = 12$ :

$$N' = 143 - \left[\left(\frac{144}{2}\right) + \left(\frac{144}{3}\right) + \left(\frac{144}{5}\right) + \left(\frac{144}{7}\right) + \left(\frac{144}{11}\right)\right]$$

$$+ \left[\left(\frac{144}{6}\right) + \left(\frac{144}{10}\right) + \left(\frac{144}{14}\right) + \left(\frac{144}{22}\right) + \left(\frac{144}{15}\right) + \left(\frac{144}{21}\right) + \left(\frac{144}{33}\right) + \left(\frac{144}{35}\right) + \left(\frac{144}{55}\right) + \left(\frac{144}{77}\right)\right]$$

$$- \left[\left(\frac{144}{30}\right) + \left(\frac{144}{42}\right) + \left(\frac{144}{66}\right) + \left(\frac{144}{70}\right) + \left(\frac{144}{110}\right) + \left(\frac{144}{105}\right)\right]$$

$$= 143 - (72 + 48 + 28 + 20 + 13)$$

$$+ (24 + 14 + 10 + 6 + 9 + 6 + 4 + 4 + 2 + 1)$$

$$- (4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1);$$

(*) La fonction numérique $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{\pi - 1}{\pi}$, que nous représenterons par $f(\pi)$, a été calculée, par Legendre, jusqu'à $\pi = 1\,229$. M. Tchébychef a prouvé que la valeur de $f(\pi)$ est, *sensiblement*,

$$\frac{C}{\log \pi},$$

C étant une constante (*Journal de Liouville*, t. XVII). On doit observer, à propos de la Table de Legendre, que cet illustre Géomètre ayant fait abstraction du facteur premier 2, les nombres de la Table sont égaux à $2f(\pi)$.

ou enfin

$$N' = 29.$$

En effet, de 13 à 144, il y a 29 nombres premiers; savoir :

13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139.

IV. Une question très difficile, résolue seulement par M. Tchébychef, est celle qui consiste à déterminer *combien il y a de nombres premiers inférieurs à une limite donnée.* Si, dans la formule (A), on remplace les *entiers*

$$\left(\frac{n}{\alpha}\right), \quad \left(\frac{n}{\alpha\beta}\right), \quad \left(\frac{n}{\alpha\beta\gamma}\right), \ldots$$

par les valeurs *exactes :*

$$\frac{n}{\alpha}, \quad \frac{n}{\alpha\beta}, \quad \frac{n}{\alpha\beta\gamma}, \ldots$$

on a, comme *première approximation,*

$$N = nf(\pi). \tag{A'}$$

De même,

$$N' = -1 + n^2 f(\pi). \tag{B'}$$

V. Pour plus de régularité, représentons par P $(n)$ la quotité des nombres premiers qui ne surpassent pas $n$. Alors la formule précédente devient, en négligeant le terme $(-1)$ :

$$P(n^2) = P(n) + n^2 f(\pi). \tag{C}$$

Cette relation, beaucoup moins approchée que la formule *empirique* de Legendre et que la formule *démontrée* de M. Tchébychef, a cependant quelque utilité, au moins jusqu'à une certaine limite. Si l'on prend les valeurs de P $(n)$ dans une table de nombres premiers, elle conduit aux résultats suivants :

| $n$ | $n^2$ | $P(n)$ | $\pi$ | $f(\pi)$ | $P(n^2)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 100 | 5 | 7 | 0,288 571 | 27,8 |
| 20 | 400 | 9 | 19 | 0,171 024 | 77,4 |
| 30 | 900 | 11 | 29 | 0,137 947 | 133,1 |
| 40 | 1 600 | 13 | 37 | 0,148 721 | 230,9 |
| 50 | 2 500 | 16 | 47 | 0,138 704 | 332,7 |
| 60 | 3 600 | 18 | 59 | 9,133 780 | 499,6 |
| 70 | 4 900 | 20 | 67 | 0,129 623 | 635,1 |
| 80 | 6 400 | 23 | 79 | 0,124 631 | 819,3 |
| 90 | 8 100 | 25 | 89 | 0,121 370 | 1 009,7 |
| 100 | 10 000 | 26 | 97 | 0,120 317 | 1 229,1 |
| 200 | 40 000 | 47 | 199 | 0,103 894 | 4 202,8 |
| 300 | 90 000 | 63 | 293 | 0,097 438 | 8 834,2 |
| 500 | 250 000 | 96 | 499 | 0,089 610 | 22 498,3 |
| 1 000 | 1 000 000 | 169 | 997 | 0,080 963 | 81 134 |

Comme termes de comparaison, nous donnons ici les valeurs de $P(n^2)$ qui résultent des Tables, de la formule de Legendre ou de la formule de M. Tchébychef (*).

(*) La formule de Legendre (*Théorie des Nombres*, t. II, p. 65) est

$$P(n) = \frac{n}{\log n - 1,083\,66};$$

et la formule de M. Tchébychef :

$$P(n) = \frac{n}{\log n - 1}.$$

Il est assez curieux que celle-ci soit moins approximative que l'autre.

| $n^2$ | Tables | L | T |
|---|---|---|---|
| 100 | 26 | 28 | 28 |
| 400 | 79 | 81 | 80 |
| 900 | 153 | 157 | 153 |
| 1 600 | 252 | 254 | 250 |
| 2 500 | 368 | 371 | 366 |
| 3 600 | 506 | 507 | 500 |
| 4 900 | 633 | 661 | 654 |
| 6 400 | 833 | 833 | 824 |
| 8 100 | 1 019 | 1 023 | 1 000 |
| 10 000 | 1 230 | 1 230 | 1 218 |
| 40 000 | 4 204 | 4 205 | 4 168 |
| 90 000 | 8 713 | 8 717 | 8 647 |
| 250 000 | 22 045 | 22 033 | 21 872 |
| 1 000 000 | 78 493 | 78 543 | 78 030 |

VI. Problème III. — *De* $n+1$ *à* $n+i$ (inclusivement), *combien de nombres non divisibles par les nombres premiers* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... $\pi$?

En nous reportant au Problème I, représentons par $N(n)$ ce que nous avions simplement appelé N; le nombre demandé sera

$$N'' = N(n+i) - N(n).$$

VII. Problème IV. $\lambda$ *et* $\mu$ *étant deux nombres premiers consécutifs, combien y a-t-il de nombres premiers entre* $2\lambda$ *et* $2\mu$? (On suppose $2\lambda > \mu$) (*).

(*) On sait qu'entre $a$ et $2a - 2$, il y a au moins un nombre premier, $a$ étant plus grand que 3.

De 1 à 2 $\mu$, les termes non divisibles par 2, 3, 5, ... $\lambda$, $\mu$ sont premiers; car tout nombre non premier, compris entre ces limites, admet un facteur compris lui-même entre 2 et $\mu$. Le nombre de ces termes est N $(2\mu)$. Semblablement, entre 1 et $2\lambda$, il y a N $(2\lambda)$ nombres premiers, autres que 2, 3, 5, ... $\lambda$, $\mu$. La réponse à la question est donc

$$x = \mathrm{N}(2\mu) - \mathrm{N}(2\lambda),$$

les *diviseurs* étant 2, 3, 5,... $\lambda$, $\mu$.

Soient, par exemple,

$$\lambda = 1\,327, \quad \mu = 1\,361, \quad 2\lambda = 2\,654, \quad 2\mu = 2\,722.$$

De 1 à 2 654, les nombres non divisibles par 2, 3, 5, ... 1 361 sont :

$$1, \quad 1\,367, \quad 1\,373, \quad 1\,381, \ldots \quad 2\,633, \quad 2\,647;$$

en tout, 166 nombres premiers. Ainsi, N $(2\lambda) = 166$. De même, N $(2\mu) = 180$. Donc

$$x = 14.$$

En effet, les nombres premiers compris entre 2 654 et 2 722 sont

2 657, 2 659, 2 663, 2 671, 2 677, 2 683, 2 687,
2 689, 2 693, 2 699, 2 707, 2 711, 2 713, 2 719.

Soient encore

$$\lambda = 3\,203, \quad \mu = 3\,209, \quad 2\lambda = 6\,406, \quad 2\mu = 6\,418.$$

On trouve N $(2\lambda) = 381$, N $(2\mu) = 381$ ; donc $x = 0$. En effet, entre 6 406 et 6 418, il n'y a aucun nombre premier.

VIII. Problème V. — *Dans une progression par différence donnée, trouver* n *termes consécutifs, respectivement divisibles par* n *nombres premiers donnés.* (On suppose que le premier terme et la raison sont des nombres entiers, premiers entre eux.)

Soient les $n$ termes inconnus :

$$a + (l+1)\delta, \quad a + (l+2)\delta, \quad a + (l+3)\delta, \ldots \quad a + (l+n)\delta,$$

qui doivent être respectivement divisibles par les $n$ nombres premiers :

$$p_1,\quad p_2,\quad p_3, \dots\quad p_n.$$

Dans chaque cas particulier, les $n$ équations

$$a+(l+1)\delta=p_1x_1,\quad a+(l+2)\delta=p_2x_2, \dots,\quad a+(l+n)\delta=p_nx_n \quad (1)$$

feront connaître la valeur générale du terme $a+(l+1)\delta$.

IX. Remarques. — 1° Les équations (1) exigent que $\delta$ soit premier par rapport à tous les diviseurs donnés.

2° On trouve que le premier terme, $a+(l+1)\delta$, doit avoir la forme

$$\alpha + M\theta,$$

$\theta$ étant un entier arbitraire, et M désignant le plus petit multiple des nombres premiers donnés (*).

3° Le nombre $n$ est quelconque ; donc, *dans une progression donnée, on peut trouver autant de termes consécutifs qu'on le voudra, qui soient divisibles par des nombres premiers donnés.*

4° Par suite, *la différence entre deux nombres premiers consécutifs peut dépasser toute limite donnée.*

X. Applications. — 1° Soient

$$a=3,\quad \delta=5,\quad n=4,\quad p_1=2,\quad p_2=7,\quad p_3=11,\quad p_4=19.$$

Les équations (1) deviennent

$$3+5(l+1)=2x_1,\quad 3+5(l+2)=7x_2,\quad 3+5(l+3)=11x_3,$$
$$3+5(l+4)=19x_4.$$

Si l'on résout celles-ci, on trouve, successivement :

$$l+1=1+2\theta_1,\quad \theta_1=-2+7\theta_2,\quad \theta_2=6+11\theta_3,\quad \theta_3=9+19\theta,$$
$$l+1=1\,467+2.7.11.19\theta,\quad a+(l+1)\delta=7\,338+2.7.11.19\theta.$$

Les termes cherchés sont donc, par exemple,

$$7\,338,\quad 7\,343,\quad 7\,348,\quad 7\,353.$$

(*) S'ils sont tous inégaux, $M=p_1p_2\dots p_n$.

En effet, ces quatre nombres sont, respectivement, divisibles par 2, 7, 11 et 19.

2° $a=1$, $\delta=1$, $n=6$, $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$, $p_5=11$, $p_6=13$.

Opérant comme dans l'exemple précédent, on trouve que les termes cherchés sont égaux aux nombres

$$60\,848,\quad 60\,849,\quad 60\,850,\quad 60\,851,\quad 60\,852,\quad 60\,853$$

augmentés d'un multiple quelconque de 180 180.

3° $a=1$, $\delta=1$, $n=6$, $p_1=13$, $p_2=11$, $p_3=7$, $p_4=5$, $p_5=3$, $p_6=2$.

La progression étant prolongée indéfiniment dans les deux sens, les termes cherchés sont, d'après l'exemple précédent :

$$-60\,853+180\,180\,\theta,\quad -60\,852+180\,180\,\theta,\ldots,$$

ou, en remplaçant $\theta$ par $\theta+1$ :

$$119\,327+180\,180\,\theta,\quad 119\,328+180\,180\,\theta,\quad 119\,329+180\,180\,\theta,\ldots,$$

XI. Remarque. — Si le Problème V a été résolu pour le cas de la suite naturelle, il pourra l'être, immédiatement, pour toute autre progression. Soient, en effet, $n$ nombres entiers consécutifs :

$$\mathrm{N}+1,\quad \mathrm{N}+2,\ldots,\quad \mathrm{N}+n, \tag{2}$$

respectivement divisibles par

$$p_1,\quad p_2,\ldots,\quad p_n.$$

Si les $n$ termes

$$a+(l+1)\delta,\quad a+(l+2),\ldots\quad a+(l+n)\delta \tag{3}$$

doivent être divisibles par les mêmes nombres premiers, pris dans le même ordre, on devra disposer de l'inconnue $l$, de manière que

$$a+(l-\mathrm{N})\delta$$

soit divisible par $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Désignant par M le plus petit multiple de ces diviseurs, on aura donc l'équation

$$\delta l - \mathrm{M}x = \mathrm{N}\delta - a, \qquad (4)$$

à laquelle on peut toujours satisfaire, puisque $\delta$ et M sont premiers entre eux (XI, 1°).

Soient, par exemple, les nombres

2 638, 2 639, 2 640, 2 641,

respectivement divisibles par 2, 7, 11, 19. Si l'on prend $a = 3$, $\delta = 5$, l'équation (4) devient

$$5l - 2\,926\,x = 13\,382.$$

Elle est vérifiée par $x = 2$, $l = 1\,466$ : les nombres cherchés sont donc

7 338, 7 343, 7 348, 7 353;

comme on l'a vu ci-dessus.

XII. Problème VI. — *Si la suite* (2) *a le nombre maximum de termes, la suite* (3) *peut-elle en avoir davantage?*

Nous disons que la suite (2) a le nombre *maximum* de termes, lorsque N ni $\mathrm{N} + n + i$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Cela posé, admettons que $a + l\delta$ soit divisible par l'un de ces nombres premiers, $p$, sans que N le soit. Le facteur $p$ ne divisant pas $\delta$, il ne divisera pas $\mathrm{N}\delta$; donc $a + l\delta - \mathrm{N}\delta$, ou $a + (l - \mathrm{N})\delta$, ne serait pas divisible par $p$; et nous venons d'établir le contraire. Ainsi *les suites* (2) *et* (3), *prolongées autant que possible, ont toujours le même nombre de termes.*

XIII. Exemples. — 1° Les nombres consécutifs

62, 63, 64, 65, 66

étant divisibles par

2, 7, 2, 5, 3,

sans que 61 ou 67 soit divisible par aucun de ces facteurs premiers; prenons $a = 13$, $\delta = 11$. L'équation (3), qui devient

$$11l - 210x = 658,$$

donne

$$l = 98 + 210\,\theta.$$

La suite la plus simple, répondant à $\theta = 0$, est donc

1 102, 1 113, 1 124, 1 135, 1 146.

Ces nombres sont divisibles par 2, 7, 2, 5; 3; mais 1 091 et 1 157 n'admettent aucun de ces diviseurs.

2° *Trouver sept nombres impairs consécutifs, respectivement divisibles par*

3, 5, 7, 3, 11, 13, 5.

Si l'on représente ces nombres par

$$x+3,\quad x+5,\quad x+7,\quad x+9,\quad x+11,\quad x+13,\quad x+15,$$

on devra prendre, pour $x$, un multiple pair des nombres premiers donnés. Les différentes suites qui satisfont à la question sont donc, à cause de $M = 3.5.7.11.13 = 15\,015$ :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3, | 5, | 7, | 9, | 11, | 13, | 15; |
| 30 033, | 30 035, | 30 037, | 30 039, | 30 041, | 30 043, | 30 045; |
| 60 063, | 60 065, | 60 067, | 60 069, | 60 071, | 60 073, | 60 075; |
| 90 093, | 90 095, | 90 097, | 90 099, | 90 101, | 90 103, | 90 105; |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |

De plus, chacune de ces suites a le nombre maximum de termes.

XIV. La solution précédente, et les exemples à l'appui, supposent que les diviseurs premiers donnés sont toujours pris dans l'ordre où ils l'étaient primitivement. Si cet ordre est arbitraire, la conclusion trouvée ci-dessus (XII) ne subsiste plus. Par exemple, les nombres impairs consécutifs

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

sont divisibles, chacun, par un des nombres premiers

$$3,\quad 5,\quad 7,\quad 11,\quad 13,$$

tandis que 1 et 17 ne le sont pas. Mais, si l'on suppose ces facteurs premiers rangés dans l'ordre suivant :

$$3,\quad 7,\quad 5,\quad 3,\quad 11,\quad 13,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad 3\ (^*),$$

le *nombre maximum des termes,* au lieu d'être 7, devient 10. Les suites cherchées sont alors, à cause de ce changement dans les conditions du problème :

9 441, 9 443, 9 445, 9 447, 9 449, 9 451, 9 453, 9 455, 9 457, 9 459;

309 741, 309 743, 309 745, 309 747, 309 749, 309 751, 309 753, 309 755, 309 757, 309 759;

610 041, 610 043, 610 045, 610 047, 610 049, 610 051, 610 053, 610 055, 630 057, 610 059;

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (**)

XV. Théorème I (Théorème de Jacobi). — *Toute progression par différence, dans laquelle le premier terme et la raison sont premiers entre eux, contient une infinité de termes non divisibles par un nombre premier donné.*

Cette proposition résulte des deux lemmes suivants, qu'il suffit d'énoncer :

1° Le premier terme $a$ et la raison $\delta$ étant premiers entre eux, deux termes consécutifs quelconques sont premiers entre eux ;

2° Sur deux termes consécutifs, il y en a un, au moins, non divisible par le nombre premier $p$.

XVI. Remarques. — 1° *Si* p *divise* $\delta$, *aucun terme n'est divisible par* p.

(*) Cet ordre est admissible, parce que les multiples de 3 doivent revenir de trois en trois ; ceux de 5, de cinq en cinq, etc.

(**) Ces exemples sont tirés d'un remarquable Mémoire de M. Desboves (*Nouvelles Annales,* t. XIV).

2° Si $p$ divise $a$, les termes divisibles par $p$ sont

$$a, \quad a + p\delta, \quad a + 2p\delta, \quad a + 3p\delta, \ldots$$

3° Si $p$ ne divise ni $a$ ni $\delta$, un seul des $p$ premiers termes est divisible par $p$. Soit $a + i\delta$ ce terme. Alors tous les termes divisibles par $p$ sont compris dans la formule

$$x = a + (i + p\theta)\,\delta,$$

$\theta$ étant un entier quelconque.

XVII. Lemme. — *Soit une progression*

$$a, \quad a + \delta, \quad a + 2\delta, \quad a + 3\delta, \ldots$$

*dans laquelle* a *est premier avec* $\delta$ *et moindre que* $\delta$. *Si l'on prend, dans cette progression, les termes divisibles par un nombre premier* p, *les quotients forment une seconde progression*

$$a', \quad a' + \delta, \quad a' + 2\delta, \quad a' + 3\delta, \ldots$$

*dans laquelle* a' *est premier avec* $\delta$ *et moindre que* $\delta$.

D'après la dernière remarque,

$$a' = \frac{a + i\delta}{p},$$

$i$ étant inférieur à $p$; donc

$$a' \leqq \frac{a + (p - 1)\delta}{p};$$

et, à plus forte raison,

$$a' < \delta.$$

D'un autre côté, si $a'$ et $\delta$ avaient un facteur commun, ce facteur diviserait $a$; etc.

XVIII. Théorème II. — *Si, en partant d'une progression*

$$a, \quad a + \delta, \quad a + 2\delta, \ldots$$

*on forme, comme il vient d'être dit, la progression*

$$a', \quad a' + \delta, \quad a' + 2\delta, \ldots$$

*puis, qu'au moyen de celle-ci, on passe à une troisième progression*

$$a'', \quad a'' + \delta, \quad a'' + 2\delta, \ldots;$$

*et ainsi de suite, on finira par retomber sur la progression primitive. De plus, le nombre des progressions différentes divise le nombre des entiers inférieurs et premiers à $\delta$.*

1° On vient de voir que les termes initiaux $a', a'', a''', \ldots$ sont, comme $a$, inférieurs et premiers à $\delta$; donc ils se reproduisent périodiquement, *en tout ou en partie.* Soit $a^{(m)} = a^{(n)}$. A cause de

$$a^{(m)} = \frac{a^{(m-1)} + i^{(m-1)}\delta}{p}, \quad a^{(n)} = \frac{a^{(n-1)} + i^{(n-1)}\delta}{p},$$

on a

$$a^{(m-1)} - a^{(n-1)} + \left(i^{(m-1)} - i^{(n-1)}\right)\delta = 0,$$

équation absurde, à moins que

$$a^{(m-1)} = a^{(n-1)}.$$

Ainsi, *quand deux quotients* $a^{(m)}$, $a^{(n)}$ *sont égaux, les quotients* $a^{(m-1)}$, $a^{(n-1)}$, *qui les précèdent respectivement, sont égaux :* $a$ fait donc partie de la période des quotients.

2° Soient

$$pa' = a + i\delta, \quad pa'' = a' = i'\delta, \ldots \quad pa = a^{(n-1)} + i^{(n-1)}\delta, \qquad (1)$$

$n$ étant le nombre des termes de la période. On conclut, de ces égalités,

$$\frac{a}{\delta} = \frac{p^{n-1}i^{(n-1)} + \cdots + pi' + i}{p^n - 1}.$$

Si donc, dans le système de numération dont la base est $p$, on réduisait en DÉCIMALES (*) la fraction $\frac{a}{\delta}$, on trouverait

$$\frac{a}{\delta} = 0{,}i^{(n-1)}i^{(n-2)}\ldots i'\,i\,i^{(n-1)}i^{(n-2)}\ldots$$

Or, on sait que le nombre $n$ des termes de la période décimale

(*) C'est-à-dire en fractions de la forme $\frac{1}{p^k}$.

est un diviseur de $\varphi(\delta)$, $\varphi(\delta)$ désignant le nombre des entiers inférieurs et premiers à $\delta$ (*).

XIX. Remarques. — 1° A cause des égalités (1),

$$a^{(n-1)},\quad a^{(n-2)},\ldots,\quad a'',\quad a'$$

sont les restes de la division, par $\delta$, de

$$pa,\quad pa^{(n-1)},\ldots,\quad pa''',\quad pa'':$$

les quotients correspondants sont

$$i^{(n-1)},\quad i^{(n-2)},\ldots,\quad i',\quad i.$$

2° D'après la théorie des fractions périodiques, la période formée par les progressions a *un seul* terme si $\delta = p - 1$ ; et, si $\delta = p + 1$, elle en a *deux*.

XX. Applications. — 1° $a = 4$, $\delta = 9$, $p = 11$. Les progressions sont

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4, | 13, | $\overline{22}$, | 31, | 40, | 49, | 58, | 67, | 76, | 85, | 94, ... |
| 2, | $\overline{11}$, | 20, | 29, | 38, | 47, | 56, | 65, | 74, | 83, | 92, ... |
| 1, | 10, | 19, | 28, | 37, | 46, | $\overline{55}$, | 64, | 73, | 82, | 91, ... |
| 5, | 14, | 23, | 32, | 41, | 50, | 59, | 68, | $\overline{77}$, | 86, | 95, ... |
| 7, | 16, | 25, | 34, | 43, | 52, | 61, | 70, | 79, | $\overline{88}$, | 97, ... |
| 8, | 17, | 26, | 35, | $\overline{44}$, | 53, | 62, | 71, | 80, | 89, | 98, ... |
| 4, | 13, | $\overline{22}$, | 31, | 40, | 49, | 58, | 67, | 76, | 85, | 94, ... |

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

La période a 6 termes, et $6 = 9\,\frac{2}{3} = \varphi(9)$.

2° $a = 7$, $\delta = 20$, $p = 3$. On trouve

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7, | $\overline{27}$, | 47, | 67, | $\overline{87}$,... |
| $\overline{9}$, | 29, | 49, | $\overline{69}$, | 89,... |
| $\overline{3}$, | 23, | 43, | $\overline{63}$, | 83,... |
| 1, | $\overline{21}$, | 41, | 61, | 81,... |
| 7, | $\overline{27}$, | 47, | 67, | 87,... |

Ainsi, $n = 4$, $\varphi(\delta) = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 8$.

(*) *Nouvelles Annales*, t. I, p. 463.

3° $a = 7, \delta = 10, p = 11$. La période doit avoir un seul terme (XIX, 2°). En effet, de

$$7,\ 17,\ 27,\ 37,\ 47,\ 57,\ 67,\ \overline{77},\ 87,\ldots$$

on tire la progression

$$7,\ 17,\ 27,\ 37,\ldots$$

4° $a = 7, \delta = 12, p = 11$. La progression donnée étant

$$7,\ 19,\ 31,\ 43,\ \overline{55},\ 67,\ 79,\ 91,\ldots$$

on en déduit

$$5,\ 17,\ 29,\ 41,\ 53,\ 65,\ \overline{77},\ 89,\ldots$$

après quoi l'on retombe sur la première progression.

## XXXVII. — Sur une application de la formule du binôme aux intégrales eulériennes. (1858) (*).

I. Le coefficient de $x^k$, dans le produit des polynômes

$$1 + \frac{l}{1} x + \frac{l(l-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots + x^l,$$

$$1 + \frac{l'}{1} x^{-1} + \frac{l'(l'-1)}{1 \cdot 2} x^{-2} + \cdots + x^{-l'},$$

est, en représentant par $C_{l,k}$ le nombre des combinaisons de $l$ lettres, prises $k$ à $k$ :

$$1 \cdot C_{l,k} + \frac{l'}{1} C_{l,k+1} + \frac{l'(l'-1)}{1 \cdot 2} C_{l,k+2} + \cdots$$

D'un autre côté, ce coefficient est égal à celui de $x^k$, dans le développement de $(1 + x)^{l+l'} x^{-l'}$; donc

$$C_{l+l',\, l'+k} = 1 \cdot C_{l,k} + \frac{l'}{1} C_{l,k+1} + \frac{l'(l'-1)}{1 \cdot 2} C_{l,k+2} + \cdots \qquad (1)$$

(*) Un extrait de cette Note a paru dans les *Comptes rendus* (t. XLVII).

II. On a

$$C_{l,k+1}=\frac{l-k}{k+1}C_{l,k},\qquad C_{l,k+2}=\frac{(l-k)(l-k-1)}{(k+1)(k+2)}C_{l,k},\ldots$$

De plus,

$$C_{l,k}=\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(l-k+1)}=\frac{1}{(l-k)\,B(k+1,\,l-k)},$$

$$C_{l+l',l'+k}=\frac{1}{(l-k)\,B(l'+k+1,\,l-k)}.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (1) devient

$$\frac{B(k+1,\ l-k)}{B(l'+k+1,\ l-k)}=1+\frac{l'}{1}\frac{l-k}{k+1}+\frac{l'(l'-1)}{1\,.\,2}\frac{(l-k)(l-k-1)}{(k+1)(k+2)}+\cdots;\qquad (2)$$

ou, en posant

$$k+1=p,\quad l'+k+1=q,\quad l-k=m:$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{B(p,m)}{B(q,m)}&=1-\frac{m}{1}\frac{p-q}{p}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\frac{(p-q)(p-q+1)}{p(p+1)}\\&-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{(p-q)(p-q+1)(p-q+2)}{p(p+1)(p+2)}+\cdots\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

III. L'égalité (A) a été trouvée en supposant $l$, $l'$ et $k$ entiers positifs. Par conséquent, elle paraît soumise à de nombreuses restrictions. Néanmoins elle est générale, c'est-à-dire qu'elle subsiste lorsque $p$, $q$, $m$ étant des quantités *positives* quelconques, le second membre est un polynôme ou une série (*).

(*) Cette série est toujours convergente. En effet, lorsque $p$ surpasse $q$, les termes du second membre sont, en valeur absolue, respectivement moindres que ceux de la série

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\cdots\qquad (a)$$

laquelle est *convergente* (*Comptes rendus*, t. XLV); et, si $q$ surpasse $p$, les mêmes termes, pris encore en valeur absolue, sont, à partir de *l'un d'eux*, respectivement moindres que ceux de la série $(a)$, multipliés par un facteur constant.

Pour démontrer cette proposition, évidente si $p = q$, nous distinguerons deux cas :

1° $p > q$. On a

$$\frac{p-q}{p} = \frac{B(p-q+1, q)}{B(p-q, q)}, \quad \frac{p-q+1}{p+1} = \frac{B(p-q+2, q)}{B(p-q+1, q)}, \text{ etc.};$$

donc le second membre de la formule (A) égale

$$\frac{1}{B(p-q,q)}\left[B(p-q,q) - \frac{m}{1} B(p-q+1,q) + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} B(p-q+2,q) - \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{B(p-q,q)} \int_0^1 \theta^{p-q-1}(1-\theta)^{q-1}(1-\theta)^m \, d\theta$$
$$= \frac{B(p-q, m+q)}{B(p-q, q)} = \frac{B(m+q, p-q)}{B(q, p-q)}.$$

Ainsi, l'équation (1) se réduit à

$$\frac{B(p, m)}{B(q, m)} = \frac{B(m+q, p-q)}{B(q, p-q)}. \tag{3}$$

Mais, en vertu d'un théorème d'Euler :

$$\frac{B(p, m)}{B(q, m)} = \frac{B(p, m+q)}{B(q, m+p)},$$
$$\frac{B(m+q, p-q)}{B(q, p-q)} = \frac{B(m+q, p)}{B(q, m+p)};$$

donc l'équation (3) est identique.

2° $p < q$. L'équation (A) étant démontrée pour les valeurs de $q$ inférieures à $p$, il suffit de faire voir qu'elle subsiste quand on y change $q$ en $q + 1$. A cet effet, appelons $\varphi(m, p, q)$ le second membre : on trouve aisément

$$\varphi(m, p, q) - \varphi(m, p, q+1) = -\frac{m}{p}\varphi(m-1, p+1, q+1). \tag{4}$$

D'autre part,

$$\frac{B(p, m)}{B(q, m)} - \frac{B(p, m)}{B(q+1, m)} = -\frac{m}{q}\frac{B(p, m)}{B(q, m)} = -\frac{m}{q}\varphi(m, p, q). \tag{5}$$

Conséquemment, il reste à vérifier que

$$p\varphi(m, p, q) = q\varphi(m-1, p+1, q+1),$$

ou que

$$\left.\begin{aligned} & p\left[1 - \frac{m}{p}\frac{p-q}{p} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(p-q)}{p}\frac{(p-q+1)}{(p+1)} - \dots\right] \\ & = q\left[1 - \frac{m-1}{p+1}\frac{p-q}{p+1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{(p-q)(p-q+1)}{(p+1)(p+2)} - \dots\right]. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Le premier membre de cette égalité peut être écrit ainsi :

$$\begin{array}{c|c|c}
p \qquad -(p-q) & \dfrac{m-1}{1} + \dfrac{(p-q)(p-q+1)}{p+1} & \dfrac{(m-1)(m-2)}{1.2} - \dots \\
-(p-q) + \dfrac{(p-q)(p-q+1)}{p+1} & -\dfrac{(p-q)(p-q+1)(p-q+2)}{(p+1)(p+2)} & + \dots
\end{array}$$

Or,

$$p - (p-q) = q;$$

$$p - q - \frac{(p-q)(p-q+1)}{p+1} = q\frac{p-q}{p+1};$$

et, en général,

$$\frac{(p-q)(p-q+1)\dots(p-q+i)}{(p+1)(p+2)\dots(p+i)} - \frac{(p-q)(p-q+1)\dots(p-q+i+1)}{(p+1)(p+2)\dots(p+i+1)}$$

$$= q\frac{(p-q)(p-q+1)\dots(p-q+i)}{(p+1)(p+2)\dots(p+i+1)};$$

ou

$$1 - \frac{p-q+i+1}{p+i+1} = \frac{q}{p+i+1}.$$

La relation (6) est donc identique.

IV. Dans son savant *Mémoire sur les intégrales définies eulériennes,* Binet démontre une formule équivalente à :

$$\frac{B(p,m)}{B(q,m)} = 1 - \frac{p-q}{1}\frac{m}{m+q} + \frac{(p-q)(p-q-1)}{1.2}\frac{m(m+1)}{(m+q)(m+q+1)} - \dots \quad (A')$$

Par le changement de $p-q$ en $m$, de $m$ en $p-q$, et de $p$ en $m+q$, celle-ci devient

$$\frac{\mathrm{B}(m+q,p-q)}{\mathrm{B}(q,p-q)}=1-\frac{m}{1}\frac{p-q}{p}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(p-q)(p-q+1)}{p(p+1)}-\ldots;$$

d'où, à cause de la formule (A) :

$$\frac{\mathrm{B}(m+q,p-q)}{\mathrm{B}(q,p-q)}=\frac{\mathrm{B}(p,m)}{\mathrm{B}(q,m)};$$

ce qui est précisément l'équation (3). Ainsi, le Théorème d'Euler donne l'une des formules (A), (A') au moyen de l'autre; et, réciproquement, ce théorème est une conséquence des deux formules.

V. La formule (A) permet de développer, en séries convergentes, l'intégrale eulérienne de première espèce et son inverse. En effet, si l'on suppose $q$ entier,

$$\mathrm{B}(q,m)=\frac{1.2.3\ldots(q-1)}{m(m+1)\ldots(m+q-1)};$$

donc, par le changement de $m$ en $q$ et de $q$ en $m$ :

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{q(q+1)\ldots(q+m-1)}\left[1-\frac{q}{1}\frac{p-m}{p}+\frac{q(q-1)}{1.2}\frac{(p-m)(p-m+1)}{p(p+1)}-\ldots\right]:\quad\text{(B)}$$

$m$ est un nombre entier arbitraire. Si, par exemple, $m=1$ :

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{p-1}{q}\left[\frac{1}{p-1}-\frac{q}{1}\frac{1}{p}+\frac{q(q-1)}{1.2}\frac{1}{p+1}-\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\frac{1}{p+2}+\ldots\right]\cdot\quad\text{(C)}$$

De même,

$$\frac{1}{\mathrm{B}(p,q)}=\frac{p(p+1)\ldots(p+m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)}\left[1-\frac{p}{1}\frac{m-q}{m}+\frac{p(p-1)}{1.2}\frac{(m-q)(m-q+1)}{m(m+1)}-\ldots\right]\cdot\quad\text{(D)}$$

et

$$\frac{1}{\mathrm{B}(p,q)}=p\left[1+\frac{p}{1}\frac{q-1}{1}+\frac{p(p-1)}{1.2}\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}+\ldots\right]\cdot\quad\text{(E)}$$

VI. Le premier membre de la formule (A) égale $\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(m+q)}{\Gamma(q)\,\Gamma(m+p)}$. Si l'on suppose $p = q + i$, $i$ étant un nombre entier, ce premier membre se réduit à

$$\frac{q(q+1)\ldots(q+i-1)}{(m+q)(m+q+1)\ldots(m+q+i-1)}.$$

Conséquemment,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{q(q+1)\ldots(q+i-1)}{(m+q)(m+q+1)\ldots(m+q+i-1)} = \\ 1 - \dfrac{m}{1}\dfrac{i}{q+i} + \dfrac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,\dfrac{i(i+1)}{(q+i)(q+i+1)} - \ldots\end{array}\right\} \quad \text{(F)}$$

Par exemple,

$$\frac{q}{m+q} = 1 - \frac{m}{q+1} + \frac{m(m-1)}{(q+1)(q+2)} - \frac{m(m-1)(m-2)}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots (*). \quad \text{(G)}$$

VII. Parmi les applications de la formule (A), l'une des plus intéressantes me paraît être le développement de $\pi$ ou de $\frac{1}{\pi}$, en séries convergentes. Pour obtenir une infinité d'expressions de la première transcendante, il suffit de supposer

$$q \textit{ entier},\quad p - q = i + \frac{1}{2},\quad m + q = i' + \frac{1}{2},$$

$i$ et $i'$ étant des nombres *entiers*. On trouve, en effet,

$$\left.\begin{array}{l}\pi = \dfrac{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (q-1)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{2q+2i-1}{2}\right)}\;\dfrac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(i+i')}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{2i'-1}{2}\right)} \\ \times\left[1 - \dfrac{m}{1}\dfrac{p-q}{p} + \dfrac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,\dfrac{(p-q)(p-q+1)}{p(p+1)} - \ldots\right].\end{array}\right\} \quad \text{(H)}$$

Soient, par exemple,

$$q = 1,\quad i = 0,\quad i' = 1,\quad p = \frac{3}{2},\quad m = \frac{1}{2};$$

(*) Cette formule est due à Stirling.

on a

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.4.5}-\frac{1.3}{2.4.6.7}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}+\cdots \tag{I}$$

De même, en prenant

$$p \textit{ entier}, \quad q-p=i+\frac{1}{2}, \quad m+p=i'+\frac{1}{2},$$

on trouve

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\pi}=&\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2p+2i-1}{2}\right)}{1.2.3\ldots(p-1)}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2i'-1}{2}\right)}{1.2.3\ldots(i+i')}\\ &\times\left[1-\frac{m}{1}\frac{p-q}{p}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(p-q)(p-q+1)}{p(p+1)}-\cdots\right].\end{aligned}\right\} \tag{K}$$

Soient

$$p=1, \quad i=0, \quad i'=1, \quad q=\frac{3}{2}, \quad m=\frac{1}{2};$$

alors

$$\frac{4}{\pi}=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2.4}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2+\cdots \tag{L}$$

VIII. La formule (L) équivaut à la proposition suivante, que l'on peut interpréter géométriquement : *La somme des carrés des termes du développement de* $\sqrt{2}=(1+1)^{\frac{1}{2}}$, *égale* $\frac{4}{\pi}$.

IX. Plus généralement, puisque la formule (A) est la traduction de l'équation (1), celle-ci subsiste en même temps que la première. Par conséquent : soit $k$ un *nombre entier,* positif ou nul; soient $l>k$, $l'>-1$ : le coefficient de $x^k$, dans le produit des séries

$$1+\frac{l'}{1}x+\frac{l(l-1)}{1.2}x^2+\frac{l(l-1)(l-2)}{1.2.3}x^3+\cdots,$$

$$1+\frac{l}{1}x^{-1}+\frac{l'(l'-1)}{1.2}x^{-2}+\frac{l'(l'-1)(l'-2)}{1.2.3}x^{-3}\pm\cdots\ (*),$$

(*) Comme une de ces séries est nécessairement divergente, il est bien entendu que l'expression : *coefficient de* x^k, *dans le produit,* signifie : *somme des produits des termes dans lesquels la somme des exposants égale* k.

égale

$$\frac{\Gamma(l+l'+1)}{\Gamma(l'+k+1)\,\Gamma(l-k+1)}.$$

Par exemple,

$$1+\frac{l}{1}\frac{l'}{1}+\frac{l(l-1)}{1.2}\frac{l'(l'-1)}{1.2}+\cdots=\frac{\Gamma(l+l'+1)}{\Gamma(l+1)\,\Gamma(l'+1)}\ (^*).$$

X. Considérons les séries :

$$y=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2+\left(\frac{1}{1\,.\,4}\right)x^4+\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 x^6+\cdots, \tag{6}$$

$$z=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2+\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 x^4+\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 x^6+\cdots: \tag{7}$$

pour $x=1$, la première se réduit au développement (L).

On trouve aisément les équations différentielles

$$xz=\left(x\frac{dy}{dx}\right)', \tag{8}$$

$$xz=\left[x(1-x^2)\frac{dz}{dx}\right]', \tag{9}$$

dans lesquelles les accents indiquent des dérivées (**). Si donc la fonction $z$ était connue, nous aurions

$$y=1+\int_0^x\frac{dx}{x}\int_0^x xz\,dx.$$

(*) Laplace avait remarqué l'équation

$$1+\left(\frac{l}{1}\right)^2+\left(\frac{l(l-1)}{1.2}\right)^2+\cdots=\frac{\Gamma(2l+1)}{[\Gamma(l+1)]^2};$$

mais sa démonstration (rapportée par Lacroix) suppose l *entier positif*.

(**) L'intégrale générale de l'équation (9) est

$$z=\mathrm{A}\int_0^1\frac{d\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\alpha^2x^2)}}+\mathrm{B}\int_0^1\frac{d\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\alpha^2+\alpha^2x^2)}}$$

(*Journal de mathématiques*, t. XIX); mais cette formule n'est pas nécessaire à l'objet que nous avons en vue.

On sait (*) que

$$z = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}};$$

d'où résulte

$$\int_0^x xzdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\int_0^x \frac{x \sin^2\varphi\, dx}{\sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi}},$$

ou

$$\int_0^z xzdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\left(1 - \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}\right),$$

puis

$$y = 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\int_0^x \frac{dx}{x}\left(1 - \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}\right). \quad (10)$$

Posant

$$x = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi},$$

j'obtiens

$$\int_0^x \frac{dx}{x}\left(1 - \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}\right) = \int_0^\theta \sin\theta\, d\theta - \int_0^\theta \frac{\sin\frac{1}{2}\theta\, d\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta},$$

ou

$$\int_0^x \frac{dx}{x}\left(1 - \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}\right) = 1 - \cos\theta + 2\,\mathcal{L}\cos\frac{1}{2}\theta.$$

Par suite,

$$y = 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\left[1 - \cos\theta + 2\,\mathcal{L}\cos\frac{1}{2}\theta\right];$$

(*) Voir, par exemple, la *Mécanique,* de Poisson, t. I, p. 346.

et enfin, par un calcul plus long que difficile,

$$y = \frac{2}{\pi}\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi} - (1-x^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}\right]. \quad (11)$$

Telle est, sous forme d'intégrale définie, la somme de la série (6). Pour $x = 1$, $y$ se réduit à $\frac{4}{\pi}$; ce qui devait être.

XI. Dans la formule (B), changeons $p$ en $m$ et $m$ en $q$ : il en résulte

$$\left.\begin{array}{l} \left[1 + \frac{m-p}{1}\frac{q}{p} + \frac{(m-p)(m-p-1)}{1\,.\,2}\frac{q(q-1)}{p(p+1)} + \cdots\right] \\ \times\left[1 - \frac{m-p}{1}\frac{q}{m} + \frac{(m-p)(m-p+1)}{1\,.\,2}\frac{q(q-1)}{m(m-1)} - \cdots\right] \\ = 1. \end{array}\right\} \quad (M)$$

Si, par exemple,

$$m = \frac{1}{2}, \quad p = 1, \quad q = \frac{1}{2};$$

$$\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4} - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6} - \cdots\right]$$
$$\times\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\cdot\frac{1\,.\,1}{1\,.\,3} + \cdots\right] = 1,$$

ou

$$\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{64} - \frac{5}{256} - \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{80} + \cdots\right) = 1.$$

XII. Écrivons ainsi la formule (A) :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{B(p, m)}{B(q, m)} = 1 + \frac{m}{1}\frac{q-p}{p} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\frac{(q-p)(q-p-1)}{p(p+1)} \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{(q-p)(q-p-1)(q-p-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots \end{array}\right\} \quad (A)$$

En y remplaçant $p$ par $q$ et $q$ par $p$, puis en combinant par multiplication, on trouve

$$\left.\begin{aligned}&\left[1+\frac{m}{1}\frac{q-p}{p}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(q-p)(q-p-1)}{p(p+1)}+\cdots\right]\\ \times&\left[1+\frac{m}{1}\frac{p-q}{q}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(p-q)(p-q-1)}{q(q+1)}+\cdots\right]=1.\end{aligned}\right\}\text{(N)}$$

Cette relation remarquable, qui n'est peut-être pas nouvelle, peut être déduite de la formule (M), par un changement de lettres. Elle donne, en particulier,

$$\left(1-3\frac{4}{9}+3\cdot\frac{4.5}{9.10}-\frac{4.5.6}{9.10.11}\right)\left(1+3\frac{4}{5}+3\cdot\frac{4.3}{5.6}+\frac{4.3.2}{5.6.7}\right)=1.$$

XIII. Soient, dans la formule (A) :

$$p=1,\quad m=i+\frac{1}{2},\quad q=i+\frac{3}{2};$$

$i$ étant un nombre entier. Le premier membre devient

$$\frac{B\left(1,\, i+\frac{1}{2}\right)}{B\left(i+\frac{3}{2},\, i+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma(i+2)}{\left[\Gamma\left(i+\frac{3}{2}\right)\right]^2}=\frac{1.2.3\ldots(i+1)}{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2i+1}{2}\right]^2}\frac{1}{\pi}$$

$$=2^{2i+2}\frac{1.2.3\ldots(i+1)}{[1.2.3\ldots(2i+1)]^2}\frac{1}{\pi};$$

et le second membre :

$$1+\left(\frac{2i+1}{2}\right)^2+\left(\frac{2i+1}{2}\cdot\frac{2i-1}{4}\right)^2+\left(\frac{2i+1}{2}\cdot\frac{2i-2}{4}\cdot\frac{2i-3}{6}\right)^2+\cdots$$

Donc

$$\frac{1}{\pi}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2i+2}\frac{[1.3.5\ldots(2i+1)]^2}{1.2.3\ldots(i+1)}\left[1+\left(\frac{2i+1}{2}\right)^2+\left(\frac{2i+1}{2}\cdot\frac{2i-1}{4}\right)^2+\cdots\right].\quad\text{(P)}$$

On a ainsi une infinité de développements de la transcendante $\frac{1}{\pi}$ : la formule (L) en donne un.

*Addition.* — (*Août* 1884.)

XIV. Si, dans la formule (A) (p. 135), on fait

$$m = \alpha, \quad q = \gamma - \alpha, \quad p = \gamma - \alpha - \beta,$$

elle se transforme en

$$\frac{B(\gamma-\alpha-\beta, \alpha)}{B(\gamma-\alpha, \alpha)} = 1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma-\alpha-\beta} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\frac{\beta(\beta-1)}{(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta+1)} + \cdots$$

En vertu du Théorème d'Euler, le premier membre est la même chose que

$$\frac{B(\gamma-\alpha-\beta, \gamma)}{B(\gamma-\alpha, \gamma-\beta)} = \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

Ainsi

$$\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} = 1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma-\alpha-\beta} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\frac{\beta(\beta-1)}{(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta+1)} + \cdots \quad (R)$$

Cette relation, dans laquelle les *arguments* sont positifs (*), a une grande analogie avec la célèbre formule de Gauss :

$$\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} = 1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} + \cdots \quad (S)$$

Il y a plus : on peut passer de l'une à l'autre, au moyen de la formule de Binet (p. 137). En effet, ce savant Géomètre l'a donnée sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{B(p-a, q)}{B(p, q)} &= 1 + \frac{aq}{p+q} + \frac{a(a+1)q(q+1)}{2(p+q)(p+q+1)} \\ &+ \frac{a(a+1)(a+2)q(q+1)(q+2)}{2.3.(p+q)(p+q+1)(p+q+2)} + \cdots (^{**}) \end{aligned}\right\} \quad (T)$$

(*) D'après les hypothèses faites sur $m$, $n$, $p$ (p. 135).

(**) *Journal de l'École polytechnique*, 27e Cahier, p. 150.

Or, si l'on suppose

$$q = \alpha, \quad a = \beta, \quad p + q = \gamma,$$

le second membre devient la série de Gauss. Quant au premier membre, il a pour valeur

$$\frac{B(\gamma - \alpha - \beta, \alpha)}{B(\gamma - \alpha, \alpha)} = \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}.$$

Ainsi, *la formule de Binet ne diffère pas de celle de Gauss*. D'ailleurs, on a vu ci-dessus (p. 156) que les relations (R), (T) se ramènent l'une à l'autre; etc.

XV. *Remarque.* — D'après ce que nous venons de rappeler, (R) est une simple transformée de (S). Néanmoins, *si la quantité* $\alpha + \beta$ *est positive*, la première formule est préférable à la seconde. Voici les motifs de cette appréciation :

1° *Lorsque* $\alpha$ *ou* $\beta$ *sont des nombres entiers*, le second membre de (R) est composé d'*un nombre limité de termes*, le second membre de (S) est une série.

2° *La série* (R) *est plus convergente que la série* (S).

Soient, en effet, $u_n$, $U_n$ les termes généraux des deux séries; savoir :

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)}{1.2\ldots(n-1)} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-2)},$$

$$U_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)}{1.2\ldots(n-1)} \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+2)}{(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta+1)\ldots(\gamma-\alpha-\beta+n-2)}.$$

De là résultent :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha+n-1}{n} \frac{\beta+n-1}{\gamma+n-1},$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\alpha+n-1}{n} \frac{\beta-n+1}{\gamma-\alpha-\beta+n-1}.$$

Ces fractions tendent vers l'unité. Donc la proposition énoncée sera établie si nous vérifions que, *à partir d'une certaine valeur de* n, *on a constamment*

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Or, au moyen d'un calcul fort simple, cette inégalité se transforme en

$$(\alpha + \beta)\left[(n-1)^2 + (2\gamma - \alpha - \beta)(n-1) - \alpha\beta\right] > 0.$$

XVI. *Décomposition d'une fraction.* — Si $\alpha$ est un *nombre entier*, égal ou inférieur à $\beta$, on a

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} = (\gamma-1)(\gamma-2)\dots(\gamma-\alpha),$$

$$\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)} = \frac{1}{(\gamma-\beta-1)(\gamma-\beta-2)\dots(\gamma-\alpha-\beta)};$$

et l'égalité (R) se réduit à

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)\dots(\gamma-\alpha)}{(\gamma-\beta-1)(\gamma-\beta-2)\dots(\gamma-\beta-\alpha)} = \\ &1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma-\alpha-\beta} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\,.\,2}\frac{\beta(\beta-1)}{(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta+1)} + \dots \\ &+ \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-\alpha+1)}{(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta+1)\dots(\gamma-\beta-1)}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(U)}$$

Ainsi, *la fraction rationnelle formant le premier membre est décomposée en* 1, *plus la somme de* $\alpha$ *fractions rationnelles.*

XVII. *Décomposition d'un produit.* — Remplaçons $\gamma$ par $x$, $\alpha$ par $n$, $\beta$ par $a$, et chassons les dénominateurs; nous aurons

$$\left.\begin{aligned} &(x-1)(x-2)\dots(x-n) = \\ &(x-a-1)\dots(x-a-n) + \frac{n}{1}a(x-a-1)\dots(x-a-n+1) \\ &+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a(a-1)(x-a-1)\dots(x-a-n+2) + \dots \\ &+ a(a-1)\dots(a-n+1). \end{aligned}\right\} \quad \text{(V)}$$

XVIII. *Remarques.* — I. Dans cette identité, n *est un nombre entier,* a *est une quantité quelconque.*

II. *Le second membre est indépendant de* a.

III. La formule (V) est analogue à celle du *binôme des factorielles,* mais plus générale que celle-ci.

IV. Si l'on désigne par $f(x)$ le second membre, les racines de $f(x) = 0$ sont 1, 2, 3, ... $n$.

## XXXVIII. — Théorème d'analyse. (1858.)

*Soient*

$$f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots, \qquad (1)$$

$$\varphi(x) = b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots \qquad (2)$$

*deux séries convergentes. Je dis que*

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\,\varphi(x)\,dx \ (^*). \qquad (3)$$

En effet,

$$f(x)\,\varphi(x) = \sum a_n b_{n'} \cos nx \cos n'x + \sum a_n b_n \cos^2 nx;$$

donc

$$\int_0^\pi f(x)\varphi(x)dx = \sum a_n b_n \int_0^\pi \cos nx \cos n'x dx + \sum a_n b_n \int_0^\pi \cos^2 nx dx;$$

(*) Ce théorème, énoncé d'une manière un peu différente, est connu sous le nom de *Formule de Parseval.* Mais la démonstration donnée par ce Géomètre est inadmissible, car elle suppose l'emploi des deux séries

$$a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + \cdots,$$

$$b_1 + b_2 t^{-1} + b_3 t^{-2} + \cdots;$$

et, si l'une est convergente, l'autre est ordinairement divergente.

ou, d'après les relations

$$\int_0^\pi \cos nx \cos n'x dx = 0, \quad \int_0^\pi \cos^2 nx dx = \frac{\pi}{2}:$$

$$\int_0^\pi f(x)\varphi(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\sum a_n b_n.$$

*Application.* — Si l'on part des formules connues :

$$\frac{1}{2a^2}\left[a\pi\frac{e^{a(\pi-x)}+e^{-a(\pi-x)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}-1\right]=\frac{\cos x}{1+a^2}+\frac{\cos 2x}{4+a^2}+\frac{\cos 3x}{9+a^2}+\cdots,$$

$$\frac{1}{2a^2}\left[1-a\pi\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}\right] = \frac{\cos x}{1+a^2}-\frac{\cos 2x}{4+a^2}+\frac{\cos 3x}{9+a^3}-\cdots (^*);$$

on a

$$\frac{1}{(1+a^2)^2}-\frac{1}{(4+a^2)^2}+\frac{1}{(9+a^2)^2}-\cdots$$

$$=\frac{1}{2\pi a^4}\int_0^\pi\left[a\pi\frac{e^{a(\pi-x)}+e^{-a(\pi-x)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}-1\right]\left[1-a\pi\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{a}-e^{-a\pi}}\right]dx.$$

Le produit des deux binômes est

$$\frac{a^2\pi^2}{(e^{a\pi}-e^{-a\pi})^2}\left[e^{a\pi}+e^{-a\pi}+e^{a(\pi-2x)}+e^{-a(\pi-2c)}\right]$$

$$-\frac{a\pi}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}\left[e^{a(\pi-x)}+e^{-a(\pi-x)}+e^{ax}+e^{-ax}\right]+1.$$

De plus :

$$\int_0^\pi e^{ax}dx=\frac{e^{a\pi}-1}{a}, \quad \int_0^\pi e^{-ax}dx=\frac{1-e^{-a\pi}}{a},$$

$$\int_0^\pi e^{2ax}dx=\frac{e^{2a\pi}-1}{2a}, \quad \int_0^\pi e^{-2ax}dx=\frac{1-e^{-2a\pi}}{2a}.$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 115.

Si donc nous appelons A l'intégrale définie cherchée,

$$A = \frac{a^2\pi^2}{(e^{a\pi} - e^{-a\pi})^2}\left[\pi(e^{a\pi} + e^{-a\pi}) + e^{a\pi}\frac{1 - e^{-2a\pi}}{2a} + e^{-a\pi}\frac{e^{2a\pi} - 1}{2a}\right]$$

$$- \frac{\pi}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}\left[e^{a\pi}(1 - e^{-a\pi}) + e^{-a\pi}(e^{a\pi} - 1) + e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right] + \pi$$

$$= \frac{a^2\pi^2}{(e^{a\pi} - e^{-a\pi})^2}\left[\pi(e^{a\pi} + e^{-a\pi}) + \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a}\right] - \pi.$$

Par suite,

$$\frac{1}{(1 + a^2)^2} - \frac{1}{(4 + a^2)^2} + \frac{1}{(9 + a^2)^2} - \cdots$$

$$= \frac{(e^{a\pi} - e^{-a\pi})^2 - a\pi(e^{a\pi} - e^{-a\pi}) - a^2\pi^2(e^{a\pi} + e^{-a\pi})}{2a^4(e^{a\pi} - e^{-a\pi})^2}.$$

Lorsque $a = 0$, le second membre se réduit à $\frac{7}{720}\pi^4$; donc

$$\frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{7}{720}\pi^4;$$

résultat connu.

*Addition.* — (1884.)

Dans le *Traité du Calcul des probabilités*, de M. H. *Laurent*, on lit (*) ce qui suit :

« Si l'on a

$$\varphi\left(e^{t\sqrt{-1}}\right) = a_0 + a_1 e^{t\sqrt{-1}} + a_2 e^{2t\sqrt{-1}} + \cdots,$$

$$\psi\left(e^{-t\sqrt{-1}}\right) = b_0 + b_1 e^{-t\sqrt{-1}} + b_2 e^{-2t\sqrt{-1}} + \cdots,$$

» en faisant le produit..., on trouve

$$\text{(A)}\quad \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}\varphi\left(e^{t\sqrt{-1}}\right)\psi\left(e^{-t\sqrt{-1}}\right)dt = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots$$

» Cette formule permet, ..., de trouver la valeur de la série dont

(*) Page 7.

» le terme général est $a_u b_u$, quand on connaît les valeurs des
» séries (supposées convergentes, lorsque le module de $x$ est 1),
» dont les termes généraux sont $a_u x_u$ et $b_u x_u$; et *c'est en cela*
» *que consiste* le théorème de Parseval. »

*Marc-Antoine Parseval* (*) dit tout autre chose (*Mémoires des Savants étrangers,* t. I, p. 639) :

« Si l'on a donc deux suites

$$A + Bf + Cf^2 + Ff^3 + \text{etc.} = T$$

$$a + b\frac{1}{f} + C\frac{1}{f^2} + f\frac{1}{f^3} + \text{etc.} = T'$$

» dont on a les deux sommes respectives T, T', on aura la somme
» de la suite

$$Aa + Bb + Cc + Ff + \text{etc.} = V$$

» en faisant l'opération suivante...... Je dis que l'on aura

$$V = \frac{1}{u}\int \frac{V' + V''}{2}\,du$$

» u *étant fait égal à* 180° *après l'intégration* »

Il n'est question, ni de *convergence,* ni de *module,* chose peu étonnante en l'An VII. L'*exemple* choisi par l'Auteur est fort curieux :

« On a, comme on sait,

$$1 + xf + x^2 f^2 + a^3 f^3 + \text{etc.} = \frac{1}{1 - xf},$$

$$1 + x\frac{1}{f} + x^2\frac{1}{f^2} + x^3\frac{1}{f^3} + \text{etc.} = \frac{1}{1 - \frac{x}{f}}.$$

» Je demande la somme de la suite

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \text{etc.} »$$

Si l'on suppose $x = f < 1$, la seconde série devient

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdot\cdot,$$

et tout l'édifice s'écroule!

(*) Dans la plupart des *Biographies* on ne trouve aucun renseignement sur ce Géomètre.

## XXXIX. — Sur la série harmonique (1856) (*)

I. On sait que

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\mathcal{L}\,n-\varphi(n)+\mathrm{C}, \tag{1}$$

$\varphi(n)$ s'annulant quand $n$ devient infini, et C représentant une constante dont la valeur, calculée par Euler et Mascheroni, est

$$\mathrm{C}=0{,}577\,215\,664\,901\,532\,860\,\ldots$$

En remplaçant $\mathcal{L}\,n$ par

$$\mathcal{L}\frac{n}{n-1}+\mathcal{L}\frac{n-1}{n-2}+\cdots+\mathcal{L}\frac{1}{2}+\mathcal{L}\,1,$$

on a

$$\varphi(n)=\mathrm{C}-1+\left(\mathcal{L}\frac{2}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\mathcal{L}\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\mathcal{L}\frac{n}{n-1}-\frac{1}{n}\right). \tag{2}$$

Soit

$$u_n=\mathcal{L}\frac{n}{n-1}-\frac{1}{n};$$

d'où

$$u_n=\int_0^{\infty}\frac{d\alpha}{\alpha}e^{-n\alpha}(e^{\alpha}-1-\alpha),$$

et

$$\varphi(n)=\mathrm{C}-1+\int_0^{\infty}\frac{d\alpha}{\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}\right)(e^{-\alpha}-e^{-n\alpha}). \tag{3}$$

Cela posé, en appliquant mot à mot la méthode employée par M. Liouville, dans sa *Note sur l'évaluation du produit* $1.2.3\ldots x$, on trouve

$$\varphi(n)>-\frac{1}{2n},\quad \varphi(n)<-\frac{1}{2n}+\frac{1}{12n^2}; \tag{4}$$

(*) Relativement à la série harmonique, on peut consulter les Mémoires intitulés : *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet; Recherches sur la constante* G, etc.

et, par conséquent,

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\mathcal{L}\,n+\frac{1}{2n}+\mathrm{C}, \tag{A}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\mathcal{L}\,n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\mathrm{C}. \tag{B}$$

Les formules (A), (B) donnent ainsi deux limites entre lesquelles est comprise la somme $S_n$ des $n$ premiers termes de la série harmonique. Si l'on fait $n = 1\,000$, on trouve

$$S_{1000} < 7{,}485\,470\,95, \quad S_{1000} > 7{,}485\,470\,86.$$

Ce résultat est d'accord avec celui que donne Lacroix.

II. La série dont le terme général est $u_n$ est convergente (*). D'après le § I, elle a pour *somme*

$$1 - \mathrm{C} = 0{,}422\,784\,335\,098\,476\,139\ldots$$

III. La série harmonique est très peu divergente, puisque la somme de ses mille premiers termes est à peu près 7,5 ; mais la série dont le terme général est $\frac{1}{n\mathcal{L}n}$ diverge encore bien plus lentement. En effet, si l'on suppose

$$S_{n-1} = \frac{1}{2\,\mathcal{L}2}+\frac{1}{3\,\mathcal{L}3}+\cdots+\frac{1}{n\,\mathcal{L}n}, \tag{5}$$

et

$$n = 2^p,$$

on trouve :

$$S_{n-1} < \frac{1}{\mathcal{L}.2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right),$$

$$S_{n-1} > \frac{1}{2\,\mathcal{L}2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}\right);$$

ou, par ce qui précède :

$$S_{n-1} < \frac{1}{\mathcal{L}2}\left[\mathcal{L}(p-1)+\frac{1}{2(p-1)}+\mathrm{C}\right], \tag{C}$$

$$S_{n-1} > \frac{1}{2\,\mathcal{L}2}\left[\mathcal{L}p+\frac{1}{2p}-\frac{1}{12p^2}+\mathrm{C}\right]. \tag{D}$$

(*) *Comptes rendus*, t. XLIII, p. 627.

Soit

$$p = 1\,000,$$

auquel cas

$$n = 2^{1000},$$

nombre de *trois cent deux chiffres.* Les formules (C), (D) donnent

$$S_{n-1} > 5{,}4, \quad S_{n-1} < 10{,}8.$$

Ainsi, bien que la série considérée soit divergente, la somme de ses premiers termes, jusqu'à un rang marqué par un nombre de 302 chiffres, est *inférieure* à 11. On arriverait à des résultats encore plus curieux si l'on considérait la série divergente

$$\frac{1}{2\,\ell\,2\,(\ell\,\ell\,2)} + \frac{1}{3\,\ell\,3\,(\ell\,\ell\,3)} + \cdots + \frac{1}{n\,\ell\,n\,(\ell\,\ell\,n)} + \cdots$$

IV. Écrivons ainsi les formules (A), (B) :

$$\ell\,n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + C < S_n < \ell\,n + \frac{1}{2n} + C.$$

Nous aurons, en changeant $n$ en $2n$ :

$$\ell\,(2n) + \frac{1}{4n} - \frac{1}{48n^2} + C < S_{2n} < \ell\,(2n) + \frac{1}{4n} + C;$$

et, par conséquent :

$$\ell\,2 - \frac{1}{4n} - \frac{1}{48n^2} < S_{2n} - S_n < \ell\,2 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{12n^2}.$$

Ainsi, la somme des $n$ termes qui, dans la série harmonique, suivent les $n$ premiers, est comprise entre

$$\ell\,2 - \frac{1}{4n} - \frac{1}{48n^2} \quad \text{et} \quad \ell\,2 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{12n^2}.$$

De là résulte

$$\lim\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ell\,2 \ (*).$$

(*) Voyez, sur ce point, les tomes XVII et XVIII des *Nouvelles Annales de mathématiques,* et aussi le *Traité élémentaire des séries.*

*Addition.* — (*Juillet* 1872.)

La dernière formule est une conséquence de *l'identité*, presque évidente :

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{2n} \; (*).$$

**XL. — Sur une fonction homogène entière. (1858)** (**).

Plusieurs Géomètres, parmi lesquels il suffit de citer MM. Cauchy, Bertrand et Serret, ont indiqué divers procédés qui permettent d'évaluer la fonction

$$\frac{a^{n+p-1}}{f'(a)}+\frac{b^{n+p-1}}{f'(b)}+\dots+\frac{l^{n+p-1}}{f'(l)}$$

au moyen des coefficients de l'équation $f(x)=0$, dont $a$, $b$, $c$, ..., $k$, $l$ sont les $n$ racines (supposées inégales); mais personne, que je sache, n'a fait attention à l'identité de cette fonction symétrique *fractionnaire* avec la fonction homogène *entière*, du degré $p$ :

$$\mathrm{H}_{n,p}=\sum a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\dots l^{\lambda}.$$

Cette identité résulte de la proposition suivante :

Théorème. — *Soient* a, b, c, ..., k, l *des quantités quelconques, inégales; et soit, pour abréger,*

$$f(x)=(x-a)(x-b)\dots(x-k)(x-l).$$

*La fonction, entière et homogène, des* n *lettres* a, b, c, ... k, l, *dont* p *est le degré, est égale à la somme des valeurs que prend la*

(*) *Note sur une formule de M. Botesu* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique).

(**) Cette Note a paru dans les *Comptes rendus*.

*fraction* $\frac{x^{n+p-1}}{f'(x)}$, *quand on y remplace* x *par* a, b, c, ... k, l. *En d'autres termes,*

$$H_{n,p} = \sum a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots l^{\lambda} = \frac{a^{n+p-1}}{f'(a)} + \frac{b^{n+p-1}}{f'(b)} + \cdots + \frac{l^{n+p-1}}{f'(l)}, \quad (1)$$

*les exposants* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, *entiers et non négatifs, étant déterminés par l'équation*

$$\alpha + \beta + \gamma \cdot \cdot + \lambda = p. \quad (2)$$

Pour démontrer l'équation (1), qui devient identique si $n$ égale 1 ou 2, il suffit de faire attention que

$$H_{n,p} = H_{n-1,p} + lH_{n-1,p-1} + l^2 H_{n-1,p-2} + \cdots + l^p H_{n-1,0},$$

et d'avoir égard aux relations connues :

$$H_{n,0} = \frac{a^{n-1}}{f'(a)} + \frac{b^{n-1}}{f'(b)} + \cdots + \frac{l^{n-1}}{f'(l)} = 1,$$

$$\frac{a^{n-2}}{f'(a)} + \frac{b^{n-2}}{f'(b)} + \cdots + \frac{l^{n-2}}{f'(l)} = 0.$$

Corollaire. — *Si l'on multiplie la fonction* $H_{n,p}$, *qui renferme* $C_{p+n-1,n-1}$ *termes, par*

$$P = (a-b)(a-c)\ldots(a-l) \times (b-c)(b-d)\ldots(b-l) \times \cdots \times (k-l),$$

*le produit contiendra seulement* n *termes.*

Par exemple,

$$(a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + abc)$$
$$\times (a-b)(a-c)(b-c) = a^5(b-c) + b^5(c-a) + c^5(a-b).$$

*Remarques.* — I. Le dernier énoncé suppose que l'on ne développe pas les produits qui multiplient $a^{n+p-1}$, $b^{n+p-1}$, $c^{n+p-1}$, ..., $l^{n+p-1}$. Dans le cas contraire, la fonction $H_{n,p}$, P prend la forme

$$\sum a^{n+p-1} \sum b^{n-2} c^{n-3} \ldots k^1 l^0,$$

d'après un théorème de Vandermonde; et alors elle contient un nombre de termes égal à $1 . 2 . 3 \ldots n$.

II. Si l'on divise $x^{n+p-1}$ par $f(x)$, et que l'on désigne par $\varphi(x)$ le reste, on a

$$\varphi(x) = f(x)\left[\frac{a^{n+p-1}}{(x-a)f'(a)} + \cdots + \frac{l^{n+p-1}}{(x-l)f'(l)}\right] (*);$$

donc le premier terme de ce reste est

$$\frac{a^{n+p-1}}{f'(a)} + \frac{b^{n+p-1}}{f'(b)} + \cdots + \frac{l^{n+p-1}}{f'(l)} = \mathrm{H}_{n,p}.$$

## XLI. — Sur les surfaces cyclotomiques. (1859) (**).

I. Définition. — *La surface cyclotomique est engendrée par une circonférence de rayon variable, dont le centre* O *est fixe et dont le plan passe par une droite fixe* Oz (***).

II. *Équation de la surface.* — $Ox$, $Oy$ étant deux axes perpendiculaires à $Oz$, soit M un point quelconque de la surface, situé sur le *méridien* GMH (iv). Posons

$$\mathrm{OM} = u, \quad \mathrm{MOG} = \theta, \quad \mathrm{GO}x = \omega.$$

Il est clair que $u$ est une fonction de $\omega$; donc nous pouvons prendre, pour équation de la surface, soit,

$$u = f(\omega), \tag{1}$$

soit

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

(*) En général, le reste de la division de $F(x)$ par $f(x)$ est

$$\varphi(x) = f(x)\left[\frac{F(a)}{(x-a)f'(a)} + \cdots + \frac{F(l)}{(x-l)f'(l)}\right].$$

(**) Cette dénomination, très bien choisie, m'a été proposée par M. de Saint-Venant.

(***) Le lecteur est prié de faire les figures.

(iv) Le point G est supposé dans le plan $xOy$, et le point H, sur $Oz$ : GMH est donc un quadrans du cercle générateur.

III. *Normale.* — Il est visible que la droite MN, normale en M à la surface, rencontre l'*axe* OI du méridien GMH : cet axe est d'ailleurs la perpendiculaire à OG, située dans le plan $xOy$.

IV. *Trajectoires orthogonales des sections méridiennes.* — Considérons le cône de révolution engendré par OM tournant autour de $Oz$, et projetons la figure sur le plan méridien GMH. La tangente MT, à cette section, est normale au cône. D'un autre côté, la normale à la cyclotomique est projetée suivant MO (III). D'après un théorème connu, ces deux droites sont perpendiculaires entre elles ; donc *le cône coupe orthogonalement la surface.* La tangente à l'intersection PMQ est perpendiculaire à MT, ou normale à GMH ; donc *les trajectoires orthogonales des sections méridiennes sont les sections de la cyclotomique par des cônes de révolution autour de* Oz (*).

V. *Équation des trajectoires.* — L'équation (1), qui représente la surface, représente aussi la *directrice,* supposée située dans le plan $xy$. Si nous appelons $r$ la projection de OM sur ce même plan, nous aurons

$$r = u \cos\theta,$$

ou

$$r = \cos\theta\, f(\omega). \tag{3}$$

Par conséquent, *les trajectoires orthogonales des sections méridiennes se projettent, sur le plan de la directrice, suivant des courbes semblables à celle-ci.*

VI. *Relations entre les coordonnées d'un point.* — On a

$$x = u\cos\theta\cos\omega, \quad y = u\cos\theta\sin\omega, \quad z = u\sin\theta. \tag{4}$$

On déduit, de ces formules :

$$\frac{dx}{d\theta} = -u\sin\theta\cos\omega, \quad \frac{dy}{d\theta} = -u\sin\theta\sin\omega, \quad \frac{dz}{d\theta} = u\cos\theta, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\omega} = \cos\theta\left(\frac{du}{d\omega}\cos\omega - u\sin\omega\right), \quad \frac{dy}{d\omega} = \cos\theta\left(\frac{du}{d\omega}\sin\omega + u\cos\omega\right),\\ \frac{dz}{d\omega} = \frac{du}{d\omega}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(*) Démonstration nouvelle (février 1867).

VII. *Élément de la génératrice.* — Il a pour valeur

$$ds = u\,d\theta. \tag{7}$$

VIII. *Élément de la trajectoire.* — En désignant par $\sigma$ la longueur de l'arc PM, comptée à partir d'une certaine origine, on a, par les relations (6) :

$$d\sigma = \sqrt{du^2 + u^2 \cos^2\theta\, d\omega^2} \text{ (*)} \tag{8}$$

IX. *Angle du rayon vecteur avec la tangente à la trajectoire.* — Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles formés par cette tangente avec les trois axes; soit $\lambda$ son inclinaison sur le rayon OM. On a

$$\cos\lambda = \frac{x}{u}\cos\alpha + \frac{y}{u}\cos\beta + \frac{z}{u}\cos\gamma.$$

Mais

$$\cos\alpha = \frac{dx}{d\omega} : \frac{d\sigma}{d\omega}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{d\omega} : \frac{d\sigma}{d\omega}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{d\omega} : \frac{d\sigma}{d\omega};$$

donc, à cause des valeurs (4) et (6) :

$$\cos\lambda = \frac{du}{d\omega} : \frac{d\sigma}{d\omega},$$

ou, avec la notation de Lagrange,

$$\cos\lambda = \frac{u'}{\sigma'}; \tag{9}$$

et, par conséquent,

$$\sin\lambda = \frac{u\cos\theta}{\sigma'}. \tag{10}$$

X. *Distance de l'origine au plan tangent.* — Il est visible qu'elle ne diffère pas de la distance $h$ comprise entre l'origine et la tangente à la trajectoire; donc

$$h = u\sin\lambda,$$

ou

$$h = \frac{u^2\cos\theta}{\sigma'}. \tag{11}$$

(*) Cette formule devient évidente, sans calcul, si l'on considère le développement du cône de révolution.

XI. *Aire de la surface.* — On peut prendre, pour élément de la surface, le rectangle infiniment petit déterminé par deux sections méridiennes et deux trajectoires. Ainsi

$$dA = ds d\sigma,$$

ou

$$dA = u d\theta d\omega \sqrt{u'^2 + u^2 \cos^2 \theta}. \tag{12}$$

L'aire totale est donc exprimée par la formule

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} u d\omega \sqrt{u'^2 + u^2 \cos^2 \theta}. \tag{13}$$

XII. *Volume.* — Le corps limité par la surface cyclotomique se compose de pyramides infiniment petites, ayant chacune pour base un élément de la surface, et pour hauteur, la perpendiculaire $h$. Par conséquent,

$$dV = \frac{1}{3} u^3 \cos \theta d\theta d\omega,$$

$$V = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} u^3 d\omega,$$

ou, plus simplement,

$$V = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} u^3 d\omega. \tag{14}$$

XIII. *Remarque.* — D'après la dernière formule, l'*onglet* compris entre deux demi-méridiens consécutifs a pour volume $\frac{2}{3} u^3 d\omega$. Cette expression représente aussi le volume de l'onglet appartenant à la sphère dont le rayon serait $u$. En effet, la différence entre ces deux éléments est infiniment petite par rapport à l'un et à l'autre.

XIV. *Application.* — Supposons que la directrice soit une circonférence, située dans le plan des $xy$, et passant par l'origine. Si nous appelons $a$ le diamètre, l'équation (1) devient

$$u = a \cos \omega, \tag{15}$$

et l'équation (2) :

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2) = a^2x^2. \tag{16}$$

Dans ce cas, la surface cyclotomique est donc du quatrième degré. Elle se compose de *deux nappes fermées, symétriques par rapport à la droite* Oz, *ligne de contact mutuel* (*).

Le volume de cette *cyclotomique circulaire* est, par la formule (14) :

$$V = \frac{2}{3} a^3 \int_0^{2\pi} \cos^3 \omega d\omega,$$

ou plutôt

$$V = \frac{8}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \omega d\omega \text{ (**)};$$

et enfin, par un calcul très simple,

$$V = \frac{16}{9} a^3. \tag{17}$$

Ainsi, chacune des *doubles-cornes* dont se compose le corps dont il s'agit est les $\frac{8}{9}$ du cube ayant $a$ pour arête.

XV. La formule (13) devient

$$A = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega d\omega \sqrt{\sin^2 \omega + \cos^2 \omega \cos^2 \theta},$$

ou

$$A = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega d\omega \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \omega}. \tag{18}$$

(*) Jugeant qu'il ne serait pas facile, au moyen d'une figure, de représenter convenablement cette singulière surface, M. de Saint-Venant a eu l'obligeance de m'en faire exécuter un modèle.

(**) La trace de la surface, sur le plan $xy$, a pour équation

$$u = \pm a \cos \omega;$$

mais, si l'on adoptait la double valeur de $u$, on trouverait $V = 0$. On doit donc chercher le volume limité par l'une des nappes, puis doubler le résultat.

Pour réduire celle-ci aux quadratures, il suffit de poser

$$\sin\omega = \cot\theta \operatorname{tg}\varphi;$$

d'où

$$A = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \int_0^{\theta} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

En effet,

$$\int_0^{\theta} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \mathcal{L}.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right];$$

donc

$$A = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\mathcal{L}.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right],$$

ou

$$A = 2\pi a^2 + 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta\, \mathcal{L}.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right). \tag{19}$$

Si l'on fait $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = t$, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta\, \mathcal{L}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \int_0^1 \frac{(1-t^2)^2\, dt}{(1+t^2)^2\, t}\mathcal{L}\left(\frac{1+t}{1-t}\right);$$

ou encore, en remplaçant $\frac{1-t}{1+t}$ par $\beta$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta\, \mathcal{L}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = -8\int_0^1 \frac{\beta^2 d\beta}{(1+\beta^2)^2(1-\beta^2)}\mathcal{L}\beta.$$

La substitution dans la formule (19) donne enfin

$$A = 2\pi a^2 - 32a^2 \int_0^1 \frac{\beta^2 d\beta}{(1+\beta^2)^2(1-\beta^2)}\mathcal{L}\beta. \tag{20}$$

## *Addition.* — (*Février* 1867.)

**XVI.** ***Détermination d'une intégrale définie.*** — Soient

$$P = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2(1-x^2)}\mathcal{L}x, \quad Q = \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2(1-x^2)};$$

et, par conséquent,

$$P = \left[Q \, \mathcal{l} x\right]_0^1 - \int_0^1 Q \frac{dx}{x}. \tag{21}$$

On a, identiquement,

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2(1-x^2)} = \frac{1}{8}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{8}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)^2};$$

donc

$$Q = \frac{1}{8}\mathcal{l}\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{4}\, arc\,\mathrm{tg}\, x - \frac{1}{2}\int_0 \frac{dx}{(1+x^2)^2};$$

puis, comme on peut le vérifier,

$$Q = \frac{1}{8}\mathcal{l}\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{4}\frac{x}{1+x^2}.$$

Par conséquent,

$$Q\,\mathcal{l}x = \frac{1}{8}\mathcal{l}x\,\mathcal{l}(1+x) - \frac{1}{8}\mathcal{l}x\,\mathcal{l}(1-x) - \frac{1}{4}\frac{x}{1+x}\mathcal{l}x. \tag{22}$$

$$\int_0^1 Q\frac{dx}{x} = \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{dx}{x}\mathcal{l}\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

ou

$$\int_0^1 Q\frac{dx}{x} = \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{dx}{x}\mathcal{l}\frac{1+x}{1-x} - \frac{\pi}{16}.$$

En développant $\mathcal{l}\frac{1+x}{1-x}$, on trouve aisément

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}\mathcal{l}\frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi^2}{4};$$

donc

$$\int_0^1 Q\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{16}. \tag{23}$$

Il reste à déterminer la différence des valeurs que prend la fonction $Q\,\mathcal{l}x$ pour $x = 1$ et pour $x = 0$.

Les termes $\mathcal{l}x\,\mathcal{l}(1+x)$ et $\frac{x}{x+1}\mathcal{l}x$, nuls lorsque $x = 1$, s'annulent encore avec $x$ : en effet, $x\,\mathcal{l}x = 0$ pour $x = 0$. Quant au terme $\mathcal{l}x\,\mathcal{l}(1-x)$, je dis qu'il est nul aussi aux deux limites : comme il est symétrique par rapport à $x$ et $1-x$, il suffit de vérifier qu'il s'annule avec $x$.

Or, si l'on fait $x = e^{-z}$, on a

$$\mathcal{L} x \mathcal{L}(1-x) = -z \mathcal{L}(1-e^{-z}) = z \mathcal{L}\left(1 + \frac{1}{e^z - 1}\right) = \theta \frac{z}{e^z - 1},$$

$\theta$ étant compris entre 0 et 1. Lorsque $z$ augmente indéfiniment, la fraction tend vers zéro; etc.

En résumé, la formule (21) se réduit à

$$P = -\int_0^1 Q \frac{dx}{x},$$

ou

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2(1-x^2)} \mathcal{L} x = \frac{\pi}{16} - \frac{\pi^2}{32}; \tag{24}$$

et, en conséquence,

$$A = \pi^2 a^2. \tag{25}$$

XVII. *Autre intégrale.* — D'après les formules (19) et (25) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} d\theta \mathcal{L} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) (*). \tag{26}$$

XVIII. *Remarque.* — Si nous écrivons ainsi la formule (18) :

$$A = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1 - \cos^2\omega \sin^2\theta},$$

et si nous employons la notation de Legendre, nous aurons ce résultat curieux :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} E^1(\cos\omega)\cos\omega d\omega = \frac{\pi^2}{8}\cdot \tag{27}$$

XIX. *Cyclotomique à directrice rectiligne.* — Si la surface coupe le plan $xy$ suivant une ligne droite, les trajectoires ortho-

(*) Cette valeur résulte aussi de deux intégrales rapportées dans les *Tables* de M. Bierens de Haan.

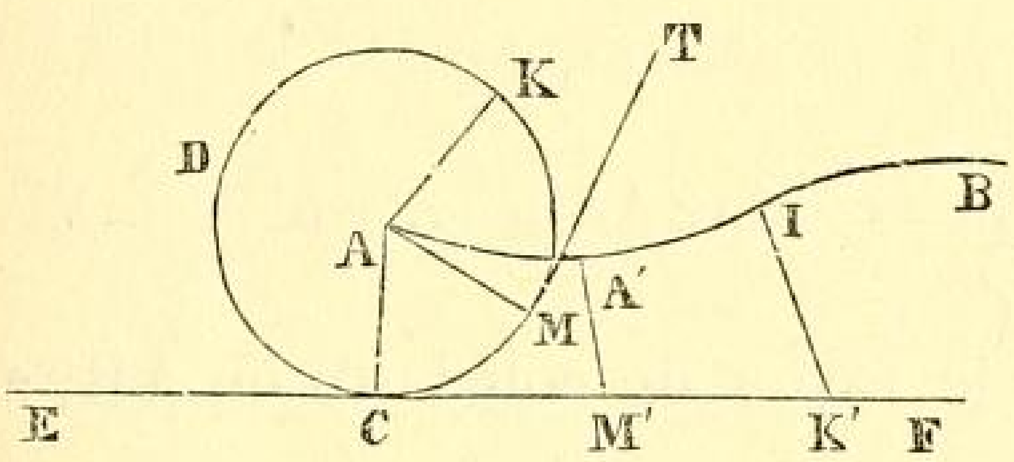
gonales des sections méridiennes se projettent, sur le même plan, suivant des parallèles à cette droite (§ V). Conséquemment, *ces trajectoires sont des hyperboles.*

XX. *Remarque.* — Les deux surfaces que nous venons de prendre comme exemples sont *réciproques* l'une de l'autre. En effet, leurs équations sont

$$u = \frac{a}{\cos\omega}, \quad u_1 = a\cos\omega.$$

## XLII. — Sur la théorie des roulettes. (1858) (*).

I. Soit une courbe DCM, roulant sur une droite fixe EF. Pendant le mouvement, un point quelconque A, invariablement lié à la courbe roulante, décrit une *roulette* AA'B. On sait que, pour tracer cette courbe par points, il suffit de construire la tangente MT en un point quelconque M de DC, et de prendre




$$CM' = arc\,CM, \quad FM'A' = TMA, \quad M'A' = MA :$$

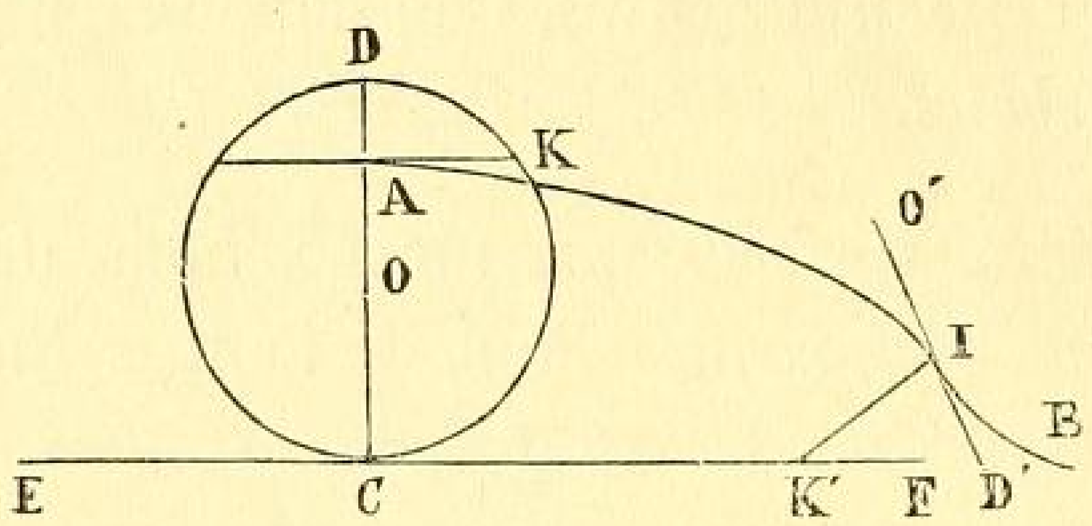
A' est la nouvelle position du point A. De plus, M'A' est la normale, en A', à la roulette.

Cela posé, au point d'inflexion I de cette courbe, l'angle A'M'F devient maximum ou minimum; donc il en est de même pour son égal AMT. Ainsi :

*Pour trouver le point d'inflexion* I *de la roulette décrite par le point* A, *cherchez, sur la courbe roulante* DCM, *le point* K *pour lequel* AMF *est maximum ou minimum :* I *correspond à* K.

(*) Cette Note peut être considérée comme faisant suite à celle qui a paru dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* (t. XV, p. 102).

II. Dans le cas où la courbe roulante est une circonférence O, le point K, comme on le voit aisément, est situé sur la parallèle à EF, menée par le point A. Par suite, la tangente en I est la nouvelle position D′O′ du rayon DO.




III. Si le point A se déplace sur OD, le point d'inflexion I se déplace aussi : *le lieu de ce point est l'enveloppe du diamètre* CD, *c'est-à-dire la cycloïde décrite par le point* C, *considéré comme appartenant au cercle dont* CO *serait le diamètre* (*). *Cette courbe enveloppe les cycloïdes engendrées par tous les points de* CD.

IV. Soient

$$\mathrm{AM} = u, \quad \mathrm{CAM} = \omega, \quad arc\,\mathrm{CM} = s, \quad arc\,\mathrm{AA}' = \sigma, \quad \mathrm{AMT} = \mathrm{V}.$$

Représentons encore par $\rho$ le rayon de courbure de AB, au point A′. On a (**)

$$ds \cos \mathrm{V} = du, \quad ds \sin \mathrm{V} = u\,d\omega = \left(1 + \frac{u}{\rho}\right) ds,$$

$$\operatorname{tg} \mathrm{V} = \frac{u\,d\omega}{\rho}, \quad \frac{d\sigma}{\rho} = d\mathrm{V}.$$

De là résulte

$$d\sigma = u(d\omega - d\mathrm{V}).$$

Or,

$$\mathrm{V} = arc\,\operatorname{tg}\frac{u}{u'};$$

donc

$$d\mathrm{V} = \frac{u'^2 - uu''}{u^2 + u'^2}\,d\omega, \tag{1}$$

(*) *Géométrie descriptive de Leroy*, p. 391.

(**) Voir la Note citée.

puis

$$d\sigma = u^2 \frac{u + u''}{u^2 + u'^2} d\omega, \tag{2}$$

$$\rho = u^2 \frac{u + u''}{u'^2 - uu''}. \tag{3}$$

V. Soit A l'aire de la figure CAA'M'. A cause de

$$A'M' = AM = u, \quad A'M'F = AMT = V,$$

on a

$$dA = \frac{1}{2}\left[(\rho + u)^2 - \rho^2\right] dV;$$

ou, par les formules (1), (3) :

$$dA = \frac{1}{2} u^2 \frac{2u^2 + u'^2 + u''}{u^2 + u'^2} d\omega. \tag{4}$$

La fraction contenue dans le second membre égale

$$2 - \frac{u'^2 - uu''}{u^2 + u'^2};$$

donc

$$dA = u^2 d\omega - \frac{1}{2} u^2 dV. \tag{5}$$

Par conséquent, si l'on fait

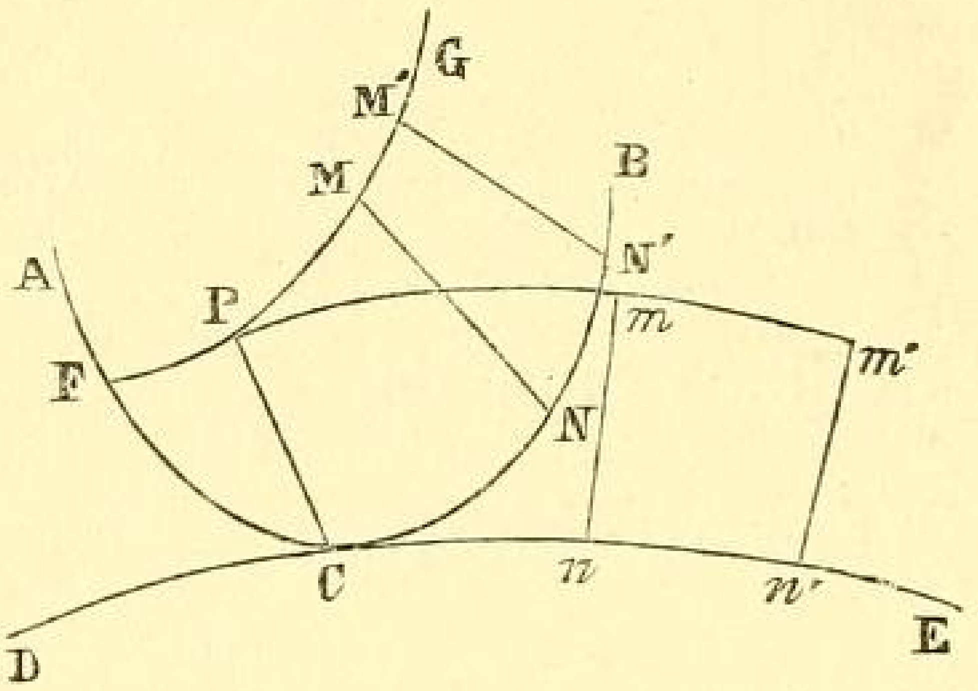
$$\frac{1}{2}\int u^2 d\omega = B, \quad \frac{1}{2}\int u^2 dV = C: \tag{6}$$

$$A = 2B - C. \tag{7}$$

B est l'aire du secteur ACM. Quant à l'intégrale C, elle représente l'aire de la courbe obtenue en menant, par A, des droites égales et parallèles aux normales A'M' (*).

(*) Il semble, d'après la formule (7), que A ne peut surpasser 2B; et le contraire a lieu sur la figure. Mais, comme l'angle V augmente ou diminue avec $u$, les éléments de l'intégrale C peuvent être négatifs aussi bien que positifs : dans le cas actuel, ils sont négatifs; et la soustraction indiquée devient une addition.

VI. Considérons le cas général d'une courbe ACB roulant sur une courbe DCE et entraînant une ligne FPG. Soient PC, MN, M'N' des normales à FPG; soient $mn$, $m'n'$ les nouvelles positions de ces droites.




La ligne $mn$, normale à la trajectoire du point M (§ I), est normale, aussi, à la nouvelle position de FPG. Donc cette ligne FPG, quand elle est entraînée par ACB, touche successivement, en P, $m$, $m'$, ... les trajectoires de ses différents points P, M, M', ... Ainsi, non seulement la courbe P$mm'$ est l'enveloppe de FPG (théorème connu), mais encore : *cette courbe* P$mm'$ *est l'enveloppe des trajectoires de tous les points appartenant à* FPG. Autrement dit : *Quand une courbe* ACB *roule sur une courbe* DCE, *en entraînant une ligne* FPG, *l'enveloppe de celle-ci coïncide avec l'enveloppe des trajectoires de tous ses points.*

VII. Si, rendant la courbe ACB immobile, on fait rouler DCE sur ACB, FPG deviendra l'enveloppe de P$mm'$ et des trajectoires des points P, $m$, $m'$,... En particulier, lorsque la ligne FPG se réduit à un point P, la ligne P$mm'$, dans toutes ses positions, passe par ce point P.

## XLIII. — Lieu géométrique. (1859.)

Problème. — *Quel est le lieu des sommets des paraboles tangentes aux côtés d'un triangle rectangle isoscèle* ACB (*)?

D'après le Théorème de Simpson, si l'on décrit, sur l'hypoténuse AB comme diamètre, une circonférence ACBD; que l'on prenne un point quelconque F de cette circonférence; que l'on mène FP perpendiculaire à CA, FQ perpendiculaire à CB;

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

que l'on trace la droite PQ; enfin, que l'on abaisse FS perpendiculaire à PQ : S est le sommet d'une des paraboles tangentes aux côtés du triangle donné.

Prenons CA, CB pour axes; désignons par $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du foyer F; par $x$, $y$ les coordonnées de S; et soit $a$ la longueur commune des côtés CA, CB. Les équations du problème sont

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1, \tag{1}$$

$$\frac{y-\beta}{\alpha}=\frac{x-\alpha}{\beta}, \tag{2}$$

$$\alpha^2+\beta^2-a(\alpha+\beta)=0. \tag{3}$$

Afin de les simplifier, posons

$$\alpha=\lambda\cos\theta,\quad \beta=\lambda\sin\theta :$$

l'équation (3) donne, immédiatement,

$$\lambda=a(\cos\theta+\sin\theta).$$

Par suite, les équations (1), (2) deviennent

$$x\sin\theta+y\cos\theta=a\sin\theta\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta),$$
$$x\cos\theta-y\sin\theta=a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos\theta+\sin\theta).$$

On tire, de ces dernières,

$$x=a(\cos\theta+\sin\theta)\cos^3\theta,$$
$$y=a(\cos\theta+\sin\theta)\sin^3\theta;$$

puis

$$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}(\cos\theta+\sin\theta)^{\frac{4}{3}},\quad x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(\cos\theta+\sin\theta)^{\frac{2}{3}};$$

et enfin

$$\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2=a\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right). \tag{A}$$

Telle est l'équation du lieu. L'emploi des coordonnées polaires la transforme en

$$u=a\frac{\cos^{\frac{1}{3}}\omega+\sin^{\frac{1}{3}}\omega}{\left(\cos^{\frac{2}{3}}\omega+\sin^{\frac{2}{3}}\omega\right)^2}. \tag{B}$$

## XLIV. — Sur un produit convergent. (1859.)

I. Pour établir la convergence du produit

$$P = (1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3)(1 + q^4)\dots(1 + q^n)\dots, \tag{1}$$

composé d'un nombre indéfini de facteurs, il suffit de prouver que la série

$$\ell(1 + q) + \ell(1 + q^2) + \cdots + \ell(1 + q^n) + \cdots, \tag{2}$$

est convergente (*).

Or, la somme $S_n$, des $n$ premiers termes, est comprise entre

$$q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q(1 - q^n)}{1 - q}$$

et

$$\left(q - \frac{1}{2}q^2\right) + \left(q^2 - \frac{1}{2}q^4\right) + \cdots + \left(q^n - \frac{1}{2}q^{2n}\right) = \frac{q(1-q^n)}{1-q} - \frac{1}{2}\frac{q^2(1-q^{2n})}{1-q^2};$$

donc la série (2) est convergente. De plus, S étant la limite de $S_n$, on a

$$S < \frac{q}{1-q}, \quad S > \frac{q}{1-q} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^2}. \tag{3}$$

II. A cause de

$$\ell(1 + q^n) = q^n - \frac{1}{2}q^{2n} + \frac{1}{3}q^{3n} - \frac{1}{4}q^{4n} + \cdots :$$

$$S = \sum_1^\infty q^n - \frac{1}{2}\sum_1^\infty q^{2n} + \frac{1}{3}\sum_1^\infty q^{3n} - \frac{1}{4}\sum_1^\infty q^{4n} + \cdots,$$

ou

$$S = \frac{q}{1-q} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^3} - \frac{1}{4}\frac{q^4}{1-q^4} + \cdots \tag{4}$$

(*) On suppose $q$ compris entre 0 et + 1. Lorsque $q$ est négatif, le développement de P, suivant les puissances de $q$, forme une série très remarquable, étudiée par Euler, Jacobi et d'autres Géomètres.

On reconnaît encore que la somme S est comprise entre les limites indiquées ci-dessus.

III. Développant chacun des termes de la série (4), on trouve

$$
\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
S = q + 1 & q^2 + 1 & q^3 + 1 & q^4 + 1 & q^5 + 1 & q^6 + \cdots \\
-\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & \\
 & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{3} & \\
 & & & & -\frac{1}{6} &
\end{array}
$$

Il est visible que *le coefficient de* $q^N$ *est égal à la somme des inverses des diviseurs impairs de* N, *diminuée de la somme des inverses de ses diviseurs pairs* (*).

## XLV. — Remarques sur un Mémoire de Poisson. (1859.)

I. Dans le 18e Cahier du *Journal de l'École polytechnique,* Poisson donne l'importante formule

$$\frac{1+e^{-p}}{1-e^{-p}} - \frac{2}{p} = 4\int_0^\infty \frac{\sin px\,dx}{e^{2\pi x}-1}; \tag{A}$$

(*) 1° Si N est *impair,* le coefficient de $q^N$ a pour valeur

$$C_N = \frac{1}{N}\int N,$$

$\int N$ désignant, suivant la notation d'Euler, la somme des diviseurs de N.

2° Soit $N = 2^\alpha N'$, N' étant *impair.* On trouve aisément

$$C_N = \frac{2^{\alpha+1}-3}{N}\int N'.$$

Dans les deux cas, $C_N$ est positif. — (Mars 1867.)

La question précédente, et d'autres du même genre, sont traitées dans les *Recherches sur quelques produits indéfinis* (septembre 1884).

mais il y parvient au moyen des intégrales *indéterminées*

$$\int_0^\infty \sin px\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} \sin px\,dx :$$

Poisson les suppose, respectivement, égales à $\frac{1}{p}$ et à

$$\frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}}}{e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}}}.$$

Il y a plus : ce grand Géomètre obtient la première valeur en faisant $b = 0$ dans une formule qui suppose $b > 0$ ; et la seconde, en faisant $\theta = \pi$ dans une intégrale qui exclut cette valeur-limite. La formule (A) n'est donc pas rigoureusement démontrée. Mais il est facile de rectifier la méthode employée par Poisson.

En effet, à cause de

$$\frac{1}{e^{2\pi x} - 1} = \sum_1^\infty e^{-2n\pi x},$$

on a d'abord

$$\int_0^\infty \frac{\sin px\,dx}{e^{2\pi x} - 1} = \sum_1^\infty \int_0^\infty e^{-2n\pi x} \sin px\,dx = \sum_1^\infty \frac{p}{p^2 + 4n^2\pi^2},$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{\sin px\,dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{p}{4\pi^2} \sum_1^\infty \frac{1}{\frac{p^2}{4\pi^2} + n^2}.$$

Mais, d'après une formule connue (*),

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\frac{p^2}{4\pi^2} + n^2} = \frac{2\pi^2}{p^2}\left[\frac{p}{2}\,\frac{e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}}}{e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}}} - 1\right];$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 115.

donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin px\,dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{1}{2p}\left[\frac{p}{2}\,\frac{e^{\frac{p}{2}}+e^{-\frac{p}{2}}}{e^{\frac{p}{2}}-e^{-\frac{p}{2}}} - 1\right];$$

ce qui est précisément la relation (A).

II. Cette formule (A) peut être considérée comme un *cas-limite* d'une formule plus générale, à laquelle on parvient aisément en partant de l'équation

$$\frac{e^p - e^{-p}}{e^p + 2\cos\theta + e^{-p}} = 2\int_0^\infty \frac{e^{\theta x}+e^{-\theta x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \sin px\,dx, \tag{1}$$

démontrée par Poisson (*).

En effet, le second membre est la même chose que

$$2\int_0^\infty \frac{e^{\pi x}+e^{(\pi-2\theta)x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\, e^{-(\pi-\theta)x}\sin px\,dx$$

$$= 2\int_0^\infty \left[1 + \frac{e^{(\pi-2\theta)x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\right] e^{-(\pi-\theta)x}\sin px\,dx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-(\pi-\theta)x}\sin px\,dx + 2\int_0^\infty \frac{e^{-\theta x}+e^{-(2\pi-\theta)x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\sin px\,dx.$$

Lorsque $\theta$ est inférieur à $\pi$, chacune de ces intégrales est finie et déterminée : la première a pour valeur (**) $\frac{p}{p^2+(\pi-\theta)^2}$ ; donc

$$\frac{e^p-e^{-p}}{e^p+2\cos\theta+e^{-p}} = \frac{2p}{p^2+(\pi-\theta)^2} + 2\int_0^\infty \frac{e^{-\theta x}+e^{-(2\pi-\theta)x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\sin px\,dx;$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{e^{(\pi-\theta)x}+e^{-(\pi-\theta)x}}{e^{2\pi x}-1}\sin px\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{e^p-e^{-p}}{e^p+2\cos\theta+e^{-p}} - \frac{p}{p^2+(\pi-\theta)^2}. \tag{B}$$

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 18e Cahier, p. 297.
(**) *Journal de l'École polytechnique*, 16e Cahier, p. 219.

III. Si, dans cette relation générale, on suppose successivement

$$\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \pi,$$

on trouve :

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{2\pi x} - 1} \sin px\, dx = \frac{1}{2}\frac{e^p - 1}{e^p + 1} - \frac{p}{p^2 + \pi^2}, \qquad \text{(C)}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin px\, dx}{e^{\frac{\pi}{2}x}\left(e^{\pi x} - 1\right)} = \frac{1}{2}\frac{e^{2p} - 1}{e^{2p} + 1} - \frac{p}{p^2 + \frac{\pi^2}{4}}, \qquad \text{(D)}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin px\, dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{4}\frac{e^p - 1}{e^p + 1} - \frac{1}{2p}.$$

La dernière ne diffère pas de (A). Elle est, comme nous l'avons annoncé, comprise dans la relation (B) (*); mais, à cause de l'hypothèse $\theta < \pi$, d'où l'on est parti, une démonstration directe était nécessaire.

IV. Multiplions les deux membres de l'équation (B) par $d\theta$, et intégrons à partir de $\theta = 0$. A cause des formules

$$\int_0^\theta e^{-\theta x}\, dx = \frac{1 - e^{-\theta x}}{x}, \qquad \int_0^\theta e^{\theta x}\, dx = \frac{e^{\theta x} - 1}{x},$$

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{e^p + 2\cos\theta + e^{-p}} = \frac{2}{e^p - e^{-p}} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}}}{e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}}} \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\right],$$

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{p^2 + (\pi - \theta)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{p\theta}{p^2 + \pi(\pi - \theta)},$$

(*) Celle-ci est due aussi à Poisson (mars 1867).

que l'on vérifie aisément, nous aurons

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi x}(1-e^{-\theta x})+e^{-\pi x}(e^{\theta x}-1)}{e^{2\pi x}-1}\frac{\sin px}{x}dx$$

$$=arc\,\mathrm{tg}\left[\frac{e^{\frac{p}{2}}-e^{-\frac{p}{2}}}{e^{\frac{p}{2}}+e^{-\frac{p}{2}}}\mathrm{tg}\frac{1}{2}\theta\right]-arc\,\mathrm{tg}\frac{p\theta}{p^2+\pi(\pi-\theta)},$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{\left(e^{\frac{\theta}{2}x}-e^{-\frac{\theta}{2}x}\right)\left[e^{\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)x}+e^{-\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)x}\right]}{e^{2\pi x}-1}\frac{\sin px}{x}dx$$

$$=arc\,\mathrm{tg}\left(\frac{e^p-1}{e^p+1}\mathrm{tg}\frac{1}{2}\theta\right)-arc\,\mathrm{tg}\frac{p\theta}{p^2+\pi(\pi-\theta)}. \tag{E}$$

V. Soit, comme cas particulier, $\theta=\frac{\pi}{2}$ : la dernière formule devient, après quelques simplifications,

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi x}-e^{\frac{\pi}{2}x}+1}{e^{\pi x}+1}e^{-\pi x}\frac{\sin px}{x}dx=arc\,\mathrm{tg}\left(\frac{e^p-1}{e^p+1}\right)-arc\,\mathrm{tg}\frac{p\pi}{2p^2+\pi^2}.$$

Le premier membre se décompose en

$$\int_0^\infty e^{-\pi x}\frac{\sin px}{x}dx-\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\pi x}{2}}}{e^{\pi x}+1}\frac{\sin px}{x}dx.$$

D'ailleurs (*),

$$\int_0^\infty e^{-\pi x}\frac{\sin px}{x}dx=arc\,\mathrm{tg}\frac{p}{\pi};$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\pi x}{2}}}{e^{\pi x}+1}\frac{\sin px}{x}dx=arc\,\mathrm{tg}\frac{2p}{\pi}-arc\,\mathrm{tg}\left(\frac{e^p-1}{e^p+1}\right); \tag{F}$$

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 16e Cahier, p. 220.

et, si $p=\frac{\pi}{2}$ :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\pi x}{2}}}{e^{\pi x}+1} \, \frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x}\, dx = arc \cot \left(e^{\frac{\pi}{2}}\right).$$

VI. Si l'on prend les dérivées des deux membres, par rapport au paramètre $p$, l'égalité (F) donne

$$\int_0^\infty \frac{\cos px \, dx}{e^{\frac{\pi}{2}x}(e^{\pi x}+1)} = \frac{2\pi}{\pi^2+4p^2} - \frac{e^p}{e^{2p}+1}; \tag{G}$$

et, en supposant $p=0$ :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\frac{\pi}{2}x}(e^{\pi x}+1)} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2};$$

formule presque évidente.

## XLVI. — Sur la sommation de certains coefficients binomiaux. (1861) (*).

I. Problème. — *Dans le développement de* $(1+z)^m$, *on prend les termes de* p *en* p. *Quelle est la somme de leurs coefficients?* (L'exposant $m$ est supposé entier positif) (**).

Représentons par $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$ les sommes dont les premiers termes sont

$$1, \quad \frac{m}{1}, \quad \ldots, \quad \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{1.2\ldots(p-1)}.$$

Soit $\theta$ une racine *primitive* de l'équation

$$\theta^p - 1 = 0. \tag{1}$$

(*) Extrait des *Nouvelles Annales de mathématiques*, t. XX.

(**) Un jeune Géomètre, M. Haton de la Goupillière, a résolu la même question pour le cas d'une fonction quelconque. Néanmoins, à cause de la simplicité du résultat exprimé par la formule (C), j'ai cru pouvoir le faire connaître.

En remplaçant $z$, successivement, par $\theta$, $\theta^2$, ..., $\theta^p$, nous aurons, en vertu de cette équation,

$$\left.\begin{aligned}
(1+\theta)^m &= S_0 + S_1\theta + \cdots + S_{p-1}\theta^{p-1},\\
(1+\theta^2)^m &= S_0 + S_1\theta^2 + \cdots + S_{p-1}\theta^{2(p-1)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(1+\theta^{p-1})^m &= S_0 + S_1\theta^{p-1} + \cdots + S_{p-1}\theta^{(p-1)(p-1)},\\
(1+1)^m &= S_0 + S_1 + \cdots + S_{p-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

II. Pour tirer, des équations (2), la valeur de $S_k$, il suffit de les ajouter membre à membre, après avoir multiplié par $\theta^{-k}$ les deux membres de la première, par $\theta^{-2k}$ les deux membres de la deuxième, etc. En effet, le coefficient de $S_{k'}$, dans l'équation résultante, est

$$\theta^{k'-k} + \theta^{2(k'-k)} + \cdots + \theta^{p(k'-k)} = 0,$$

attendu que $k'$ et $k$, étant inégaux et inférieurs à $p$, $\theta^{k'-k}$ est une racine primitive de l'équation (1).

Par suite,

$$pS_k = (1+\theta)^m\theta^{-k} + (1+\theta^2)^m\theta^{-2k} + \cdots + (1+\theta^p)^m\theta^{-pk}. \quad (3)$$

III. Soit maintenant

$$\theta = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi; \quad (4)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}
1+\theta &= 2\cos\frac{1}{2}\varphi\,.\,e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}},\\
1+\theta^2 &= 2\cos\frac{2}{2}\varphi\,.\,e^{\frac{2}{2}\varphi\sqrt{-1}},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
1+\theta^p &= 2\cos\frac{p}{2}\varphi\,.\,e^{\frac{p}{2}\varphi\sqrt{-1}}.
\end{aligned}\right\}$$

La formule (3) devient

$$pS_k = 2^m\left\{\begin{aligned}
&\cos^m\frac{1}{2}\varphi\,.\,e^{\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi\sqrt{-1}} + \cos^m\frac{2}{2}\varphi\,.\,e^{2\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi\sqrt{-1}}\\
&+\cdots \qquad + \cos^m\frac{p}{2}\varphi\,.\,e^{p\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi\sqrt{-1}}.
\end{aligned}\right\}$$

Par conséquent :

$$pS_k = 2^m \left\{ \begin{array}{l} \cos^m \frac{1}{2}\varphi \cos\left(\frac{m}{2} - k\right)\varphi + \cos^m \frac{2}{2}\varphi \cos 2\left(\frac{m}{2} - k\right)\varphi \\ + \cdots \qquad\qquad + \cos^m \frac{p}{2}\varphi \cos p\left(\frac{m}{2} - k\right)\varphi, \end{array} \right\} \quad \text{(A)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \cos^m \frac{1}{2}\varphi \sin\left(\frac{m}{2} - k\right)\varphi + \cos^m \frac{2}{2}\varphi \sin 2\left(\frac{m}{2} - k\right)\varphi \\ + \cdots \qquad\qquad + \cos^m \frac{p}{2}\varphi \sin p\left(\frac{m}{2} - k\right)\varphi. \end{array} \right\} \quad \text{(B)}$$

IV. Très souvent, l'évaluation de la quantité entre parenthèses, dans la formule (A), est plus compliquée que la détermination *directe* de $S_k$. Mais, par cela même, l'égalité (A) peut être regardée comme représentant cette quantité. Pour plus de simplicité, posons

$$m - 2k = q,$$

et rappelons-nous que

$$\varphi = \frac{2\pi}{p};$$

nous aurons

$$\cos^m \frac{\pi}{p} \cos q \frac{\pi}{p} + \cos^m \frac{2\pi}{p} \cos 2q \frac{\pi}{p} + \cdots + \cos^m \frac{p\pi}{p} \cos pq \frac{\pi}{p} = \frac{p}{2^m} S_k. \quad \text{(C)}$$

Par exemple,

$$\cos^7 \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{3} + \cos^7 \frac{2\pi}{3} \cos \frac{10\pi}{3} + \cos^7 \pi \cos 5\pi = \frac{3}{2^7}(7 + 35 + 1).$$

V. Si $k + p$ surpasse $m + 1$, la somme $S_k$ est composée d'un seul terme, égal à $C_{m,k}$ ; donc, dans ce cas,

$$\left. \begin{array}{l} \cos^m \frac{\pi}{p} \cos q \frac{\pi}{p} + \cos^m \frac{2\pi}{p} \cos 2q \frac{\pi}{p} + \cdots + \cos^m \frac{p\pi}{p} . \cos pq \frac{\pi}{p} \\ = \frac{p}{2^m} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1 . 2 \ldots k}. \end{array} \right\} \quad \text{(D)}$$

Soient, pour fixer les idées,

$$m = 13, \quad p = 11, \quad k = 3, \quad q = 7:$$

$$\left.\begin{array}{c}\cos^{13}\frac{\pi}{11}\cos\frac{7\pi}{11} + \cos^{13}\frac{2\pi}{11}\cos\frac{14\pi}{11} + \cos^{13}\frac{3\pi}{11}\cos\frac{21\pi}{11} + \cdots \\ + \cos^{13}\pi\cos 7\pi = \frac{11}{2^{13}}\cdot 286.\end{array}\right\}$$

## XLVII. — Sur le Théorème de Fermat. (1861.)

I. A la page 4 du Mémoire de Legendre (*Académie des Sciences*, 1862), on lit :

« $p^n$ est divisible par $x+y$. Par une semblable raison $p^n$ est divisible par $y+z$ et par $z+x$. Donc $n$ étant un nombre impair quelconque, $p^n$ sera divisible par le produit

» $(x+y)(y+z)(z+x)$ (*). »

Dans sa démonstration, Legendre a égard à l'équation

$$x^n + y^n + z^n = 0, \qquad (1)$$

dont il s'agit de prouver l'impossibilité, $x$, $y$, $z$ étant des entiers, positifs ou négatifs ; donc il ne peut être question que de divisibilité *numérique*. Or, rien ne prouve que les *nombres* $x+y$, $y+z$, $z+x$ soient premiers entre eux, deux à deux ; et, par conséquent, la démonstration laisse à désirer. On peut la compléter comme il suit.

$$p^n - x^n - y^n - z^n = \mathrm{P}$$

est divisible, *algébriquement*, par les binômes $x+y$, $y+z$, $z+x$. Donc, ceux-ci étant des quantités premières, P est divisible, *algébriquement aussi*, par le produit $(x+y)(y+z)(z+x)$. Si l'on remplace $x$, $y$, $z$ par des nombres entiers quelconques, le quotient Q deviendra un *nombre entier* ; et, *si l'équation* (1)

(*) Le Mémoire roule sur l'équation $x^n+y^n+z^n=0$ ; $p$ représente $x+y+z$.

*est vérifiée par les valeurs attribuées à* x, y, z, $p^n$ *sera divisible, numériquement, par* $(x+y)(y+z)(z+x)$. D'après le Théorème de Fermat, non encore démontré, l'équation (1) est impossible en nombres entiers ; donc a, b, c *étant des nombres entiers,* $(a+b+c)^n$ *n'est peut-être jamais divisible* par

$$(b+c)(c+a)(a+b).$$

II. On peut se proposer de connaître le quotient de P par

$$(x+y)(y+z)(z+x)\ (^*).$$

Soient

$$P=(x+y)Q,\quad Q=(y+z)Q',\quad Q'=(z+x)Q''.$$

1° $$Q=\frac{p^n-x^n-y^n-z^n}{x+y}=\frac{p^n-z^n}{p-z}-\frac{x^n+y^n}{x+y},$$

ou

$$\left.\begin{aligned} Q= {} & p^{n-1}+zp^{n-2}+z^2p^{n-3}+\cdots+z^{n-1}\\ & -(x^{n-1}-yx^{n-2}+y^2x^{n-3}-\cdots+y^{n-1}).\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

2° La première ligne, divisée par $y+z=p-x$, donne pour quotient

$$p^{n-2}+(x+z)p^{n-3}+(x^2+zx+z^2)p^{n-4}+\cdots+(x^{n-2}+zx^{n-3}+\cdots+z^{n-2}),$$

et, pour reste,

$$x^{n-1}+zx^{n-2}+z^2x^{n-3}+\cdots+x^{n-1}.$$

Par conséquent, si nous représentons par $H_q(x, z)$ la fonction homogène

$$x^q+zx^{q-1}+z^2x^{q-2}+\cdots+z^q,$$

nous aurons

$$Q'=p^{n-2}+H_1(x,z)p^{n-3}+H_2(x,z)p^{n-4}+\cdots+H_{n-2}(x,z)$$

$$+\frac{1}{y+z}\left[(y+z)x^{n-2}-(y^2-z^2)x^{n-3}+(y^3+z^3)x^{n-4}-\cdots-(y^{n-1}-z^{n-1})\right],$$

(*) Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons n *impair et plus grand que* 3.

ou

$$\left.\begin{aligned}Q' = & p^{n-2} + H_1(x, z)p^{n-3} + H_2(x, z)p^{n-4} + \cdots + H_{n-2}(x, z)\\ & + x^{n-2} - (y-z)x^{n-3} + (y^2-yz+z^2)x^{n-4} - (y^3-y^2z+yz^2-z^3)x^{n-5} + \cdots\\ & - (y^{n-2} - zy^{n-3} + z^2y^{n-4} - z^3y^{n-5} + \cdots - z^{n-2}).\end{aligned}\right\}(3)$$

3° Le quotient de la première ligne, par $x + z = p - y$, est

$$p^{n-3} + H_1p^{n-4} + H_2p^{n-5} + \cdots + H_{n-3} \text{ (*)};$$

et le reste :

$$y^{n-2} + H_1(x, z)y^{n-3} + H_2(x, z)y^{n-4} + \cdots + H_{n-2}(x, z).$$

Donc

$$\begin{aligned}Q'' = & p^{n-3} + H_1p^{n-4} + H_2p^{n-5} + \cdots + H_{n-3}\\ & + \frac{1}{x+z}\Big[y^{n-2} + H_1(x, z)y^{n-3} + H_2(x, z)y^{n-4} + \cdots + H_{n-2}(x, z)\\ & + x^{n-2} - (y-z)x^{n-3} + (y^2 - yz + z^2)x^{n-4} - \cdots\\ & - (y^{n-2} - zy^{n-3} + z^2y^{n-4} - \cdots - z^{n-2})\Big].\end{aligned}$$

Les fonctions

$$H_1(x, z) = x + z, \quad H_3(x, z) = x^3 + zx^2 + z^2x + z^3,$$
$$H_5(x, z) = x^5 + zx^4 + z^2x^3 + z^3x^2 + z^4x + z^5, \ldots,$$

sont divisibles par $x + z$ : les quotients

$$1, \quad x^2 + z^2, \quad x^4 + x^2z^2 + z^4, \ldots$$

sont des fonctions homogènes de $x^2$, $z^2$; par conséquent

$$\begin{aligned}Q'' = & p^{n-3} + H_1p^{n-4} + H_2p^{n-5} + \cdots + H_{n-3}\\ & + y^{n-3} + H_1(x^2, z^2)y^{n-5} + H_2(x^2, z^2)y^{n-7} + \cdots + H_{\frac{n-3}{2}}(x^2, z^2)\\ & \frac{1}{x+z}\Big[y^{n-2} + H_2(x, z)y^{n-4} + H_4(x, z)y^{n-6} + \cdots + H_{n-3}(x, z)y\\ & + x^{n-2} - (y-z)x^{n-3} + (y^2 - yz + z^2)x^{n-4} - \cdots\\ & - (y^{n-2} - zy^{n-3} + z^2y^{n-4} - \cdots - z^{n-2})\Big].\end{aligned}$$

(*) Ici, $H_1 = x + y + z$, $H_2 = x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy$, etc. Voyez, sur ce point, la Note XL, p. 155.

La première ligne entre parenthèses, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de $x$, devient

$$yx^{n-3}+yzx^{n-4}+(yz^2+y^3)x^{n-5}+(yz^3+y^3z)x^{n-6}+(yz^4+y^3z^2+y^5)x^{n-7}+\cdots$$
$$+yz^{n-3}+y^3z^{n-5}+\cdots+y^{n-4}z^2+y^{n-2};$$

donc la quantité entre parenthèses égale

$$x^{n-2}+zx^{n-3}+(y^2+z^2)x^{n-4}+(y^2z+z^3)x^{n-5}+(y^4+y^2z^2+z^4)x^{n-6}$$
$$+(y^4z+y^2z^3+z^5)x^{n-7}+\cdots+y^{n-3}z+y^{n-5}z^3+\cdots+z^{n-4};$$

c'est-à-dire

$$x^{n-2}+zx^{n-3}+\mathrm{H}_1(y^2,\ z^2)\,x^{n-4}+\mathrm{H}_1(y^2,\ z^2)\,zx^{n-5}+\mathrm{H}_2(y^2,\ z^2)\,x^{n-6}$$
$$+\mathrm{H}_2(y^2,\ z^2)\,zx^{n-7}+\cdots+z\mathrm{H}_{\frac{n-3}{2}}(y^2,\ z^2).$$

De là résulte

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Q}'' = {} & p^{n-3}+\mathrm{H}_1p^{n-4}+\mathrm{H}_2p^{n-5}+\cdots+\mathrm{H}_{n-3}\\ & +y^{n-3}+\mathrm{H}_1(x^2,z^2)\,y^{n-5}+\mathrm{H}_2(x^2,z^2)\,y^{n-7}+\cdots+\mathrm{H}_{\frac{n-3}{2}}(x^2,z^2)\\ & +x^{n-3}+\mathrm{H}_1(y^2,z^2)\,x^{n-5}+\mathrm{H}_2(y^2,z^2)\,x^{n-7}+\cdots+\mathrm{H}_{\frac{n-3}{2}}(y^2,z^2);\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

ou, plus simplement,

$$\mathrm{Q}''=p^{n-3}+\mathrm{H}_1p^{n-4}+\mathrm{H}_2p^{n-5}+\cdots+\mathrm{H}_{n-3}+2\mathrm{H}_{\frac{n-3}{2}}(x^2,y^2,z^2).\qquad(5)$$

En effet, chacune des deux dernières lignes, dans la formule (4), représente la fonction homogène de $x^2$, $y^2$, $z^2$, du degré $n-3$.

III. Comme application, prenons $n=7$ ; nous aurons

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(x+y+z)^7-x^7-y^7-z^7}{(y+z)(z+x)(x+y)}=(x+y+z)^4+(x+y+z)(x+y+z)^3\\&+(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)(x+y+z)^2\\&+(x^3+y^3+z^3+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+x^2y+xy^2+xyz)(x+y+z)\\&+x^4+y^4+z^4+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3+x^3y+xy^3\\&+x^2yz+y^2zx+z^2xy+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2\\&+2(x^4+y^4+z^4+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2).\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

IV. Divisons, par $y+z$, le polynôme entier Q″; représentons par A le quotient et par $\alpha$ le reste, de manière que

$$\frac{(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n}{(y+z)(z+x)(x+y)} = A(y+z) + \alpha. \qquad (7)$$

La règle ordinaire donne

$$\alpha = n\frac{x^{n-1} - z^{n-1}}{x^2 - z^2}.$$

Conséquemment,

$$Q''(x^2 - z^2) = A(y+z)(x^2 - z^2) + n(x^{n-1} - z^{n-1});$$

et, par une permutation tournante,

$$Q''(y^2 - x^2) = B(z+x)(y^2 - x^2) + n(y^{n-1} - x^{n-1}),$$
$$Q''(z^2 - x^2) = C(x+y)(z^2 - y^2) + n(z^{n-1} - y^{n-1}).$$

Ajoutant ces trois égalités, nous trouvons

$$A(y+z)(x^2 - z^2) + B(z+x)(y^2 - x^2) + C(x+y)(z^2 - y^2) = 0.$$

Les deux derniers termes sont divisibles par $x+y$; donc A est également divisible par ce binôme. Autrement dit :

*Le polynôme* Q″ *n'est généralement pas divisible par* $y+z$; *mais,* A *désignant le quotient entier de* Q″ *par* $y+z$, A *est divisible par* $y+x$. De même, le quotient de Q″ par $z+y$ est divisible par $z+x$; le quotient de Q″ par $z+x$ est divisible par $z+y$; etc.

V. *Si* n *est premier, tous les coefficients du polynôme*

$$(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$$

*sont divisibles par* n; et, d'après ce qui précède, il en est de même pour les coefficients du *polynôme entier*

$$\frac{(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n}{(y+z)(z+x)(x+y)} \text{ (*)}.$$

(*) Le dividende et le quotient sont supposés développés suivant les puissances et les produits de $x$, $y$, $z$; sans quoi la proposition n'aurait pas de sens.

On vient de voir que le polynôme A est divisible par $x+y$. L'égalité (7) prend donc la forme

$$\frac{(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n}{(y+z)(z+x)(x+y)}-n\frac{x^{n-1}-z^{n-1}}{x^2-z^2}=n(y+z)(x+y)\varphi(x,y,z); \quad (8)$$

$\varphi(x, y, z)$ *étant un polynôme entier, à coefficients entiers.*

Dans l'exemple ci-dessus, le second membre de l'égalité (6), ordonné suivant les puissances de $y$, devient d'abord (*) :

$$\begin{aligned}
&2y^4+8(x+z)y^3+12(x+z)^2y^2+8(x+z)^3y+2(x+z)^4\\
&+y^4+3(x+z)y^3+(4x^2+7xz+4z^2)y^2+(x+z)(3x^2+4xz+3z^2)y\\
&+x^4+3x^3z+4x^2z^2+3xz^3+z^4\\
&+y^4+2(x+z)^3+(2x^2+3xz+2z^2)y^2+(x+z)(2x^2+xz+2z^2)y\\
&+x^4+2x^3z+2x^2z^2+2xz^3+z^4\\
&+3y^4+(x+z)y^3+(3x^2+xz+3z^2)y^2+(x+z)(x^2+z^2)y\\
&+3x^4+x^3z+3x^2z^2+xz^3+3z^4.
\end{aligned}$$

Si, de ce polynôme, on retranche

$$n\frac{x^{n-1}-z^{n-1}}{x^2-z^2}=7(x^4+x^2z^2+z^4),$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&7y^4+14(x+z)y^3+7(3x^2+5xz+3z^2)y^2\\
&+7(x+z)(2x^2+3xz+2z^2)z+14xz(x^2+xz+z^2).
\end{aligned}$$

Ce nouveau polynôme, abstraction faite du facteur 7, est le produit de

$$y^2+(x+z)y+xz$$

par

$$y^2+(x+z)y+2(x^2+xz+z^2).$$

Donc, dans le cas particulier considéré,

$$\varphi(x,y,z)=y^2+(x+z)y+2(x^2+xz+z^2).$$

(*) Pour plus de clarté, nous *isolons,* pour ainsi dire, les diverses parties du développement.

VI. Si $x$, $y$, $z$ sont remplacés par des nombres entiers, la propriété (8) peut être formulée ainsi :

$$\frac{(a+b+c)^n - a^n - b^n - c^n}{n(b+c)(c+a)(a+b)} - \frac{a^{n-1} - c^{n-1}}{a^2 - c^2} = \mathfrak{M} \,.\, (a+b)(b+c)\ (^*). \quad (9)$$

*Exemples :*

$$\frac{15^5 - 3^5 - 5^5 - 7^5}{5.8.10.12} - \frac{3^4 - 7^4}{3^2 - 7^2} = \frac{759\,375 - 243 - 3\,125 - 16\,807}{4\,800} - (9+49)$$

$$= \frac{739\,200}{4\,800} - 58 = 154 - 58 = 96 = \mathfrak{M}\ [(3+5)(5+7)].$$

De même,

$$\frac{15^7 - 3^7 - 5^7 - 7^7}{6\,720} - \frac{3^6 - 7^6}{3^2 - 7^2}$$

$$= \frac{170\,859\,375 - 2\,187 - 78\,125 - 823\,543}{6\,720} - (81 + 441 + 2\,401)$$

$$= \frac{169\,955\,520}{6\,720} - 2\,923 = 253 \,.\, 96 = \mathfrak{M} \,.\, 96.$$

## XLVIII. — Sur l'équation du troisième degré. (1861) (**).

I. En désignant par $A_n$ la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0, \qquad (1)$$

on a, comme l'on sait,

$$A_n = -pA_{n-2} - qA_{n-3}.$$

à partir de $n = 3$. En même temps,

$$A_0 = 3, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = -2p.$$

(*) Dans la première édition, par suite d'une erreur de copie, le second membre est, fautivement, $\mathfrak{M}\ (b+c)(a+c)$.

(**) *Comptes rendus*, t. LIV, p. 659.

II. Si l'on forme successivement les valeurs de $A_3$, $A_4$, $A_5$, ..., on trouve bientôt qu'elles sont comprises dans les deux formules

$$\left.\begin{aligned}\pm A_{2k+1} = (2k+1)\Bigg[p^{k-1}q - \frac{(k-2)(k-3)}{2.3}p^{k-4}q^3\\ + \frac{(k-3)(k-4)(k-5)(k-6)}{2.3.4.5}p^{k-7}q^5\\ - \frac{(k-4)(k-5)(k-6)(k-7)(k-8)(k-9)}{2.3.4.5.6.7}p^{k-10}q^7 + \ldots\Bigg],\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}\pm A_{2k} = 2p^k - (2k)\Bigg[\frac{k-2}{2}p^{k-3}q^2 - \frac{(k-3)(k-4)(k-5)}{2.3.4}p^{k-6}q^4\\ + \frac{(k-4)(k-5)(k-6)(k-7)(k-8)}{2.3.4.5.6}p^{k-9}q^6 - \ldots\Bigg];\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

dont la vérification est facile (*).

III. Le cas particulier de $p = 1$, $q = -1$ conduit à un résultat curieux.

On trouve, en effet, à cause de

$$A_n = -A_{n-2} + A_{n-3}: \qquad (5)$$

$$A_2 = -2,\quad A_3 = 3,\quad A_4 = 2,\quad A_5 = -5,\quad A_6 = 1,\quad A_7 = 7,\quad A_8 = 6,$$

$$A_9 = -6,\quad A_{10} = 13,\quad A_{11} = 0,\quad A_{12} = -19, \ldots$$

Ainsi, au moins jusqu'à une certaine valeur de n, *le nombre entier* $A_n$ *est ou n'est pas divisible par* n, *suivant que* n *est ou n'est pas premier.* Au moyen de la formule (3), on démontre aisément la première partie de cette proposition.

Si la seconde partie était également démontrée, on aurait un *criterium,* analogue au Théorème de Wilson [mais incomparablement plus simple (**)], pour reconnaitre si un nombre est premier ou non premier.

(*) On doit prendre les signes supérieurs si $k$ est *pair.*

(**) Les valeurs de $A_n$ croissent très lentement : $A_{33} = 3$, $A_{55} = -26\,924$.

IV. Si l'on suppose $p = -1$, $q = -1$, on trouve des résultats analogues à ceux qui viennent d'être indiqués :

$$A_3 = 2,\quad A_3 = 3,\quad A_4 = 2,\quad A_5 = 5,\quad A_6 = 5,\quad A_7 = 7,\quad A_8 = 10,$$
$$A_9 = 12,\quad A_{11} = 22 = 11 \,.\, 2,\quad A_{12} = 29,\quad A_{13} = 39 = 13 \,.\, 3 \ldots$$

*Addition.* — (*Juillet* 1866.)

V. Quelque temps après la publication de la Note précédente, M. *Eisenlohr* (*) démontra l'inexactitude de la proposition que j'avais énoncée *sous forme dubitative.* Malheureusement, M. Eisenlohr prend, pour point de départ, l'équation

$$0 = A_n - A_m A_{n-m} + \left(\frac{A_m^2 - A_{2m}}{2}\right) A_{n-2m} - A_{n-3m},$$

qui n'est nullement évidente : la démonstration proposée est donc incomplète (**).

Les choses étant ainsi, j'ai cru nécessaire de continuer, beaucoup plus loin que je ne l'avais fait, le calcul des sommes désignées par $A_n$. On verra, par le tableau suivant, que $A_{121}$ est divisible par 121 ; donc $A_n$ *peut être divisible par* n, *sans que* n *soit premier.*

(*) *Comptes rendus,* t. LV, p. 64.

(**) Je n'affirme point qu'elle soit fausse.

**Sommes des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation**

$$x^3 + x - 1 = 0.$$

| $n$ | $A_n$ | $n$ | $A_n$ | $n$ | $A_n$ | $n$ | $A_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 31 | 31.13 | 61 | 61.3 751 | 91 | 54 392 631 |
| 2 | — 2 | 32 | — 870 | 62 | — 117 647 | 92 | 35 359 466 |
| 3 | 3 | 33 | 3 | 63 | — 255 065 | 93 | — 103 843 022 |
| 4 | 2 | 34 | 1 237 | 64 | 346 458 | 94 | 19 033 165 |
| 5 | — 5 | 35 | — 873 | 65 | 137 418 | 95 | 139 202 488 |
| 6 | 1 | 36 | — 1 270 | 66 | — 601 525 | 96 | — 122 876 187 |
| 7 | 7 | 37 | 37.58 | 67 | 67.3 120 | 97 | — 97.1 238 859 |
| 8 | — 6 | 38 | 398 | 68 | 738 941 | 98 | 262 078 675 |
| 9 | — 6 | 39 | — 3 416 | 69 | — 810 563 | 99 | — 2 706 864 |
| 10 | 13 | 40 | 1 749 | 70 | — 529 901 | 100 | — 382 247 998 |
| 11 | 0 | 41 | 41.93 | 71 | 71.21 284 | 101 | 101.2 621 639 |
| 12 | — 19 | 42 | — 5 165 | 72 | — 280 662 | 102 | 379 541 134 |
| 13 | 13 | 43 | — 43.48 | 73 | — 73.28 485 | 103 | — 103.6 281 879 |
| 14 | 19 | 44 | 8 978 | 74 | 1 830 166 | 104 | — 114 755 595 |
| 15 | — 32 | 45 | — 3 101 | 75 | 1 798 743 | 105 | 1 026 574 671 |
| 16 | — 6 | 46 | — 11 042 | 76 | — 3 909 571 | 106 | — 532 277 942 |
| 17 | 17.3 | 47 | 47.257 | 77 | 31 423 | 107 | — 107.10 666 638 |
| 18 | — 26 | 48 | 7 941 | 78 | 5 708 314 | 108 | 1 558 852 613 |
| 19 | — 19.3 | 49 | — 23 121 | 79 | — 79.49 886 | 109 | 109.5 587 636 |
| 20 | 77 | 50 | 4 138 | 80 | — 5 676 891 | 110 | — 2 700 182 879 |
| 21 | 31 | 51 | 31 062 | 81 | 9 649 308 | 111 | 949 800 289 |
| 22 | — 134 | 52 | — 27 259 | 82 | 1 735 897 | 112 | 3 309 255 203 |
| 23 | 23.2 | 53 | — 53.508 | 83 | — 83.184 655 | 113 | — 113.52 300 736 |
| 24 | 165 | 54 | 58 521 | 84 | 7 913 411 | 114 | — 2 359 454 914 |
| 25 | — 180 | 55 | — 333 | 85 | 17 062 096 | 115 | 6 959 218 371 |
| 26 | — 119 | 56 | — 85 245 | 86 | — 23 239 610 | 116 | — 1 290 548 254 |
| 27 | 345 | 57 | 58 656 | 87 | — 9 148 685 | 117 | — 9 318 653 285 |
| 28 | — 61 | 58 | 84 910 | 88 | 40 301 706 | 118 | 8 249 766 625 |
| 29 | — 29.16 | 59 | — 59.2 439 | 89 | — 89.158 325 | 119 | 8 028 105 031 |
| 30 | 406 | 60 | — 26 254 | 90 | — 49 450 391 | 120 | — 17 568 419 910 |
| | | | | | | 121 | 121.1 831 914 |

## XLIX. — Rayon de la sphère circonscrite à un polyèdre semi-régulier.

(*Mars* 1862) (*).

Le centre O de la sphère, les centres C, C′ de deux faces adjacentes, et le milieu P de l'arête $c$ commune à ces deux faces, sont les sommets d'un quadrilatère OCPC′, dans lequel les angles C, C′ sont droits : ce quadrilatère est donc inscrit à la circonférence décrite sur OP comme diamètre.

Représentons par $p$, $q$ les diagonales OP, CC′; par $\alpha$ l'angle CPC′; par $a$, $a'$ les *apothèmes* CP, C′P des faces dont C, C′ sont les centres. Soient, en outre, $n$, $n'$ les nombres de côtés de ces faces, et $n''$ le nombre des côtés de la face qui, avec les deux premières, constitue un angle trièdre du polyèdre (**).

La diagonale $\mathrm{OP} = p$ est perpendiculaire au milieu de $c$; donc, R étant le rayon de la sphère circonscrite,

$$R^2 = p^2 + \frac{c^2}{4}. \tag{1}$$

La corde CC′ sous-tendant un arc *capable* de l'angle $\alpha$, dans une circonférence dont le diamètre est $p$,

$$q = p \sin \alpha. \tag{2}$$

De plus,

$$q^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \alpha. \tag{3}$$

La formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique donne ensuite, comme on le voit aisément,

$$\cos \alpha = -\frac{\cos \dfrac{2\pi}{n''} + \cos \dfrac{2\pi}{n} \cos \dfrac{2\pi}{n'}}{\sin \dfrac{2\pi}{n} \sin \dfrac{2\pi}{n'}}. \tag{4}$$

(*) Question résolue à l'occasion de mon *Mémoire sur la théorie des polyèdres* (*Journal de l'École polytechnique*, 41e Cahier).

(**) Voir le Mémoire cité. Voir aussi la brochure intitulée *Histoire d'un concours*.

De plus (*) :

$$a = \frac{c}{2} \cot \frac{\pi}{n}, \tag{5}$$

$$a' = \frac{c}{2} \cot \frac{\pi}{n'} \cdot \tag{6}$$

Il s'agit donc d'éliminer $p$, $q$, $\alpha$, $a$, $a'$ entre ces six équations. Pour simplifier l'écriture, posons

$$\frac{\pi}{n} = \lambda, \quad \frac{\pi}{n'} = \mu, \quad \frac{\pi}{n''} = \nu. \tag{7}$$

Nous aurons d'abord, en éliminant $a$, $a'$ :

$$q^2 = \frac{c^2}{4} (\cot^2 \lambda + \cot^2 \mu - 2 \cot \lambda \cot \mu \cos \alpha), \tag{8}$$

$$\cos \alpha = - \frac{\cos 2\nu + \cos 2\lambda \cos 2\mu}{\sin 2\lambda \sin 2\mu} \cdot \tag{9}$$

On conclut, de la dernière formule :

$$\sin^2 \alpha = -4 \frac{\cos(\lambda + \mu + \nu) \cos(\mu + \nu - \lambda) \cos(\nu + \lambda - \mu) \cos(\lambda + \mu - \nu)}{(\sin 2\lambda \sin 2\mu)^2},$$

$$\cot^2 \lambda + \cot^2 \mu - 2 \cot \lambda \cot \mu \cos \alpha = \left(\frac{\cos \nu}{\sin \lambda \sin \mu}\right)^2;$$

donc

$$q = \frac{c}{2} \frac{\cos \nu}{\sin \lambda \sin \mu},$$

$$p^2 = -c^2 \frac{\cos^2 \lambda \cos^2 \mu \cos^2 \nu}{\cos(\lambda + \mu + \nu) \cos(\mu + \nu - \lambda) \cos(\nu + \lambda - \mu) \cos(\lambda + \mu - \nu)} \cdot$$

La substitution dans (1) donne ensuite

$$R^2 = \frac{c^2}{4} \left[ 1 - 4 \frac{\cos^2 \lambda \cos^2 \mu \cos^2 \nu}{\cos(\lambda + \mu + \nu) \cos(\mu + \nu - \lambda) \cos(\nu + \lambda - \mu) \cos(\lambda + \mu - \nu)} \right];$$

ou, par un calcul que nous omettons (**),

$$R^2 =$$

$$-\frac{c^2}{4} \frac{(\cos \lambda + \cos \mu + \cos \nu)(-\cos \lambda + \cos \mu + \cos \nu)(\cos \lambda - \cos \mu + \cos \nu)(\cos \lambda + \cos \mu - \cos \nu)}{\cos(\lambda + \mu + \nu) \cos(\mu + \nu - \lambda) \cos(\nu + \lambda - \mu) \cos(\lambda + \mu - \nu)} \cdot$$

(*) Voir le Mémoire.

(**) *Nouvelles Annales de mathématiques* (1863), pp. 275 et 456.

## L. — Sur une fraction rationnelle.

(*Décembre* 1862.)

I. Soit

$$y = \frac{(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)^2}{1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}}. \tag{1}$$

A cause de

$$\frac{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}{1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^2}{1 - x^{2n+2}} = \frac{1 + x}{1 + x^{n+1}},$$

$$y = \frac{(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)(1 + x)}{1 + x^{n+1}},$$

ou

$$y = 1 + 2\,\frac{x + x^2 + \cdots + x^n}{1 + x^{n+1}}. \tag{2}$$

II. Quand $x$ est compris $+1$ et $-1$, on a

$$\frac{1}{1 + x^{n+1}} = 1 - x^{n+1} + x^{2n+2} - x^{3n+3} + \cdots;$$

donc

$$y = 1 + 2\sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \left[ x^{p(n+1)+1} + x^{p(n+1)+2} + \cdots + x^{p(n+1)+n} \right]. \tag{3}$$

Par exemple,

$$\frac{(1 + x + x^2 + x^3)^2}{1 + x^2 + x^4 + x^6} = 1 + 2\sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \left[ x^{4p+1} + x^{4p+2} + x^{4p+3} \right],$$

ou

$$\frac{(1+x)^2(1+x^2)}{1 + x^4} = 1 + 2\left[ x + x^2 + x^3 - x^5 - x^6 - x^7 + x^9 + x^{10} + x^{11} - \cdots \right]; \tag{4}$$

ce qui est exact.

III. Si, après avoir multiplié par $dx$ les deux membres de l'équation (3), on intègre entre 0 et 1, on trouve

$$\int_0^1 ydx = 1 + 2\sum_{p=0}^{p=\infty}(-1)^p\left[\frac{1}{p(n+1)+2} + \frac{1}{p(n+1)+3} + \cdots + \frac{1}{(p+1)(n+1)}\right]. \quad (5)$$

D'un autre côté, l'égalité (2) peut être écrite ainsi :

$$y = 1 + 2\frac{1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}}{1 + x^{n+1}} + 2\frac{x^n}{1 + x^{n+1}} - \frac{2}{1 + x^{n+1}};$$

donc

$$\int_0^1 ydx = 1 + 2\int_0^1 \frac{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}{1 + x^{n+1}}dx + \frac{2}{n+1}\mathcal{L}.2 - 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^{n+1}}.$$

En vertu de la formule

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1} + x^{a-b-1}}{1 + x^a}dx = \frac{\pi}{a}\frac{1}{\sin\frac{b}{a}\pi},$$

due à Euler, on a

$$2\int_0^1 \frac{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}{1 + x^{n+1}}dx = \frac{\pi}{n+1}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n+1}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sin\frac{n\pi}{n+1}}\right].$$

On a aussi

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^{n+1}} = \sum_{p=0}^{p=\infty}(-1)^p\frac{1}{p(n+1)+1}.$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 ydx = 1 + \frac{\pi}{n+1}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n+1}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sin\frac{n\pi}{n+1}}\right]\\ + \frac{2}{n+1}\mathcal{L}.2 - 2\sum_{p=0}^{p=\infty}(-1)^p\frac{1}{p(n+1)+1}.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Égalant les valeurs (5) et (6), nous trouvons

$$\left.\begin{aligned}\sum_{p=0}^{p=\infty}(-1)^p\left[\frac{1}{p(n+1)+1}+\frac{1}{p(n+1)+2}+\cdots+\frac{1}{(p+1)(n+1)}\right]\\ =\frac{\pi}{2(n+1)}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n+1}}+\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sin\frac{n\pi}{n+1}}\right]+\frac{1}{n+1}\mathcal{L}.2.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Par exemple,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-\cdots$$

$$=\frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{4}}\right]+\frac{1}{4}\mathcal{L}\,2,$$

ou

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{\pi}{8}(2\sqrt{2}+1)+\frac{1}{4}\mathcal{L}\,2.\quad(8)$$

IV. Si, après avoir mis la fonction $y$ sous la forme

$$\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2\frac{1-x^2}{1-x^{2n+2}}=\frac{1-x^{n+1}}{1+x^{n+1}}\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+x-x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x+x^{n+1}-x^{n+2}},$$

on prend la dérivée, on trouve

$$y'=2\frac{(1+x)[1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}-(n+1)x^n]}{(1-x)(1+x^{n+1})}.$$

Le polynôme entre parenthèses est divisible par $1-x$; donc, Q représentant le quotient,

$$y'=2\frac{(1+x)Q}{1+x^{n+1}}.\quad(9)$$

Écrivant ainsi le polynôme dividende :

$$(n+1)(1-x^n)-(1-x^2)-(1-x^4)-\cdots-(1-x^{2n}),$$

on a, immédiatement,

$$\left.\begin{aligned}Q=(n+1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})-(1+x)-(1+x+x^2+x^3)\\ -(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)-\cdots-(1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}),\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

ou

$$Q = (1 + x) + 2(x^2 + x^3) + 3(x^4 + x^5) + \cdots - 2(x^{2n-4} + x^{2n-3}) \\ - (x^{2n-2} + x^{2n-1}) \text{ (*)}. \qquad (11)$$

V. Malgré la complication du polynôme Q, on s'assure aisément qu'il ne peut admettre, comme diviseurs réels, que $1 - x$ et $1 + x$ (**).

En effet, de

$$(1 - x)\,Q = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} - (n + 1)\,x^n,$$

résulte

$$(1 - x)(1 - x^2)\,Q = 1 - x^{2n+2} - (n + 1)\,x^n + (n + 1)\,x^{n+2};$$

et l'équation

$$\varphi(x) = x^{2n+2} - (n + 1)\,x^{n+2} + (n + 1)\,x^n - 1 = 0 \qquad (12)$$

n'a pas plus de *quatre* ou de *six* racines réelles, suivant que $n$ est *impair* ou *pair*. Or, dans le premier cas, $\varphi(x)$ est divisible par $(1 - x)^3 (1 + x)$; et, dans le second, $\varphi(x)$ est divisible par $(1 - x)^3 (1 + x)^3$; etc.

VI. D'après cette discussion sommaire, la fonction $y$ a un seul maximum, répondant à $x = 1$, et dont la valeur est $n + 1$; elle a aussi un seul minimum, répondant à $x = -1$, minimum dont la valeur est 0 ou $\frac{1}{n+1}$, selon que $n$ est *impair* ou *pair*.

(*) Suivant que $n$ est *impair* ou *pair*, la *partie centrale* du polynôme est

$$\frac{n+1}{2}(x^{n-1} - x^n)$$

ou

$$\frac{n}{2}(x^{n-2} + x^{n-1}) - \frac{n}{2}(x^n + x^{n+1}).$$

Dans ce dernier cas, le polynôme est divisible par $1 + x$.

(**) D'après la formule (10) : 1° Q *est toujours divisible par* $1 - x$; 2° Q *est divisible par* $1 + x$ *quand* $n$ *est pair.*

### LI. — Sur les normales à une surface.

(*Janvier* 1863.)

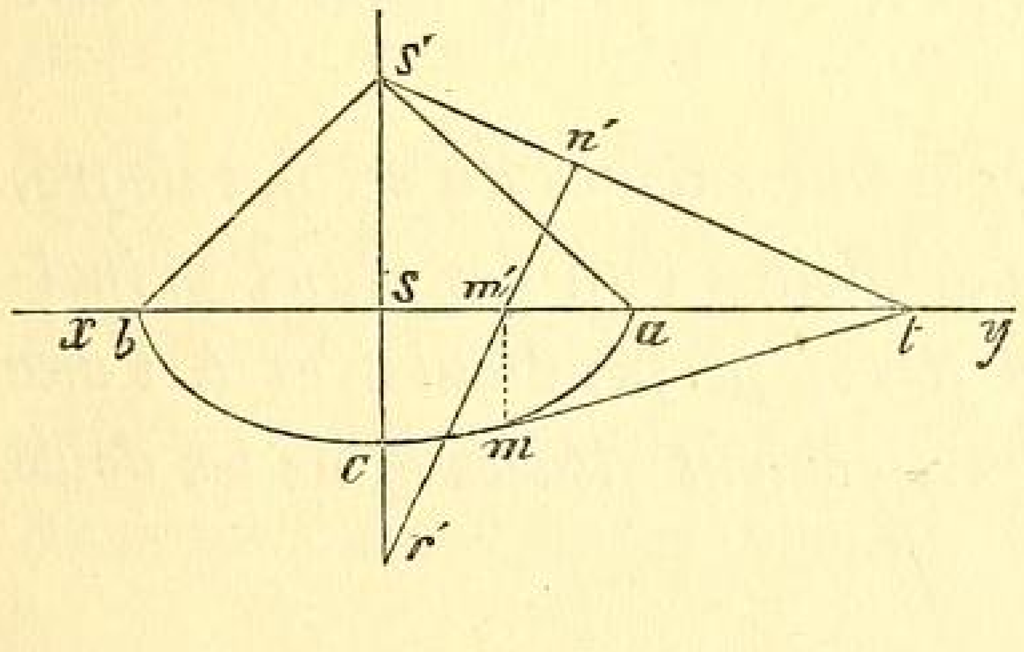
I. Dans le *Journal de l'École polytechnique* (38e Cahier), M. Abel Transon démontre ce remarquable théorème, dû à Sturm (*) :

« *Soit* AN *la normale d'une surface au point* A; *toutes les* » *normales, relatives aux points voisins* (**) *de* A, *rencontrent* » *les deux droites élevées perpendiculairement à* AN *dans les* » *plans des deux sections principales et par les centres de cour-* » *bure de ces deux sections respectivement.* »

Si l'on remplace la surface S par l'ellipsoïde osculateur en A, et si l'on considère la section $s$ de cet ellipsoïde par un plan parallèle au plan tangent en A, et infiniment voisin de celui-ci (***), les normales en tous les points de $s$ rencontrent les droites dont il vient d'être question. On peut se demander si, la section $s$ étant située à une distance *finie* de A, la même propriété subsisterait. Et comme on peut substituer, à l'ellipsoïde, le cône droit circonscrit suivant $s$ (IV), la question revient à celle-ci :

*Les normales à un cône droit, à base elliptique, menées en tous les points de cette base, rencontrent-elles deux droites fixes?*

II. Prenons, pour plan horizontal de projection, le plan




même de la base du cône; et, pour plan vertical, celui de la section principale $as'b$. Les traces du plan tangent en un point quelconque $(m, m')$ de la base sont la tangente $mt$ et la droite $ts'$. Par suite, la

(*) *Comptes rendus*, t. XX, p. 1241.

(**) Lisez : *infiniment voisins.*

(***) La courbe $s$ est l'*indicatrice* de S, pour le point A.

(IV) La courbe $s$ est dans un plan parallèle au plan d'une section principale de l'ellipsoïde.

projection verticale de la normale est $m'n'$, perpendiculaire à $ts'$.

Les triangles $sm'r'$, $ss't$ sont semblables ; donc

$$\frac{m's}{ss'} = \frac{r's}{st},$$

ou

$$m's \,.\, st = ss' \,.\, r's.$$

Mais, par une propriété de l'ellipse,

$$m's \,.\, st = \overline{as}^2 = a^2;$$

donc

$$r's = \frac{a^2}{ss'},$$

ou

$$r's = \frac{a^2}{h}, \tag{1}$$

$h$ étant la hauteur du cône.

La distance $r's$ étant constante, il s'ensuit que les normales rencontrent une droite fixe, projetée en $r'$. Si l'on avait projeté sur le *plan de profil* $s'sr'$, on serait arrivé à une conclusion semblable. Ainsi :

Théorème I. — *Les normales à un cône droit, à base elliptique, menées en tous les points de cette base, rencontrent deux droites fixes* A, B, *perpendiculaires à l'axe du cône, et respectivement situées dans les deux plans principaux.*

III. D'après ce qui précède (§ I), cette proposition peut être ainsi généralisée :

Théorème II. — *Les normales à une surface du second degré, en tous les points d'une section parallèle à l'un des plans principaux, rencontrent deux droites fixes, perpendiculaires à l'axe principal correspondant, et respectivement situées dans les deux autres plans principaux.*

IV. Revenons au cas du cône; appelons $\alpha$, $\beta$ les distances des droites A, B au plan de la base. Nous avons, d'après l'équation (1) :

$$\alpha = \frac{a^2}{h}, \quad \beta = \frac{b^2}{h}.$$

Si $\alpha$ est pris arbitrairement, il en résulte

$$h = \frac{a^2}{\alpha}, \quad \beta = \frac{b^2}{a^2}\alpha;$$

et, par conséquent :

THÉORÈME III. — *Si les normales à une ellipse rencontrent une droite fixe* A, *parallèle à l'un des axes, et située dans le plan passant par cet axe, perpendiculairement au plan de la courbe, elles rencontrent aussi une droite fixe* B, *parallèle au second axe, et située dans le plan passant par cet axe, perpendiculairement au plan de la courbe.*

V. L'équation du *lieu des normales à la base du cône* est

$$\frac{a^2x^2}{(a^2 - hz)^2} + \frac{b^2y^2}{(b^2 - hz)^2} = 1.$$

Cette surface *gauche,* qui admet *deux directrices rectilignes,* admet aussi deux *sections circulaires,* déterminées par $z = \pm \frac{ab}{h}$.

*Addition.* — (*Avril* 1867.)

VI. La dernière remarque démontre les propriétés suivantes :

THÉORÈME IV. — *Les normales à un cône droit, à base elliptique, menées en tous les points de cette base, rencontrent deux circonférences fixes, ayant pour axe commun l'axe du cône.*

THÉORÈME V. — *Les normales à une surface du second degré, en tous les points d'une section parallèle à l'un des plans principaux, rencontrent deux circonférences fixes, ayant pour axe commun celui qui correspond au plan principal considéré* (*).

(*) Ce dernier énoncé, *pris à la lettre,* est en défaut dans certains cas, dont le lecteur fera aisément la discussion. Par exemple, *les normales à un paraboloïde, en tous les points d'une section parallèle à l'une des paraboles principales, rencontrent* une *droite fixe.*

## LII. — Lieu géométrique.

(*Mars* 1863.)

*En un point quelconque* M *d'une ellipse donnée, on mène la tangente* TMT′, *la normale* MN, *puis les cordes* MP, MQ, *bissectrices des angles* NMT, NMT′; *puis encore les tangentes* PS, QS *en* P, Q.

*Quel est le lieu du point* S ?

I. Supposons, pour un instant, que le point M soit fixe; prenons MT pour axe des abscisses, MN pour axe des ordonnées : l'équation de l'ellipse sera

$$Ay^2 + Bxy + x^2 + Dy = 0. \tag{1}$$

Le système des droites MP, MQ est représenté par

$$y^2 - x^2 = 0. \tag{2}$$

Ajoutant, et supprimant le facteur $y$, on trouve l'équation de la corde PQ :

$$(A + 1)y + Bx - D = 0 \ (^*). \tag{3}$$

Soit R le point où PQ rencontre MN : d'après l'équation (3),

$$MR = \frac{D}{A+1}.$$

II. Pour trouver les équations des tangentes PS, QS, il suffit de combiner, successivement, l'équation (1) avec

$$(y - x)^2 = 0, \quad (y + x)^2 = 0.$$

(*) C'est ainsi que Terquem démontrait le Théorème de Frégier : *Si un triangle rectangle* PMQ *est inscrit à une conique, et que le sommet* M *de l'angle droit soit fixe, l'hypoténuse* PQ *passe par un point fixe* R, *situé sur la normale en* M (*Nouvelles Annales*, t. II, p. 186).

On obtient ainsi :

$$(A - 1)y + (B + 2)x - D = 0, \tag{4}$$

$$(A - 1)y + (B - 2)x - D = 0. \tag{5}$$

Ces deux équations sont vérifiées par

$$x = 0, \quad y = \frac{D}{A - 1};$$

donc *les tangentes* PS, QS *se coupent sur la normale* MN.

De plus,

$$MS = \frac{D}{A - 1};$$

et, conséquemment,

$$\frac{1}{MR} + \frac{1}{MS} = \frac{2}{MN}.$$

Cette relation prouve que *les points* R, S *divisent harmoniquement la corde* MN.

En effet, PQ *est la polaire de* S.

III. Rapportons l'ellipse à son centre et à ses axes ; puis cherchons le lieu du point R. Il est facile de voir, par le Théorème de Frégier, que ce point est situé sur le diamètre M'M'' conjugué de OM. On a donc, simultanément :

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \tag{6}$$

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{y}{x}, \tag{7}$$

$$a^2x'y - b^2xy' = c^2xy. \tag{8}$$

D'après l'équation (7), *le lieu du point* R *est une ellipse semblable à l'ellipse donnée*. Éliminant $x$ et $y$, on trouve

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2. \tag{9}$$

IV. Le point S étant l'intersection de la normale en M avec la polaire de R, il faut, pour trouver l'équation du lieu cherché, éliminer $x$, $y$, $x'$, $y'$ entre les équations (6), (8), (9) jointes à

$$a^2\alpha y - b^2\beta x = c^2 xy, \tag{10}$$

$$a^2 y'\beta + b^2 x'\alpha = a^2 b^2: \tag{11}$$

dans celles-ci, $\alpha$, $\beta$ représentent les coordonnées de S.

On satisfait aux équations (6), (8), (9) en prenant

$$x = a\cos\varphi,\quad y = b\sin\varphi,\quad x' = \frac{ac^2}{a^2+b^2}\cos\varphi,\quad y' = -\frac{bc^2}{a^2+b^2}\sin\varphi.$$

Ces valeurs, substituées dans les équations (10), (11), les transforment en

$$a\alpha\sin\varphi - b\beta\cos\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi, \tag{10'}$$

$$b\alpha\cos\varphi - a\beta\sin\varphi = \frac{ab(a^2+b^2)}{c^2}; \tag{11'}$$

et il ne reste plus qu'à éliminer $\varphi$.

V. Soient, généralement, les équations

$$\mathrm{A}\sin\varphi + \mathrm{B}\cos\varphi = \mathrm{C}\sin\varphi\cos\varphi, \tag{12}$$

$$\mathrm{A}'\sin\varphi + \mathrm{B}'\cos\varphi = \mathrm{C}'. \tag{13}$$

On peut les remplacer par

$$\frac{\mathrm{C}' - \mathrm{B}'\cos\varphi}{\mathrm{A}'} = \frac{\mathrm{B}\cos\varphi}{\mathrm{C}\cos\varphi - \mathrm{A}},\qquad \frac{\mathrm{C}' - \mathrm{A}'\sin\varphi}{\mathrm{B}'} = \frac{\mathrm{A}\sin\varphi}{\mathrm{C}\sin\varphi - \mathrm{B}};$$

ou

$$\mathrm{CB}'\cos^2\varphi + (\mathrm{BA}' - \mathrm{AB}' - \mathrm{CC}')\cos\varphi + \mathrm{AC}' = 0,$$

$$\mathrm{CA}'\sin^2\varphi + (\mathrm{AB}' - \mathrm{BA}' - \mathrm{CC}')\sin\varphi + \mathrm{BC}' = 0.$$

On conclut, de ces deux-ci,

$$-\mathrm{B}'(\mathrm{AB}' - \mathrm{BA}' - \mathrm{CC}')\sin\varphi + \mathrm{A}'(\mathrm{AB}' - \mathrm{BA}' + \mathrm{CC}')\cos\varphi$$
$$= (\mathrm{AA}' + \mathrm{BB}')\mathrm{C}' + \mathrm{CA}'\mathrm{B}';$$

ou, pour abréger,

$$\mathrm{P}\sin\varphi + \mathrm{Q}\cos\varphi = \mathrm{R}. \tag{14}$$

Les équations (13), (14) donnent, immédiatement,

$$(B'R - C'Q)^2 + (C'P - A'R)^2 = (A'Q - B'P)^2;$$

c'est-à-dire, après quelques réductions,

$$\left.\begin{aligned} &(A'^2 + B'^2)\left[(A^2 + B^2)C'^2 - (AB' - BA')^2\right] \\ &+ 2CC'\left[AB'(B'^2 - C'^2) + BA'(A'^2 - C'^2)\right] \\ &+ C^2(A'^2 - C'^2)(B'^2 - C'^3) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

VI. Dans la question proposée :

$$A = a\alpha, \quad B = -b\beta, \quad C = c^2,$$

$$A' = b\alpha, \quad B' = -a\beta, \quad C' = \frac{ab(a^2 + b^2)}{c^2};$$

en sorte que l'équation du lieu décrit par le point S est :

$$\left.\begin{aligned} &(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)\left[(a^2 + b^2)^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) - c^4(\alpha^2 - \beta^2)^2\right] \\ &+ 2(a^2 + b^2)\left[c^4(a^2\beta^4 + b^2\alpha^4) - a^2b^2(a^2 + b^2)^2(\alpha^2 + \beta^2)\right] \\ &+ \left[c^4\beta^2 - b^2(a^2 + b^2)^2\right]\left[c^4\alpha^2 - a^2(a^2 + b^2)^2\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

VII. Si l'on veut construire la courbe par points, ou en faire la discussion, il est plus simple de résoudre les équations (10), (11') par rapport à $\alpha$, $\beta$. On trouve :

$$\alpha = \frac{a\cos\varphi}{c^2}\,\frac{(a^2 + b^2)b^2 - c^4\sin^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi},$$

$$\beta = \frac{b\sin\varphi}{c^2}\,\frac{(a^2 + b^2)a^2 - c^4\cos^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}.$$

## LIII. — Quelques intégrales définies.

(*Mai* 1865.)

I. $a$ étant une variable dont le module est inférieur à l'unité, soit

$$\frac{1}{1 - a^2} - \frac{1}{2^2 - a^2} + \frac{1}{3^2 - a^2} - \frac{1}{4^2 - a^2} + \cdots = \varphi(a); \qquad (1)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2+a}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3-a}+\frac{1}{3+a}\right)-\cdots=2\varphi(a). \quad (2)$$

Soient ensuite :

$$y=\frac{x^{1-a}}{1-a}-\frac{1}{2}\frac{x^{2-a}}{2-a}+\frac{1}{3}\frac{x^{3-a}}{3-a}-\cdots,$$

$$z=\frac{x^{1+a}}{1+a}-\frac{1}{2}\frac{x^{2+a}}{2+a}+\frac{1}{3}\frac{x^{3+a}}{3+a}-\cdots;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=x^{-a-1}\,l(1+x),\quad \frac{dz}{dx}=x^{a-1}\,l(1+x);$$

et, par conséquent,

$$\varphi(a)=\frac{1}{2}\int_0^1(x^a+x^{-a})\,l(1+x)\frac{dx}{x}. \quad (3)$$

On a d'ailleurs, par une formule connue (*),

$$\varphi(a)=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi}-1\right); \quad (4)$$

donc

$$\int_0^1(x^a+x^{-a})\,l(1+x)\frac{dx}{x}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi}-1\right). \quad (A)$$

II. Multiplions par $ada$ les deux membres de l'équation (A), et intégrons à partir de $a=0$. A cause de

$$\int_0^a(e^{alx}+e^{-alx})\,ada=\frac{a}{lx}(e^{alx}-e^{-alx})-\frac{1}{(lx)^2}(e^{alx}+e^{-alx}-2)$$

$$=\frac{a}{lx}(x^a-x^{-a})-\frac{1}{(lx)^2}(x^a+x^{-a}-2),$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 115.

et de

$$\int_0^a \left(\frac{\pi da}{\sin a\pi} - \frac{da}{a}\right) = \mathcal{L}\frac{\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2}}{\frac{a\pi}{2}},$$

nous aurons

$$\int_0^1 \frac{a\,\mathcal{L}x(x^a - x^{-a}) - (x^a + x^{-a} - 2)}{(\mathcal{L}\,x)^2}\,\mathcal{L}(1+x)\frac{dx}{x} = \mathcal{L}\frac{\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2}}{\frac{a\pi}{2}}\cdot \qquad \text{(B)}$$

III. Si, dans les relations générales (A), (B), on suppose $a=\frac{1}{2}$, on trouve, en changeant $x$ en $x^2$ :

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathcal{L}(1 + x^2)\,dx = \pi - 2, \qquad \text{(C)}$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)\left[(x+1)\,\mathcal{L}\,x + (1-x)\right]}{(x\,\mathcal{L}\,x)^2}\,\mathcal{L}(1 + x^2)\,dx = 2\,\mathcal{L}\frac{\pi}{4}\cdot \qquad \text{(D)}$$

IV. Ces mêmes relations deviennent, si l'on y remplace $a$ par $a\sqrt{-1}$ :

$$\int_0^1 \cos(a\,\mathcal{L}\,x)\,\mathcal{L}(1 + x)\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2a^2}\left[1 - \frac{2a\pi}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}\right], \qquad \text{(E)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\mathcal{L}\,x\right) - a\,\mathcal{L}\,x\cos\left(\frac{a}{2}\mathcal{L}\,x\right)}{(\mathcal{L}\,x)^2}\sin\left(\frac{a}{2}\mathcal{L}\,x\right)\mathcal{L}(1+x)\frac{dx}{x} \\ &\qquad = \frac{1}{4}\,\mathcal{L}\frac{e^{\frac{a\pi}{2}} - e^{-\frac{a\pi}{2}}}{\frac{a\pi}{2}\left(e^{\frac{a\pi}{2}} + e^{-\frac{a\pi}{2}}\right)}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(F)}$$

Donc, en particulier,

$$\int_0^1 \frac{2\sin\frac{\mathcal{L}x}{4} - \mathcal{L}x\cos\frac{\mathcal{L}x}{4}}{(\mathcal{L}\,x)^2}\sin\frac{\mathcal{L}x}{4}\,\mathcal{L}(1+x)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\frac{e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}}}{\frac{\pi}{4}\left(e^{\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}}\right)}\cdot \qquad \text{(G)}$$

V. Enfin, la combinaison des formules (D), (G) conduit aisément à celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4x\left[\sin\dfrac{lx}{2}-lx\cos\dfrac{lx}{2}\right]\sin\dfrac{lx}{2}+(1-x)\left[(x+1)l(x+1)-x\right]}{(x\,lx)^2}\,l(1+x^2)\,dx\\ =2\,l\,\frac{e^{\frac{\pi}{4}}-e^{-\frac{\pi}{4}}}{e^{\frac{\pi}{4}}+e^{-\frac{\pi}{4}}}.\end{aligned}\right\}\quad\text{(H)}$$

### *Addition.* — (1875.)

VI. Des formules

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{4+a^2}+\frac{1}{9+a^2}+\cdots=\frac{1}{2a^2}\left[a\pi\frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}-1\right],\quad(5)$$

$$\frac{1}{1+a^2}-\frac{1}{4+a^2}+\frac{1}{9+a^2}-\cdots=\frac{1}{2a^2}\left[1-\frac{2a\pi}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}\right]\ (^*),$$

on déduit, par addition et soustraction :

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{9+a^2}+\frac{1}{25+a^2}+\cdots=\frac{\pi}{4a}\left[\frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}-2}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}\right],$$

$$\frac{1}{4+a^2}+\frac{1}{16+a^2}+\frac{1}{36+a^2}+\cdots=\frac{1}{4a^2}\left[a\pi\frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}+2}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}-2\right];$$

ou, plus simplement :

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{9+a^2}+\frac{1}{25+a^2}+\cdots=\frac{\pi}{4a}\,\frac{e^{a\pi}-1}{e^{a\pi}+1},\qquad\text{(K)}$$

$$\frac{1}{4+a^2}+\frac{1}{16+a^2}+\frac{1}{36+a^2}+\cdots=\frac{\pi}{4a}\,\frac{e^{a\pi}+1}{e^{a\pi}-1}-\frac{1}{2a^2}\ (^{**}).\qquad\text{(L)}$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 115.

(**) Les égalités (5), (L) ne diffèrent qu'en apparence.

VII. Lorsque $a = 1$, la relation (K) devient, à cause de la formule de Leibniz,

$$\frac{e^{\pi}-1}{e^{\pi}+1} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{26}+\frac{1}{50}+\cdots}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots}.$$

Conséquemment,

$$e^{\pi} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{26}\right)-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{50}\right)+\cdots}{\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{26}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{50}\right)+\cdots}. \quad \text{(M)}$$

VIII. Des relations (K), (L) on conclut encore, en supposant $a = 1$ :

$$\frac{\pi^2}{16} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17}+\frac{1}{37}+\cdots\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{26}+\frac{1}{50}+\cdots\right) (^*). \quad \text{(N)}$$

*Autre addition.* — (*Février* 1881.)

IX. A cause de la formule, presque évidente,

$$\int_0^{\infty} e^{-mz} \sin z dz = \frac{1}{1+m^2},$$

on a

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots = \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{e^z-1} dz (^{**}).$$

Mais cette série numérique peut être représentée par une autre intégrale définie.

Posons

$$u = \frac{q^2}{2}+\frac{q^5}{5}+\frac{q^{10}}{10}+\frac{q^{17}}{17}+\cdots,$$

égalité d'où résulte :

$$\frac{du}{dq} = q+q^4+q^9+q^{16}+\cdots$$

(*) Si l'on effectue, chaque terme du produit prend la forme $\frac{1}{p^2+q^2}$.

(**) Bierens de Haan, T. 264.

On a, par la théorie des fonctions elliptiques,

$$\frac{du}{dq}=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\right) (*).$$

Donc, pour $q=1$ :

$$u=\frac{1}{2}\left[-1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 dq\sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}}\right];$$

et, finalement, à cause de la formule (5),

$$\int_0^1 dq\sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}}=\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}}. \quad \text{(P)}$$

## LIV. — Sur une transformation de série.

(*Juin* 1864.)

I. Dans un *Mémoire sur les séries des nombres aux puissances harmoniques* (?), imprimé à Kasan, en 1832, M. Simonoff se propose la question suivante :

*Connaissant*

$$\varphi(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots, \quad (1)$$

*trouver*

$$P= \quad A_1\sin x+A_2\sin 2x+\cdots, \quad (2)$$

*et*

$$Q=A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\cdots \quad (3)$$

L'emploi des exponentielles imaginaires le conduit aux formules :

$$Q=\frac{\varphi\left(e^{x\sqrt{-1}}\right)+\varphi\left(e^{-x\sqrt{-1}}\right)}{2}, \quad \text{(A)}$$

$$P=\frac{\varphi\left(e^{x\sqrt{-1}}\right)+\varphi\left(e^{-x\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}. \quad \text{(B)}$$

(*) Voir, par exemple, les *Recherches sur quelques produits indéfinis.*

Prenant $\varphi(x) = \mathcal{L}(1 + x)$, ce qui lui donne

$$Q = \mathcal{L}\left(2 \cos \frac{1}{2} x\right),$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{-1}} \mathcal{L} \frac{1 + \sqrt{-1} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{1 - \sqrt{-1} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x} = \frac{1}{2} x,$$

l'auteur arrive enfin aux relations connues :

$$\frac{1}{2} x = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \cdots \text{ (*)}, \quad (4)$$

$$\mathcal{L}\left(2 \cos \frac{1}{2} x\right) = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{4} \cos 4x + \cdots \text{ (**)}. \quad (5)$$

**II.** De ce développement, M. Simonoff en veut déduire un autre, ordonné suivant les puissances de $x$ ; mais la méthode qu'il emploie est inadmissible (pour ne rien dire de plus) ; en effet, il s'énonce ainsi :

« La dernière série nous donnera

$$\begin{aligned} \log \cos \frac{1}{2} x = &- (1 - 2 + 3 - 4 + \text{etc}) \frac{x^2}{1 . 2} \\ &+ (1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots) \frac{x^4}{1 . 2 . 3 . 4} \\ &- (1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \cdots) \frac{x^6}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$ » (***).

Il est facile de trouver, rigoureusement, la série demandée.

(*) Celle-ci a été donnée par Fourier (*Théorie de la chaleur*, p. 238).

(**) Rapportée dans mon *Traité élémentaire des séries*.

(***) Le Mémoire est plein de résultats de ce genre. Dans son préambule, l'auteur, après avoir dit que *l'équation*

$$1 - 2 + 4 - 8 + \cdots = \frac{1}{3}$$

*a l'apparence d'un paradoxe*, ajoute : « *Tous les analystes cependant ne conviennent point de ce paradoxe* » ; c'est-à-dire, probablement : *Tous les analystes*

En effet, de

$$y = \mathcal{L}\left(2\cos\frac{1}{2}x\right), \tag{6}$$

on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x.$$

Or (*) :

$$\operatorname{tg} x = 4(4-1)A_2x - 4^2(4^2-1)A_4x^3 + 4^3(4^3-1)A_6x^5 - \cdots,$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = (4-1)A_2x - (4^2-1)A_4x^3 + (4^3-1)A_6x^5 - \cdots;$$

et, par conséquent,

$$y = C - (4-1)A_2\frac{x^2}{2} + (4^2-1)A_4\frac{x^4}{4} - (4^3-1)A_6\frac{x^6}{6} + \cdots$$

D'après l'équation (6), $C = \mathcal{L}2$ ; donc

$$-\mathcal{L}\left(\cos\frac{1}{2}x\right) = (4-1)A_2\frac{x^2}{2} - (4^2-1)A_4\frac{x^4}{4} + (4^3-1)A_6\frac{x^6}{6} - \cdots, \tag{7}$$

*pour des valeurs de* x *suffisamment petites.*

III. Si l'on combine l'équation (5) avec celle-ci :

$$\mathcal{L}2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

et que l'on change ensuite $x$ en $2x$, on trouve cet autre développement :

$$-\frac{1}{2}\mathcal{L}(\cos x) = \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{3}\sin^2 3x - \frac{1}{4}\sin^2 4x + \cdots \tag{8}$$

*n'admettent pas les séries divergentes.* Il ne faut pas oublier que M. Simonoff écrivait en 1852 : à cette époque, un célèbre Géomètre allemand (cité par M. Simonoff) *cherchait les sommes des séries*

$$1 - 2^n + 3^n - 4^n + \cdots$$

$$1 - 3^n + 5^n - 7^n + \cdots !!$$

(*) *Note* XXXIII, p. 92.

IV. La série (5) peut être rattachée à l'intégrale définie

$$C = \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{L}(1+x)}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{\mathcal{L}(1+x)}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{\mathcal{L}x}{1+x^2}\,dx,$$

ou

$$C = \frac{\pi}{4}\mathcal{L}2 - \int_0^1 \frac{\mathcal{L}x}{1+x^2}\,dx \text{ (*)}, \qquad (9)$$

ou encore

$$C = \frac{\pi}{4}\mathcal{L}2 + G, \qquad (10)$$

en supposant

$$G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots = 0{,}915\,695\,594\ldots$$

En effet, si l'on remplace $x$ par $\operatorname{tg}\varphi$, on a

$$G = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathcal{L}(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi. \qquad (11)$$

Mais

$$\mathcal{L}(\operatorname{tg}\varphi) = \mathcal{L}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right) + \mathcal{L}\varphi - \mathcal{L}\cos\varphi. \qquad (12)$$

Pour développer $\mathcal{L}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)$, représentons par $z$ cette fonction ; nous aurons

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{\varphi\cot\varphi - 1}{\varphi};$$

ou, à cause de (**)

$$\varphi\cot\varphi - 1 = -4A_2\varphi^2 + 4^2A_4\varphi^4 - 4^3A_6\varphi^6 + \cdots:$$

$$z = \mathcal{L}\frac{\sin\varphi}{\varphi} = -4A_2\frac{\varphi^2}{2} + 4^2A_4\frac{\varphi^4}{4} - 4^3A_6\frac{\varphi^6}{6} + \cdots$$

Et comme

$$\mathcal{L}(\cos\varphi) = -\mathcal{L}2 + \cos 2\varphi - \frac{1}{2}\cos 4\varphi + \frac{1}{3}\cos 6\varphi - \frac{1}{4}\cos 8\varphi + \cdots, \qquad (5)$$

(*) *Mémoire sur la transformation des séries* (Académie de Belgique, t. XXXIII, p. 32). Les formules rapportées ci-dessus datent de 1859.

(**) Note XXXIII, p. 92.

l'équation (12) devient

$$
\left.\begin{aligned}
\mathcal{L}(\operatorname{tg}\varphi) = &-4\,A_2\frac{\varphi^2}{2} + 4^2 A_4 \frac{\varphi^4}{4} - 4^3 A_6 \frac{\varphi^6}{6} + \cdots + \mathcal{L}(2\varphi) \\
&- \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi - \frac{1}{3}\cos 6\varphi + \frac{1}{4}\cos 8\varphi - \cdots
\end{aligned}\right\} \quad (13)
$$

Multipliant par $d\varphi$ les deux membres, et intégrant, nous trouvons

$$
\begin{aligned}
-G = &-\frac{4A^2}{2.3}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{4^2 A_4}{4.5}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 - \frac{4^3 A_6}{6.7}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cdots + \frac{\pi}{4}\mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4} \\
&- \frac{1}{2} + \frac{1}{3.6} - \frac{1}{5.10} + \frac{1}{7.14} - \cdots
\end{aligned}
$$

La dernière ligne a pour valeur $-\frac{G}{2}$ ; donc

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{G}{2} = &\frac{A_2}{2\cdot 3}\frac{\pi^3}{4^2} - \frac{A_4}{4.5}\frac{\pi^5}{4^3} + \frac{A_6}{6.7}\frac{\pi^7}{4^4} - \frac{A_8}{8\cdot 9}\frac{\pi^9}{4^5} + \cdots \\
&- \frac{\pi}{4}\left[\mathcal{L}\pi - \mathcal{L}2 - 1\right].
\end{aligned}\right\} \quad (14)
$$

V. On a

$$
A_2 = \frac{B_1}{1.2}, \quad A_4 = \frac{B_3}{1.2.3.4}, \quad A_6 = \frac{B_5}{1.2.3.4.5.6}, \ldots;
$$

et, d'un autre côté, si l'on représente par $S_2$, $S_4$, $S_6$, ..., les sommes des puissances $2^{\text{ièmes}}$, $4^{\text{ièmes}}$, $6^{\text{ièmes}}$, ... des inverses des nombres naturels :

$$
B_1 = \frac{1.2}{2}\frac{S_2}{\pi^2}, \quad B_3 = -\frac{1.2.3.4}{2^3}\frac{S_4}{\pi^4}, \quad B_5 = \frac{1.2.3.4.5.6}{2^5}\frac{S_6}{\pi^6}, \ldots :
$$

donc

$$
A_2 = \frac{S_2}{2\pi^2}, \quad A_4 = -\frac{S_4}{2^3\pi^4}, \quad A_6 = \frac{S_6}{2^5\pi^6}, \quad A_8 = -\frac{S_8}{2^7\pi^8}, \ldots
$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (14) devient

$$
G = \frac{\pi}{16}\left[\frac{S_2}{2.3} + \frac{S_4}{4.5.16} + \frac{S_6}{6.7.16^2} + \frac{S_8}{8.9.16^3} + \cdots\right] - \frac{\pi}{2}(\mathcal{L}\pi - \mathcal{L}2 - 1). \quad (15)
$$

*Addition.* — (*Mai* 1867.)

VI. Dans mon *Mémoire sur la transformation des séries et sur quelques intégrales définies,* j'ai donné diverses expressions de la constante G (*). En partant de la formule (12), on peut exprimer cette constante par de nouvelles intégrales définies, assez remarquables.

A cet effet, j'observe d'abord que, de la relation connue

$$\frac{1}{\cos x} = 2\int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}} d\alpha \ (^{**}),$$

résulte

$$\mathcal{L}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \frac{d\alpha}{\alpha},$$

ou

$$\mathcal{L}\cdot\operatorname{tg}\varphi = \int_0^\infty \frac{e^{4\alpha\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} - e^{-4\alpha\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

D'ailleurs :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{4\alpha\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} d\varphi = \frac{1}{4\alpha}\left(1 - e^{-\pi\alpha}\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-4\alpha\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} d\varphi = -\frac{1}{4\alpha}\left(1 - e^{\pi\alpha}\right);$$

donc, à cause de la formule (11) :

$$G = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha} - 2}{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}} \frac{d\alpha}{\alpha^2};$$

ou, par le changement de $\pi\alpha$ en $\alpha$ :

$$G = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha} - 2}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} \frac{d\alpha}{\alpha^2}. \qquad (16)$$

(*) Voir aussi les *Recherches sur la constante* G *et sur les intégrales eulériennes* (Académie de Saint-Pétersbourg, 1883).

(**) Note XXXV, p. 118.

**VII.** Si l'on intègre par parties, la fonction

$$\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}-2}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}\,\frac{1}{\alpha}$$

s'annule aux deux limites ; donc

$$\mathrm{G}=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{(e^{\alpha}+e^{-\alpha})^{2}}\,\frac{d\alpha}{\alpha}. \tag{17}$$

**VIII.** La constante G étant connue, il en est de même des intégrales (16) et (17), ainsi que de toutes celles qu'on peut déduire de ces deux-ci. Il paraît difficile d'en tirer des développements en séries, plus convergents que ceux auxquels je suis parvenu dans le Mémoire cité.

*Autre addition.* — (*Octobre* 1884.)

**IX.** La formule (5) (p. 207) peut être écrite ainsi :

$$\mathcal{L}\left(2\cos\frac{1}{2}x\right)=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cos nx. \tag{18}$$

Il en résulte

$$2\cos 2ax\,\mathcal{L}\left(2\cos\frac{1}{2}x\right)=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Big[\cos(n+2a)x+\cos(n-2a)x\Big];$$

puis, en supposant que $a$ soit un nombre *entier* :

$$\begin{aligned}2\cos 2ax\,\mathcal{L}\left(2\cos\frac{1}{2}x\right)=&\sum_{1}^{2a-1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Big[\cos(n+2a)x+\cos(n-2a)x\Big]\\&+\sum_{2a+1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Big[\cos(n+2a)x+\cos(n-2a)x\Big]\\&-\frac{1}{2a}\Big[\cos 4ax+1\Big].\end{aligned}$$

Multiplions par $dx$, et intégrons entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ :

$$
\left.\begin{aligned}
2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2ax\, \mathcal{L}\left(2\cos\frac{1}{2}x\right)dx = &\sum_1^{2a-1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left[\frac{\sin(n+2a)\frac{\pi}{2}}{n+2a}+\frac{\sin(n-2a)\frac{\pi}{2}}{n-2a}\right]\\
&+\sum_{2a+1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left[\frac{\sin(n+2a)\frac{\pi}{2}}{n+2a}+\frac{\sin(n-2a)\frac{\pi}{2}}{n-2a}\right]\\
&-\frac{\pi}{4a}.
\end{aligned}\right\} \quad (19)
$$

X. Lorsque $n$ est *pair*, les sinus s'annulent. D'autre part, à cause de

$$\left(n+2a\right)\frac{\pi}{2}-\left(n-2a\right)\frac{\pi}{2}=2a\pi:$$

$$\sin\left(n-2a\right)\frac{\pi}{2}=\sin\left(n+2a\right)\frac{\pi}{2}.$$

Conséquemment, si l'on pose :

$$S_1=\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sin(n+2a)\frac{\pi}{2}}{n+2a},\quad S_2=\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sin(n+2a)\frac{\pi}{2}}{n-2a},\quad (20)$$

les valeurs de $n$ étant *impaires*, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2ax\,\mathcal{L}\left(2\cos\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{1}{2}\left(S_1+S_2\right)-\frac{\pi}{8a}.\quad (21)$$

XI. Selon que $a$ est *pair* ou *impair*,

$$\sin\left(n+2a\right)\frac{\pi}{2}=\pm\sin n\frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$S_1=\pm\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n+2a},\quad S_2=\pm\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n-2a};\quad (22)$$

le signe + répondant au cas de $a$ *pair*. Mais ces formules peuvent encore être simplifiées.

En effet :

$$\frac{1}{n(n+2a)}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2a}\right], \quad \frac{1}{n(n-2a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{n-2a}-\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$S_1=\pm\frac{1}{2a}\sum_1^\infty\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2a}\right]\sin n\frac{\pi}{2},$$

$$S_1=\pm\frac{1}{2a}\sum_1^\infty\left[\frac{1}{n-2a}-\frac{1}{n}\right]\sin n\frac{\pi}{2};$$

puis

$$S_1+S_2=\pm\frac{1}{2a}\sum_1^\infty\left[\frac{1}{n-2a}-\frac{1}{n+2a}\right]\sin n\frac{\pi}{2}. \tag{23}$$

XII. La somme contenue dans le second membre peut être décomposée en

$$\sum_1^{4a-1}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n-2a}+\sum_{4a+1}^\infty\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n-2a}-\sum_1^\infty\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n+2a}.$$

Si, dans la deuxième somme partielle, on remplace $n$ par $4a+p$, elle devient

$$\sum_1^\infty\frac{\sin p\frac{\pi}{2}}{2a+p}=\sum_1^\infty\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n+2a};$$

en sorte que la formule (23) se réduit à

$$S_1+S_2=\pm\frac{1}{2a}\sum_1^{4a-1}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n-2a}. \tag{24}$$

Faisant $n=1, 3, 5, \ldots, 2a-1, 2a+1, \ldots, 4a-1$, on trouve

$$\sum_1^{4a-1}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n-2a}=\frac{1}{1-2a}-\frac{1}{3-2a}+\cdots\pm1\pm1\mp\cdots-\frac{1}{2a-1},$$

ou

$$\sum_1^{4a-1}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n-2a}=\pm2\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\mp\frac{1}{2a-1}\right],$$

selon que $a$ est *pair* ou *impair*. La substitution dans les égalités (24), (21) donne enfin

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2ax \,\mathcal{L}\left(2\cos\frac{1}{2}x\right)dx = \frac{1}{2a}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\mp\frac{1}{2a-1}-\frac{\pi}{4}\right](^*). \quad (25)$$

XIII. De cette formule remarquable (**), on conclut, en intégrant par parties,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2ax \,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x\,dx = 2\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\mp\frac{1}{2a-1}-\frac{\pi}{4}\right]; \quad (26)$$

puis, de celle-ci :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin(2a+2)x - \sin 2ax\right] \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x\,dx = \pm\frac{2}{2a+1}\,(^{***}). \quad (27)$$

## LV. — Sur un problème d'Algèbre légale, et sur une transformation de série (IV).

(*Mars* 1862.)

I. D'après le Code civil (art. 757), *le droit de l'enfant naturel est d'un tiers de la portion héréditaire qu'il aurait eue, s'il eût été légitime* (V).

(*) La méthode précédente, bien connue, est applicable à la détermination de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2ax \,\mathcal{L}\left(2\cos\frac{1}{2}x\right)dx;$$

mais le résultat est moins simple que le précédent.

(**) Je ne l'ai pas trouvée dans les *Tables* de M. Bierens de Haan.

(***) Cette formule, démontrable directement, est en défaut pour $a = 0$. On en peut déduire toutes les autres.

(IV) Note extraite des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

(V) Cette partie de l'article 757 se rapporte au cas du partage entre enfants légitimes et enfants naturels. Lorsque des enfants naturels concourent avec des ascendants ou des collatéraux, la loi a des conséquences bizarres et même absurdes, dont je ne parlerai pas ici. (*Voyez* une brochure intitulée : *L'Article* 757. — *Application de l'Algèbre au Code civil.*)

Soient : $l$ le nombre des enfants légitimes ; $n$ le nombre des enfants naturels ; $x_{l,n}$ la part d'un enfant légitime ; $y_{l,n}$ la part d'un enfant naturel.

On a d'abord, en prenant pour unité la somme à partager entre les $l + n$ enfants,

$$lx_{l,n} + ny_{l,n} = 1. \tag{1}$$

D'un autre côté, conformément à la prescription ci-dessus,

$$y_{l,n} = \frac{1}{3} x_{l+1,\, n-1}. \tag{2}$$

De ces deux relations, on conclut aisément la formule suivante, connue depuis longtemps (*),

$$x_{l,n} = \frac{1}{l} - \frac{n}{3l(l+1)} + \frac{n(n-1)}{3^2 l(l+1)(l+2)} - \cdots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{3^n l(l+1)\ldots(l+n)}. \tag{3}$$

II. La complication de cette formule est peut-être ce qui empêche les jurisconsultes d'obéir, sinon à l'esprit, du moins au texte de la loi, quand il s'agit pour eux d'effectuer un partage entre enfants légitimes et enfants naturels. Mais on peut la remplacer par une autre expression, beaucoup plus commode.

On a en effet

$$\frac{1}{l(l+1)(l+2)\ldots(l+p)} = \frac{1}{1.2.3\ldots p} \int_0^1 (1-\theta)^p \theta^{l-1} d\theta ;$$

donc

$$x_{l,n} =$$

$$\int_0^1 \theta^{l-1} d\theta \left[ 1 - \frac{1}{3}\frac{n}{1}(1-\theta) + \frac{1}{3^2}\frac{n(n-1)}{1.2}(1-\theta)^2 - \cdots \pm \frac{1}{3^n}(1-\theta)^n \right]$$

$$= \frac{1}{3^n} \int_0^1 \theta^{l-1} (2+\theta)^n \, d\theta ;$$

d'où enfin

$$x_{l,n} = \frac{1}{3^n} \left[ 2^n \frac{1}{l} + \frac{n}{1} 2^{n-1} \frac{1}{1+l} + \frac{n(n-1)}{1.2} 2^{n-2} \frac{1}{l+2} + \cdots + \frac{1}{l+n} \right]. \tag{4}$$

(*) Elle a été donnée d'abord par M. Cournot (*Bulletin de Férussac*, t. XVI, p. 3).

Il est visible que, pour former la quantité entre parenthèses, il suffit de développer $(2+1)^n$ et de diviser, par $l$, $l+1$, $l+2, \ldots, l+n$, les termes du développement. Du reste, il est facile de vérifier, par un procédé purement algébrique, l'équivalence des deux expressions de $x_{l,n}$.

**III.** Cette équivalence étant démontrée, il en résulte que l'on a

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{l}-\frac{n}{l(l+1)}z+\frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}z^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{l(l+1)(l+2)(l+3)}z^3+\ldots \\ =(1-z)^n\frac{1}{l}+\left[\frac{n}{1}\frac{1}{l+1}\left(\frac{z}{1-z}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{l+2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\ldots\right], \end{array}\right\} (5)$$

même quand les deux membres, au lieu d'être composés d'un nombre fini de termes, deviennent des séries *convergentes*. Par exemple, en supposant

$$l=1, \quad n=-1, \quad z=\frac{1}{2},$$

on trouve

$$1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right);$$

ce qui est exact.

**IV.** Si l'on pose

$$\frac{z}{1-z}=-t,$$

d'où résulte

$$z=\frac{-t}{1-t},$$

l'équation (5) devient

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{l}-\frac{n}{1}\frac{1}{l+1}t+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{l+2}t^2-\ldots \\ =(1-t)^n\left[\frac{1}{l}+\frac{n}{l(l+1)}\frac{t}{1-t}+\frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}\left(\frac{t}{1-t}\right)^2+\ldots\right] \end{array}\right\}$$

ou plutôt, *par le changement de* t *en* z :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{l}-\frac{n}{1}\frac{1}{l+1}z+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{l+2}z^2-\dots\\ &=(1-z)^n\left[\frac{1}{l}+\frac{n}{l(l+1)}\frac{z}{1-z}+\frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\dots\right.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Cette seconde transformation est, pour ainsi dire, *conjuguée* de la première. On peut les renfermer dans la *double* formule :

$$\left.\begin{aligned}(1-z)^n&=\frac{\dfrac{1}{l}-\dfrac{n}{1}\dfrac{1}{l+1}z+\dfrac{n(n-1)}{1.2}\dfrac{1}{l+2}z^2-\dots}{\dfrac{1}{l}+\dfrac{n}{l(l+1)}\dfrac{z}{1-z}+\dfrac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}\left(\dfrac{z}{1-z}\right)^2+\dots}\\ &=\frac{\dfrac{1}{l}-\dfrac{n}{l(l+1)}z+\dfrac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}z^2+\dots}{\dfrac{1}{l}+\dfrac{n}{1}\dfrac{1}{l+1}\dfrac{z}{1-z}+\dfrac{n(n-1)}{1.2}\dfrac{1}{l+2}\left(\dfrac{z}{1-z}\right)^2+\dots}.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Celle-ci a d'assez nombreuses conséquences, sur lesquelles je pourrai revenir dans une autre occasion (*).

## LVI. — Une propriété des déterminants.

(*Octobre* 1863.)

I. Soient les équations

$$\left.\begin{aligned}A_1x_1+B_1x_2+C_1x_3&=0,\\ A_2x_1+B_2x_2+C_2x_3&=0,\\ A_3x_1+B_3x_2+C_3x_3&=\Delta,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

dans lesquelles

$$\begin{aligned}A_1&=b_2c_3-c_2b_3, & B_1&=a_2c_3-c_2a_3, & C_1&=a_2b_3-b_2a_3,\\ A_2&=b_1c_3-c_1b_3, & B_2&=a_1c_3-c_1a_3, & C_2&=a_1b_3-b_1a_3,\\ A_3&=b_1c_2-c_1b_2, & B_3&=a_1c_2-c_1a_2, & C_3&=a_1b_2-b_1a_2,\end{aligned}$$
$$\Delta=a_1b_2c_3-a_1c_2b_3+c_1a_2b_3-b_1a_2c_3+b_1c_2a_3-c_1b_2a_3.$$

(*) Voir le petit Mémoire intitulé : *Sur quelques sommations et transformations de séries* (Académie des *Nuovi Lincei*, 1870).

On y satisfait en prenant

$$x_1 = a_3, \quad x_2 = -b_3, \quad x_3 = c_3.$$

Mais, par l'application des formules de Cramer, on trouve

$$x_1 = \frac{N_1}{D}, \quad x_2 = \frac{N_2}{D}, \quad x_3 = \frac{N_3}{D},$$

en supposant

$$D = A_1B_2C_3 - A_1C_2B_3 + C_1A_2B_3 - B_1A_2C_3 + B_1C_2A_3 - C_1B_2A_3,$$
$$N_1 = (B_1C_2 - C_1B_2)\Delta, \quad N_2 = -(A_1C_2 - C_1A_2)\Delta, \quad N_3 = (A_1B_2 - B_1A_2)\Delta;$$

donc

$$\frac{B_1C_2 - C_1B_2}{a_3} = \frac{A_1C_2 - C_1A_2}{b_3} = \frac{A_1B_2 - B_1A_2}{c_3} = \frac{D}{\Delta} = \lambda. \quad (2)$$

Ainsi : 1° *les déterminants de déterminants,*

$$B_1C_2 - C_1B_2, \quad A_1C_2 - C_1A_2, \quad A_1B_2 - B_1A_2,$$
$$A_1B_2C_3 - A_1C_2B_3 + C_1A_2B_3 - B_1A_2C_3 + B_1C_2A_3 - C_1B_2A_3$$

*sont proportionnels aux quantités*

$$a_3, \qquad b_3, \qquad c_3,$$
$$a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3.$$

De plus, comme le calcul direct donne

$$\lambda = \frac{B_1C_2 - C_1B_2}{a_3} = \Delta:$$

2° *le déterminant de déterminant,* D, *est égal au carré du déterminant* Δ.

II. Soient maintenant les équations

$$\left.\begin{aligned} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1x_4 &= 0, \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2x_4 &= 0, \\ A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 + D_3x_4 &= 0, \\ A_4x_1 + B_4x_2 + C_4x_3 + D_4x_4 &= A, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

dans lesquelles :

$$A_1 = \sum b_2c_3d_4,\quad B_1 = \sum a_2c_3d_4,\quad C_1 = \sum a_2b_3d_4,\quad D_1 = \sum a_2b_3c_4,$$
$$A_2 = \sum b_1c_3d_4,\quad B_2 = \sum a_1c_3d_4,\quad C_2 = \sum a_1b_3d_4,\quad D_2 = \sum a_1b_3c_4,$$
$$A_3 = \sum b_1c_2d_4,\quad B_3 = \sum a_1c_2d_4,\quad C_3 = \sum a_1b_2d_4,\quad D_3 = \sum a_1b_2c_4,$$
$$A_4 = \sum b_1c_2d_3,\quad B_4 = \sum a_1c_2d_3,\quad C_4 = \sum a_1b_2d_3,\quad D_4 = \sum a_1b_2c_3,$$
$$A = \sum a_1b_2c_3d_4,$$

suivant la notation de Cauchy (*).

On reconnaît facilement que les équations (3) sont vérifiées par

$$x_1 = -a_4,\quad x_2 = +b_4,\quad x_3 = -c_4,\quad x_4 = +d_4,$$

d'où l'on conclut, comme dans le premier cas,

$$\frac{\sum B_1C_2D_3}{a_4} = \frac{\sum A_1C_2D_3}{b_4} = \frac{\sum A_1B_2D_3}{c_4} = \frac{\sum A_1B_2C_3}{d_4} = \frac{D}{A} = \lambda : \qquad (4)$$

cette fois,

$$D = \sum A_1B_2C_3D_4.$$

III. 1° Considérons, par exemple, l'égalité

$$\sum B_1C_2D_3 = \frac{a_4 \sum A_1C_2D_3}{b_4}.$$

Le premier membre est entier; $b_4$ est premier avec $a_4$; donc $b_4$ divise $\Sigma\, A_1C_2D_3$. Autrement dit, *le rapport commun* $\lambda$ *est un polynôme entier.*

2° Le déterminant $A_1$ contient les lettres $b$, $c$, $d$ et les indices 2, 3, 4. De même $B_2$ est composé des lettres $a$, $c$, $d$, affectées des indices 1, 3, 4. Enfin, $C_3$ renferme les lettres $a$, $b$, $d$ et les

(*) Dans chacun de ces déterminants, un terme a le signe + ou le signe — suivant qu'il contient un nombre pair ou un nombre impair d'inversions alphabétiques.

indices 1, 2, 4. De là résulte que *chaque terme de* $\lambda$ (abstraction faite du coefficient numérique) *a la forme*

$$p_1 q_2 r_3 s_4 + p'_1 q'_2 r'_3 s'_4,$$

p, q, r, s, *et* p', q', r', s', *tenant lieu des lettres* a, b, c, d.

3° D'après le mode de formation des quantités $A_1$, $B_2$, $C_3$, chacun des facteurs $p_1 q_2 r_3 s_4$, $p'_1 q'_2 r'_3 s'_4$ a le signe + ou le signe —, suivant qu'il renferme un nombre pair ou un nombre impair d'inversions alphabétiques; conséquemment, *ce facteur est un terme du déterminant* $\Delta$.

4° Ces remarques tendent à faire croire que $\lambda = \Delta^2$ (*).

IV. Dans le cas de cinq équations à cinq inconnues,

$$y = \frac{\sum A_1 B_2 C_3 D_4}{e_5}.$$

Cette fonction, du *quinzième degré*, serait probablement $(\Sigma\, a_1 b_2 c_3 d_4 e_5)^3$. Et ainsi de suite (**).

## LVII. — Démonstration de la formule de Stirling.

(*Novembre* 1866) (***).

I. Si l'on suppose

$$\frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2} = F(x), \tag{1}$$

(*) C'est là une simple induction, qui aurait grand besoin d'être justifiée, au cas qu'elle le puisse être. Si je me décide à faire paraître cette ébauche de démonstration, c'est afin de provoquer des recherches sur une question intéressante (mai 1867).

(**) La propriété qui faisait l'objet de cette Note est démontrée, au moins en partie, dans le célèbre *Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir*, etc., par A. L. Cauchy (*Journal de l'École polytechnique*, 17e Cahier). (Octobre 1884.)

(***) Cette démonstration a quelque analogie avec celle qui a été donnée par M. Serret (*Calcul différentiel de Lacroix*, 6e édition). Cependant, si je ne me trompe, elle est plus simple et plus directe que celle-ci (mai 1867).

on trouve

$$F(0)=0,\ F'(0)=0,\ F''(0)=\frac{1}{6},$$

puis

$$\frac{p-1}{2(p+1)}=F^{(p)}(0)+\frac{p}{2}F^{(p-1)}(0)+\frac{p(p-1)}{2.3}F^{(p-2)}(0)+\cdots+\frac{p}{2}F''(0). \quad (2)$$

Cette relation générale ne diffère pas de celle qui existe entre les Nombres de Bernoulli (*); donc, à cause de

$$F''(0)=\frac{1}{6}=B_1,$$

on a

$$F^{(p)}(0)=B_{p-1}; \quad (3)$$

et, pour des valeurs réelles ou imaginaires de $x$, dont le module soit suffisamment petit :

$$F(x)=\frac{B_1}{1.2}x^2+\frac{B_3}{1.2.3.4}x^4+\cdots+\frac{B_{2n-1}}{1.2.3\ldots 2n}x^{2n}+\cdots\ (^{**}). \quad (4)$$

II. De l'identité

$$\frac{1}{e^{2\pi\alpha}-1}=\sum_1^\infty e^{-2n\pi\alpha},$$

on tire

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^{2\pi\alpha}-1}d\alpha=\sum_1^\infty\int_0^\infty e^{-2n\pi\alpha}\sin \alpha x d\alpha;$$

ou, par une formule connue (***),

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^{2\pi\alpha}-1}d\alpha=\frac{x}{4\pi^2}\sum_1^\infty\frac{1}{\frac{x^2}{4\pi^2}+n^2}. \quad (5)$$

(*) Voyez *Note* XXXVI, p. 119.

(**) La fonction $F(x)$ est *paire;* donc $F^{2n-1}(0)=B_{2n-2}=0$.

(***) *Note* LIII, p. 205.

D'un autre côté,

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\frac{x^2}{4\pi^2}+n^2} = \frac{2\pi^2}{x^2}\left[\frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}-1\right] (^*),$$

ou

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\frac{x^2}{4\pi^2}+n^2} = \frac{2\pi^2}{x^2}\,\mathrm{F}(x). \tag{6}$$

Conséquemment

$$\mathrm{F}(x) = 2x\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^{2\pi\alpha}-1}\,d\alpha\ (^{**}). \tag{7}$$

III. $\alpha x$ étant un arc positif, de grandeur quelconque, et $\theta$ désignant un nombre compris entre 0 et 1, on a

$$\sin \alpha x = \frac{\alpha x}{1} - \frac{\alpha^3 x^3}{1.2.3} + \cdots \pm \frac{\alpha^{2n-1}x^{2n-1}}{1.2.3\ldots\overline{2n-1}} \mp \theta\,\frac{\alpha^{2n+1}x^{2n+1}}{1.2.3\ldots\overline{2n+1}} (^{***}).$$

La formule (7) équivaut donc à

$$\frac{1}{2}\mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{1}\int_0^\infty \frac{\alpha\,d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1} - \frac{x^4}{1.2.3}\int_0^\infty \frac{\alpha^3 d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1} + \cdots$$

$$\mp \frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots\overline{2n-1}}\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n-1}d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1} \mp \frac{x^{2n+2}}{1.2.3\ldots\overline{2n+1}}\int_0^\infty \theta\,\frac{\alpha^{2n+1}d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}. \tag{8}$$

Chacun des éléments de la dernière intégrale est moindre que

$$\frac{\alpha^{2n+1}d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1};$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 115.

(**) *Note* XLV, p. 171.

(***) Quand on développe $\sin \alpha x$ par la formule de Mac-Laurin, on vérifie seulement que $\theta$ est compris entre — 1 et + 1 (Sturm, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 98). Mais, par des considérations très simples, on prouve les inégalités

$$\sin \alpha x < \alpha x,\quad \sin \alpha x > \alpha x - \frac{\alpha^3 x^3}{1.2.3},\quad \sin \alpha x < \alpha x - \frac{\alpha^3 x^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5 x^5}{1.2.3.4.5},\ \text{etc.};$$

d'où résulte

$$0 < \theta < 1.$$

donc

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{1}\int_0^\infty \frac{\alpha\, d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1} - \frac{x^4}{1.2.3}\int_0^\infty \frac{\alpha^3 d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1} + \cdots \\
\pm \frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots\overline{2n-1}}\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1} \mp \theta_1 \frac{x^{2n+2}}{1.2.3\ldots\overline{2n+1}}\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n+1} d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1};
\end{aligned}\right\} \tag{9}
$$

$\theta_1$ désignant, comme $\theta$, un nombre compris entre 0 et 1.

IV. Si l'on compare les développements (4) et (9), on trouve d'abord la *formule de Plana :*

$$
\mathrm{B}_{2n-1} = \pm 4n \int_0^\infty \frac{\alpha^{2n-1}\, d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}; \tag{10}
$$

puis l'équation

$$
\mathrm{F}(x) = \frac{\mathrm{B}_1}{1.2}x^2 + \frac{\mathrm{B}_3}{1.2.3\,4}x^4 + \cdots + \frac{\mathrm{B}_{2n-1}}{1.2.3\ldots 2n}x^{2n} + \theta_1 \frac{\mathrm{B}_{2n+1}}{1.2.3\ldots\overline{2n+2}}x^{2n+2}, \tag{11}
$$

due à Cauchy, et qui subsiste pour des valeurs *quelconques* de $x$, réelles ou imaginaires.

V. A cause de

$$
\ell x = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha x}}{\alpha}\, d\alpha, \tag{12}
$$

on a, comme l'on sait, pour toute valeur entière et positive de $x$,

$$
\ell(1\,.\,2\,.\,3 \ldots x) = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\left[e^{-\alpha}x - \frac{1-e^{-\alpha x}}{e^{\alpha}-1}\right] (^*). \tag{13}
$$

Si donc, comme l'a fait M. Liouville, on représente par $u$ la fonction de $x$ contenue dans le second membre, on aura

$$
\frac{du}{dx} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\left[e^{-\alpha} - \frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}e^{-\alpha x}\right]. \tag{14}
$$

La fraction

$$
\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1} = 1 - \frac{\alpha}{2} + \mathrm{F}(\alpha);
$$

(*) *Journal de Mathématiques,* t. IV, p. 318.

ainsi

$$\frac{du}{dx}=\int_0^\infty\left[\frac{e^{-\alpha}-e^{-\alpha x}}{\alpha}+\frac{1}{2}e^{-\alpha x}-\frac{F(\alpha)}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]d\alpha;$$

ou, à cause de la formule (12),

$$\frac{du}{dx}=\mathcal{L}x+\frac{1}{2x}-\int_0^\infty\frac{F(\alpha)}{\alpha}e^{-\alpha x}\,d\alpha. \tag{15}$$

Le $n^e$ terme de $F(\alpha)$ étant

$$\frac{B_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)}\alpha^{2n},$$

l'intégrale définie correspondante devient

$$\frac{B_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{2n-1}d\alpha=\frac{1}{2n}\frac{B_{2n-1}}{x^{2n}}.$$

Quant à l'intégrale

$$\int_0^\infty \theta_1 e^{-\alpha x}\alpha^{2n+1}d\alpha,$$

elle se réduit à

$$\theta_2\frac{\Gamma(2n+2)}{x^{2n+2}},$$

$\theta_2$ étant compris entre 0 et 1.

Par suite,

$$\frac{du}{dx}=\mathcal{L}x+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\frac{B_1}{x^2}-\frac{1}{4}\frac{B_3}{x^4}-\dots-\frac{1}{2n}\frac{B_{2n-1}}{x^{2n}}-\frac{\theta_2}{(2n+2)}\frac{B_{2n+1}}{x^{2n+2}}; \tag{16}$$

et enfin, par un calcul facile et très connu,

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}(1.2.3\dots x)&=x\mathcal{L}x+\frac{1}{2}\mathcal{L}(2\pi x)-x+\frac{B_1}{1.2x}+\frac{B_3}{3.4x^3}+\dots\\&\quad\frac{B_{2n-1}}{(2n-1)2n.x^{2n-1}}+\Theta\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)x^{2n+1}}.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Telle est la *formule de Stirling*. Le facteur $\Theta$, qui entre dans l'*expression du reste*, est, bien entendu, compris entre 0 et 1 (*).

(*) On peut consulter, sur cette question, les Mémoires intitulés : *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet*, *Recherches sur la constante* G, etc.

## LVIII. — Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde.

(*Mai* 1867.)

I. On sait que, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant les angles formés, avec les axes de coordonnées, par la normale MN à une surface quelconque S, les lignes de courbure de cette surface peuvent être ainsi représentées :

$$\frac{dx}{d \cdot \cos\lambda} = \frac{dy}{d \cdot \cos\mu} = \frac{dz}{d \cdot \cos\nu}. \tag{1}$$

Introduisons, comme nouvelles variables, le rayon vecteur $u$ et la distance $v$ de l'origine au plan tangent en M; de manière que

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{2}$$

$$v = x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu. \tag{3}$$

La normale étant perpendiculaire à l'élément MM′ de la ligne de courbure,

$$\cos\lambda \cdot dx + \cos\mu \cdot dy + \cos\nu \cdot dz = 0;$$

et, par conséquent,

$$dv = x d(\cos\lambda) + y d(\cos\mu) + z d(\cos\nu). \tag{4}$$

La valeur commune des rapports (1) est donc

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{xd(\cos\lambda) + yd(\cos\mu) + zd(\cos\nu)} = \frac{udu}{dv};$$

et l'on peut prendre, comme équations des lignes de courbure,

$$\frac{dx}{d \cdot \cos\lambda} = \frac{dy}{d \cdot \cos\mu} = \frac{dz}{d \cdot \cos\nu} = \frac{udu}{dv}. \tag{5}$$

II. Dans le cas de l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{6}$$

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{v^2}. \tag{7}$$

De ces équations, jointes à la relation (2), on tire

$$x^2 = a^4 \frac{\frac{b^2c^2}{v^2} + u^2 - b^2 - c^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}. \qquad (8)$$

De plus,

$$\cos\lambda = \frac{vx}{a^2}, \quad d(\cos\lambda) = \frac{vdx + xdv}{a^2};$$

donc

$$\frac{a^2dx}{vdx + xdv} = \frac{udu}{dv},$$

ou

$$(a^2dv - vudu)\,xdx = ux^2\,dudv.$$

Si l'on remplace $x^2$ et $xdx$ par leurs valeurs, on trouve, après quelques réductions,

$$u^2v^4du^2 - uv^3(a^2 + b^2 + c^2 - u^2)\,dudv + a^2b^2c^2dv^2 = 0. \qquad (9)$$

Telle est *l'équation différentielle des lignes de courbure de l'ellipsoïde*, rapportées aux variables $u$, $v$.

III. Pour la simplifier, posons

$$u^2 = U + a^2 + b^2 + c^2, \quad v^2 = \frac{a^2b^2c^2}{V}: \qquad (10)$$

il vient

$$VdU^2 - UdUdV + dV^2 = 0,$$

ou

$$U = V\frac{dU}{dV} + \frac{dV}{dU}. \qquad (11)$$

Cette équation, qui rentre dans la classe considérée par Clairaut (*), a pour intégrale :

$$U = mV + \frac{1}{m},$$

$m$ étant une constante arbitraire.

(*) Il y a quelques années, M. Mansion a démontré ce beau théorème : *Toute équation du premier ordre est réductible à l'équation de Clairaut* (Bulletin de l'Académie de Belgique, février 1877). (Octobre 1884.)

Par suite, l'intégrale de l'équation (9) est

$$u^2 - a^2 - b^2 - c^2 = m\,\frac{a^2b^2c^2}{v^2} + \frac{1}{m};$$

ou, si l'on remplace $m$ par $-\frac{l}{abc}$ :

$$abc + (u^2 - a^2 - b^2 - c^2)\,l + \frac{abc}{v^2}\,l^2 = 0. \qquad (12)$$

A cause des valeurs de $u^2$, $v^2$, cette équation équivaut à

$$\left(\frac{bcl}{a^3}+1\right)x^2 + \left(\frac{cal}{b^3}+1\right)y^2 + \left(\frac{abl}{c^3}+1\right)z^2 = a^2+b^2+c^2 - \frac{abc}{l}. \qquad (13)$$

IV. Les surfaces représentées par l'équation (13) sont des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes, ayant mêmes plans principaux que l'ellipsoïde donné, et dont les intersections avec celui-ci sont les lignes de courbure de cette surface. Lorsque

$$l = \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2},$$

l'équation (13) représente l'origine. De même si $l = \pm\infty$, etc.

Si l'on élimine le paramètre $l$ entre l'équation (12) et sa dérivée relative à $l$, on trouve

$$(u^2 - a^2 - b^2 - c^2)^2 = \frac{4a^2b^2c^2}{v^2}. \qquad (14)$$

Cette relation est une conséquence de :

$$u^2 = a^2 + b^2 + c^2 + k^2, \qquad \frac{4a^2b^2c^2}{v^2} = k^4;$$

donc *la surface* (14), *enveloppe des ellipsoïdes* (13), *peut être engendrée par les intersections d'une série d'ellipsoïdes semblables et de sphères.*

En outre, la combinaison des équations (12), (14) conduit à

$$2abc + (u^2 - a^2 - b^2 - c^2)\,l = 0; \qquad (15)$$

par suite, *chacun des ellipsoïdes enveloppés touche, suivant une courbe sphérique, la surface-enveloppe.*

V. Combinons, par addition, les équations (6), (13), après avoir multiplié par $\lambda^3$ les deux membres de la première ; le résultat peut être écrit sous la forme abrégée :

$$\sum \left( l + \frac{bcl^2}{a^3} + \frac{\lambda^3}{a^2} \right) x^2 = \lambda^3 + (a^2 + b^2 + c^2)\lambda - abc. \tag{16}$$

Pour une valeur donnée de $l$, cette relation appartient à toutes les surfaces du second degré qui passent par la ligne de courbure correspondante : on doit donc pouvoir déterminer $\lambda$ de manière que l'équation (16) représente les hyperboloïdes homofocaux avec l'ellipsoïde donné. Cette condition donne

$$\frac{\lambda^3 + (a^2 + b^2 + c^2)l - abc}{a\lambda^3 + a^3 l + bcl^2} - \frac{\lambda^3 + (a^2 + b^2 + c^2)l - abc}{b\lambda^3 + b^3 l + cal^2} = a^2 - b^2;$$

équation d'où l'on tire

$$\lambda^3 = l^3 - \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{abc}\, l.$$

L'équation (16) devient ainsi :

$$\sum \left[ l + \frac{bcl^2}{a^3} + \frac{l^3}{a^2} - \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^3bc} l^2 \right] x^2$$

$$= l^3 - \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{abc} l^2 + (a^2 + b^2 + c^2) l - abc;$$

ou, plus simplement,

$$\sum \left( l - \frac{ca}{b} \right) \left( l - \frac{ab}{c} \right) \frac{l}{a^2} x^2 = \left( l - \frac{bc}{a} \right) \left( l - \frac{ca}{b} \right) \left( l - \frac{ab}{c} \right),$$

ou enfin

$$\frac{x^2}{a^2 - \dfrac{abc}{l}} + \frac{y^2}{b^2 - \dfrac{abc}{l}} + \frac{z^2}{c^2 - \dfrac{abc}{l}} = 1. \tag{17}$$

## LIX. — Sur le plus grand commun diviseur algébrique.

(*Septembre* 1865.)

I. Théorème. — *Soient* $F_0$, $F_1$ *deux polynômes à coefficients entiers, dont les degrés sont* m, m — 1. *Soit* $F_2$ *le reste de la division de* $B_0^2F_0$ *par* $F_1$, $B_0$ *étant le coefficient du premier terme de* $F_1$. *Soit, semblablement,* $F_3$ *le reste de la division de* $C_0^2F_1$ *par* $F_2$, $C_0$ *étant le coefficient du premier terme de* $F_1$. *Si les degrés des restes* $F_2$, $F_3$ *sont, comme il arrive ordinairement,* m — 2, m — 3, *le second reste est divisible par* $B_0^2$ (*).

En supposant :

$$F_0 = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \cdots + A_m, \tag{1}$$

$$F_1 = B_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + B_2x^{m-3} + \cdots + B_{m-1}, \tag{2}$$

$$B_0^2F_0 = F_1Q_1 + F_2, \tag{3}$$

$$F_2 = C_0x^{m-2} + C_1x^{m-3} + \cdots + C_{m-2}, \tag{4}$$

$$C_0^2F_1 = F_2Q_2 + F_3, \tag{5}$$

$$F_3 = D_0x^{m-3} + D_1x^{m-4} + \cdots + D_{m-3}; \tag{6}$$

on voit, d'abord, que $Q_1$ est le quotient entier de

$$B_0^2(A_0x^2 + A_1x + A_2)$$

par $B_0x + B_1$.

Ainsi

$$Q_1 = A_0\,B_0x + A_1B_0 - A_0B_1,$$

ou

$$Q_1 = B_0(A_0x + A_1) - A_0B_1. \tag{7}$$

De même,

$$Q_2 = B_0\,C_0x + B_1C_0 - B_0C_1,$$

ou

$$Q_2 = B_0(C_0x - C_1) + B_1C_0. \tag{8}$$

(*) Ce théorème est dû, en partie, à Labatie (*Méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur*, 2e édition, p. 8). Mais la démonstration de l'Auteur exige que les coefficients de $F_0$, $F_1$ soient des polynômes; et cette condition n'est pas nécessaire.

En outre, d'après l'égalité (3), $C_0$ est le coefficient de $x^{m-2}$ dans

$$B_0^2 . A_2 x^{m-2} - (B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3}) [A_0 B_0 x + A_1 B_0 - A_0 B_1];$$

c'est-à-dire que

$$C_0 = (A_2 B_0 - A_0 B_2) B_0 + (A_0 B_1 - A_1 B_0) B_1. \tag{9}$$

Pour la même raison, $C_1$ est le coefficient de $x^{m-3}$ dans

$$B_0^2 A_3 x^{m-3} - (B_2 x^{m-3} + B_3 x^{m-4}) [A_0 B_0 x + A_1 B_0 - A_0 B_1];$$

donc

$$C_1 = (A_3 B_0 - A_0 B_3) B_0 + (A_0 B_1 - A_0 B_1) B_2. \tag{10}$$

Maintenant, l'élimination de $F_2$, entre les égalités (3), (5), conduit à

$$F_3 = (C_0^2 + Q_1 Q_2) F_1 - B_0^2 Q_2 F_0. \tag{11}$$

La seconde partie du second membre est divisible par $B_0^2$ : il suffit donc, pour démontrer le théorème énoncé, de faire voir que la première partie l'est également.

Or, d'après les formules (7), (8), (9) et (10), on a, relativement au *module* $B_0^2$ :

$$
\begin{aligned}
Q_1 Q_2 &\equiv + B_0 B_1 (A_1 C_0 + A_0 C_1) - A_0 B_1^2 C_0, \\
A_1 C_0 + A_0 C_1 &\equiv - (2A_0 A_1 B_2 + A_1^2 B_1 + A_0^2 B_3) B_0 + A_0 B_1 (A_1 B_1 + A_0 B_2), \\
Q_1 Q_2 &\equiv + A_0 B_0 B_1^2 (A_1 B_1 + A_0 B_2) - A_0 B_1^2 (A_0 B_1^2 - A_0 B_0 B_2 - A_1 B_0 B_1) \\
&\equiv + 2A_0 B_0 B_1^2 (A_1 B_1 + A_0 B_2) - A_0 B_1^4, \\
C_0 &\equiv - (A_0 B_2 + A_1 B_1) B_0 + A_0 B_1^2, \\
C_0^2 &\equiv - 2A_0 B_1^2 (A_0 B_2 + A_1 B_1) B_0 + A_0^2 B_1^4;
\end{aligned}
$$

donc enfin

$$C_0^2 + Q_1 Q_2 = \mathfrak{M} . B_0^2.$$

II. *Application.*

$$F_0 = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad F_1 = 7x^3 + 4x^2 + x + 1.$$

On trouve, en multipliant $F_0$ par $7^2$ :

$$F_2 = 79x^2 + 39x + 46;$$

puis, en multipliant $F_1$ par $79^2$ :

$$F_3 = -20\,874x + 4\,263 = 7^2(-426x + 87).$$

Ainsi, le deuxième reste est divisible par $7^2$.

Si maintenant on prend $426^2F_2$ pour dividende, et $426x - 87$ pour diviseur, le reste R égale

$$\begin{aligned} & 79 \,.\, 87^2 + 39 \,.\, 87 \,.\, 426 + 46 \,.\, 426^2 \\ = {} & 79 \,.\, 87^2 + 426\,(3\,393 + 19\,596) \\ = {} & 79\,[87^2 + 426 \,.\, 291]; \end{aligned}$$

ou enfin

$$R = 79^2 \,.\, 1\,665.$$

## LX. — Sur l'équation du quatrième degré. (1863.)

I. Pour résoudre l'équation

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0, \tag{1}$$

à coefficients réels, posons

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = (x^2 + px + q)(x^2 - px + q') :$$

nous devons trouver, pour les inconnues $p$, $q$, $q'$, *au moins un système de valeurs réelles.*

En égalant les coefficients des mêmes puissances de $x$, dans les deux membres, on obtient

$$q' + q = A + p^2, \quad q' - q = \frac{B}{p}, \quad qq' = C;$$

puis, en éliminant $q$ et $q'$,

$$(A + p^2)^2 - \frac{B^2}{p^2} = 4C. \tag{2}$$

Soit

$$A + p^2 = q' + q = z; \tag{3}$$

l'équation (2) devient

$$z^3 - Az^2 - 4Cz - (B^2 - 4AC) = 0. \tag{4}$$

Telle est la *réduite* de l'équation (1).

II. D'après la relation (3), *l'équation* (4) *a au moins une racine plus grande que* A (*). Si l'on désigne par $\gamma$ cette racine, on trouve

$$\left.\begin{aligned} p &= \sqrt{\gamma - \mathrm{A}}, \\ q' &= \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\gamma - \mathrm{A}}}\right), \\ q &= \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\gamma - \mathrm{A}}}\right); \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

etc.

III. L'équation

$$x^4 + x^2 + 8x - 15 = 0$$

a pour réduite

$$z^3 - z^2 + 60z - 124 = 0.$$

Celle-ci donne $\gamma = 2$. Donc

$$p = 1, \quad q' = 5, \quad q = -3;$$

et enfin

$$x^4 + x^2 + 8x - 15 = (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 5).$$

IV. *Remarque.* — Lorsque la réduite (4) a trois racines réelles, plus grandes que A, la proposée (1) a toutes ces racines réelles. Mais alors les formules de Cardan (**) deviennent illusoires; et les valeurs de $p$, $q$, $q'$ ne peuvent être exprimées, sous forme réelle, en fonction des coefficients A, B, C. Il en est de même si la réduite a ses racines réelles, mais non supérieures, toutes trois, à A. Les formules de Cardan ne sont donc applicables, utilement, à la résolution de l'équation (1), que si la réduite (4) a une seule racine réelle (***). Ce cas est celui où les coefficients A, B, C satisfont à la condition

$$-16(\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{C})^2\mathrm{C} + 4\mathrm{AB}^2(\mathrm{A}^2 - 36\mathrm{C}) + 27\mathrm{B}^4 > 0.$$

(*) On reconnaît aisément qu'elle en a un nombre impair.

(**) Ou plutôt de Tartaglia. *Voyez* la savante Notice insérée, par Terquem, au tome XV des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

(***) Je mets de côté, bien entendu, le cas où l'équation (1) aurait des racines égales.

## LXI. — Sur les coordonnées curvilignes (*).

I. Soit un ellipsoïde donné, ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Les hyperboloïdes, homofocaux avec cette surface, peuvent commodément être représentés par

$$\frac{x^2}{a^2-u^2}+\frac{y^2}{b^2-u^2}+\frac{z^2}{c^2-u^2}=1, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2-v^2}+\frac{y^2}{b^2-v^2}+\frac{z^2}{c^2-v^2}=1. \tag{3}$$

Nous supposons

$$a > u > b > v > c; \tag{4}$$

de manière que l'équation (2) représente des *hyperboloïdes à deux nappes*, et l'équation (3), des *hyperboloïdes à une nappe*.

II. On tire, des équations (1), (2), (3) :

$$x^2=a^2\frac{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\quad y^2=b^2\frac{(b^2-u^2)(b^2-v^2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},\quad z^2=c^2\frac{(c^2-u^2)(c^2-v^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}; \tag{5}$$

puis, de celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}
dx&=-\frac{a}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}\,\frac{(a^2-v^2)\,udu+(a^2-u^2)\,vdv}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}},\\
dy&=-\frac{b}{\sqrt{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}}\,\frac{(b^2-v^2)\,udu+(b^2-u^2)\,vdv}{\sqrt{(b^2-u^2)(b^2-v^2)}},\\
dz&=-\frac{c}{\sqrt{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}\,\frac{(c^2-v^2)\,udu+(c^2-u^2)\,vdv}{\sqrt{(c^2-u^2)(c^2-v^2)}}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(*) Résumé de quelques leçons faites à l'Université de Liége, en juin 1866.

Nous allons calculer, au moyen de ces valeurs, les quantités

$$\sum x^2, \quad \sum \frac{x^2}{a^4}, \quad \sum dx^2, \quad \sum \frac{dx^2}{a^2}, \quad \sum a^2 dx^2,$$

dont nous aurons besoin plus tard.

III. 1° En posant

$$(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) = \mathrm{P},$$

on a d'abord

$$\sum x^2 = -\frac{1}{\mathrm{P}} \sum a^2(b^2 - c^2)(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{P}} \left[ \sum a^6(b^2 - c^2) - (u^2 + v^2) \sum a^4(b^2 - c^2) + u^2v^2 \sum a^2(b^2 - c^2) \right].$$

Or :

$$\sum a^6(b^2 - c^2) = -\mathrm{P}(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\sum a^4(b^2 - c^2) = -\mathrm{P},$$

$$\sum a^2(b^2 - c^2) = 0;$$

donc

$$\sum x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - u^2 - v^2;$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 - u^2 - v^2 \;(^*). \tag{7}$$

2° De même,

$$\sum \frac{x^2}{a^4}$$

$$= -\frac{1}{a^2b^2c^2\mathrm{P}} \left[ a^2b^2c^2 \sum a^2(b^2 - c^2) - a^2b^2c^2(u^2 + v^2) \sum (b^2 - c^2) + u^2v^2 \sum b^2c^2(b^2 - c^2) \right],$$

ou

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{u^2v^2}{a^2b^2c^2}. \tag{8}$$

(*) Cette relation, très connue, est comprise dans un théorème général, que j'ai démontré autrefois (*Mémoire sur la transformation des variables*, etc.; Académie de Bruxelles, 1840).

3° Des formules (6), on déduit

$$\sum dx^2$$

$$= \sum \frac{a^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \left[ \frac{a^2 - v^2}{a^2 - u^2} u^2 du^2 + 2uvdudv + \frac{a^2 - u^2}{a^2 - v^2} dv^2 \right];$$

ou, en supprimant une somme nulle,

$$\sum dx^2$$

$$= -\frac{1}{P} \left[ u^2 du^2 \sum a^2(b^2 - c^2) \frac{a^2 - v^2}{a^2 - u^2} + v^2 dv^2 \sum a^2(b^2 - c^2) \frac{a^2 - u^2}{a^2 - v^2} \right]. \quad (9)$$

Or :

$$\sum a^2(b^2 - c^2) \frac{a^2 - v^2}{a^2 - u^2}$$

$$= \frac{1}{(a^2 - u^2)(b^2 - u^2)(c^2 - u^2)} \sum a^2(b^2 - c^2)(a^2 - v^2)(b^2 - u^2)(c^2 - u^2),$$

$$\sum a^2(b^2 - c^2) \frac{a^2 - u^2}{a^2 - v^2}$$

$$= \frac{1}{(a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)} \sum a^2(b^2 - c^2)(a^2 - u^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2).$$

De plus, à cause de

$$(a^2 - v^2)(b^2 - u^2)(c^2 - u^2)$$

$$= a^2b^2c^2 - a^2(b^2 + c^2)u^2 + a^2u^4 - b^2c^2v^2 + (b^2 + c^2)u^2v^2 - u^4v^2:$$

$$\begin{aligned}
&\sum a^2(b^2 - c^2)(a^2 - v^2)(b^2 - u^2)(c^2 - u^2) \\
&= a^2b^2c^2 \sum a^2(b^2 - c^2) - u^2 \sum a^4(b^4 - c^4) \\
&+ u^4 \sum a^4(b^2 - c^2) - u^2b^2c^2v^2 \sum (b^2 - c^2) \\
&+ u^2v^2 \sum a^2(b^4 - c^4) - u^4v^2 \sum a^2(b^2 - c^2) \\
&= u^4 \sum a^4(b^2 - c^2) + u^2v^2 \sum a^2(b^4 - c^4) \\
&= -Pu^2(u^2 - v^2).
\end{aligned}$$

La relation (9) devient, simplement,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (u^2 - v^2)[U^2u^2du^2 - V^2v^2dv^2]: \quad (10)$$

dans celle-ci,

$$U^2 = \frac{u^2}{(a^2-u^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2)}, \quad V^2 = -\frac{v^2}{(a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2)} \text{(*)}.$$

4° On trouve, avec la même facilité,

$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} = (u^2 - v^2)\left[U^2du^2 - V^2dv^2\right]. \tag{11}$$

5° La quantité $\Sigma\, a^2dx^2$ se décompose en

$$\begin{aligned}
&-\frac{u^2du^2}{P}\sum a^4(b^2-c^2)\frac{a^2-v^2}{a^2-u^2}\\
&-2\frac{uvdudv}{P}\sum a^4(b^2-c^2)\\
&-\frac{v^2dv^2}{P}\sum a^4(b^2-c^2)\frac{a^2-u^2}{a^2-v^2}.
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum a^4(b^2-c^2)\frac{a^2-v^2}{a^2-u^2}$$

$$= \frac{1}{(a^2-u^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2)}\sum a^4(b^2-c^2)(a^2-v^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2),$$

$$\sum a^4(b^2-c^2) = -P,$$

$$\sum a^4(b^2-c^2)\frac{a^2-u^2}{a^2-v^2}$$

$$= \frac{1}{(a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2)}\sum a^4(b^2-c^2)(a^2-u^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2).$$

De plus, en négligeant deux termes nuls :

$$\begin{aligned}
&\sum a^4(b^2-c^2)(a^2-v^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2)\\
&= -P\,a^2b^2c^2 - u^2\sum a^6(b^4-c^4) + u^4\sum a^6(b^2-c^2) + Pu^4v^2\\
&= -P\left[a^2b^2c^2 - (b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)u^2 + (a^2+b^2+c^2)u^4 - u^4v^2\right]\\
&= -P\left[(a^2-u^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2) + u^4(u^2-v^2)\right].
\end{aligned}$$

(*) En vertu des inégalités (4), les fonctions $U^2$, $V^2$ sont *positives*.

La somme cherchée est donc

$$\left[1 + U^2u^2(u^2 - v^2)\right] u^2du^2 + 2uv\,du\,dv + \left[1 + V^2v^2(v^2 - u^2)\right]v^2dv^2;$$

et, par conséquent,

$$\sum a^2dx^2$$
$$= (udu + vdv)^2 + (u^2 - v^2)(U^2u^4du^2 - V^2v^4dv^2). \qquad (12)$$

IV. Soient $l$, $p$ les distances du centre O à un point quelconque M et au plan tangent en M (*). Soient, en outre, $ds$, $ds'$ les éléments MM′, $mm'$ d'une courbe et de sa *transformée sphérique,* déterminée par les formules

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz':$$

les équations (7), (8), (10), (11) deviennent:

$$l^2 = a^2 + b^2 + c^2 - u^2 - v^2, \qquad (7')$$

$$puv = abc, \qquad (8')$$

$$ds^2 = (u^2 - v^2)\left[U^2u^2du^2 - V^2v^2dv^2\right], \qquad (10')$$

$$ds'^2 = (u^2 - v^2)\left[U^2du^2 - V^2dv^2\right]. \qquad (11')$$

V. Considérons, sur l'ellipsoïde, deux espèces de courbes : les unes, intersections de cette surface par des sphères concentriques avec l'ellipsoïde; les autres, lieux des points de contact des plans tangents dont la distance au centre est constante. D'après les relations (7′), (8′), les équations de ces courbes sont, respectivement,

$$u^2 + v^2 = const\ (^{**}), \quad uv = const.$$

Ces mêmes relations (7′), (8′) expriment, d'ailleurs, que *les parallélipipèdes ayant pour arêtes* l, u, v *ou* p, u, v, *ont les diagonales constantes ou un volume constant.*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) Il est assez remarquable que, dans ce système de coordonnées, l'*ellipse sphérique* soit, pour ainsi dire, représentée par l'*équation du cercle.*

VI. Soient $R_1$, $R_2$ les rayons principaux en un point quelconque de l'ellipsoïde. On sait que

$$R_1 + R_2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - l^2}{p}, \quad R_1R_2 = \frac{abc}{p^4} \text{ (*)}.$$

Au moyen des équations (7′), (8′), on transforme ces formules en celles-ci :

$$R_1 + R_2 = \frac{(u^2 + v^2)\,uv}{abc}, \quad R_1 R_2 = \frac{u^4v^4}{a^2b^2c^2};$$

d'où l'on conclut, en supposant $R_1 > R_2$ :

$$R_1 = \frac{u^3v}{abc}, \quad R_2 = \frac{uv^3}{abc}; \tag{13}$$

valeurs remarquables par la simplicité.

Il en résulte, en particulier, que les équations des *ombilics* sont

$$u = v = b;$$

ou

$$x^2 = a^2\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad y = 0, \quad z^2 = c^2\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

VII. Dans un beau Mémoire de Joachimstal (**), l'équation générale des lignes géodésiques est mise sous la forme

$$\frac{\sum dXd^2x}{\sum dXdx} + \frac{\sum XdX}{\sum X^2} - \frac{\sum dxd^2x}{\sum dx^2} = 0, \tag{14}$$

X, Y, Z étant les dérivées partielles de la fonction $F(x, y, z)$

(*) DUPIN, *Développements de Géométrie*, p. 212. Il résulte, de la dernière relation, que *si un plan roule de manière à toucher constamment un ellipsoïde et une sphère concentriques, le lieu de ses points de contact avec l'ellipsoïde est une ligne de courbure constante.* On peut consulter aussi le Mémoire intitulé *Recherches sur les surfaces gauches* (Académie de Belgique, 1866).

(**) *Journal de Crelle*, t. XXVI.

qui forme le premier membre de l'équation de la surface donnée. Dans le cas actuel,

$$X = \frac{2x}{a^2}, \quad Y = \frac{2y}{b^2}, \quad Z = \frac{2z}{c^2}.$$

Par suite, une intégrale première de l'équation (14) est

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{g^4} \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}}; \tag{15}$$

$g$ représentant une *longueur* arbitraire.

Au moyen des formules du paragraphe III, on transforme cette intégrale, soit en la relation

$$s' = \frac{1}{g^2}\int p ds, \tag{16}$$

soit en celle-ci :

$$(U^2du^2 - V^2dv^2)\,u^2v^2 = h^2\,(U^2u^2du^2 - V^2v^2dv^2), \tag{17}$$

dans laquelle

$$h = \frac{abc}{g^2}.$$

VIII. On tire, de l'équation (17),

$$\frac{Uudu}{\sqrt{u^2 - h^2}} = \pm \frac{Vvdv}{\sqrt{v^2 - h^2}}. \tag{18}$$

Par conséquent l'intégrale seconde de l'équation (14), ou l'équation des lignes géodésiques, est

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{u^2du}{\sqrt{(a^2 - u^2)(b^2 - u^2)(c^2 - u^2)(u^2 - h^2)}} \\ \mp &\int \frac{v^2dv}{\sqrt{(a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)(v^2 - h^2)}} = const. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Elle équivaut à

$$F(u) \mp F(v) = const., \tag{20}$$

F($\alpha$) représentant, en général, l'intégrale abélienne

$$\int \frac{\alpha^2 d\alpha}{\sqrt{(a^2-\alpha^2)(b^2-\alpha^2)(c^2-\alpha^2)(\alpha^2-h^2)}} \text{ (*)}.$$

IX. La combinaison des équations (10′) et (18) donne

$$ds^2 = \frac{(u^2-v^2)^2\, U^2 u^2 du^2}{u^2-h^2},$$

ou

$$ds = \frac{(u^2-v^2)\, U u du}{\sqrt{u^2-h^2}}.$$

Le second membre est la même chose que

$$\frac{Uu^3 du}{\sqrt{u^2-h^2}} - \frac{Uuv^2 du}{\sqrt{u^2-h^2}};$$

donc, en vertu de l'équation (18),

$$ds = \frac{Uu^3 du}{\sqrt{u^2-h^2}} \mp \frac{Vv^3 dv}{\sqrt{v^2-h^2}}.$$

« Ici, » dit M. Liouville, « les variables sont séparées comme dans l'équation même de la courbe; on a donc cette formule très remarquable » :

$$\left.\begin{aligned} s = {} & \\ \int \frac{u^4 du}{\sqrt{(a^2-u^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2)(u^2-h^2)}} & \mp \int \frac{v^4 dv}{\sqrt{(a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2)(v^2-h^2)}} \\ & + const. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Il en résulte que l'arc de la ligne géodésique s'exprime par la somme ou la différence de deux intégrales abéliennes.

(*) Voir, sur ce point, une Note de M. Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. IX). La plupart des résultats auxquels nous venons de parvenir ont été démontrés déjà par ce savant Géomètre; mais il les a trouvés en considérant la ligne géodésique comme la *trajectoire d'un point qui ne serait sollicité par aucune force accélératrice;* nos méthodes sont donc essentiellement différentes.

X. D'après une remarque de Joachimstal, le rayon de courbure d'une ligne géodésique est donné par la formule

$$\rho = \frac{m^4}{p^3},$$

dans laquelle $m$ est une constante. A cause de $p^4 = \frac{a^2b^2c^2}{R_1R_2}$, cette formule équivaut à

$$\frac{(R_1R_2)^3}{\rho^4} = const. \tag{22}$$

Si la ligne géodésique est une section principale, $\rho = R_1$, et

$$\frac{R_2^3}{R_1} = const.$$

Au sommet C de la section principale AOC, $R_1 = \frac{a^2}{c}$, $R_2 = \frac{b^2}{c}$: la valeur de la constante est donc $\frac{b^6}{a^2c^2}$; et, par conséquent,

$$\frac{R_2^3}{R_1} = \frac{b^6}{a^2c^2}. \tag{23}$$

XI. Pour chaque valeur attribuée à la constante $g$, l'équation (15) représente une série de lignes géodésiques. Cherchons les trajectoires orthogonales de ces courbes (*).

En représentant, pour un instant, par $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ les différentielles relatives à la trajectoire, on a

$$dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z = 0, \quad \frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy + \frac{z}{c^2}dz = 0;$$

d'où

$$\frac{dx}{\frac{y}{b^2}\delta z - \frac{z}{c^2}\delta y} = \frac{dy}{\frac{z}{c^2}\delta x - \frac{x}{a^2}\delta z} = \frac{dz}{\frac{x}{a^2}\delta y - \frac{y}{b^2}\delta x}.$$

(*) Il est bon d'observer que, d'après une remarque de M. Michael Roberts, toutes ces lignes géodésiques sont tangentes à une même ligne de courbure (*Journal de Liouville*, t. X). Conséquemment, les trajectoires orthogonales cherchées sont, pour ainsi dire, des *développantes de la ligne de courbure.*

Substituant dans (15), et rétablissant $dx$, $dy$, $dz$ au lieu de $\delta x, \delta y, \delta z$, on trouve

$$\frac{g^4}{p^2} = \frac{\sum \left(\frac{y}{b^2}dz - \frac{z}{c^2}dy\right)^2}{\sum \frac{1}{a^2}\left(\frac{y}{b^2}dz - \frac{z}{c^2}dy\right)^2}, \tag{24}$$

équation différentielle des trajectoires cherchées.

La somme placée en numérateur est égale à

$$\sum \left(\frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) dx^2 - 2\sum \frac{yz}{b^2c^2} dy\,dz$$
$$= \frac{ds^2}{p^2} - \left(\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} + \frac{zdz}{c^2}\right)^2 = \frac{ds^2}{p^2}.$$

De même,

$$\sum \frac{1}{a^2}\left(\frac{y}{b^2}dz - \frac{z}{c^2}dy\right)^2 = \sum \frac{1}{b^2c^2}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx^2 - \frac{2}{a^2b^2c^2}\sum yz\,dy\,dz$$
$$= \sum \frac{dx^2}{b^2c^2} - \frac{1}{a^2b^2c^2}(xdx + ydy + zdz)^2$$
$$= \sum \frac{1}{a^2b^2c^2}\left[\sum a^2dx^2 - (xdx + ydy + zdz)^2\right].$$

L'équation (24) devient donc, par cette première réduction,

$$\sum a^2dx^2 - (xdx + ydy + zdz)^2 = h^2ds^2. \tag{25}$$

Nous avons trouvé :

$$\sum a^2dx^2 = (udu + vdv)^2 + (u^2 - v^2)\,[U^2u^4du^2 - V^2v^4dv^2],$$
$$ds^2 = (u^2 - v^2)\,[U^2u^2du^2 - V^2v^2dv^2].$$

De plus, à cause de la relation (7),

$$xdx + ydy + zdz = -(udu + vdv).$$

Par suite, l'équation (25) devient

$$U^2u^4du^2 - V^2v^4dv^2 = h^2\,[U^2u^2du^2 - V^2v^2dv^2],$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\mathrm{U}u\sqrt{u^2-h^2}\,du = \pm\,\mathrm{V}v\sqrt{v^2-h^2}\,dv. \tag{26}$$

L'intégrale de celle-ci, c'est-à-dire l'équation des trajectoires, est donc

$$\left.\begin{aligned}&\int u^2du\sqrt{\frac{u^2-h^2}{(a^2-u^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2)}}\\ &\mp\int v^2dv\sqrt{\frac{v^2-h^2}{(a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2)}}=const.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

*Addition. — (Août 1867.)*

XII. Le dernier calcul peut être simplifié et généralisé. A cause de

$$dx = -a\frac{(a^2-v^2)\,udu + (a^2-u^2)\,vdv}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2-u^2)(a^2-v^2)}},$$

$$\delta x = -a\frac{(a^2-v^2)\,u\delta u + (a^2-u^2)\,v\delta v}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2-u^2)(a^2-v^2)}},$$

la condition

$$dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z = 0,$$

équivaut à

$$\sum a^2(b^2-c^2)\left[\frac{a^2-v^2}{a^2-u^2}u^2du\delta u + uv(du\delta v + dv\delta u) + \frac{a^2-u^2}{a^2-v^2}v^2dv\delta v\right]=0,$$

ou, par les transformations employées ci-dessus (III, 3°), à

$$\mathrm{U}^2u^2du\delta u = \mathrm{V}^2v^2dv\delta v. \tag{28}$$

Il est facile de comprendre l'usage et l'utilité de cette relation générale : si l'on se donne l'équation différentielle

$$\mathrm{M}du = \mathrm{N}dv \tag{29}$$

d'une série de courbes C, on en conclut immédiatement, pour leurs *trajectoires orthogonales* $C_1$,

$$\frac{\mathrm{U}^2u^2}{\mathrm{M}}\delta u = \frac{\mathrm{V}^2v^2}{\mathrm{N}}\delta v. \tag{30}$$

XIII. 1° Si les courbes C sont les lignes géodésiques considérées dans le paragraphe VIII,

$$M = \frac{Uu}{\sqrt{u^2 - h^2}}, \quad N = \pm \frac{Vv}{\sqrt{v^2 - h^2}};$$

et l'équation (30) devient

$$Uu\sqrt{u^2 - h^2}\,\delta u = \pm Vv\sqrt{h^2 - v^2}\,\delta v:$$

celle-ci ne diffère pas de la relation (26).

2° Si les courbes C sont définies par $u^2 + v^2 = const,$ ou par $uv = const.$ (V), on a, dans le premier cas,

$$M = u, \quad N = -v;$$

et, dans le second,

$$M = v, \quad N = -u.$$

L'équation différentielle des trajectoires C est donc, soit

$$U^2u\,\delta u + V^2v\,\delta v = 0, \tag{31}$$

soit

$$U^2u^3\delta u + V^2v^3\delta v = 0. \tag{32}$$

Dans chacune de celles-ci, les variables sont séparées, et l'intégration est facile.

3° Supposons que les courbes C constituent un système de *sections circulaires* de l'ellipsoïde. L'équation différentielle de ces courbes est, comme l'on sait,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}},$$

le radical pouvant être pris avec un signe quelconque. Mais, par les formules (6),

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}} = \frac{(c^2-v^2)udu+(c^2-u^2)vdv}{(a^2-v^2)udu+(a^2-u^2)vdv}\sqrt{\frac{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}{(c^2-u^2)(c^2-v^2)}};$$

conséquemment, l'équation différentielle des sections circulaires, rapportées aux coordonnées $u$, $v$, est

$$\frac{(c^2 - v^2)udu + (c^2 - u^2)vdv}{\sqrt{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}} = \frac{(a^2 - v^2)udu + (a^2 - u^2)vdv}{\sqrt{(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}};$$

ou, plus simplement,

$$\frac{udu}{\sqrt{(a^2 - u^2)(c^2 - u^2)}} = \frac{vdv}{\sqrt{(a^2 - v^2)(c^2 - v^2)}}. \tag{33}$$

Par suite, l'équation (30) devient :

$$\frac{u^3 \delta u}{(b^2 - u^2)\sqrt{(a^2 - u^2)(u^2 - c^2)}} = - \frac{v^3 \delta v}{(b^2 - v^2)\sqrt{(a^2 - v_2)(v^2 - c^2)}}. \tag{34}$$

XIV. Pour intégrer, on peut prendre :

$$u^2 = \frac{a^2p^2 + c^2}{1 + p^2}, \quad v^2 = \frac{a^2q^2 + c^2}{1 + q^2};$$

on trouve ainsi :

$$\frac{a^2p^2 + c^2}{(a^2 - b^2)p^2 - (b^2 - c^2)} \frac{dp}{1 + p^2} = \frac{a^2q^2 + c^2}{(a^2 - b^2)q^2 - (b^2 - c^2)} \frac{dq}{1 + q^2}.$$

D'ailleurs

$$\frac{a^2p^2 + c^2}{(a^2 - b^2)p^2 - (b^2 - c^2)} \frac{1}{1 + p^2}$$
$$= \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - c^2}} \left[ \frac{1}{p\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{b^2 - c^2}} - \frac{1}{p\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{b^2 - c^2}} \right]$$
$$+ \frac{1}{1 + p^2}.$$

L'intégrale de l'équation (34) est donc

$$\frac{b^2}{2\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}} \mathfrak{L} \frac{p\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{b^2 - c^2}}{p\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{b^2 - c^2}} + arc\operatorname{tg} p$$
$$+ \frac{b^2}{2\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}} \mathfrak{L} \frac{q\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{b^2 - c^2}}{q\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{b^2 - c^2}} + arc\operatorname{tg} q = const.;$$

ou, si l'on fait

$$p = \operatorname{tg}\varphi, \quad q = \operatorname{tg}\theta, \quad \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} = \operatorname{tg}\gamma :$$

$$\frac{b^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}\,\ell\,\frac{\sin(\varphi-\gamma)\sin(\theta-\gamma)}{\sin(\varphi+\gamma)\sin(\theta+\gamma)} + \varphi + \theta = const\ (^*). \quad (35)$$

XV. Remarque. — *L'intégrale* de l'équation (33), ou l'équation des sections circulaires, rapportées aux coordonnées $\varphi$ et $\theta$, est

$$\varphi - \theta = const. \qquad (36)$$

Pour interpréter ce résultat, considérons les deux hyperboloïdes passant par un point quelconque M de la section circulaire C, puis les cônes asymptotiques correspondants. Soient OG, OH les traces de ces cônes sur le plan $zx$, de manière que OG soit l'asymptote de l'hyperbole représentée par

$$\frac{x^2}{a^2 - u^2} + \frac{z^2}{c^2 - u^2} = 1,$$

et que OH soit l'asymptote de l'hyperbole dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2 - v^2} + \frac{z^2}{c^2 - v^2} = 1.$$

On a

$$\varphi = \mathrm{GO}x, \quad \theta = \mathrm{GOH};$$

et, par conséquent :

*Les génératrices principales* (situées dans le plan $zx$) *des cônes asymptotiques aux hyperboloïdes passant en un point quelconque d'une section circulaire de l'ellipsoïde, font entre elles un angle constant.*

(*) On trouvera, dans la Note suivante, une autre solution du problème des *trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde.*

## LXII. — Trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde.

(*Novembre* 1865) (*).

I. Soit un ellipsoïde OABC (**) ayant pour centre le point O, et dans lequel les demi-axes, rangés par ordre de grandeur décroissante, soient $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Si, dans le plan de la section principale CA, nous prenons un rayon vecteur $OE = OB = b$, le plan BOE coupera l'ellipsoïde suivant un cercle; et il en sera de même pour tous les plans parallèles à celui-là. Les limites de ces cercles, c'est-à-dire les points I, I' où l'ellipsoïde est touché par deux plans parallèles à BOE, sont des ombilics de la surface.

Cela posé, si nous rapportons l'ellipsoïde aux droites OE, OB et à une perpendiculaire $Oz$ au plan BOE, la *projection* P *du contour apparent* de la surface pourra être représentée par

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1 \text{ (***)}. \tag{1}$$

II. Les sections circulaires parallèles à BOE, ou les *lignes de niveau* de l'ellipsoïde, se projettent, en vraie grandeur, suivant des circonférences *doublement tangentes* à l'ellipse P, et dont les centres sont situés sur $Ox$.

(*) Rédaction nouvelle d'une Note publiée dans le *Journal de Mathématiques* (t. XII).

(**) Le lecteur est prié de faire les figures.

(***) Il est évident que $q = b$. De plus, un calcul fort simple donne

$$p^2 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{b^2}.$$

On trouve aisément que l'équation de ces circonférences est

$$(x-\alpha)^2+y^2=q^2\left[1-\frac{\alpha^2}{r^2}\right] (^*); \qquad (2)$$

en supposant

$$r^2=p^2-q^2.$$

Par conséquent, les *trajectoires orthogonales des sections circulaires de l'ellipsoïde,* ou les *lignes de plus grande pente* de cette surface, ont pour projections, sur le plan $xOy$, les *trajectoires orthogonales des circonférences* dont il s'agit.

III. Le calcul ordinaire conduit à

$$(p^2ydx-q^2xdy)^2=r^2(p^2q^2-p^2y^2-q^2x^2)dy^2, \qquad (3)$$

équation différentielle des trajectoires (**).

Avant de chercher à l'intégrer, on peut reconnaître, soit par le calcul, soit graphiquement, que *chacune des courbes représentée par cette équation* (3) :

1° *Passe par les deux foyers;* 2° *présente un rebroussement au point où elle coupe l'ellipse.*

Conséquemment : 1° *les trajectoires orthogonales des sections circulaires de l'ellipsoïde, parallèles au plan* BOE, *passent toutes par les ombilics* I, I' ; 2° *au point d'intersection* P *d'une de ces*

(*) La discussion de l'équation (2) donne lieu aux remarques suivantes :

1° Si $\alpha$ est compris entre 0 et $\frac{r^2}{p}$, la circonférence touche en effet l'ellipse en deux points, symétriquement placés relativement à l'axe des abscisses;

2° Lorsque $\alpha=\frac{r^2}{p}$, la circonférence devient osculatrice à l'ellipse : son rayon $\rho=\frac{q^2}{p}$;

3° Si $\alpha$ est compris entre $\frac{r^2}{p}$ et $r$, la circonférence est *intérieure* à l'ellipse; mais, au point de vue *algébrique,* ces deux courbes sont doublement tangentes l'une à l'autre;

4° Enfin, lorsque $\alpha=\pm r$, l'équation (2) représente les *foyers de l'ellipse : ces points sont les projections des ombilics* I', I (*Journal de Mathématiques,* t. XII, p. 486).

(**) Elle ne diffère, que par la notation, de celle qui se trouve dans la Note citée [*Journal de Mathématiques,* t. XII, p. 484, éq. (2)].

*courbes, avec le contour apparent de l'ellipsoïde, relatif au plan* BOE, *la tangente* PS *est perpendiculaire à ce même plan* (*).

IV. La variable $\alpha$ étant moindre que $r$, on peut supposer

$$\alpha = r \sin \varphi.$$

De plus, on satisfait à l'équation (2) en prenant

$$x = r \sin \varphi + q \cos \varphi \cos \theta, \quad y = q \cos \varphi \sin \theta \text{ (**)}. \qquad (4)$$

On conclut, de ces valeurs,

$$\begin{aligned} p^2q^2 - p^2y^2 - q^2x^2 &= (q^2+r^2)q^2 - (q^2+r^2)q^2\cos^2\varphi\sin^2\theta - q^2(r\sin\varphi + q\cos\varphi\cos\theta)^2 \\ &= q^4\sin^2\varphi - 2q^3r\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta + q^2r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta \\ &= q^2(q\sin\varphi - r\cos\varphi\cos\theta)^2; \end{aligned}$$

puis, au lieu de l'équation (3),

$$p^2\cos\varphi\sin\theta\, dx = \left[q(r\sin\varphi + q\cos\theta\cos\theta) \pm r(q\sin\varphi - r\cos\varphi\cos\theta)\right]dy;$$

c'est-à-dire, en séparant les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta, \qquad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p^2\cos\varphi\sin\theta}{2qr\sin\varphi + (q^2 - r^2)\cos\varphi\cos\theta}. \qquad (6)$$

V. D'après les formules (4),

$$\frac{dy}{dx} = q\frac{\cos\varphi\cos\theta d\theta - \sin\varphi\sin\theta d\varphi}{r\cos\varphi d\varphi - q\sin\varphi\cos\theta d\varphi - q\cos\varphi\sin\theta d\theta};$$

(*) De là résulte, suivant une remarque de M. Chasles (*Journal de Mathématiques*, t. II, p. 293), que *le plan osculateur en* P, *à la trajectoire orthogonale considérée, est normal, tout le long de l'arête* PS, *au cylindre qui projette l'ellipsoïde sur le plan* BOE.

(**) Si $c$ est le centre d'une circonférence doublement tangente à l'ellipse P, et que $m$ soit le point où cette ligne est coupée par la trajectoire correspondante, $\alpha$ est l'abscisse de $c$, et $\theta$ est l'angle formé par le rayon $mc$ avec $Ox$.

en sorte que l'équation (5) devient, après quelques réductions,

$$d\varphi = \frac{q}{r}\frac{d\theta}{\sin\theta}. \qquad (7)$$

L'intégrale de celle-ci est

$$\varphi = \frac{q}{r}\,\mathcal{L}\left(\lambda\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\theta\right); \qquad (8)$$

$\lambda$ étant la constante arbitraire (*).

VI. Le point $m$, considéré tout à l'heure, est l'intersection de la circonférence $cm$ avec une circonférence $c'm$, doublement tangente à l'ellipse E. En appelant $\varphi'$, $\theta'$ les quantités analogues à $\varphi$ et $\theta$, relatives à cette seconde circonférence, on aurait

$$x = r\sin\varphi' + q\cos\varphi'\cos\theta', \quad y = q\cos\varphi'\sin\theta';$$

donc, pour le point $m$ :

$$\cos\varphi'\sin\theta' = \cos\varphi\sin\theta,$$
$$r\sin\varphi' + q\cos\varphi'\cos\theta' = r\sin\varphi + q\cos\varphi\cos\theta.$$

On tire, de ces équations :

$$\mathrm{tg}\,\theta' = \mathrm{tg}\,\theta, \quad \mathrm{tg}\,\theta' = \frac{p^2\cos\varphi\sin\theta}{2qr\sin\varphi + (q^2 - r^2)\cos\varphi\cos\theta}. \qquad (9)$$

De ces deux formules, la première équivaut à $\theta' = \theta$; la seconde, comparée à l'équation (6), donne

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\,\theta',$$

ou

$$d\varphi' = \frac{q}{r}\frac{d\theta'}{\sin\theta'}; \qquad (7')$$

et, par suite,

$$\varphi' = \frac{q}{r}\,\mathcal{L}\left(\lambda'\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\theta'\right). \qquad (8')$$

(*) On peut comparer cette *équation des trajectoires orthogonales* avec celle que nous avons trouvée ci-dessus (p. 247).

Cette intégrale ne différant, de l'équation (8), que par la notation, il en résulte que le système des formules (4) et (8) peut être regardé comme étant *l'intégrale générale de l'équation* (3). Autrement dit, cette équation (3), du premier ordre et du second degré, représente seulement les trajectoires orthogonales qu'il s'agissait de trouver.

*Addition.* — (*Juin* 1877) (*).

VII. M. Boset, Professeur à l'Athénée de Namur, s'est proposé ce problème :

*Une conique* C *étant donnée, trouver une circonférence telle que, si, d'un point quelconque* M *de* C, *on mène une tangente* MP *à la circonférence, la longueur de cette tangente soit une fonction rationnelle, du premier degré, des coordonnées* x, y *du point* M.

L'énoncé donne l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=(my+nx+l)^2, \tag{10}$$

laquelle doit pouvoir être identifiée avec l'équation de C :

$$y^2=2px+qx^2. \tag{11}$$

Identifiant, et appliquant la théorie connue, on trouve, en supposant $m=0$ (**) :

$$\beta=0,\quad n^2-1=q,\quad ln+\alpha=p,\quad l-\alpha^2+R'=0;$$

puis, par l'élimination des inconnues $l$, $n$ :

$$R^2=\alpha^2-\frac{(p-\alpha)^2}{q+1}. \tag{12}$$

L'équation de la *circonférence focale* est donc

$$(x-\alpha)^2+y^2=\alpha^2-\frac{(p-\alpha)^2}{q+1}. \tag{13}$$

(*) Tirée, en partie, d'un Rapport sur la Note de M. Boset.

(**) L'hypothèse $n=0$ serait inadmissible.

Si l'on y remplace $y^2$ par sa valeur (11), on trouve que l'équation en $x$ a ses racines égales. Par conséquent :

1° *Chaque circonférence focale est doublement tangente à la conique;* 2° *les circonférences focales sont celles dont il a été question ci-dessus* (II).

VIII. Supposons, pour fixer les idées, que C soit une ellipse, rapportée à son centre et à ses axes. Dans l'équation (13), posons :

$$x = x + a, \quad \alpha = \alpha + a, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad q = -\frac{b^2}{a}.$$

Cette équation devient

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = b^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2}\right). \qquad (14)$$

Il en résulte, pour la longueur de la tangente MP :

$$\delta = \frac{a}{c}\alpha - \frac{c}{a}x.$$

La longueur de la tangente MP′, menée du même point M de l'ellipse, à la circonférence conjuguée de la première, serait donnée par la formule

$$\delta' = \frac{a}{c}\alpha + \frac{c}{a}x.$$

Par conséquent,

$$\delta + \delta' = 2\frac{a}{c}\alpha = const.$$

On a donc ce théorème, qui n'a peut-être pas été remarqué : *Si un fil, de longueur constante, est tendu de manière que ses deux parties soient constamment tangentes à deux cercles égaux, le sommet de l'angle, formé par le fil, décrit une ellipse doublement tangente à chacun des cercles, et symétriquement placée par rapport à ceux-ci.*

IX. L'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

mise sous la forme (10), donne, non seulement l'équation (14) des circonférences focales, mais encore les équations

$$x = -\frac{a^2}{c^2}\alpha, \quad x = +\frac{a^2}{c^2}\alpha \qquad (15)$$

de deux séries de droites remarquables, que l'on peut appeler *droites radicales.* Chacune de ces droites est la corde de contact (réelle ou imaginaire) commune à l'ellipse donnée et à une circonférence focale. En outre, *la distance d'un point* **M** *de la courbe, et la longueur de la tangente correspondante, sont dans un rapport constant,* égal à celui qui existe entre les distances de **M** à une directrice et au foyer correspondant.

## LXIII. — Sur les surfaces à courbure moyenne nulle (*).

(*Mai* 1867) (**).

I. On sait qu'en représentant par $a$, $b$ les cosinus des angles formés par la normale avec les axes des $x$ et des $y$, on peut mettre l'équation des lignes de courbure sous la forme

$$da : dx = db : dy,$$

on plutôt sous celle-ci :

$$\left(\frac{da}{dx}\,dx + \frac{da}{dy}\,dy\right)dy = \left(\frac{db}{dx}\,dx + \frac{db}{dy}\,dy\right)dx. \qquad (1)$$

D'un autre côté, dans un Mémoire (***) sur les surfaces dont il s'agit, j'ai prouvé que leur équation est, si l'on veut,

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} = 0. \qquad (2)$$

Il résulte, de celle-ci,

$$a = \frac{d\varphi}{dy}, \quad b = -\frac{d\varphi}{dx}, \qquad (3)$$

(*) Dans un beau Mémoire couronné par l'Académie de Belgique, M. Ribeaucour a proposé, pour les *surfaces à courbure moyenne nulle,* la dénomination d'*Alesséides.*

(**) La présente Note est, en grande partie, rédigée depuis plus d'un an; j'en ai indiqué les résultats dans mon cours à l'Université de Liége.

(***) *Journal de l'École polytechnique,* 37[e] Cahier, p. 130.

$\varphi$ étant une certaine fonction de $x$ et de $y$. Soit $z_1$ cette fonction; soient $p_1$, $q_1$, $r_1$, $s_1$, $t_1$ les dérivées partielles de $z_1$ : d'après les formules (3) :

$$a = q_1,\quad b = -p_1,\quad \frac{da}{dx} = s_1,\quad \frac{da}{dy} = t_1,\quad \frac{db}{dx} = -r_1,\quad \frac{db}{dy} = -s_1;$$

puis, au lieu de l'équation (1),

$$r_1 dx^2 + 2s_1 dxdy + t_1 dy^2 = 0. \tag{4}$$

Soient S la surface à courbure moyenne nulle, $S_1$ la surface qui a pour équation $z_1 = \varphi(x, y)$. En observant que l'équation (4), transformée de (1), appartient aux *lignes asymptotiques* de $S_1$, on a ce théorème :

*Les lignes de courbure de la surface* S, *et les lignes asymptotiques de la surface* $S_1$, *ont mêmes projections sur le plan* xy.

II. Si la surface S est connue, et qu'elle ait pour équation $z = f(x, y)$, on aura

$$dz_1 = p_1 dx + q_1 dy = -bdx + ady,$$

ou

$$dz_1 = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\, dx - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\, dy \text{ (*)}, \tag{5}$$

puis

$$z_1 = \int \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\, dx = \mathrm{Y}. \tag{6}$$

Pour déterminer Y, on a la relation

$$-\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \int dx \frac{d \cdot \dfrac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}}{dy} - \frac{d\mathrm{Y}}{dy}.$$

(*) Il est plus simple de prendre

$$z_1 = -\int bdx + \int ady + \int dy \int \frac{db}{dy}\, dx.$$

D'ailleurs

$$\frac{d.\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy}=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\,t-q\dfrac{ps+qt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{1+p^2+q^2}=\frac{(1+p^2)t-pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}};$$

donc

$$\frac{dY}{dy}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\int\frac{(1+p^2)\,t-pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy. \tag{7}$$

A cause de

$$(1+p^2)\,t-2pqs+(1+q^2)\,r=0, \tag{8}$$

on vérifie aisément que le second membre de l'équation (7) est indépendant de $x$; ce qui doit être.

III. Soit, par exemple,

$$z=\mathcal{L}\cos y-\mathcal{L}\cos x;$$

d'où

$$p=\operatorname{tg}x,\quad q=-\operatorname{tg}y,\quad r=\frac{1}{\cos^2 x},\quad s=0,\quad t=-\frac{1}{\cos^2 y}.$$

L'équation (7) devient

$$\frac{dY}{dy}=-\int\frac{\cos x\cos y}{(\cos^2 y+\cos^2 x\sin^2 y)^{\frac{3}{2}}}\,dx+\frac{\sin x\cos y}{\sqrt{\cos^2 y+\cos^2 x\sin^2 y}};$$

ou, si l'on fait *sin* $x=\lambda$:

$$\frac{dY}{dy}=-\cos y\int\frac{d\lambda}{(1-\lambda^2\sin^2 y)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\lambda\cos y}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 y}}.$$

L'intégrale a pour valeur

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 y}};$$

donc

$$\frac{dY}{dy}=0,\quad Y=\mathit{const.}$$

Si, pour plus de simplicité, on suppose cette constante nulle, on trouve, au moyen de la formule (6),

$$\sin z_1 = -\sin x \sin y. \tag{9}$$

Telle est l'équation de la surface $S_1$, la surface S étant représentée par

$$z = \int \cos y - \int \cos x.$$

IV. L'équation des lignes de courbure de la surface $S_1$ est, en général,

$$\frac{dx + p_1 dz_1}{dp_1} = \frac{dy + q_1 dz_1}{dq_1},$$

ou

$$\frac{dx - b(ady - bdx)}{db} + \frac{dy + a(ady - bdx)}{da} = 0,$$

ou

$$\left[(1+b^2)dx - abdy\right]d.\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \left[(1+a^2)dy - abdx\right]d.\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0.$$

Si l'on effectue les différenciations indiquées, et que l'on remplace $a$, $b$ par leurs valeurs, on trouve, au lieu de cette équation,

$$\left.\begin{aligned} &\left[(1+2q^2)r - 2pqs\right]dx^2 \\ +\ 2&\left[(1+p^2+q^2)s - pq(r+t)\right]dxdy \\ +\ &\left[(1+2p^2)t - 2pqs\right]dy^2 = 0\ (^*). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

L'équation des lignes asymptotiques de la surface S étant

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0, \tag{11}$$

(*) On arrive plus simplement à cette égalité en partant de celle-ci :

$$\left(\frac{da_1}{dx}dx + \frac{da_1}{dy}dy\right)dy = \left(\frac{db_1}{dx}dx + \frac{db_1}{dy}dy\right)dx,$$

et en observant que

$$a_1 = -\frac{q}{\sqrt{1+2p^2+2q^2}}, \quad b_1 = \frac{p}{\sqrt{1+2p^2+2q^2}}.$$

ces courbes auront mêmes projections que les lignes de courbure de $S_1$, si l'on a

$$\frac{q(ps-qr)}{r}=\frac{p(ps-qr)+q(qs-pt)}{-2s}=\frac{p(qs-pt)}{t}=\frac{\lambda}{1}. \quad (12)$$

Il résulte, de ces proportions,

$$r=\frac{pqs}{q^2+\lambda}, \quad t=\frac{pqs}{p^2+\lambda}, \quad ps-qr=\frac{ps\lambda}{q^2+\lambda}, \quad qs-pt=\frac{qs\lambda}{p^2+\lambda}; \quad (13)$$

et, en supposant $s$ différent de zéro (*) :

$$\frac{p^2}{q^2+\lambda}+\frac{q^2}{p^2+\lambda}+2=0. \quad (14)$$

Les racines de cette équation sont :

$$\lambda_1=-(p^2+q^2), \quad \lambda_2=-\frac{1}{2}(p^2+q^2). \quad (15)$$

V. 1° La première valeur donne

$$r=-\frac{q}{p}s, \quad t=-\frac{p}{q}s,$$

c'est-à-dire

$$p\frac{dp}{dx}+q\frac{dq}{dx}=0, \quad p\frac{dp}{dy}+q\frac{dq}{dy}=0;$$

d'où

$$p^2+q^2=k^2. \quad (16)$$

Cette équation exprime que *toutes les normales à la surface* S *sont également inclinées sur l'axe des* z. Cette même équation a la forme $F(p, q)=0$ ; donc *la surface* S *est développable.* En combinant ces deux propriétés, on conclut que *la surface* S *est*

(*) Je laisse de côté le cas où l'on aurait, simultanément :

$$qr=ps, \quad pt=qs:$$

la surface S est alors un cylindre.

*l'enveloppe d'un plan qui fait un angle constant avec le plan* xy; elle ne diffère donc pas de la *surface à pente constante* (*).

D'après un théorème dont j'ai donné autrefois la démonstration (**), cette surface réglée ne saurait être à courbure moyenne nulle. Par conséquent, la première racine de l'équation (14) ne répond pas au problème. Dans le paragraphe XII, je reviendrai sur cette circonstance.

2° Si l'on prend $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2}(p^2 + q^2)$, on trouve

$$r = \frac{2pqs}{q^2 - p^2}, \quad t = -\frac{2pqs}{q^2 - p^2}. \tag{17}$$

La première équation équivaut à

$$(q^2 - p^2)\frac{dp}{dx} = 2pq\frac{dq}{dx}.$$

Pour intégrer, je suppose $p = \alpha q$ : il vient

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{p} + \frac{2\alpha\frac{d\alpha}{dx}}{\alpha^2 + 1} = 0;$$

et, conséquemment,

$$p = \frac{Y}{\alpha^2 + 1},$$

ou

$$p^2 + q^2 = pY,$$

Y étant une fonction de $y$.

La seconde équation (17) donnerait, pareillement,

$$p^2 + q^2 = qX;$$

donc

$$p = \frac{X^2Y}{X^2 + Y^2}, \quad q = \frac{XY^2}{X^2 + Y^2}. \tag{18}$$

(*) MONGE, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, § VIII; LA GOURNERIE, *Traité de Géométrie descriptive*.

(**) *Journal de Mathématiques*, t. VII.

Si l'on a égard à la condition

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx},$$

et si l'on opère un déplacement d'origine, on trouve enfin, pour l'équation de la surface S,

$$\frac{z}{g} = \text{arc tg}\,\frac{x}{y}, \tag{19}$$

$g$ étant une constante arbitraire : la surface S est donc un *héliçoïde à plan directeur*. Cherchons la surface $S_1$ correspondante.

VI. On a

$$p = \frac{gy}{x^2 + y^2}, \quad q = -\frac{gx}{x^2 + y^2};$$

de sorte que l'équation (5) devient

$$-dz_1 = g\,\frac{\dfrac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + \dfrac{g^2}{x^2 + y^2}}} = g\,\frac{du}{\sqrt{u^2 + g^2}}, \tag{20}$$

si l'on suppose

$$u^2 = x^2 + y^2.$$

Intégrant, et déterminant la constante de manière que $z_1 = 0$ pour $u = 0$, on trouve

$$u = \frac{g}{2}\left(e^{\frac{z_1}{g}} - e^{-\frac{z_1}{g}}\right). \tag{21}$$

Cette équation appartient à une surface de révolution : la section méridienne, représentée par

$$x = \frac{g}{2}\left(e^{\frac{z_1}{g}} - e^{-\frac{z_1}{g}}\right),$$

a une liaison remarquable avec la chaînette dont l'équation serait

$$x = \frac{g}{2}\left(e^{\frac{z_1}{g}} + e^{-\frac{z_1}{g}}\right):$$

ces deux courbes ont pour *diamètre asymptotique* la logarithmique représentée par

$$x = \frac{g}{2} e^{\frac{z_1}{g}}.$$

VII. La surface de révolution $S_1$ est donc telle, que ses lignes de courbure se projettent, sur le plan $xy$, suivant des *circonférences* et des *rayons*, projections des lignes asymptotiques de l'hélicoïde S. Cette propriété subsisterait pour toute autre surface de révolution autour de $Oz$. Mais il y a plus : *les lignes asymptotiques de* $S_1$, *et les lignes de courbure de* S, *ont mêmes projections sur le plan* xy ; en sorte que *les surfaces* S, $S_1$, *sont conjuguées.*

Pour vérifier ce dernier point, j'observe qu'en vertu de l'équation (20) :

$$p_1 = -\frac{gx}{u\sqrt{u^2+g^2}}, \quad q_1 = -\frac{gy}{u\sqrt{u^2+g^2}};$$

puis

$$r_1 = -g\frac{u^2(u^2+g^2) - x^2(2u^2+g^2)}{u^3(u^2+g^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$s_1 = \quad g\frac{(2u^2+g^2)xy}{u^3(u^2+g^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$t_1 = -g\frac{u^2(u^2+g^2) - y^2(2u^2+g^2)}{u^3(u^2+g^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'équation des lignes asymptotiques de $S_1$ est donc

$$\left.\begin{array}{l}(u^4 - 2u^2x^2 + g^2y^2)\,dx^2 - 2(2u^2+g^2)\,xydxdy \\ + (u^4 - 2u^2y^2 + g^2x^2)\,dy^2 = 0.\end{array}\right\} \quad (22)$$

On peut l'écrire ainsi :

$$u^4(dx^2+dy^2) - 2u^2(xdx+ydy)^2 + g^2(ydx-xdy)^2 = 0.$$

Mais, si l'on prend des coordonnées polaires, on a

$$dx^2+dy^2 = du^2 + u^2d\omega^2,\ xdx+ydy = udu,\ ydx - xdy = -u^2d\omega;$$

d'où l'on conclut

$$d\omega = \pm \frac{du}{\sqrt{g^2 + u^2}} \cdot \tag{23}$$

Or, cette équation (23) appartient aux lignes de courbure de l'hélicoïde (*).

VIII. Le résultat auquel nous venons de parvenir nous paraît d'autant plus remarquable que, par une autre voie, on peut trouver une seconde *surface conjuguée de l'hélicoïde;* savoir, le *caténoïde* représenté par

$$u = \frac{g}{2}\left(e^{\frac{z_1}{g}} + e^{-\frac{z_1}{g}}\right). \tag{24}$$

IX. On peut se demander *dans quel cas la surface* $S_1$ *est-elle, comme la surface* S, *à courbure moyenne nulle?* Pour qu'il en soit ainsi, $z_1 = \varphi(x, y)$ doit être une intégrale de

$$\frac{da_1}{dx} + \frac{db_1}{dy} = 0,$$

c'est-à-dire, de

$$\frac{d.\dfrac{q}{\sqrt{1 + 2p^2 + 2q^2}}}{dx} = \frac{d.\dfrac{p}{\sqrt{1 + 2p^2 + 2q^2}}}{dy}.$$

En développant, on trouve

$$\frac{p}{q} = \frac{pr + qs}{ps + qt} \cdot \tag{25}$$

Ainsi, la surface S, qui satisfait à l'équation

$$(1 + p^2)\, t - 2pqs + (1 + q^2)\, r = 0,$$

doit satisfaire encore à l'équation (25). L'intégrale première de celle-ci est

$$z = \psi\,(p^2 + q^2), \tag{26}$$

$\psi$ étant une fonction arbitraire. Cette équation (26) exprime que, *pour tous les points appartenant à une ligne de niveau, l'incli-*

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 29ᵉ Cahier, p. 143.

*naison de la normale à la surface, sur le plan de cette ligne, est constante.* De là résulte que toutes *ces courbes sont équidistantes* et qu'elles se projettent, sur le plan $xy$, suivant des *courbes parallèles* à une première ligne donnée.

*La surface* $\Sigma$, représentée par l'équation (26), *peut être engendrée par une ligne plane* G, *dont un point* M *décrit une ligne* D, *pendant que les deux plans restent perpendiculaires entre eux. Si la directrice* D *est une ellipse, les lignes de niveau sont des toroïdes;* etc.

X. Soit $\beta = F(\alpha)$ l'équation de la directrice D, que nous supposerons située dans le plan des $xy$. Une *parallèle* à cette courbe a pour équation :

$$x - \alpha + (y - \beta)\beta' = 0, \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2.$$

Dans le cas actuel, le rayon $\rho$ est une fonction de $z$; donc l'intégrale seconde de l'équation (25), ou l'intégrale première de l'équation (26), est représentée par le système

$$x - \alpha + (y - F)F' = 0, \quad (x - \alpha)^2 + (y - F)^2 = f(z), \tag{27}$$

dans lequel $f$ et F sont des fonctions arbitraires. Dans chaque exemple particulier, l'élimination de $\alpha$ donnera l'équation d'une *surface* $\Sigma$, *à lignes de niveau équidistantes,* et ayant une directrice donnée.

XI. La surface $\Sigma$ jouit des propriétés suivantes : 1° *Les lignes de plus grande pente, toutes égales entre elles, sont situées dans des plans verticaux;* 2° *ce sont des lignes de courbure;* 3° *les courbes de niveau sont des lignes de courbure* (*); 4° *si l'on considère la courbe* C *suivant laquelle la surface touche le cylindre vertical, enveloppe des plans qui contiennent les lignes de plus grande pente, cette courbe* C *est une développée de la surface* $\Sigma$. C'est-à-dire que si le cylindre se déroule, C engendre $\Sigma$; etc. (**).

(*) En effet, ces courbes sont des trajectoires orthogonales des lignes de plus grande pente.

(**) Voir, sur le même sujet : *Remarques sur la théorie des lignes et des surfaces; Note sur les surfaces orthogonales,* etc. (Novembre 1884.)

XII. La surface $\Sigma$, dont nous venons de nous occuper, n'est pas, en général, à courbure moyenne nulle : pour qu'elle le soit, la directrice D et la génératrice doivent satisfaire à certaines conditions.

Afin de les découvrir, remarquons d'abord que, le plan de la ligne de courbure G contenant la normale à la surface, cette ligne G *est une section principale.* De plus, en tous les points d'une même ligne de niveau, le rayon $R_1$ de cette première section principale a une valeur constante. A cause de

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0,$$

le rayon $R_2$ de la seconde section principale doit aussi être constant. D'après le Théorème de Meusnier, joint à la définition de la surface, $R_2$ est égal au rayon $\rho$ de la ligne de niveau, divisé par le cosinus d'un angle constant. Donc $\rho = const.$ : *les lignes de niveau sont des circonférences.* De plus, elles doivent être équidistantes (IX) ; et cette propriété caractérise une surface de révolution. En résumé, la surface S est un *caténoïde.*

## LXIV. — Sur la partition des nombres.

(*Octobre* 1867) (*).

PROBLÈME. — *De combien de manières peut-on former une somme* n, *avec* q *nombres entiers, égaux ou inégaux?*

I. Désignons par $N_{n,q}$ (**) le nombre cherché, et considérons l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_q = n. \quad (1)$$

En supposant que les valeurs des inconnues soient rangées par

(*) Cette Note peut être considérée comme faisant suite à celle de la page 56.

(**) Dans la Note citée, $N_{n,q}$ était remplacé par $[n, q]$.

ordre de grandeur *non décroissante*, nous pourrons attribuer à $x_1$, successivement, les $\alpha$ valeurs entières :

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \alpha,$$

$\alpha$ représentant le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{q}$ ; de sorte que

$$\alpha = \left(\frac{n}{q}\right) (*). \tag{2}$$

Soit, en particulier, $x_1 = a$ : les valeurs de $x_2, x_3, \ldots x_q$ ne pouvant être inférieures à $a$, nous ferons

$$x_2 = y_2 + a - 1, \quad x_3 = y_3 + a - 1, \ \ldots\ x_q = y_q + a - 1\ ;$$

et nous aurons ainsi, au lieu de (1), $\alpha$ équations de la forme

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_q = n - 1 - (a-1)\,q, \tag{3}$$

dans lesquelles les $q - 1$ inconnues pourront recevoir les valeurs 1, 2, 3...... Le nombre des solutions de l'équation (3) étant $N_{n-1-(a-1)q,\,q-1}$, il s'ensuit que

$$N_{n,\,q} = \sum_{a=1}^{a=\alpha} N_{n-1-(a-1)q,\,q-1}, \tag{4}$$

ou

$$N_{n,\,q} = N_{n-1,\,q-1} + N_{n-1-q,\,q-1} + N_{n-1-2q,\,q-1} + \cdots + N_{n-1-(\alpha-1)q,\,q-1} (**). \tag{5}$$

II. Le nombre des termes du second membre, dans l'équation (5), est $\alpha$. Si $q = 2$, chacun de ces termes se réduit à 1 ; donc $N_{n,2} = \alpha$, ou

$$N_{n,\,2} = \left(\frac{n}{2}\right); \tag{6}$$

relation évidente.

(*) Comme nous l'avons déjà dit, la notation $\left(\frac{n}{q}\right)$ équivaut à celle-ci : $E\left(\frac{n}{q}\right)$, adoptée par Legendre.

(**) Cette relation générale résulte, immédiatement, de celle qui constitue le Théorème II (p. 56).

**III.** Si $q = 3$, l'équation (5) devient

$$N_{n,3} = N_{n-1,2} + N_{n-4,2} + N_{n-7,2} + \cdots + N_{n+2-3\alpha,2}; \tag{7}$$

ou, d'après la formule (6),

$$N_{n,3} = \left(\frac{n-1}{2}\right) + \left(\frac{n-4}{2}\right) + \left(\frac{n-7}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{n+2-3\alpha}{2}\right). \tag{8}$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} N_{19,3} &= \left(\frac{18}{2}\right) + \left(\frac{15}{2}\right) + \left(\frac{12}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{6}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right) \\ &= 9 + 7 + 6 + 4 + 3 + 1 \\ &= 30; \end{aligned}$$

à cause de $\alpha = \left(\frac{19}{3}\right) = 6$.

En effet, les décompositions du nombre 19 sont :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1+1+17, | 2+2+15, | 3+3+13, | 4+4+11, | 5+5+9, | 6+6+7, |
| 1+2+16, | 2+3+14, | 3+4+12, | 4+5+10, | 5+6+8, | |
| 1+3+15, | 2+4+13, | 3+5+11, | 4+6+9, | 5+7+7, | |
| 1+4+14, | 3+5+12, | 3+6+10, | 4+7+8, | | |
| 1+5+13, | 3+6+11, | 3+7+9, | | | |
| 1+6+12, | 3+7+10, | 3+8+8, | | | |
| 1+7+11, | 3+8+9, | | | | |
| 1+8+10, | | | | | |
| 1+9+9, | | | | | |

**IV.** Pour déterminer le second membre de l'équation (8), on doit considérer les diverses formes du nombre $n$, relatives au diviseur 6. On trouve ainsi, sans difficulté :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Pour } n = 6n', & N_{n,3} = N = 3n'^2; \\ n = 6n' + 1, & N = n'(3n' + 1); \\ n = 6n' + 2, & N = n'(3n' + 2); \\ n = 6n' + 3, & N = (n' + 1)^3 - n'^3; \\ n = 6n' + 4, & N = (n' + 1)(3n' + 1); \\ n = 6n' + 5, & N = (n' + 1)(3n' + 2). \end{array}\right\} \tag{9}$$

V. *Remarque.* — Au lieu de ce système de formules, on peut prendre celui-ci :

$$\left.\begin{aligned}
n &= 6n', & N &= \frac{n^2}{12};\\
n &= 6n'+1, & N &= \frac{n^2-1}{12};\\
n &= 6n'+2, & N &= \frac{n^2-4}{12};\\
n &= 6n'+3, & N &= \frac{n^2+3}{12};\\
n &= 6n'+4, & N &= \frac{n^2-4}{12};\\
n &= 6n'+5, & N &= \frac{n^2-1}{12}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Il en résulte ce théorème curieux, proposé par M. Vachette (*) :

*Parmi les quatre nombres* $n^2$, $n^2-1$, $n^2-4$, $n^2+3$, *il en est un divisible par* 12 : *le quotient égale le nombre des manières différentes de partager* n *en trois parties entières, positives, égales ou inégales.*

VI. Si $q$ surpasse 3, il paraît difficile d'exprimer le nombre des solutions de l'équation (1), au moyen d'une formule qui ne soit pas illusoire; et l'on est réduit à faire usage, une ou plusieurs fois, de la relation (5). Soit, par exemple, $n=39$, $q=4$; d'où $\alpha=9$. Cette relation devient

$$N_{39,4}=N_{38,3}+N_{34,3}+N_{30,3}+N_{26,3}+N_{22,3}+N_{18,3}+N_{14,3}+N_{10,3}+N_{6,3}$$

Mais, par les formules (10) :

$$N_{38,3}=\frac{38^2-4}{12}=120,$$

$$N_{34,3}=\frac{34^2-4}{12}=96,$$

(*) *Nouvelles Annales de mathématiques,* octobre 1867.

$$N_{30,3} = \frac{30^2}{12} = 75,$$

$$N_{26,3} = \frac{26^2 - 4}{12} = 56,$$

$$N_{22,3} = \frac{22^2 - 4}{12} = 40,$$

$$N_{18,3} = \frac{18^2}{12} = 27,$$

$$N_{14,3} = \frac{14^2 - 4}{12} = 16,$$

$$N_{10,3} = \frac{10^2 - 4}{12} = 8,$$

$$N_{6,3} = \frac{6^2}{12} = 3;$$

donc

$$N_{39,4} = 120 + 96 + 75 + 56 + 40 + 27 + 16 + 8 + 3 = 441,$$

résultat conforme à celui que donne Euler (*).

VII. Si, comme l'a fait ce grand Géomètre, on veut construire une *table* des valeurs de la fonction $N_{n,q}$, on peut, au lieu de la relation (5), appliquer avec avantage le Théorème II de la Note XXII, lequel équivaut à l'équation

$$N_{n,q} = N_{n-1,q-1} + N_{n-q,q}, \tag{11}$$

ou à celle-ci :

$$N_{n+q,q} = N_{n+q-1,q-1} + N_{n,q}.$$

Au moyen de cette relation, et des valeurs initiales :

$$N_{n,1} = 1, \quad N_{n+1,1} = 1, \quad N_{n.n} = 1,$$

on forme aisément la table suivante, qui contient les valeurs de $N_{n+q,q}$.

(*) *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, t. I, p. 252.

| Valeurs de $q$. | Valeurs de $n$. 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 | 11 | 15 | 18 | 23 | 27 | 34 | 39 | 47 | 54 | 64 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | 18 | 23 | 30 | 37 | 47 | 57 | 70 | 84 | 101 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 14 | 20 | 26 | 35 | 44 | 58 | 71 | 90 | 110 | 136 |
| 7 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 21 | 28 | 38 | 49 | 65 | 82 | 105 | 131 | 164 |
| 8 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 29 | 40 | 52 | 70 | 89 | 116 | 146 | 186 |
| 9 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 | 41 | 54 | 73 | 94 | 123 | 157 | 201 |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 | 42 | 55 | 75 | 97 | 128 | 164 | 212 |
| 11 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 | 42 | 56 | 76 | 99 | 131 | 169 | 219 |
| 12 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 | 42 | 56 | 77 | 100 | 133 | 172 | 224 |
| 13 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 | 42 | 56 | 77 | 101 | 134 | 174 | 227 |
| 14 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 | 42 | 56 | 77 | 101 | 135 | 175 | 229 |

D'après la formule (12) :

*Un terme quelconque de la troisième ligne horizontale est égal à celui qui le précède de trois rangs, augmenté de celui qui est écrit au-dessus ;*

*Un terme quelconque de la quatrième ligne horizontale est égal à celui qui le précède de quatre rangs, augmenté de celui qui est écrit au-dessus ;*

*Etc.*

VIII. De la relation (11), on peut déduire, très facilement, la *fonction génératrice* de $N_{n,q}$. En effet, soient

$$F(x, q) = x^q + N_{q+1,q}\, x^{q+1} + \cdots + N_{n,q}\, x^n + \cdots,$$
$$F(x, q-1) = x^{q-1} + N_{q,q-1}\, x^q + \cdots + N_{n-1,q-1}\, x^{n-1} + \cdots$$

Multipliant par $1 - x^q$ les deux membres de la première égalité, par $x$ les deux membres de la seconde, on trouve deux développements qui doivent être identiques; donc

$$F(x, q) = \frac{x}{1 - x^q} F(x, q - 1).$$

Et comme

$$F(x, 1) = x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{x}{1 - x},$$

la fonction géneratrice cherchée est

$$F(x, q) = \frac{x^q}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\ldots(1 - x^q)} \text{ (*)}. \qquad (13)$$

IX. Le second membre de la dernière équation est égal au produit des séries

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots,$$
$$x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \cdots$$
$$x + x^4 + x^7 + x^{10} + x^{13} + \cdots$$
$$x + x^5 + x^9 + x^{13} + x^{17} + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x + x^{q+1} + x^{2q+1} + x^{3q+1} + x^{4q+1} + \cdots$$

L'exposant de $x^n$, dans ce produit, étant la somme des exposants de $x$ dans les facteurs de chacun des produits partiels, on a ce théorème remarquable (**) :

*Il y a autant de manières de décomposer un nombre* n *en* q *parties entières, égales ou inégales, qu'il y en a de décomposer ce*

(*) Ce théorème est dû à Euler, aussi bien que tous ceux que nous avons donnés dans la Note XXII.

(**) Il a été donné, sous une autre forme, par Euler (*Introduction à l'Analyse*, t. I, p. 244).

*même nombre en* q *parties appartenant, respectivement, aux progressions*

$$
\begin{array}{llllll}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6,\ldots \\
1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11,\ldots \\
1, & 4, & 7, & 10, & 13, & 16,\ldots \\
1, & 5, & 9, & 13, & 17, & 21,\ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

$$1, (q+1),\quad (2q+1),\quad (3q+1),\quad (4q+1),\ldots$$

Par exemple, nous avons trouvé que le nombre 19 admet 30 décompositions en trois parties. Or, ce nombre 19 admet aussi les décompositions suivantes :

$$
\begin{array}{llllll}
1+1+17, & 4+1+14, & 7+1+11, & 10+1+8, & 13+1+5, & 16+1+2; \\
1+3+15, & 4+3+12, & 7+3+9, & 10+3+6, & 13+3+3, & \\
1+5+13, & 4+5+10, & 7+5+7, & 10+5+4, & 13+5+1, & \\
1+7+11, & 4+7+8, & 7+7+5, & 10+7+2, & & \\
1+9+9, & 4+9+6, & 7+9+3, & & & \\
1+11+7, & 4+11+4, & 7+11+1, & & & \\
1+13+5, & 4+13+2, & & & & \\
1+15+3, & & & & & \\
1+17+1, & & & & &
\end{array}
$$

et celles-ci sont également au nombre de 30 (*).

## LXV. — Aire d'une surface du quatrième degré.

I. Cette surface, bien connue, est engendrée par une droite D, de longueur donnée, dont les extrémités glissent sur deux droites fixes A, B, non situées dans un même plan, et, pour plus de simplicité, supposées perpendiculaires entre elles.

(*) Le Mémoire ayant pour titre *Recherches sur quelques produits indéfinis* est consacré, en grande partie, à la question qui fait l'objet de la présente Note. (Novembre 1884.)

En appelant $2c$ la longueur de la commune perpendiculaire aux directrices, et $\gamma$ l'angle constant formé par les directions de cette droite et de la génératrice, on trouve aisément que l'équation de la surface est réductible à

$$\frac{x^2}{(c+z)^2} + \frac{y^2}{(c-z)^2} = \operatorname{tg}^2\gamma \text{ (*)}. \tag{1}$$

Quant à la génératrice, elle peut être représentée par

$$x = (c+z)\operatorname{tg}\gamma\cos\varphi, \quad y = (c-z)\operatorname{tg}\gamma\sin\varphi, \tag{2}$$

$\varphi$ étant l'angle de A avec la projection de D sur le plan $xy$. Les angles $\alpha$, $\beta$, que fait D avec les axes des $x$ et des $y$, sont déterminés par les formules

$$\cos\alpha = \sin\gamma\cos\varphi, \quad \cos\beta = -\sin\gamma\sin\varphi. \tag{3}$$

II. Lorsque la génératrice se déplace, un point M de cette ligne décrit *un petit arc d'ellipse :* la longueur et les projections de cet arc vérifient les relations

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2, \\ dx = -(c+z)\operatorname{tg}\gamma\sin\varphi d\varphi, &\quad dy = (c-z)\operatorname{tg}\gamma\cos\varphi d\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

V étant l'angle de $ds$ avec D, on a

$$\cos V = \frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta = -c\frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma}\sin 2\varphi\frac{d\varphi}{ds}. \tag{5}$$

Si l'on prend sur D, à partir du point M, une distance infiniment petite $MM' = d\sigma = \frac{dz}{\cos\gamma}$, le parallélogramme qui a pour côtés $ds$ et $d\sigma$ peut être considéré comme l'élément de la surface. L'aire de ce parallélogramme est

$$dA = ds\,d\sigma\sin V.$$

(*) Chacune des deux parties dont se compose la surface (limitées aux directrices A, B) a la forme d'un de ces *bonnets de police* en usage vers 1830.

Mais, par les formules (3), (4), (5) :

$$ds^2 \sin^2 V = \operatorname{tg}^2\gamma\left[(c+z)^2\sin^2\varphi + (c-z)^2\cos^2\varphi - c^2\sin^2\gamma\sin^2 2\varphi\right]d\varphi^2$$
$$= \operatorname{tg}^2\gamma\left[(z - c\cos 2\varphi)^2 + c^2\cos^2\gamma\sin^2 2\varphi\right]d\varphi^2;$$

donc

$$dA = \frac{\sin\gamma}{\cos^2\gamma}\, d\varphi dz \sqrt{(z - c\cos 2\varphi)^2 + c^2\cos^2\gamma\sin^2 2\varphi}\,;$$

puis

$$A = \frac{\sin\gamma}{\cos^2\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-c}^{+c} dz\sqrt{(z - c\cos 2\varphi)^2 + c^2\cos^2\gamma\sin^2 2\varphi}\ (^*). \quad (6)$$

III. En général,

$$\int du\sqrt{u^2+a^2} = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2\,\mathcal{L}\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right) + const\,;$$

donc, R étant le radical qui entre dans la formule (6) :

$$\int R dz = \frac{1}{2}(z - c\cos 2\varphi)R + \frac{1}{2}c^2\cos^2\gamma\sin^2 2\varphi\,\mathcal{L}[z - c\cos 2\varphi + R] + const;$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{-c}^{+c} R dz = {} & 2c^2\left[\sin^3\varphi\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\varphi} + \cos^3\varphi\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}\right] \\ & + \frac{1}{2}c^2\cos^2\gamma\sin^2 2\varphi\,\mathcal{L}\frac{\left(\sin\varphi + \sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\varphi}\right)\sin\varphi}{\left(-\cos\varphi + \sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}\right)\cos\varphi}.\end{aligned}\right\}(7)$$

Au moyen de cette valeur et de l'identité

$$\frac{\sin\varphi + \sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\varphi}}{-\cos\varphi + \sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}}$$
$$= \frac{\left(\sin\varphi + \sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\varphi}\right)\left(\cos\varphi + \sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}\right)}{\sin^2\varphi\cos^2\gamma},$$

(*) On ne considère ici que la partie de la surface limitée par le plan $zx$, le plan $zy$ et les directrices.

la formule (6) devient $\dfrac{\cos^2\gamma}{c^2\sin\gamma}A$

$$\left.\begin{aligned}
&=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\varphi}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}\right]\\
&+\frac{1}{2}\cos^2\gamma\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi\,\mathcal{L}\left(\sin\varphi+\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\varphi}\right)\right.\\
&\qquad+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi\,\mathcal{L}\left(\cos\varphi+\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}\right)\\
&\qquad\left.-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi\,\mathcal{L}(\sin\varphi)-2\,\mathcal{L}(\cos\gamma)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi\right].
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

IV. Les quatre premières intégrales sont égales deux à deux (*); donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos^2\gamma}{c^2\sin\gamma}A&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}\\
&+\cos^2\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi\,\mathcal{L}\left(\cos\varphi+\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}\right)\\
&-\cos^2\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi\,\mathcal{L}(\sin\varphi)-\cos^2\gamma\,\mathcal{L}(\cos\gamma)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi;
\end{aligned}$$

ou

$$A=\frac{c^2\sin\gamma}{\cos^2\gamma}\left[4M+N\cos^2\gamma\right]-c^2\sin\gamma\left[P+Q\,\mathcal{L}(\cos\gamma)\right];\quad(9)$$

en supposant :

$$\left.\begin{aligned}
M&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi},\\
N&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi\,\mathcal{L}\left(\cos\varphi+\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}\right),\\
P&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi\,\mathcal{L}(\sin\varphi),\\
Q&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi.
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

(*) Il est visible que la bissectrice de l'angle $xOy$ est un *axe de symétrie* de la surface. Nous aurions donc pu, au lieu de la formule (6), en prendre une autre, dans laquelle les limites seraient 0 et $\frac{\pi}{4}$, 0 et $c$. Mais cette simplification est plus apparente que réelle.

La question proposée se réduit donc à la détermination de ces quatre intégrales (*).

V. 1° $$Q=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi=\frac{\pi}{4}\cdot \qquad (11)$$

2° Pour calculer M, posons

$$\sin\varphi=\frac{\sin\theta}{\sin\gamma}\cdot$$

Il résulte, de cette transformation :

$$\cos^2\varphi=\frac{\sin^2\gamma-\sin^2\theta}{\sin^2\gamma},\quad \cos\varphi d\varphi=\frac{\cos\theta d\theta}{\sin\gamma};$$

puis

$$M=\frac{1}{\sin^3\gamma}\int_0^{\gamma}(\sin^2\gamma-\sin^2\theta)\cos^2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2\sin\gamma}\int_0^{\gamma}(1+\cos 2\theta)\,d\theta-\frac{1}{8\sin^3\gamma}\int_0^{\gamma}(1-\cos 4\theta)\,d\theta;$$

c'est-à-dire :

$$M=\frac{1}{2\sin\gamma}\left(\gamma+\frac{1}{2}\sin 2\gamma\right)-\frac{1}{8\sin^3\gamma}\left(\gamma-\frac{1}{4}\sin 4\gamma\right);$$

et, après quelques réductions,

$$M=\frac{1}{16\sin^3\gamma}\left[(2-\cos 2\gamma)\sin 2\gamma+2\gamma\,(1-2\cos 2\gamma)\right].\qquad (12)$$

3° $$P=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathcal{L}(\sin\varphi)\,d\varphi-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\varphi\,\mathcal{L}(\sin\varphi)\,d\varphi.$$

On sait que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathcal{L}(\sin\varphi)\,d\varphi=-\frac{\pi}{2}\mathcal{L}\,2\ (^{**}).$$

(*) Les valeurs de M, P, Q sont connues. Voir les *Tables* de M. Bierens de Haan.

(**) BIERENS DE HAAN, T. 330. — L'*en-tête* de cette table contient une faute typographique. Au lieu de : *Lim.* 0 et $\frac{\pi}{4}$, on doit lire : *Lim.* 0 et $\frac{\pi}{2}$.

De plus, à cause de $x \,\mathcal{L}\, x = 0$ pour $x = 0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi \,\mathcal{L}\, (\sin \varphi)\, d\varphi = -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\varphi \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi,$$

ou

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi \,\mathcal{L}(\sin\varphi) d\varphi = -\frac{1}{4}\left[ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi d\varphi + \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi d\varphi \right]$$

$$= -\frac{\pi}{8}.$$

Par suite,

$$P = \frac{\pi}{16}\left(1 - 4\,\mathcal{L}\, 2\right). \tag{13}$$

VI. La détermination de l'intégrale

$$N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi \,\mathcal{L}\left(\cos \varphi + \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi}\right)$$

présente d'assez grandes difficultés. Pour essayer de les lever, je considère d'abord les cas particuliers de $\gamma = 0$ et de $\gamma = \frac{\pi}{2}$; savoir

$$N_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi \,\mathcal{L}\, (1 + \cos \varphi),$$

$$N_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi \,\mathcal{L}\, (2 \cos \varphi).$$

1° $N_1 = \mathcal{L}2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi \,\mathcal{L}\, (\cos \varphi).$

La première intégrale égale $Q = \frac{\pi}{4}$; la seconde ne change pas quand on y remplace $\varphi$ par $\frac{\pi}{2} - \varphi$; c'est-à-dire qu'elle est égale à P. Conséquemment,

$$N_1 = \frac{\pi}{16}. \tag{14}$$

2° La comparaison des intégrales $N_0$ et P conduit à

$$N_0 - P = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \,\mathcal{L}.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi d\varphi.$$

Remplaçant $\sin^2 2\varphi$ par $\frac{1-\cos 4\varphi}{2}$, puis intégrant par parties, on trouve aisément, au lieu du second membre,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\sin^2\varphi)\cos\varphi d\varphi.$$

La première intégrale a pour valeur le double de la constante G (*); l'autre est égale à $\frac{1}{3}$. Conséquemment,

$$N_0 - P = G - \frac{1}{6},$$

ou

$$N_0 = \frac{\pi}{16}(1 - 4 \mathcal{l}\, 2) + G - \frac{1}{6} (^{**}). \tag{15}$$

VII. Remarquons, maintenant, que la dérivée de N, relative au *paramètre* $\gamma$, est

$$\frac{dN}{d\gamma} = -\sin\gamma\cos\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi \sin^2\varphi d\varphi}{\left(\cos\varphi + \sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}\right)\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}}$$

$$= -\operatorname{tg}\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos\varphi + \sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}} \sin^2 2\varphi d\varphi,$$

ou

$$\frac{dN}{d\gamma} = \operatorname{tg}\gamma\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}} - Q\right]. \tag{16}$$

Pour calculer l'intégrale

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}}, \tag{17}$$

je pose, comme ci-dessus,

$$\sin\varphi = \frac{\sin\theta}{\sin\gamma}.$$

(*) Bierens de Haan, T. 239. Voyez aussi la Note LIV.

(**) Un calcul direct, beaucoup plus long que celui-ci, conduit au même résultat.

Cette transformation donne

$$S = \frac{4}{\sin^5 \gamma} \int_0^{\gamma} (\sin^2 \gamma - \sin^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta.$$

Comparant avec l'intégrale M, on a

$$\frac{1}{4} S \sin^5 \gamma + M \sin^3 \gamma = \int_0^{\gamma} (\sin^2 \gamma - \sin^2 \theta)\, d\theta$$

$$= \gamma \sin^2 \gamma - \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{1}{2} \sin 2\gamma\right);$$

puis, à cause de la formule (12),

$$S = \frac{1}{2 \sin^5 \gamma} \left[(1 + 2 \cos^2 \gamma) \sin \gamma \cos \gamma + \gamma (1 - 4 \cos^2 \gamma)\right]. \quad (18)$$

Substituant dans la formule (16), on trouve

$$\frac{dN}{d\gamma} = \frac{\gamma}{2 \sin^4 \gamma \cos \gamma} (1 - 4 \cos^2 \gamma) + \frac{1}{2 \sin^3 \gamma} (1 + 2 \cos^2 \gamma) - \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \gamma;$$

et, par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} & N = N_0 + \\ & \frac{1}{2} \int_0^{\gamma} \frac{\gamma (1 - 4 \cos^2 \gamma) + \sin \gamma \cos \gamma (1 + 2 \cos^2 \gamma)}{\sin^4 \gamma \cos \gamma} d\gamma + \frac{\pi}{4} \mathcal{L} (\cos \gamma). \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

L'intégrale indéfinie se décompose en

$$\int \frac{\gamma d\gamma}{\sin^4 \gamma \cos \gamma} - 4 \int \frac{\gamma \cos \gamma d\gamma}{\sin^4 \gamma} + 3 \int \frac{d\gamma}{\sin^3 \gamma} - 2 \mathcal{L}\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma\right) = F(\gamma).$$

On peut vérifier que

$$\int \frac{d\gamma}{\sin^4 \gamma \cos \gamma} = - \frac{1}{3 \sin^3 \gamma} + \frac{1}{2} \mathcal{L} \frac{1 + \sin \gamma}{1 - \sin \gamma} - \frac{1}{\sin \gamma}.$$

D'ailleurs,

$$\int \frac{\cos \gamma d\gamma}{\sin^4 \gamma} = - \frac{1}{3 \sin^3 \gamma}.$$

On a donc, en intégrant par parties,

$$F(\gamma)=\frac{\gamma}{\sin^3\gamma}+\frac{1}{2}\gamma\,\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}\right)-\frac{\gamma}{\sin\gamma}$$
$$+2\int\frac{d\gamma}{\sin^3\gamma}-\frac{1}{2}\int d\gamma\,\mathcal{L}\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}-\mathcal{L}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\right);$$

ou, à cause de

$$\int\frac{d\gamma}{\sin^3\gamma}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\right)-\frac{1}{2}\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}:$$

$$F(\gamma)=$$
$$\frac{\gamma}{\sin^3\gamma}+\frac{1}{2}\gamma\,\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}\right)-\frac{\gamma}{\sin\gamma}-\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}-\frac{1}{2}\int d\gamma\,\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}\right),$$

ou

$$F(\gamma)=\frac{\cos\gamma\,(\gamma\cos\gamma-\sin\gamma)}{\sin^3\gamma}+\int\frac{\gamma d\gamma}{\cos\gamma}.$$

La fraction en dehors du signe $\int$ se réduit à $-\frac{1}{3}$ pour $\gamma=0$; conséquemment

$$\int_0^\gamma\frac{\gamma\,(1-4\cos^2\gamma)+\sin\gamma\cos\gamma\,(1+2\cos^2\gamma)}{\sin^4\gamma\cos\gamma}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{\cos\gamma\,(\gamma\cos\gamma-\sin\gamma)}{\sin^3\gamma}+\int_0^\gamma\frac{\gamma d\gamma}{\cos\gamma};$$

puis, par la substitution dans la formule (19),

$$N=N_0+\frac{1}{6}+\frac{\cos\gamma\,(\gamma\cos\gamma-\sin\gamma)}{2\sin^3\gamma}+\frac{\pi}{4}\mathcal{L}(\cos\gamma)$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\gamma\frac{\gamma d\gamma}{\cos\gamma};$$

ou encore, en réunissant les deux termes qui deviennent infinis pour $\gamma=\frac{\pi}{2}$:

$$\left.\begin{aligned}N=N_0+\frac{1}{6}+\frac{\cos\gamma\,(\gamma\cos\gamma-\sin\gamma)}{2\sin^3\gamma}\\-\frac{1}{2}\int_0^\gamma\frac{\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta-\theta\right)d\theta}{\cos\theta}.\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

VIII. Si l'on fait

$$\theta = \frac{\pi}{2} - v,$$

on change la dernière intégrale en

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\cos v - \frac{\pi}{2} + v\right)}{\sin v} dv = -\frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v} dv + \int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \frac{vdv}{\sin v}.$$

D'ailleurs,

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v} dv = -2\,\mathcal{L}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + 2\,\mathcal{L}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)\right]$$

$$= 2\,\mathcal{L}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right);$$

donc la formule (20) devient

$$N = N_0 + \frac{1}{6}\frac{\cos\gamma(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)}{2\sin^3\gamma} + \frac{\pi}{2}\mathcal{L}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \frac{vdv}{\sin v};$$

ou plus simplement, et à cause de la valeur de $N_0$ :

$$N = \frac{\pi}{16}(1 - 4\,\mathcal{L}\,2) + \frac{\cos\gamma\,(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)}{2\sin^3\gamma} + \frac{\pi}{2}\mathcal{L}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\gamma} \frac{vdv}{\sin v};$$

ou enfin

$$\left.\begin{aligned} N = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}\mathcal{L}\left(\frac{1 + \sin\gamma}{2}\right) + \frac{\cos\gamma\,(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)}{2\sin^3\gamma} \\ + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\gamma} \frac{vdv}{\sin v}. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

On voit ainsi que la fonction désignée par N se compose d'une somme de quantités données, augmentée de la moitié d'une intégrale de forme très simple, mais dont la valeur n'est pas connue généralement. Le problème que nous nous étions proposé de résoudre se réduit donc, en dernière analyse, à la recherche de cette même intégrale.

IX. Reprenons les formules (9), (11), (12), (13) et (21) :

$$A = \frac{c^2 \sin\gamma}{\cos^2\gamma}\left[4M + \cos^2\gamma\right] - c^2 \sin\gamma\left[P + Q\,\mathcal{L}(\cos\gamma)\right],$$

$$M = \frac{1}{16\sin^3\gamma}\left[(2 - \cos 2\gamma)\sin 2\gamma + 2\gamma(1 - 2\cos 2\gamma)\right],$$

$$N = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\gamma}{2}\right) + \frac{\cos\gamma\,(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)}{2\sin^3\gamma}$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\gamma} \frac{v\,dv}{\sin v},$$

$$P = \frac{\pi}{16}\left(1 - 4\,\mathcal{L}\,2\right), \quad Q = \frac{\pi}{4}.$$

La substitution des valeurs de M et de N donne d'abord, au moyen de quelques réductions,

$$4M + N\cos^2\gamma = \frac{3}{2}\cos\gamma + \frac{\gamma}{2\sin\gamma}(3\sin^2\gamma + 2\cos^2\gamma)$$
$$+ \frac{\pi}{16}\cos^2\gamma\left[1 + 4\,\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\gamma}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\cos^2\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}-\gamma}\frac{v\,dv}{\sin v}.$$

De plus,

$$P + Q\,\mathcal{L}(\cos\gamma) = \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{4}\mathcal{L}\left(\frac{2}{\cos\gamma}\right).$$

Conséquemment

$$\left.\begin{aligned}\frac{A}{c^2} = \frac{3}{2}\operatorname{tg}\gamma + \frac{\gamma}{2}(3\operatorname{tg}^2\gamma + 2) + \frac{\pi}{4}\sin\gamma\,\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)\\ + \frac{1}{2}\sin\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}-\gamma}\frac{v\,dv}{\sin v}.\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

X. Si l'on compare cette valeur à celle qui résulte de l'équation (6), et que l'on prenne $c$ pour unité, on trouve

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-1}^{+1} dz \sqrt{(z - \cos 2\varphi)^2 + \cos^2\gamma \sin^2 2\varphi} \\ \displaystyle = \frac{3}{2}\cos\gamma + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\sin\gamma}(3\sin^2\gamma + 2\cos^2\gamma) + \frac{\pi}{4}\cos^2\gamma \;\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma}\right) \\ \displaystyle + \frac{1}{2}\cos^2\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}-\gamma} \frac{v\,dv}{\sin v}\,(^*). \end{array}\right\} \quad (23)$$

## LXVI. — De quelques propositions inexactes, relatives aux séries.

(*Novembre* 1867) (**).

I. Dans une Note intitulée : *Addition à la première partie des Recherches sur la nature et la propagation du Son* (***), Lagrange répond ainsi à de très justes critiques :

« ... 3° M. d'Alembert attaque aussi les calculs que j'ai fait
» dans le Chap. VI pour trouver d'une manière directe & géné-
» rale la somme d'une suite infinie, telle que

« $\sin\varphi \times \sin\theta + \sin 2\varphi \times \sin 2\theta + \&c.$ »

(*) Cette formule semble en défaut lorsque $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Mais dans ce cas, l'intégrale relative à $z$ doit être décomposée ainsi :

$$\int_{-1}^{\cos 2\varphi} (\cos 2\varphi - z)\,dz + \int_{\cos 2\varphi}^{+1} (z - \cos 2\varphi)\,dz\,;$$

parce que, dans le premier membre de (23), le radical est supposé positif.

(**) Cette Note renferme certaines *vivacités* d'expression. Peut-être, aujourd'hui (juin 1884), l'écrirais-je autrement. Néanmoins, j'ai cru devoir ne rien changer à ma rédaction primitive.

(***) *Miscellanea taurinensia,* pp. 326 et suiv. (1760-61).

Cette série est sinon *divergente,* du moins *indéterminée.* En effet, la somme des $n$ premiers termes a pour valeur

$$S_n = \frac{\cos\frac{(n+1)(\varphi-\theta)}{2}\sin\frac{n(\varphi-\theta)}{2}}{2\sin\frac{\varphi-\theta}{2}} - \frac{\cos\frac{(n+1)(\varphi+\theta)}{2}\sin\frac{n(\varphi+\theta)}{2}}{2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}};$$

et, lorsque $n$ croît indéfiniment, cette quantité ne tend vers aucune limite fixe. Néanmoins, à l'endroit cité, Lagrange cherche à prouver que *la somme de la série égale zéro.* On va voir comment l'illustre Géomètre arrive à un pareil résultat.

« La méthode que j'ai emploïée dans cette recherche est
» très-simple ; après avoir transformé la suite proposée en deux
» autres composées de simples *cosinus,* j'ai mis à la place de
» chacun de ces *cosinus* son expression exponentielle imaginaire,
» & j'ai cherché la somme de suites résultantes, par la méthode
» ordinaire de la sommation des series géométriques, en suppo-
» sant le dernier terme nul comme on le fait communement
» lorsque la serie va à l'infini.

» M. d'Alembert m'objecte que cette supposition n'est point
» exacte, parce que dans la suite $e^{x\sqrt{-1}} + e^{2x\sqrt{-1}}$ &c. le dernier
» terme est $e^{\infty\sqrt{-1}}$ quantité qui est infinie au lieu d'être zéro. »

Non seulement Lagrange n'admet pas l'objection, mais encore *il ne la comprend pas;* il y a plus : il s'étonne que d'Alembert conteste une *proposition complètement absurde!* Le Géomètre de Turin continue en effet ainsi sa polémique avec le Philosophe de Paris :

« Or je demande si toutes les fois que dans une formule
» algébrique, il se trouvera par exemple une serie géométrique
» infinie, telle que $1 + x + x^2 + x^3 +$ &c. on ne sera pas en
» droit d'y substituer $\frac{1}{1-x}$, quoique cette quantité ne soit réelle-
» ment égale à la somme de la serie proposée qu'en supposant
» le dernier terme $x^\infty$ nul. Il me semble qu'on ne sauroit contester
» l'exactitude d'une telle substitution sans renverser les Principes
» les plus communs de l'Analise. »

Ainsi, ce serait *renverser les principes* que de *contester l'exactitude de la substitution d'une quantité* A *à une quantité* B, lorsque B *diffère de* A ! On croit rêver quand on lit de pareilles choses, signées d'un si grand nom ! Mais ce n'est pas tout :

« M. d'Alembert apporte encore un argument particulier pour
» prouver que la somme de la suite

» $\cos x + \cos 2x + \cos 3x +$ etc. *à l'infini*

» ne peut pas être $-\frac{1}{2}$ comme je l'ai trouvée par mon calcul. Il
» suppose $x = 45°$, et il trouve que cette suite devient $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0,
» $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-1$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $+1$, etc. après quoi elle recom-
» mence : *or* (dit-il) *la somme de cette suite finie est, ou* $\frac{1}{\sqrt{2}}$, *ou* 0,
» *ou* $-1$, *ou* $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ *selon qu'on y prendra plus ou moins de*
» *termes. Donc la somme de la suite entière est aussi ou* $\frac{1}{\sqrt{2}}$, *ou* 0,
» *ou* $-1$, *ou* $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, *selon le nombre des termes qu'on y*
» *prendra, quel que soit d'ailleurs ce nombre de termes fini ou*
» *infini, & cette somme ne serait point* $=0$, *à moins que* $m \times 45°$
» *ne soit = à une infinité de fois la circonférence, ou* $135° +$ *une*
» *infinité de fois la circonférence.* »

Sauf peut-être les mots *somme de la suite entière,* il n'y a rien à objecter au raisonnement de d'Alembert : aujourd'hui, on ne s'y prendrait ni autrement, ni mieux que lui, pour établir l'*indétermination* de la série

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots$$

Au lieu de se rendre à des arguments si clairs, présentés en si bons termes, le futur *comte de l'Empire* le prend de très haut avec *Jean-le-Rond ;*

« Je répons qu'avec un pareil raisonnement on soutiendroit
» aussi que $\frac{1}{1+x}$ n'est point l'expression générale de la somme
» de la suite infinie $1 - x + x^2 - x^3 +$ etc. parce qu'en faisant
» $x = 1$ on a $1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. ce qui est ou 0, ou 1, selon
» que le nombre des termes qu'on prend est pair, ou impair,
» tandis que la valeur de $\frac{1}{1+x}$ est $\frac{1}{2}$. *Or, je ne crois pas qu'aucun*
» *Géomètre voulût admettre cette conclusion.* »

Depuis longtemps *tous les Géomètres* sont d'accord sur cette proposition :

*L'équation*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

*est absurde si* x *égale ou surpasse l'unité ;*

et tous les étudiants en mathématiques sont en état de la démontrer. D'Alembert avait donc raison ; et il ne reste rien, absolument rien, de la réfutation de Lagrange (*).

II. Un *Mémoire sur la convergence des séries*, dû à l'un des plus éminents Géomètres de ce siècle, commence ainsi (**) :

« Soient

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \cdot\cdot \text{ etc...} \tag{1}$$

» les différents termes d'une série réelle ou imaginaire ; et

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} \tag{2}$$

» la somme des $n$ premiers termes, $n$ désignant un nombre entier
» quelconque. Si, pour des valeurs de $n$ toujours croissantes, la
» somme $s_n$ s'approche indéfiniment d'une certaine limite $s$, la
» série sera dite *convergente*, et la limite en question sera ce
» qu'on appelle la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis
» que $n$ croît indéfiniment, la somme $s_n$ ne s'approche d'aucune
» limite fixe, la série sera divergente et n'aura plus de somme (***).

(*) Comment le nouvel éditeur des œuvres de ce grand Géomètre a-t-il laissé passer, sans les signaler aux lecteurs, des théories aussi fausses? M. Bertrand, dans sa belle édition de la *Mécanique analytique*, avait donné un exemple bon à suivre.

(**) *Exercices de Mathématiques*, t. II, p. 221 (1827).

(***) On voit que Cauchy n'admet que deux espèces de séries. Cette classification, acceptée par la plupart des auteurs, ne me semble pas rationnelle.

Dire que

$$+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

est une série divergente, c'est attribuer au mot *divergent* une acception contraire à son sens habituel.

» D'après ces principes, pour que la série (1) soit convergente,
» il est nécessaire, et il suffit que les valeurs des sommes

$$s_n,\quad s_{n+1},\quad s_{n+2},\ldots$$

» correspondantes à de très-grandes valeurs de $n$, diffèrent
» très-peu les unes des autres, en d'autres termes, il est néces-
» saire, et *il suffit que la différence*

$$s_{n+m} - s_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+m-1} \qquad (3)$$

» *devienne infiniment petite, quand on attribue au nombre* n *une*
» *valeur infiniment grande, quel que soit d'ailleurs le nombre*
» *entier représenté par* m... »

J'ai déjà fait remarquer (*Traité élémentaire des séries*, p. 4) que la phrase imprimée en italiques énonce (si je l'ai bien comprise) une proposition fausse; car le sens le plus naturel qu'on lui puisse attribuer est celui-ci :

*Une série est convergente si la somme d'un nombre quelconque (mais déterminé) de termes consécutifs tend vers zéro, lorsque le rang du premier d'entre eux croît indéfiniment;* et il est évident que la série harmonique satisfait à cette condition.

On peut, il est vrai, supposer que par l'expression *quel que soit le nombre entier $m$*, Cauchy a voulu entendre que $m$ peut être *infini*, ou plutôt *indéfiniment grand*. Mais alors le théorème énoncé (et non démontré) se réduirait à cette proposition aussi insignifiante qu'incontestable : *une série est convergente..... quand elle est convergente!*

En effet, *pour que la quantité* $s_{n+m} - s_n$ *tende vers zéro* quand on y fait croître *indéfiniment* et *successivement, d'abord* m, *ensuite* n, *il faut et il suffit* que cette quantité tende vers une limite finie et déterminée quand on y fait d'abord croître indéfiniment $m$; c'est-à-dire *il faut et il suffit que la série soit convergente;* ce qui n'apprend rien.

III. Cette proposition fausse ou insignifiante, que l'on est étonné de rencontrer chez l'illustre Géomètre à qui l'on doit les vrais principes sur la convergence des séries ; cette proposition, dis-je, a été reproduite, avec aggravation, dans un grand nombre d'ouvrages didactiques, la plupart très recommandables. Voici quelques citations :

1° « Réciproquement, lorsque toutes ces conditions (*) sont » remplies, la série est convergente ; car les sommes $s_n$, $s_{n+1}$, » $s_{n+2}$, $s_{n+3}$, etc., pouvant devenir aussi peu différentes les unes » des autres qu'on le veut, ces sommes convergent nécessaire- » ment vers une limite...... » (*Algèbre de Choquet et Mayer*, p. 584, 1849.)

Ici, l'erreur est manifeste : la différence $s_{n+1} - s_n$ peut tendre vers zéro, pendant que $s_n$ et $s_{n+1}$ croissent indéfiniment.

2° « Réciproquement si la somme $\varepsilon$ (**) tend vers zéro, quel » que soit $m$, quand $n$ augmente indéfiniment, toutes les » sommes désignées par $s_{n+m}$, différant très peu les unes des » autres, quand $n$ est très grand, *tendent évidemment vers une* » *limite commune*, et la série est convergente. » (Briot, *Leçons d'Algèbre*, 2de partie, p. 31, 1853.)

*Évidemment*, les sommes désignées par $s_{n+m}$ peuvent croître au delà de toute limite, tout en différant très peu les unes des autres.

3° « Pour qu'une série soit convergente, *la condition néces-* » *saire et suffisante consiste en ce que la somme d'un nombre* » *quelconque de termes au-delà du* n$^{\text{ième}}$, u$_\text{n}$, *soit aussi petite que* » *l'on voudra, si* n *est suffisamment grand.* Cette condition..... » est suffisante, car si

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+i}$$

» est compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, $S_{n+i}$ sera comprise entre $S_n - \varepsilon$ » et $S_n + \varepsilon$, limites qui se rapprocheront de plus en plus à » mesure que $n$ augmentera.... » (Sturm, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 34, 1857.)

(*) Celles dont il vient d'être question.

(**) $\varepsilon$ désigne $s_{n+m} - s_n$.

Si $S_n$ croît indéfiniment avec $n$, il en est de même pour $S_{n+i}$; donc la proposition et la démonstration sont inexactes (*).

IV. Une théorie des séries, très rigoureuse et très complète, se trouve dans le *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, de M. Bertrand. Comment se fait-il que ce Géomètre, dont personne ne conteste l'érudition et la sagacité, ait imprimé la formule suivante, laquelle est *toujours absurde*?

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sin y}{\cos y} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2y}{\cos^2 y} + \frac{1}{3}\frac{\sin 3y}{\cos^3 y} + \dots \text{ (**)}$$

Il est bien vrai que, quelques lignes plus bas, l'auteur ajoute : « Nous retrouverons la plupart d'entre elles (*la plupart de ces* » *séries*) par d'autres procédés qui nous permettront de décider » dans quels cas elles sont applicables ». M. Bertrand s'est-il réservé le plaisir d'apprendre plus tard, à ses lecteurs, qu'il a voulu leur tendre un piège mathématique? Ce serait là une étrange espièglerie (***).

V. Dans un *Cours de Calcul différentiel et intégral* (sic), que fait paraître M. Serret, on lit :

« *Réciproquement, la série*

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_{n-1}, \dots$$

(*) Le *Cours* de Sturm a été publié, après la mort de l'auteur, par Prouhet, l'un de ses meilleurs élèves, dont la fin prématurée est bien regrettable. Il est donc possible que la faute signalée ne soit pas le fait du profond Géomètre qui sut toujours, dans ses démonstrations, allier la rigueur à la simplicité.

(**) Tome I, page 304. — Ce volume, publié en 1864, est le seul qui ait paru.

(***) Le grand *Traité* de M. Bertrand, beaucoup plus complet, beaucoup plus exact que celui de Lacroix, ne remplacera pas cette œuvre remarquable : il y manque (je parle du *Traité* nouveau) l'ordre et le style. Puis, contrairement à son respectable devancier, qui cherchait à rendre justice à tous, M. Bertrand ne cite presque personne, sauf ses amis, bien entendu. Croirait-on que, dans la *Table des matières*, M. Liouville est signalé, uniquement, pour *avoir inventé une dénomination?*

» *est convergente lorsque la somme*

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}$$

» *tend vers zéro, quel que soit* p, *quand* n *augmente indéfiniment.*

» En effet, désignons par $\varepsilon$ une quantité positive aussi petite » que l'on voudra, et par $S_n$ la somme des $n$ premiers termes » de la série. Comme la différence

$$S_{n+p} - S_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}$$

» tend vers zéro, quel que soit $p$, par hypothèse, quand $n$ tend » vers l'infini, on peut donner à $n$ une valeur *déterminée* assez » grande pour que la différence dont il s'agit soit comprise, quel » que soit $p$, entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$. On aura donc

$$S_n - \varepsilon < S_{n+p} < S_n + \varepsilon.$$

» Cela posé, le nombre $n$ restant invariable, faisons tendre $p$ » vers l'infini... »

On voit que le théorème de M. Serret est la proposition de Cauchy, accompagnée d'une démonstration très peu claire : l'auteur en convient. On voit aussi, par les derniers mots cités, que, suivant M. Serret, le nombre $p$ doit être supposé *indéfiniment grand.* Nous avons déjà démontré (§ II) que la proposition de Cauchy, entendue ainsi, équivaut à ce théorème inattaquable : *Une série est convergente quand elle est convergente ;* mais, afin d'élucider entièrement une théorie sur laquelle tant de Géomètres se sont trompés, croyons-nous, nous allons, à propos du théorème de M. Serret, reprendre et compléter notre démonstration.

Soit

$$S_{n+p} - S_n = F(n, p).$$

Si, laissant $n$ constant, on fait croître $p$ indéfiniment, il peut arriver deux choses : ou $F(n, p)$ tend vers une limite finie et déterminée $\lambda = F(n, \infty) = \varphi(n)$, ou le contraire a lieu. D'après l'énoncé de M. Serret, la seconde hypothèse doit être rejetée : car *dire qu'une quantité infinie tend vers zéro quand on fait croître une variable* n *qui n'y entre pas, ou qu'une fonction de* n, *périodique, a pour limite zéro,* c'est proférer deux non-sens. Reste donc le cas où $F(n, \infty) = \varphi(n) = \lambda$. Mais alors la somme des $n + p$ premiers termes de la série tend vers $S_n + \varphi(n)$ lorsque, $n$ restant invariable, $n + p$ croît indéfiniment; ainsi, *la série est convergente,* et elle a pour *somme* la quantité *constante*

$$S_n + \varphi(n) = S\ (^*).$$

Ajouter, comme le fait M. Serret, la condition

$$lim.\varphi(n) = 0,$$

c'est *demander que, dans une série convergente, la différence entre la somme des* n *premiers termes et la limite de cette somme tende vers zéro;* c'est-à-dire, c'est *demander que ce qui est, ait lieu.* Le théorème de M. Serret se réduit donc, comme nous l'avons annoncé, à cette naïveté : *Une série est convergente, quand elle est convergente.*

VI. Le *Traité élémentaire des séries* renferme, à la page 110, les relations

$$\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\sin^2 3\varphi + \frac{1}{5}\sin^2 5\varphi - \cdots = \frac{\pi}{4}, \tag{1}$$

$$\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\cos^2 3\varphi + \frac{1}{5}\cos^2 5\varphi - \cdots = \frac{\pi}{4}, \tag{2}$$

que j'ai tirées d'un Mémoire de Lobatto (**).

Si on les ajoute membre à membre, on trouve ce résultat inexact

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

(*) Je dis que $S_n + \varphi(n) =$ *constante.* En effet,

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1},$$

et

$$S_{n+1} = \varphi(n) - u_{n+1}.$$

(**) M. Lobatto, Professeur d'Analyse à l'Université de Delft, et auteur d'un grand nombre de travaux intéressants, est mort l'année dernière.

Pour découvrir où gît l'erreur, posons

$$\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\sin^2 3\varphi + \frac{1}{5}\sin^2 5\varphi - \cdots = \mathrm{A}, \tag{3}$$

$$\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\cos^2 3\varphi + \frac{1}{5}\cos^2 5\varphi - \cdots = \mathrm{B}; \tag{4}$$

ou, ce qui est équivalent :

$$\frac{\pi}{4} - \left[\cos 2\varphi - \frac{1}{3}\cos 6\varphi + \frac{1}{5}\cos 10\varphi - \cdots\right] = 2\mathrm{A},$$

$$\frac{\pi}{4} + \left[\cos 2\varphi - \frac{1}{3}\cos 6\varphi + \frac{1}{5}\cos 10\varphi - \cdots\right] = 2\mathrm{B}.$$

Or, lorsque l'arc $x$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ (*exclusivement*), on a (*)

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \cdots = \frac{\pi}{4};$$

donc, $2\varphi$ étant compris entre les mêmes limites, on a aussi

$$\mathrm{A} = 0, \quad \mathrm{B} = \frac{\pi}{4}.$$

En résumé, les formules (1), (2) doivent être remplacées par celles-ci :

$$\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\sin^2 3\varphi + \frac{1}{5}\sin^2 5\varphi - \cdots = 0, \tag{1'}$$

$$\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\cos^2 3\varphi + \frac{1}{5}\cos^2 5\varphi - \cdots = \frac{\pi}{4}; \tag{2'}$$

auxquelles on doit joindre la double inégalité

$$\frac{\pi}{4} > \varphi > -\frac{\pi}{4}.$$

Si l'on supposait

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{4},$$

(*) *Traité élémentaire...*, p. 106.

on trouverait

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = 0,$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{2};$$

relations fausses et contradictoires.

VII. Nous terminerons par deux remarques importantes, déjà publiées (*) :

1° *Une série, dans laquelle la somme d'un nombre indéfiniment grand de termes consécutifs a pour limite zéro, peut être divergente.*

Soit, par exemple, la série *divergente*

$$\frac{1}{2\, l\, 2} + \frac{1}{3\, l\, 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\, l\,(n+1)} + \cdots$$

Prenons $n$ termes à partir du $n^{\text{ième}}$ : la somme

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{(n+2)\, l\,(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)\, l\,(2n+1)}$$

est inférieure à $\frac{1}{l n}$ ; donc

$$\mathit{lim}\,(S_{2n} - S_n) = 0.$$

2° *Une série à termes alternativement positifs et négatifs, dans laquelle le terme général a pour limite zéro, peut être divergente.*

La série

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \cdots$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, pp. 6 et 29.

satisfait aux deux conditions énoncées. Mais, si on l'écrit ainsi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots,$$

on voit que

$$S_{2n}=2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right);$$

donc la série est divergente.

*Addition.* — (*Novembre* 1884.)

Dans le *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, par M. C. Jordan, on lit (*) :

« ... On doit donc, quelque petite que soit la quantité $\varepsilon$, pou-
» voir déterminer une quantité $n$ telle que l'on ait, pour toute
» valeur de $p$,

$$s_{n+p}-s_n=u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}<\varepsilon$$

(en valeur absolue).

» Réciproquement, si cette condition est satisfaite (*sic*), deux
» quelconques des sommes considérées $s_{n+p}$ et $s_{n+q}$ différeront
» de moins de $2\varepsilon$. Les sommes successives $s_1, s_2, \ldots s_n$, conver-
» geront donc vers une même limite. »

Comme nous l'avons fait observer ci-dessus (p. 287), *la différence* $s_{n+p}-s_n$ *peut tendre vers zéro, pendant que* $s_{n+p}$ *et* $s_n$ *croissent indéfiniment.* La proposition énoncée est donc inexacte.

(*) Tome I, page 102. Le titre du paragraphe est *Séries infinies.* Pourquoi *infinies?*

## LXVII. — Sur un théorème d'Abel (*).

I. Le théorème de l'illustre Norwégien a été ainsi énoncé par l'auteur :

« Si la série

$$» \ f(\alpha) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots + v_m\alpha^m + \cdots$$

» est convergente pour une certaine valeur $\delta$ de $\alpha$, elle sera » aussi convergente pour toute valeur moindre de $\alpha$, et, pour » des valeurs toujours décroissantes de $\beta$, la fonction $f(\alpha - \beta)$ » s'approche indéfiniment de la limite $f(\alpha)$, supposé que $\alpha$ soit » égal ou inférieur à $\delta$ (**). »

II. En 1862 parut, dans le *Journal de Mathématiques*, une Note ayant pour titre : *Démonstration d'un théorème d'Abel; Note de M. Lejeune-Dirichlet, communiquée par M. Liouville.* Voici le commencement et la fin de cette Note :

« Il s'agit de prouver que si la série

$$» \ a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

» est convergente et a pour somme A, la somme de la série

$$» \ a_0 + a_1\rho + a^2\rho^2 + \cdots + a_n\rho^n + \cdots$$

» qui sera convergente à fortiori en prenant la variable $\rho$ positive » et $< 1$, tendra vers la limite A lorsque l'on fera tendre indé- » finiment $\rho$ vers l'unité (***). Causant un jour avec mon excel- » lent et si regrettable ami Lejeune-Dirichlet, je lui disais que je » trouvais assez difficile à exposer (et même à comprendre) (iv) » la démonstration qu'Abel a donnée de ce théorème important.

(*) Cette Note a paru dans *Mathesis*.

(**) *OEuvres d'Abel*, 1re édit., t. I, p. 69; 2de édit., p. 223.

(***) Ces six lignes sont, pour ainsi dire, la traduction du texte d'Abel, rapporté ci-dessus.

(iv) Ici, je suis complètement d'accord avec *mon excellent et si regretté ami* Liouville.

» Dirichlet se mit sur-le-champ à écrire sous mes yeux, dans le
» seul but de me venir en aide, la Note ci-après, qui m'a été
» d'un grand secours et qu'on me saura gré de livrer au public.
» Le mode de démonstration qu'on y trouve comporte de nom-
» breuses applications.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

» Je ne pense pas que personne puisse songer désormais à
» demander de nouveaux éclaircissements. »

III. L'article du *Journal de Mathématiques* provoqua la lettre suivante, qui n'a jamais été publiée. Elle ne le serait pas encore aujourd'hui, si je ne la croyais propre à provoquer la discussion sur une partie, assez obscure, de la théorie des séries. Sauf peut-être en un seul point, mes opinions, touchant le théorème d'Abel et la démonstration de Dirichlet, n'ont pas varié. Ceci dit, voici la lettre :

» Mon cher Monsieur Liouville,

» Votre numéro d'Août, que je reçois ce soir, me jette en de
» terribles perplexités : d'un côté, le Théorème d'Abel me semble
» *évident ;* de l'autre, la démonstration de Dirichlet exige, si je
» ne me trompe, *de nouveaux éclaircissements :* je veux dire
» qu'elle est bien compliquée. Accordez-moi, pour chacun de
» ces deux points, trois minutes d'attention.

» 1° Si une série

$$» \; a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots \tag{1}$$

» est convergente pour toutes les valeurs positives de $x$ qui ne
» dépassent pas une certaine quantité $b$, de façon que, pour cha-
» cune de ces valeurs, *la somme de la série* (c'est-à-dire la limite
» vers laquelle tend la somme de ses $n$ premiers termes, quand
» $n$ augmente indéfiniment) soit $F(x)$ ; peut-on révoquer en
» doute l'exactitude de l'équation

$$» \; a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \cdots = F(b) \,?$$

» Autrement dit, peut-on contester celle-ci :

$$» \; \mathit{lim}\, F(x) = F \left\{ \mathit{lim}\, x \right\} = F(b) \,?$$

» 2° Quoi qu'il en soit, si le Théorème d'Abel a besoin d'être » démontré (ce que je ne puis me persuader), voici un essai de » démonstration (*).

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

» Soient $f_n(x)$ la somme des $n$ premiers termes de la série (1), » $\varphi_n(x)$ le *reste* : cette dénomination est permise, puisque la série » est convergente. On aura

$$» \ F(x) = f_n(x) + \varphi_n(x). \tag{2}$$

» Dans les deux membres, faisons tendre $x$ vers $b$ : la limite » du premier membre étant égale à la somme des limites des » deux parties qui composent le second, on aura encore

$$» \ F(b) = f_n(b) + \varphi_n(b). \tag{3}$$

» Maintenant, faisons croître $n$ indéfiniment : d'après l'hypo- » thèse, le terme $f_n(b)$ tend vers une certaine limite B; le terme » $\varphi_n(b)$ tend vers zéro (**). D'ailleurs $F(b)$, ne contenant pas $n$, » n'a pas changé; donc enfin

$$» \ F(b) = B. \tag{4}$$

» Votre bien affectionné et dévoué ancien élève,

» E. CATALAN.

» Paris, 23 janvier 1863 (9 h. $\frac{1}{2}$).

» *P. S.* En relisant mon 2°, je m'aperçois qu'il n'ajoute rien à » l'évidence que je crois reconnaître dans le Théorème en ques- » tion; et, malgré moi, je pense aux gens difficiles qui voudraient » démontrer ce *postulatum*, moins célèbre que celui d'Euclide :

» *Deux points* C, D, *étant situés de part et d'autre d'une* » *droite indéfinie* AB; *la droite qui joint ces deux points coupe* » *nécessairement* AB. »

(*) Ici, trois lignes étrangères à l'objet en litige, et que, par ce motif, je supprime.

(**) Voir le paragraphe IV.

IV. Dans certains cas *très rares, la somme* désignée par $f_n(b)$ *est indépendante de $n$* : cette somme est une simple *constante*. Par suite, le *reste* $\varphi_n(b)$ se réduit, aussi, à une *constante*. L'égalité (3) prenant la forme

$$F(b) = B + C, \tag{5}$$

le raisonnement employé ci-dessus n'est plus applicable; et la formule (4) se change en la dernière (*).

Soit, par exemple, la série

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots,$$

citée par Abel (**). Pour toutes les valeurs de $x$, inférieures à $\pi$, on a, comme l'a trouvé Fourier (***), $F(x) = \frac{1}{2}x$. En même temps,

$$f_n(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots \pm \frac{1}{n}\sin nx.$$

Mais, lorsque $x = \pi$, la dernière somme s'annule : elle est donc *indépendante* de $n$. Aussi la formule (4), *appliquée mal à propos,* donne-t-elle ce résultat absurde :

$$\frac{\pi}{2} = 0.$$

(*) Si je ne me trompe, cette remarque, sur laquelle je reviendrai peut-être, rend compte de certaines difficultés, bien connues, que présentent les séries *périodiques*.

(**) *OEuvres,* t. II, p. 267.

(***) *Théorie de la Chaleur,* p. 238.

## LXVIII. — Démonstration d'une formule de Poisson.

(*Février* 1867.)

Pour établir la relation

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^m + \frac{m}{1}\alpha^{m-1}\beta + \cdots + C_{m,p}\,\alpha^{m-p}\beta^p \\ &= (p+1)\,C_{m,p+1}\,\beta^{p+1}\int_0^\alpha \frac{\theta^{m-p-1}\,d\theta}{(\beta+\theta)^{m+1}}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Poisson commence (*) par démontrer que le premier membre équivaut à

$$\left[1 + \frac{q}{1}\beta + \frac{q(q+1)}{1\,.\,2}\beta^2 + \cdots + C_{m-1,p}\,\beta^p\right]\alpha^q.$$

Ce lemme préliminaire, qui pourrait être vérifié directement, est inutile.

En effet, de l'identité

$$d\,.\,\frac{t^{m-p}}{(1+t)^m} = (m-p)\frac{t^{m-p-1}}{(1+t)^{m+1}}\,dt - p\,\frac{t^{m-p}}{(1+t)^{m+p}}\,dt, \qquad (2)$$

on conclut

$$\frac{k^{m-p}}{(1+k)^m} = (m-p)\int_0^k \frac{t^{m-p-1}\,dt}{(1+t)^{m+1}} - p\int_0^k \frac{t^{m-p}\,dt}{(1+t)^{m+1}}\,(^{**}); \qquad (3)$$

puis, en multipliant les deux membres par

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-p+1}{p} = C_{m,p}:$$

$$C_{m,p}\frac{k^{m-p}}{(1+k)^m} = (p+1)\,C_{m,p+1}\int_0^k \frac{t^{m-p-1}\,dt}{(1+t)^{m+1}} - pC_{m,p}\int_0^k \frac{t^{m-p}\,dt}{(1+t)^{m+1}}.$$

(*) *Recherches sur la probabilité des jugements*, p. 189. Dans les équations (1) et suivantes, $\alpha + \beta = 1$, $p + q = m$.

(**) On a ainsi une relation simple entre deux intégrales définies très complexes : chacune d'elles serait exprimée par un polynôme ou par une série.

Maintenant, si l'on change $p$ en $p-1$, $p-2 \ldots 2, 1, 0$, et que l'on ajoute *membre à membre* les $p+1$ équations ainsi formées, on trouve

$$\frac{k^m + \frac{m}{1} k^{m-1} + \cdots + C_{m,p} k^{m-p}}{(1+k)^m} = (p+1) C_{m,p+1} \int_0^k \frac{t^{m-p-1}\,dt}{(1+t)^{m+1}};$$

et cette équation ne diffère pas, au fond, de l'équation (1).

## LXIX. — Démonstration d'une formule d'Euler. (1840) (*).

Euler trouve

$$\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{5} - \frac{1}{11} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \cdots$$

Soient A, B les sommes des séries partielles. Il est visible que

$$A = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^6}, \quad B = \int_0^1 \frac{x^4\,dx}{1+x^6}.$$

Or, généralement,

$$\int_0^x \frac{1+x^4}{1+x^6}\,dx = \frac{2}{3}\,arc\ \mathrm{tg}\ x + \frac{1}{3}\,arc\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{1-x^2}\ (^{**}).$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6}\,dx = A + B = \frac{2}{3}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

(*) *Novi Commentariæ,* 1740.

(**) Pour vérifier cette formule, il suffit de différencier.

*Addition.* — (*Juin* 1884.)

Soit la relation connue (*) :

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{n-1}\,dz}{1+z^m} = \frac{\pi}{m \sin \dfrac{n\pi}{m}}, \qquad (1)$$

dans laquelle, bien entendu, $m$ surpasse $n$.

Le premier membre égale

$$\int_0^1 \frac{z^{n-1}\,dz}{1+z^m} + \int_1^{\infty} \frac{z^{n-1}\,dz}{1+z^m}.$$

Si, dans la seconde intégrale, on change $z$ en $\frac{1}{z}$, elle devient

$$\int_0^1 \frac{z^{m-n-1}}{1+z^m}\,dz.$$

On a donc cette autre relation connue :

$$\int_0^1 \frac{z^{n-1}+z^{m-n-1}}{1+z^m}\,dz = \frac{\pi}{m \sin \dfrac{n\pi}{m}}, \qquad (2)$$

d'où l'on peut conclure divers développements de $\pi$; et, en particulier, celui qu'Euler a trouvé (**).

(*) Due à Euler.

(**) La question actuelle est résolue, plus généralement, dans la Note XXXVII.

### LXX. — Série de Saigey. (1841.)

M. Saigey (*) a trouvé que

$$\frac{2}{5}+\frac{2.4}{5.7}+\frac{2.4.6}{5.7.9}+\cdots=2.$$

Sa démonstration repose sur les égalités successives :

$$2=2,\quad \frac{2}{5}+\frac{2.4}{5}=2,\quad \frac{2}{5}+\frac{2.4}{5.7}+\frac{2.4.6}{5.7}=2,\ \ldots$$

On peut, généralement, établir la proposition suivante :

a, b, $\delta$ *étant des quantités positives, on a*

$$\frac{a}{b}+\frac{a(a+\delta)}{b(b+\delta)}+\frac{a(a+\delta)(a+2\delta)}{b(b+\delta)(b+2\delta)}+\cdots=a, \tag{1}$$

*si*

$$\delta=b-a-1. \tag{2}$$

*Démonstration.* — 1° Le $n^{ième}$ terme de la série étant

$$u_n=\frac{a(a+\delta)\cdots(a+\overline{n-1}\,\delta)}{b(b+\delta)\cdots(b+\overline{n-1}\,\delta)}, \tag{3}$$

soit $S_n$ la somme des $n$ premiers termes. Posons :

$$U_n=S_n+u_n(a+n\delta). \tag{4}$$

Le changement de $n$ en $n+1$ donne, par soustraction,

$$U_{n+1}-U_n=u_{n+1}+u_{n+1}(a+\overline{n+1}\,\delta)-u_n(a+n\delta),$$

ou

$$U_{n+1}-U_n=u_{n+1}\left[1+a+\overline{n+1}\,\delta-b-n\delta\right];$$

ou encore, d'après la condition (2) :

$$U_{n+1}-U_n=0.$$

Ainsi, *la quantité* $U_n$ *est constante.*

(*) Savant Physicien et Mathématicien, mort vers 1871.

D'ailleurs,

$$U_1 = u_1(1 + a + \delta) = \frac{a}{b}(1 + a + \delta) = a;$$

donc

$$U_n = a. \tag{5}$$

2° Cela posé, la relation (4) devient

$$S_n = a\left[1 - \frac{a+\delta}{b}\,\frac{a+2\delta}{b+\delta}\cdots\frac{a+n\delta}{b+\overline{n-1}\delta}\right],$$

ou

$$S_n = a\left[1 - \frac{b-1}{b}\,\frac{b-1+\delta}{b+\delta}\cdots\frac{b-1+\overline{n-1}\delta}{b+\overline{n-1}\delta}\right]. \tag{6}$$

Si donc le produit

$$P_n = \frac{b-1}{b}\,\frac{b-1+\delta}{b+\delta}\cdots\frac{b-1+\overline{n-1}\delta}{b+\overline{n-1}\delta} \tag{7}$$

a pour limite zéro, on aura

$$lim\, S_n = a. \tag{8}$$

Or, il est connu que l'inverse de $P_n$, savoir

$$\left(1 + \frac{1}{b-1}\right)\left(1 + \frac{1}{b-1+\delta}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{b-1+n\delta}\right),$$

est un produit *divergent*. La proposition est donc démontrée.

*Application.* — Soient $a = \sqrt{2}$, $b = 2 + \sqrt{2}$, $\delta = 1$. On trouve, après suppression de facteurs communs :

$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} + \frac{1}{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} + \frac{1}{(3+\sqrt{2})(4+\sqrt{2})} + \cdots = \sqrt{2} - 1.$$

Cette égalité devient évidente quand on l'écrit ainsi :

$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{2+\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}} - \frac{1}{3+\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}}\right) + \cdots = \sqrt{2} - 1.$$

## LXXI. — Une propriété des héliçoïdes.

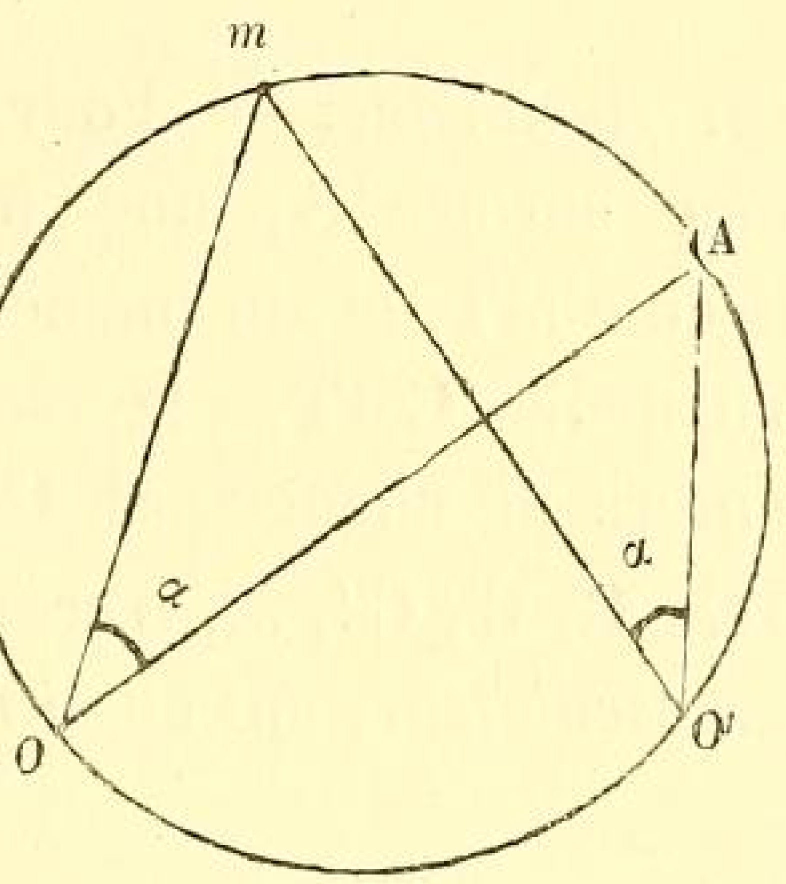
(*Octobre* 1881.)

I. Soit une hélice H, tracée sur un cylindre de révolution. Soit G une génératrice de ce cylindre. On sait que *si une droite* D *s'appuie sur ces deux lignes, en restant perpendiculaire à la seconde, la surface ainsi engendrée est un héliçoïde à plan directeur.*

J'ignore si l'on a fait attention à la propriété suivante, *réciproque* de la première :

*Si deux héliçoïdes égaux ont même plan directeur, leur intersection est une hélice.*

Prenons, pour plan de la figure, le plan directeur commun. Soient alors O, O′ les projections des deux directrices rectilignes; et OA, O′A les génératrices situées dans le plan directeur.




*Quand une droite engendre un héliçoïde, sa vitesse de translation est proportionnelle à sa vitesse angulaire* (*). Si donc nous traçons les droites O$m$, O′$m$ faisant, avec OA, O′A, un angle arbitraire $\alpha$, les nouvelles droites pourront être regardées comme les projections des sections faites, dans les deux surfaces, par un plan quelconque, parallèle au plan directeur. Le lieu du point $m$ est la circonférence OO′A; donc le lieu du point M, de l'espace, est une hélice, tracée sur le cylindre dont cette circonférence est la section droite.

II. La même figure démontre cet autre théorème :

*Si deux héliçoïdes égaux ont même cône directeur* (**), *leur intersection est une hélice.*

(*) En effet, l'équation de cette surface est

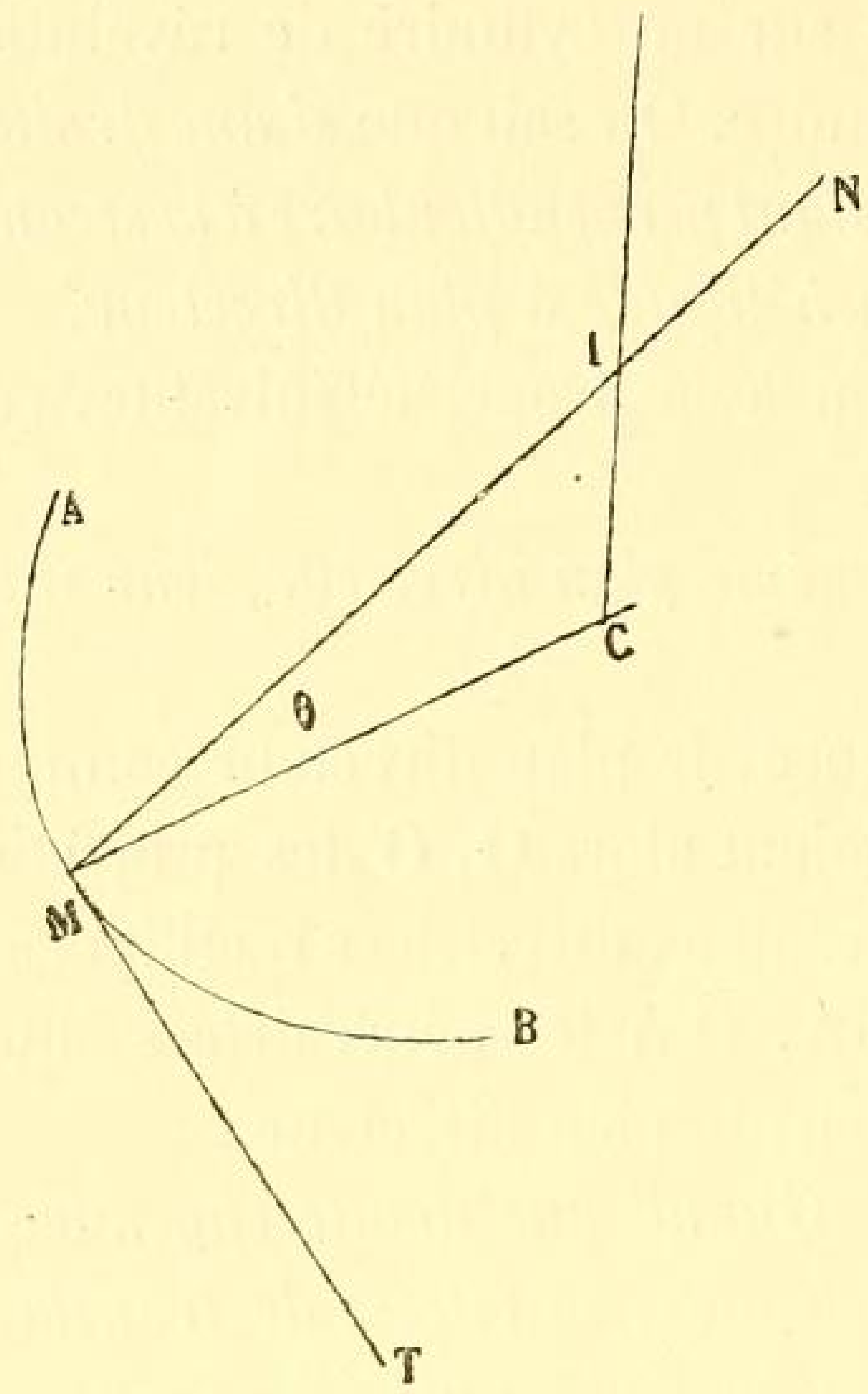
$$r = h \, arc \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

D'ailleurs, la propriété énoncée résulte de la définition même de l'hélice.

(**) Il s'agit, cette fois, de la *surface de vis à filet triangulaire.*

## LXXII. — Courbure des lignes et des surfaces (*).

**1.** Théorème principal. — AMB étant une ligne quelconque, tracée sur une surface S ; soient MT la tangente, MC $= \rho$ le rayon de courbure de AMB. Soit encore MN la normale à S. En désignant par $\theta$ l'angle NMC, et en conservant les notations ordinaires, on a




$$\rho = \cos\theta \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{ra^2+2sab+tb^2} \text{ (**)}. \quad (A)$$

**2.** *Remarque.* — Pour une même surface S, une même tangente MT, et un même plan osculateur CMT, le second membre ne change pas. Donc :

Théorème II. — *Toutes les courbes* C, C′, C″, ..., *tracées sur une surface* S, *et ayant même plan osculateur, ont aussi même cercle osculateur.*

**3.** Théorème III. — *Le cercle osculateur d'une ligne* C, *tracée sur une surface* S, *est osculateur à la section faite, dans* S, *par le plan osculateur de* C : *les lignes* C, C′ *ont même courbure.*

En effet, parmi les courbes C′, C″, ..., on peut considérer l'intersection de S par le plan osculateur commun.

**4.** *Remarques.* — I (***). Ce Théorème III, dont M. Bertrand a donné une démonstration assez obscure, est, on le voit, un simple corollaire du Théorème II.

II. La formule (A) a été donnée par Poisson (IV). Mais ni lui,

(*) Leçons faites à l'Université de Liége (1876).

(**) Démonstration connue. Voir, par exemple, le Mémoire de Poisson (*Journal de l'École polytechnique,* 21e Cahier).

(***) Due à M. Mansion.

(IV) Ou plutôt par Euler.

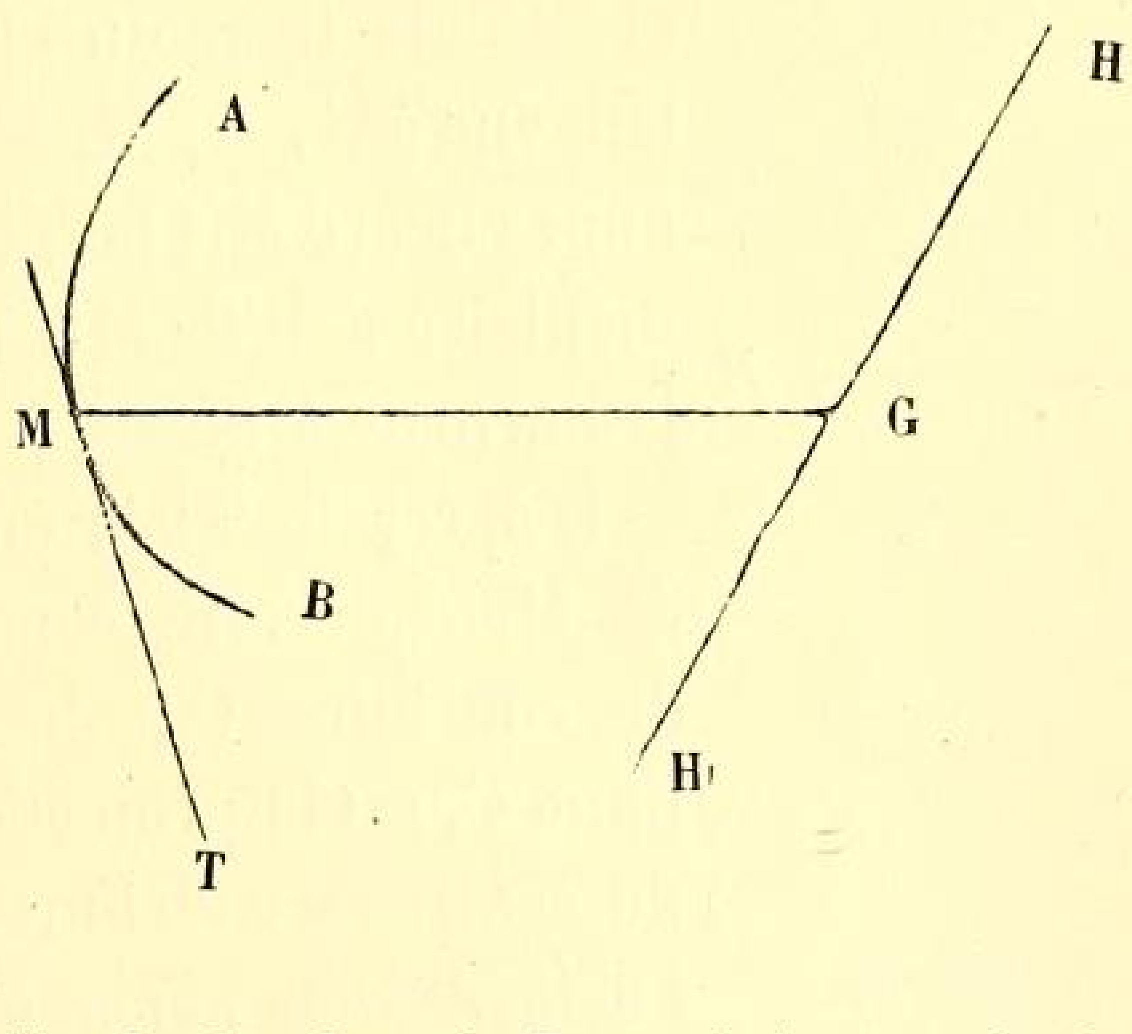
ni la plupart de ses continuateurs, n'ont fait observer qu'elle s'applique à toute courbe, plane ou à double courbure, tracée sur une surface (*).

**5.** Théorème IV. — *Les mêmes choses étant posées que dans le Théorème I, soit* MI *le rayon de courbure d'une ligne* $C_1$, *tracée sur* S, *et dont le plan osculateur soit* NMT : *le rayon* MC, *de* C, *est la projection du rayon* MI (**).

**6.** Supposons que C soit une courbe donnée. Par cette ligne faisons passer une surface quelconque S, dont la normale soit MN. D'après le dernier théorème, I est le centre de courbure de la *section normale*, faite par le plan NMT. Donc :

Théorème V. — *Les sections faites par un même plan* TMN, *dans toutes les surfaces*, S, S′, S″, ... *contenant une même courbe* AMB *et ayant une normale commune* MN, *ont même cercle osculateur.*

**7.** Corollaires. — I. *Quand la normale* MN *varie, le lieu des centres* I, *des circonférences osculatrices à toutes ces sections planes, est l'axe du cercle osculateur à la courbe* AMB.




II. *Le lieu des mêmes circonférences est une cyclide à directrices rectilignes* : l'une des directrices est MT; l'autre est la droite HGH′, perpendiculaire à MT, et passant par le point G, diamétralement opposé à M (***).

(*) On lit, dans le *Cours d'Analyse* de Sturm (t. I, p. 201) : « Telle est la formule qui donne le rayon de courbure d'une section quelconque... » Pourquoi *section?*

(**) Théorème de *Meusnier*, un peu généralisé.

(***) J'ai proposé, pour cette droite remarquable, la dénomination d'*anti-tangente* (*Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces*).

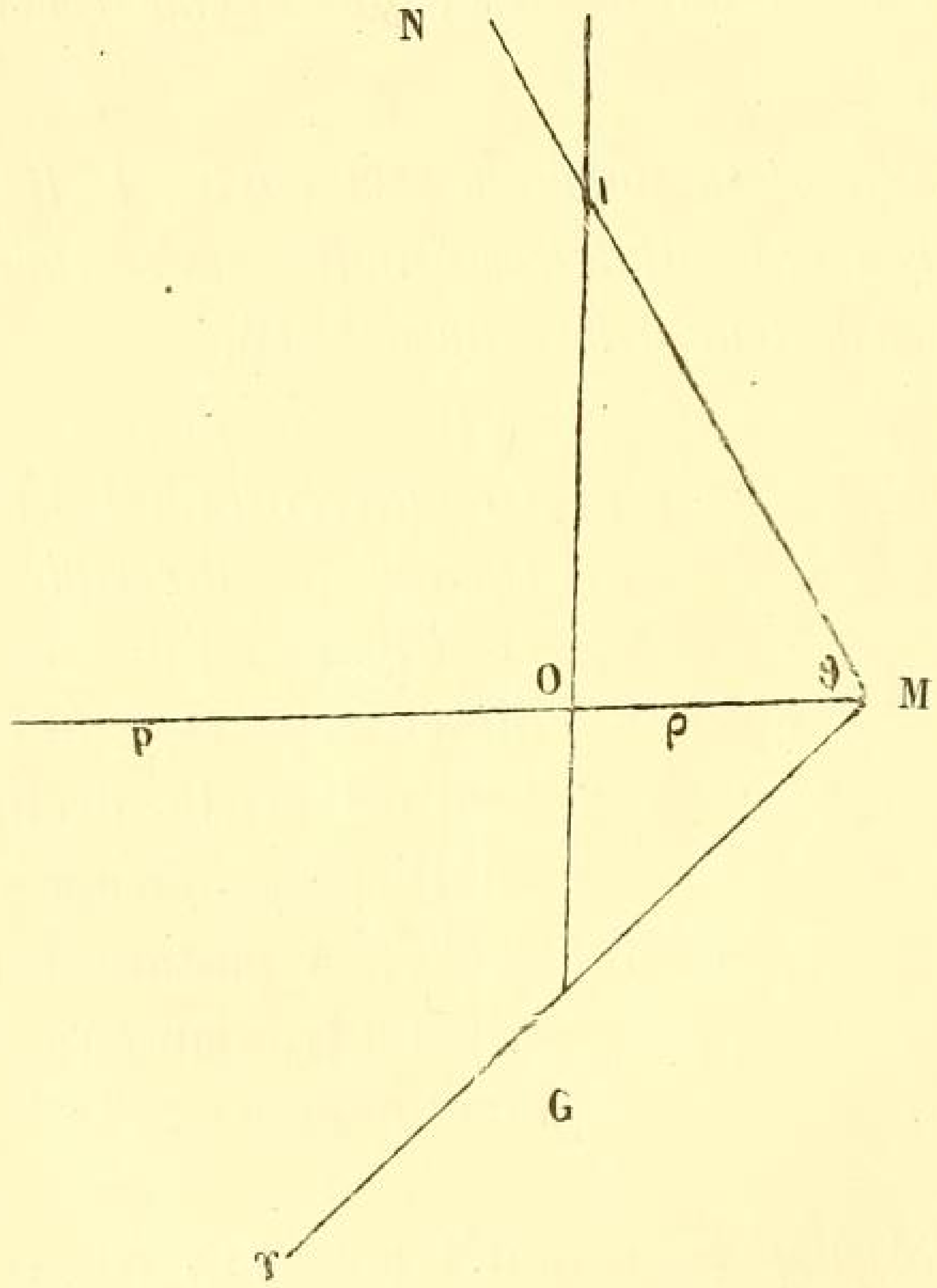
**8.** *Remarque.* — D'après le dernier théorème, le second membre de la formule

$$R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{ra^2 + 2sab + tb^2} \qquad (B)$$

est constant pour toutes les sections faites, par le plan TMN, dans les surfaces S, S′, S″... La normale commune MN et la tangente MT dépendent seulement : l'une, des quantités $p$, $q$ ; l'autre, des quantités $a$, $b$. Donc, *pour toutes les surfaces* S, S′, S″, ..., *la fonction* $ra^2 + 2sab + tb^2$ *est invariable* (*).

**9.** *Relation entre deux théorèmes.* — La proposition démontrée dans la Note XVII, et le Théorème de Meusnier, ont une grande analogie. On peut la développer comme il suit :

Soit une développable Σ, coupée par un plan P. Soit M un point de la courbe d'intersection, C. Supposons le plan de la figure perpendiculaire à la tangente en M. Soient alors MP la trace du plan P, et MT la trace du plan tangent à S, en M. Menons encore MN perpendiculaire à MT : MN est la normale à S.




D'après le Théorème de Meusnier, le centre de courbure O, de la ligne C, est la projection du centre de courbure I, de la *section normale* :

$$\rho = R \cos\theta.$$

(*) A cause de

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

*cette fonction représente l'inverse de la projection de* MI *sur l'axe* O*z*.

D'un autre côté, si $R_1$ est le rayon de courbure de la *transformée par développement*,

$$\rho = R_1 \cos \text{TMP},$$

ou

$$\rho = R_1 \sin \theta.$$

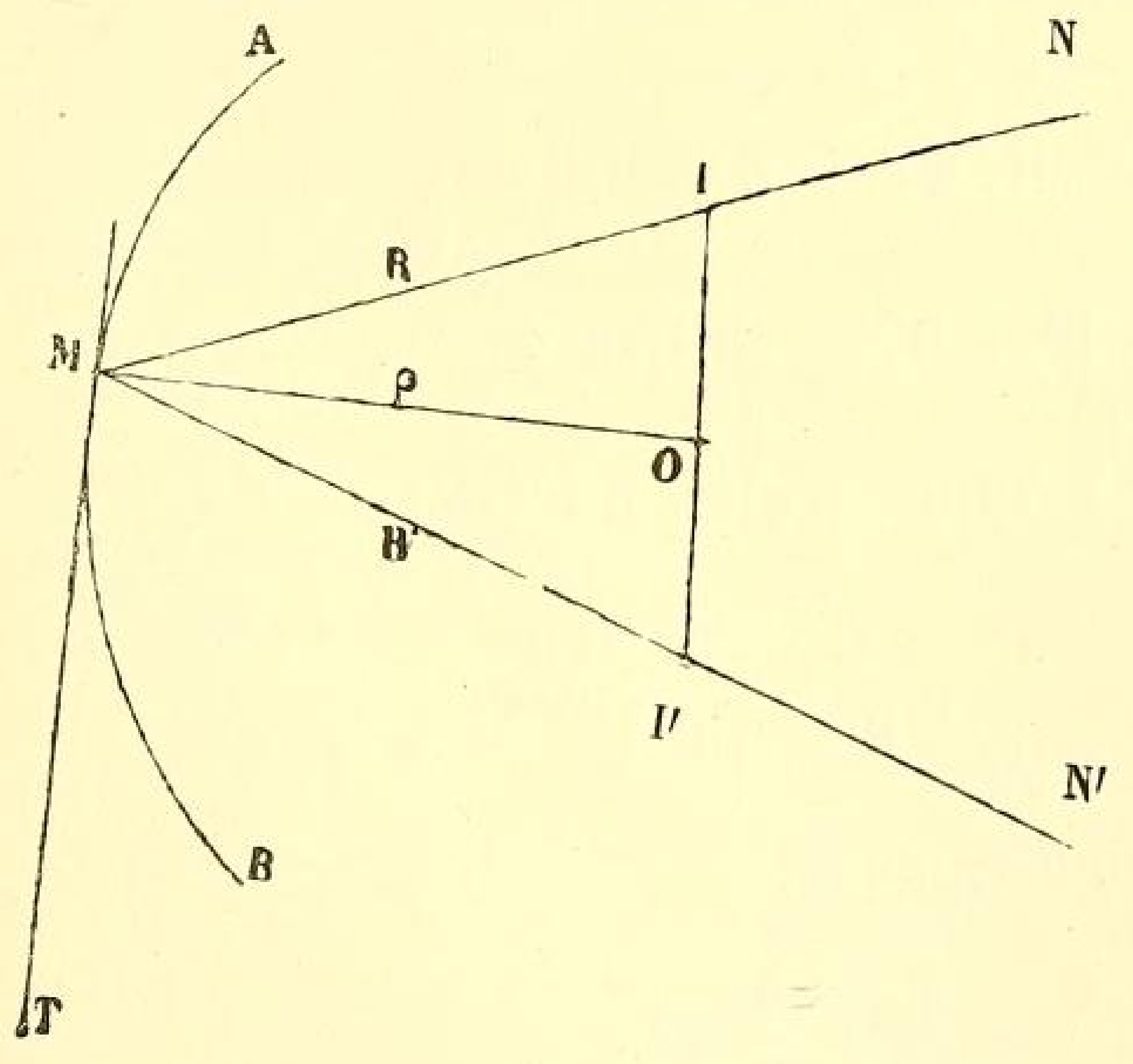
Donc $R_1$ est représenté, *en grandeur*, par MG.

De là résulte, en particulier,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_1^2}. \qquad \text{(C)}$$

**10.** *Généralisation.* — Si C est une courbe quelconque, tracée sur une surface S, non développable, on remplace P par le plan osculateur, et S par la développable Σ, circonscrite suivant C.

**11.** Théorème VI (de *Hachette*) (*). — AMB *étant l'intersection de deux surfaces* S, S'; *soient* MI, MI' *les rayons de courbure de deux sections normales, contenant la tangente* MT. *Si, du point* M, *on abaisse* MO *perpendiculaire à* II', O *est le centre de courbure de* AMB, *et* OMT *est le plan osculateur de cette ligne.*




En effet, parmi toutes les droites *finies*, menées du point M, perpendiculairement à MT, MO est la seule qui soit, à la fois, projection de MI et de MI'.

(*) Retrouvé par Binet (*Comptes rendus*, t. XIX), et généralisé par M. Gilbert (*Mémoire sur la théorie générale des lignes...*, 1868).

**12.** *Remarques.* — I. Si les surfaces S, S′ sont orthogonales, il résulte, de la comparaison des deux figures précédentes, que les points G, I′ coïncident. Ainsi :

THÉORÈME VII. — *Le rayon* $R_1$, *de la transformée par développement, est égal au rayon* R′ *de la section faite, par le plan tangent à* S, *dans la surface* S′, *orthogonale à* S (*).

II. Parmi toutes les surfaces orthogonales à S, le long de la courbe AMB, on peut choisir la *normalie* ayant AMB pour directrice. Le dernier énoncé prend donc cette autre forme :

THÉORÈME VIII. — *Soit une courbe* C, *tracée sur une surface* S. *Soit* N *la normalie à* S, *ayant* C *pour directrice. Si l'on transforme, par développement, la courbe* C, *le rayon* $R_1$, *de la transformée, est égal au rayon de la section faite, dans* N, *par le plan tangent à* S, *en un point quelconque de* C.

III. $\varphi$ étant l'angle des normales MN, MN′, le double de l'aire du triangle IMI′ est

$$MO \,.\, II' = MI \,.\, MI' \sin\varphi = RR' \sin\varphi.$$

Mais,

$$\overline{II'}^2 = R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\varphi;$$

donc

$$\rho^2(R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\varphi) = R^2R'^2\sin^2\varphi,$$

ou

$$\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} - \frac{2}{RR'}\cos\varphi;$$

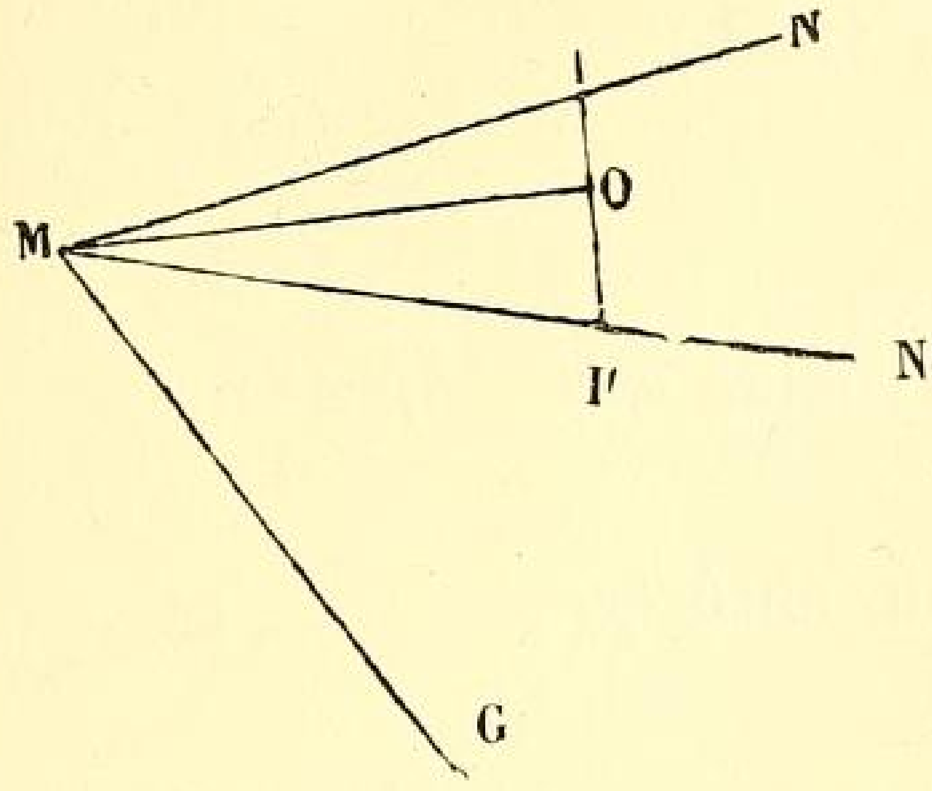
et, *si les surfaces sont orthogonales*,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} \text{ (**)}.$$

(*) Bien entendu, *si, à la surface* S′, *on circonscrit, suivant* AMB, *une développable* $\Sigma'$, *le rayon de la nouvelle transformée égale* R. A ce point de vue, *deux surfaces orthogonales quelconques sont conjuguées.*

(**) Cette relation, semblable à la formule (C), peut servir à démontrer le Théorème VII.

IV. Soient, en un point M d'une surface S, MN la normale, et MG une droite située dans le plan tangent. Le plan GMN détermine une section normale. Soit I le centre de courbure de cette section. Par le point M, faisons passer une surface S′, choisie de manière que la normale MN′, à S′, soit perpendiculaire à MG. I′ étant le centre de courbure de la section normale GMN′, le centre de courbure O, de l'intersection des deux surfaces, est le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur II′. Ce point appartient à la circonférence décrite sur MI comme diamètre. Donc




Théorème IX. — *Le lieu des centres de courbure de toutes les lignes qui, tracées sur une surface* S, *ont un point commun* M *et une tangente commune* MG, *est la circonférence décrite sur le rayon* MI *de la section normale* GMN, *pris comme diamètre. Cette circonférence est située dans le plan* NMN′, *perpendiculaire à la tangente* MG.

**13.** Si MG varie, le centre O varie aussi. Il en est de même pour la circonférence dont nous venons de parler. Mais cette circonférence passe au point M, et rencontre toujours la normale MN. En conséquence :

Théorème X. — *Si l'on trace, sur une surface* S, *une infinité de lignes ayant un point commun* M, *leurs centres de courbure, relatifs à ce point, appartiennent à une surface cyclotomique ayant, pour directrice rectiligne, la normale* MN *à* S (*).

(*) Cette surface est l'*osculatrice* de Ghysens (*Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces,* p. 10). Nous appelons *cyclide* toute surface engendrée par une circonférence variable; la *cyclotomique* exceptée.

## LXXIII. — Une intégrale définie.

(*Septembre* 1868.)

Suivant Poisson (*) :

$$C_{2n,\,2p-1} = \frac{2^{2n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \cos(2n+2-4p)\, x dx. \qquad (1)$$

Par conséquent, si l'on fait, pour abréger,

$$S_p = \cos(2n-2)x + \cos(2n-6)x + \cdots + \cos(2n+2-4p)x, \qquad (2)$$

on a

$$C_{2n,\,1} + C_{2n,\,3} + \cdots + C_{2n,\,2p-1} = \frac{2^{2n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \,.\, S_p\, dx. \qquad (3)$$

En général,

$$\cos a + \cos(a+\delta) + \cdots + \cos(a+k\delta) = \frac{\sin\frac{k+1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\delta}\cos\left[a+\frac{k}{2}\delta\right];$$

donc, à cause de

$$a = (2n+2-4p)\,x, \quad \delta = 4x, \quad k = p-1:$$

$$S_p = \frac{\sin 2px}{\sin 2x}\cos(2n-2p)\,x.$$

La formule (2) devient

$$\left.\begin{aligned} &C_{2n,\,1} + C_{2n,\,3} + \cdots + C_{2n,\,2p-1} \\ &= \frac{2^{2n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \frac{\sin 2px}{\sin 2x}\cos(2n-2p)\, x dx. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Lorsque $p = n$, le premier membre est la somme des termes de rang *pair*, dans le développement de $(1+1)^{2n}$; c'est-à-dire $2^{2n-1}$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \frac{\sin 2nx}{\sin 2x}\, dx = \frac{\pi}{4}\ (^{**}). \qquad (A)$$

(*) *Recherches sur les probabilités des jugements*, p. 181.

(**) La simplicité de ce résultat est le seul motif qui m'engage à le publier. (Décembre 1884.)

*Addition.* — (*Décembre* 1884.)

En général (*) :

$$C_{n,q} = \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(n - 2q)\, x dx; \tag{5}$$

donc

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,q} = \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, S'_q\, dx; \tag{6}$$

$S'_q$ représentant

$$\cos nx + \cos(n-2)\,x + \cdots + \cos(n-2q)\,x;$$

ou, par la formule rappelée ci-dessus :

$$S'_q = \frac{\sin(q+1)\,x}{\sin x} \cos(n-q)\,x.$$

Conséquemment,

$$C_{n,0} + C_{n,1} + \cdots + C_{n,q} = \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \frac{\sin(q+1)x}{\sin x} \cos(n-q)x dx; \tag{7}$$

et, si $q = n$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \frac{\sin(n+1)\,x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{B}$$

*Remarques.* — I. La comparaison des formules (A), (B) donne ce résultat connu :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x \cos(2n+1)\, x dx = 0.$$

II. D'après une relation démontrée dans la Note LXVIII (p. 299), le premier membre de l'égalité (7) égale

$$2^n (q+1)\, C_{n,q+1} \int_0^1 \frac{t^{n-q-1}\, dt}{(1+t)^{n+1}}.$$

(*) *Recherches sur les probabilités des jugements*, p. 181.

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \frac{\sin(q+1)x}{\sin x} \cos(n-q)\,x dx = \\ &\frac{q+1}{2}\pi \,.\, C_{n,q+1} \int_0^1 \frac{t^{n-q-1}\,dt}{(1+t)^{n+1}}\,;\end{aligned}\right\} \tag{C}$$

ou, si l'on suppose $t = \operatorname{tg}^2\varphi$ :

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \frac{\sin(q+1)x}{\sin x} \cos(n-q)\,x dx \\ &= (q+1)\,\pi\, C_{n,\,q+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{2n-2q-1}\varphi \cos^{2q+1}\varphi d\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{D}$$

III. En particulier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x \frac{\sin nx}{\sin x} dx = n\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-1}\varphi \sin \varphi d\varphi;$$

c'est-à-dire,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) (^*). \tag{E}$$

## LXXIV. — Application d'une formule de Jacobi.

(*Novembre* 1868.)

I. Cette formule remarquable, assez facile à vérifier (**), est

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{1\,.\,3\,.\,5 \ldots \overline{2n-1}}{n} \sin n\alpha : \tag{1}$$

on y suppose

$$\alpha = \cos x. \tag{2}$$

Nous allons en déduire un *développement de sin* $n\alpha$, *suivant les puissances de* cos $\alpha$.

(*) Cette valeur simple résulte aussi de la relation (C).

(**) Dans le tome VI du *Journal de Mathématiques,* M. Liouville en a donné une démonstration.

II. Soit, pour abréger,

$$A_p = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{4} \cdots \frac{2n-2p+1}{2p}; \tag{3}$$

alors

$$y = (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p A_p x^{2p}. \tag{4}$$

Prenant la dérivée d'ordre $n-1$, on a donc

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p . A_p . 2p(2p-1)\dots(2p-n+2)x^{2p-n+1}; \tag{5}$$

*pourvu que la série soit convergente.*

III. Si $2p$ est inférieur à $n-1$, la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ de $x^{2p}$ est nulle. On doit donc, dans l'égalité (5), supposer $2p \overline{\overline{>}} n-1$ : *tous les facteurs qui suivent* $A_p$ *sont positifs.* En outre,

$$A_p . 2p(2p-1)\dots(2p-n+2) =$$

$$\frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2p+1)}{2.4.6\dots 2p} 2p(2p-1)\dots(2p-n+2) =$$

$$\frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2p+1)}{2.4.6\dots 2p} \frac{1.2.3\dots 2p}{1.2.3\dots(2p-n+1)} =$$

$$\frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2p+1).1.3.5\dots\dots(2p-1)}{1.2.3\dots(2p-n+1)}.$$

La formule précédente devient :

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} =$$

$$\sum (-1)^p \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2p+1).1.3.5\dots(2p-1)}{1.2.3\dots(2p-n+1)} x^{2p-n+1}. \tag{6}$$

$$\left(p \overline{\overline{>}} \frac{n-1}{2}\right)$$

IV. Comparant les expressions (1) et (6), nous avons donc le développement annoncé :

$$\left.\begin{array}{l} \sin n\alpha = (-1)^{n-1} \dfrac{n}{1.3.5\dots\overline{2n-1}} \\ \sum (-1)^p \dfrac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2p+1).1.3.5\dots(2p-1)}{1.2.3\dots(2p-n+1)} (\cos\alpha)^{2p-n+1}. \end{array}\right\} \text{(A)}$$

Par exemple,

$$\sin 3\alpha = \frac{3}{1.3.5}\sum(-1)^p\frac{5.3...(7-2p)}{1.2.3...(2p-2)}\,1.3.5...(2p-1)(\cos\alpha)^{2p-2},$$

ou

$$\sin 3\alpha =$$

$$\frac{1}{3}\left[-3+\frac{3.3}{1.2}1.3\cos^2\alpha-\frac{3.3.1}{1.2.3.4}1.3.5\cos^4\alpha-\frac{3.3.1.1}{1.2\,3.4\,5.6}1.3.5.7\cos^6\alpha-\cdots\right],$$

ou enfin

$$\sin 3\alpha = -1+\frac{9}{2}\cos^2\alpha-\frac{15}{8}\cos^4\alpha-\frac{7}{16}\cos^6\alpha-\cdots$$

V. On peut, de plusieurs manières, vérifier la convergence de la série (A), pour les valeurs de $\cos\alpha$ différentes de $\pm 1$. D'ailleurs, il est facile de prouver, *a priori*, la possibilité du développement de $\sin n\alpha$, suivant les puissances de $\cos\alpha$. En effet :

1°
$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} = (2\cos\alpha)^{n-1} - C_{n-2,1}(2\cos\alpha)^{n-3}\\ &+ C_{n-3,2}(2\cos\alpha)^{n-5} - \cdots (-1)^{\frac{n-1}{2}},\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$n$ étant *impair* (*).

2°
$$\sin\alpha = (1-\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\cos^2\alpha-\frac{1}{2.4}\cos^4\alpha-\cdots\quad(8)$$

Par conséquent, si l'on multiplie cette série (8) par le *polynôme* (7), on aura le développement de $\sin n\alpha$, lequel devra être *identique* avec (A). En exprimant cette identité, nous allons trouver une formule de sommation qu'il n'est peut-être pas inutile d'indiquer.

VI. Le second membre de l'égalité (8) peut être écrit ainsi :

$$1 - F(\cos^2\alpha)$$

$$-\frac{1.3.5..\overline{2q-3}}{2.4.6..2q}\cos^{2q}\alpha\left[1+\frac{2q-1}{2q+2}\cos^2\alpha+\frac{(2q-1)(2q+1)}{(2q+2)(2q+4)}\cos^4\alpha+\cdots\right],$$

(*) *Sur quelques développements de sin* nx *et de cos* nx (NOUVELLES ANNALES, 1883). L'application à $n = 7$ renferme une faute de signe : au lieu de $-\frac{\sin 7x}{\sin x}$, on doit lire $\frac{\sin 7x}{\sin x}$.

$F(\cos^2 \alpha)$ étant un polynôme entier, dont le degré ne surpasse pas $2q - 2$. Autrement dit, dans le développement de $\sin n\alpha$, le coefficient de $(\cos \alpha)^{n-1+2q}$ égale

$$-\frac{1.3.5\ldots\overline{2q-3}}{2.4.6\ldots 2q}\left[2^{n-1}-2^{n-3}\frac{2q-1}{2q+2}C_{n-2,1}+2^{n-5}\frac{(2q-1)(2q+1)}{(2q+2)(2q+4)}C_{n-3,2}-\cdots\right].$$

Comparant avec la formule (A), on a donc

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1.3.5\ldots\overline{2q-3}}{2.4.6\ldots 2q}\left[2^{n-1}-2^{n-3}\frac{2q-1}{2q+2}C_{n-2,1}+2^{n-5}\frac{(2q-1)(2q+1)}{(2q+2)(2q+4)}C_{n-3,2}-\cdots\right]\\ &=(-1)^{n+p-2}\frac{n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)\ldots 1.3.5\ldots(2p-1)}{1.2.3\ldots(2p-n+1)},\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

*si*

$$2p - n + 1 = n - 1 + 2q;$$

c'est-à-dire, *si*

$$p = n + q - 1.$$

Cette relation peut être notablement simplifiée.

D'abord, la valeur de $p$ transforme le second membre en

$$(-1)^{q-1}\frac{n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(3-2q)\ldots\ldots 1.3.5\ldots(2n+2q-3)}{1.2.3\ldots(n+2q-1)}.$$

En second lieu, le produit

$$(2n-1)(2n-3)\ldots(3-2q)$$

égale

$$\begin{aligned}&1.3.5\ldots(2n-1)\times(-1)(-3)\ldots(3-2q)\\ &=(-1)^{q-1}\,1.3.5\ldots(2n-1)\times 1.3.5\ldots(2q-3).\end{aligned}$$

L'égalité (9) devient donc, par la suppression de deux facteurs communs :

$$\begin{aligned}&2^{n-1}-2^{n-3}\frac{2q-1}{2q+2}C_{n-2,1}+2^{n-5}\frac{(2q-1)(2q+1)}{(2q+2)(2q+4)}C_{n-3,2}-\cdots\\ &=2.4.6\ldots 2q.n\,\frac{1.3.5\ldots(2n+2q-3)}{1.2.3\ldots(n+2q-1)};\end{aligned}$$

ou, finalement,

$$\left.\begin{array}{l} 2^{n-1} - 2^{n-3}\dfrac{2q-1}{2q+2}C_{n-2,1} + 2^{n-5}\dfrac{(2q-1)(2q+1)}{(2q+2)(2q+4)}C_{n-3,2} - \cdots \\ = n\dfrac{(2q+3)(2q+5)\ldots(2q+2n-3)}{(2q+2)(2q+3)\ldots(2q+n-1)}. \end{array}\right\} \quad \text{(B)}$$

VII. *Remarques.* — I. Cette relation, trouvée en supposant $n$ *impair*, est générale.

II. Lorsque $q$ croît indéfiniment, elle donne l'identité connue (*) :

$$2^{n-1} - 2^{n-3}C_{n-2,1} + 2^{n-5}C_{n-3,2} - 2^{n-7}C_{n-4,3} + \cdots = n.$$

## LXXV. — Sur les asymptotes des courbes algébriques (**).

**1.** Lemme. — Soit $F(x, \lambda) = 0$ *une équation algébrique, du degré* m *par rapport à* x. *Soit, pour* $\lambda = \alpha$, n *le nombre des racines réelles :* m — n *est un nombre pair.*

En effet, $m - n$ est le nombre des valeurs imaginaires de $x$, répondant à $\lambda = \alpha$.

**2.** *Remarque.* — L'énoncé et la démonstration supposent que *le coefficient de* $x^m$ *ne s'annule pas pour* $\lambda = \alpha$. En outre, pour plus de simplicité, nous admettons que les valeurs réelles de $x$, répondant à $\lambda - \alpha$, sont *inégales*.

**3.** Corollaire I. — *Si, pour* $\lambda = \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, *l'équation* $F(x, \lambda) = 0$ *a* n, n', n'', ... *racines réelles, les nombres* n, n', n'', ... *sont de même parité.*

**4.** Corollaire II. — *Si une courbe algébrique est rencontrée, en* p, p', p'', ... *points, par des droites* d, d', d'', ... *parallèles entre elles, les nombres* p, p', p'', ... *sont de même parité.*

(*) *Sur quelques développements de sin* nx *et de cos* nx.

(**) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. I.

**5.** Corollaire III. — *Les courbes algébriques n'ont pas de point d'arrêt.*

Supposons qu'un arc AB se termine brusquement en A. Menons, de part et d'autre du *point d'arrêt* A, deux parallèles $d$, $d'$, infiniment voisines de ce point. Si la droite $d$, qui coupe AB, a $p$ points communs avec la courbe, la droite $d'$ n'en a que $p - 1$. Donc la courbe considérée n'est pas algébrique.

**6.** *Remarque.* — Soit une ligne plane quelconque, trajectoire d'un point M qui s'arrête après être revenu à sa position initiale A (*) : *le nombre des points d'intersection de cette ligne, avec une transversale quelconque, rectiligne ou curviligne, est pair.*

En effet, si la transversale rencontre la courbe aux trois points A, B, C, par exemple; les arcs AA', CC', situés *de part et d'autre* de la transversale, donnent lieu, en se réunissant, à un *quatrième* point d'intersection (**).

**7.** *Remarque.* — La dernière proposition paraît en défaut dans ce problème, bien connu des écoliers : *tracer, d'un seul coup de crayon, les côtés et l'une des diagonales d'un rectangle* ABCD. Mais, si A est la position initiale du curseur, celui-ci, après avoir décrit la diagonale AC, doit, d'après l'hypothèse (6), revenir en A : cette condition entraîne la construction d'une nouvelle ligne CEA, allant de C en A.

**8.** Des branches infinies. — Si un point M, parti de la position A, décrit une ligne ABCD, de manière que la distance *rectiligne* AM puisse croître au delà de toute limite, nous dirons que la trajectoire ABCD a *une branche infinie.*

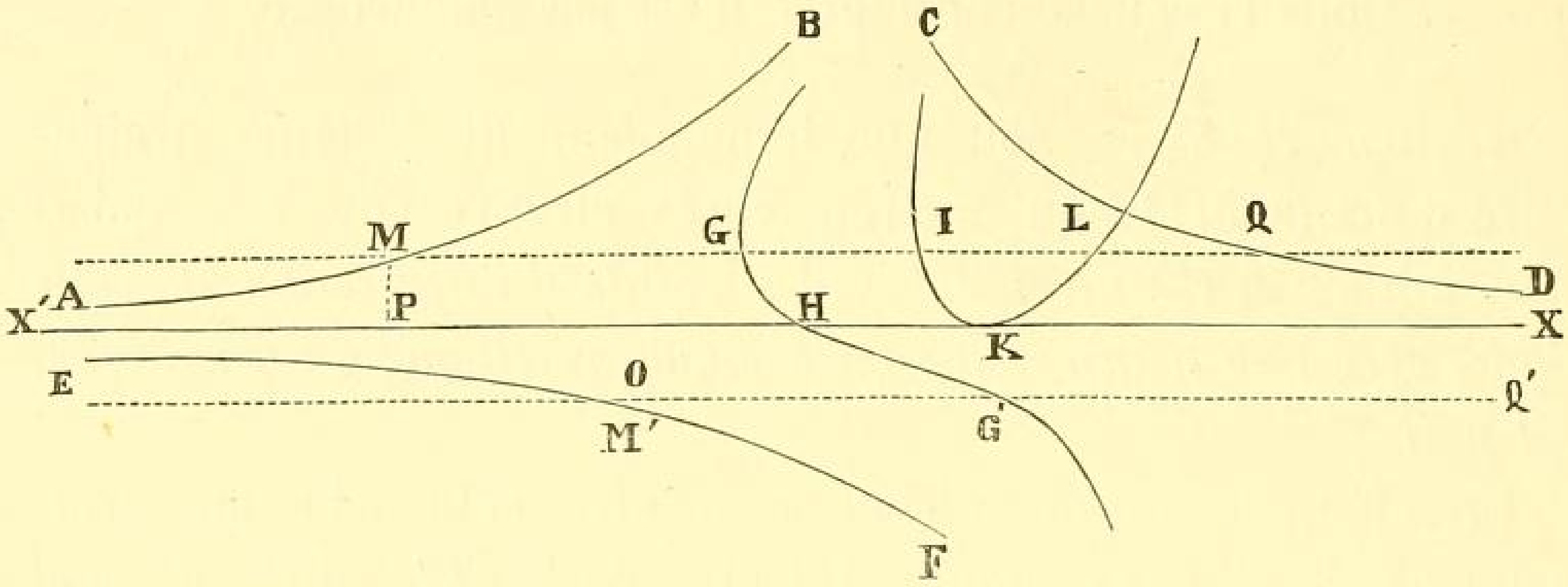
**9.** *Remarque.* — D'après cette définition, un seul arc continu, indéfini dans les deux sens, est considéré comme composé de

(*) Cette ligne est un *trait de plume, une toile d'araignée*, etc.

(**) Ce raisonnement est celui dont on fait usage pour établir, par la Géométrie, les théorèmes sur l'*existence des racines réelles.*

*deux branches* infinies. Par exemple, *l'hyperbole ordinaire a quatre branches infinies; la ligne droite a deux branches infinies; etc.* (*).

**10.** Théorème. — *Dans toute courbe algébrique, le nombre des branches infinies* (**), *asymptotiques à une même droite, est pair.*




Soit $F(x, y) = 0$ l'équation de la courbe, rapportée à l'asymptote X'OX, prise comme axe des abscisses : $F(x, y)$ est un polynôme entier. Soient $y = \pm \varepsilon$ les équations de deux droites MQ, M'Q', parallèles à X'X : ces transversales rencontrent la courbe en divers points M, G, I, L, Q, ..., M', G', ... Soient M, Q, ... M', ... les points qui s'éloignent indéfiniment de l'origine O et se rapprochent indéfiniment de X'X, lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro. Pour exprimer ce fait, nous dirons que *les points* M, Q, ... M' *se transportent à l'infini*, ou que *chacune des branches infinies rencontre l'asymptote en un point situé à l'infini* (***).

(*) Pour éviter toute confusion, on pourrait reprendre les dénominations de *bras* ou de *rameaux*, employées par les anciens Géomètres. C'est ce qu'a fait M. de La Gournerie : « *chaque branche* (infinie) *est formée de deux* BRAS... » (*Traité de Géométrie descriptive*, p. 91.)

(**) Ou plutôt : *des bras*.

(***) Plusieurs Géomètres, très estimables d'ailleurs, admettent, *a priori*, que *l'asymptote, et une même branche de la courbe, ont* au moins, *deux points communs, situés à l'infini*. Cette manière de voir ne me paraît pas acceptable. A plus forte raison ne saurais-je *croire* à l'*axiome* suivant : *on peut considérer*

Cela posé, il s'agit de démontrer que le nombre des points M, Q, ... M', est *pair.*

Soient $n$, $n'$ les nombres de valeurs réelles de $x$, répondant à $y = +\varepsilon$, $y = -\varepsilon$ : $n + n'$ est pair (*Corollaire* II). Supposons que, pour $y = 0$, l'équation $F(x, y) = 0$ devienne $X = 0$ (*). Les racines réelles de cette nouvelle équation déterminent les points H, K, ... situés sur X'X, à des distances finies de l'origine. Soit $p$ le nombre de ces points, ou le nombre des racines réelles de $X = 0$. Comme on le voit à l'inspection de la figure, *ces racines sont les limites communes des racines réelles, soit de l'équation*

$$F(x, \varepsilon) = 0,$$

*soit de l'équation*

$$F(x, -\varepsilon) = 0,$$

*qui ne croissent pas indéfiniment quand* $\varepsilon$ *tend vers zéro.* Le nombre de celles-ci est donc $2p$ (**). Conséquemment, *le nombre des points situés à l'infini est* n + n' — 2p.

*Remarque.* — Le théorème peut encore être énoncé ainsi : *Dans toute courbe algébrique, le nombre des points situés à l'infini, sur la courbe et sur une asymptote quelconque, est nécessairement pair.*

*une droite comme une courbe fermée, dans laquelle un point situé à l'infini forme la jonction des deux bras qui s'étendent dans les deux sens opposés;* ou à d'autres du même genre.

(*) On fait abstraction des valeurs infinies de $x$.

(**) Le point H est la limite commune de G et G'; le point K est la limite commune de I et de L; etc. On voit que la démonstration serait en défaut si la courbe considérée pouvait avoir des *points d'arrêt.* Aussi avons-nous commencé par établir qu'elle n'en a pas.

## LXXVI. — Théorème de Staudt et Clausen. (1880) (*).

I. Lemmes préliminaires. — I. *Si* n *est un nombre non premier, supérieur à 4, on a*

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-2) = \mathfrak{M}\, n.$$

Soit $n = abc \ldots$, les facteurs $a, b, c, \ldots$ étant *premiers entre eux, deux à deux.* Chacun de ces facteurs ne surpasse pas $\frac{n}{2}$ ; donc il se rencontre dans la suite $2, 3, \ldots, (n-2)$. Par conséquent, le produit $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-2)$ est divisible par $abc \ldots$

II. *Si* n *est un nombre premier, supérieur à un nombre entier* k,

$$\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-k)}{1 \,.\, 2 \ldots (k-1)} = \mathfrak{M}\, n \mp k,$$

*selon que* k *est pair ou impair.*

1° Le numérateur, composé de $k-1$ facteurs consécutifs, est divisible par le dénominateur.

2° Si $k$ est *pair,* ce numérateur est un multiple de $n$, *diminué* de $2 \,.\, 3 \ldots k$.

En représentant par $Pn$ ce multiple, et en appelant F la fraction proposée, on a donc

$$F = \frac{Pn}{1.2\ldots(k-1)} - k = \textit{entier}.$$

3° A cause des hypothèses faites sur $n$ et $k$, *le produit* $1.2\ldots(k-1)$, *qui divise* P$n$, *est premier avec* $n$ : il divise P ; et, finalement,

$$F = \mathfrak{M}\, n - k.$$

Même démonstration si $k$ est *impair.*

(*) La démonstration suivante a été mentionnée ci-dessus (p. 101). Nous croyons pouvoir la reproduire, en y introduisant quelques améliorations.

III. n *étant un nombre premier, impair, et* p *un nombre entier, moindre que* n — 1, *on a*

$$S_{p,\,n-1} = 1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p = \mathfrak{M}n \text{ (*)}.$$

IV. *Si* n *est un nombre premier, impair, on a*

$$S_{n-1,\,n-1} = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \cdots + (n-1)^{n-1} = \mathfrak{M}n - 1.$$

D'après le Théorème de Fermat, chacune des puissances $n-1$ est un multiple de $n$, augmenté de l'unité; donc

$$S_{n-1,\,n-1} = \mathfrak{M}n + (n-1) = \mathfrak{M}n - 1.$$

V. (Corollaire des lemmes III et IV). n *étant un nombre premier, impair, la somme* $S_{p,\,n-1}$ *est un multiple de* n, *diminué de l'unité, ou un multiple de* n, *selon que* n — 1 *divise ou ne divise pas l'exposant* p.

VI. *Les nombres de Bernoulli sont donnés par chacune des deux formules :*

$$B_q = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Delta(1^q) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^q) - \cdots \pm \frac{1}{n}\Delta^{n-2}(1^q) \mp \cdots - \frac{q+2}{1}\Delta^q(1^q), \quad \text{(A)}$$

$$\left.\begin{aligned} B_q &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\varphi(1,q) + \frac{1.2}{4}\varphi(2,q) - \cdots \\ &\pm \frac{1.2.3\ldots(n-2)}{n}\varphi(n-2,q) \mp \cdots \\ &- \frac{1.2\ldots q}{q+2}\varphi(q,q). \end{aligned}\right\} \quad \text{(B)}$$

*dans lesquelles* q *est impair* (**).

(*) Ce curieux théorème, presque évident, a été démontré par Lionnet (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. I, 1843). J'ignore à qui on le doit. Voir le Mémoire intitulé : *Quelques théorèmes d'Arithmétique* (1884).

(**) *Sur les différences de* $1^p$, *et sur le calcul des Nombres de Bernoulli* (Mélanges mathématiques; Annali di Matematica, 1859). Dans cette Note, les *nombres entiers* $\varphi(1, q)$, $\varphi(2, q)$, ... sont désignés par $B_q$, $C_q$, ...

II. Théorème de Staudt et Clausen. — *Soient* n, n′, n″, ... *les nombres premiers, impairs, tels que* n — 1, n′ — 1, n″ — 1, ... *divisent* q + 1. *Le* $q^{\text{ième}}$ *Nombre de Bernoulli,* $B_q$, *est donné par la formule*

$$-B_q = E_q + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \cdots, \tag{C}$$

*dans laquelle* $E_q$ *est un entier, positif ou négatif.*

*Démonstration.* — Il s'agit d'examiner quelles sont, dans la formule (A), les *fractions réductibles à des nombres entiers.*

1°
$$\frac{1}{4}\Delta^2(1^q) = \frac{1}{4}(3^q - 2\,.\,2^q + 1^q).$$

$q$ étant *impair,* $3^q = \mathfrak{M}\,4 - 1$. Donc la quantité entre parenthèses est un multiple de 4; et, en conséquence,

$$\frac{1}{4}\Delta^2(1^q) = \textit{entier}.$$

2° *Si* n *est un nombre composé, supérieur à* 4,

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-2)}{n}\varphi(n-2, q) = \textit{entier};$$

d'après le Lemme I.

3° *Soit* n *premier, impair.*

On a

$$\Delta^{n-2}(1^q) = (n-1)^q - \frac{n-2}{1}(n-2)^q + \cdots + \frac{n-2}{1}2^q - 1. \tag{D}$$

Par le Lemme II, le second membre égale

$$\mathfrak{M}\,n + (n-1)^q + 2(n-2)^q + 3(n-3)^q + \cdots + (n-2)\,2^q + (n-1)1^q,$$

ou

$$\mathfrak{M}\,n - \left[(n-1)^{q+1} + (n-2)^{q+1} + \cdots + 2^{q+1} + 1^{q+1}\right].$$

Ainsi

$$\Delta^{n-2}(1^q) = \mathfrak{M}\,n - S_{q+1,\,n-1}. \tag{E}$$

Il y a, maintenant, deux cas à distinguer :

*Si* n — 1 *ne divise pas* q + 1, le second membre est un multiple de $n$ :

$$\frac{1}{n}\Delta^{n-2}(1^q) = \textit{entier}.$$

*Si*, au contraire, $n - 1$ *divise* $q + 1$, l'égalité (E) devient

$$\Delta^{n-2}(1^q) = \mathfrak{M}n - (\mathfrak{M}n - 1),$$

ou

$$\frac{1}{n}\Delta^{n-2}(1^q) = \textit{entier} + \frac{1}{n}\cdot$$

En résumé,

$$B_q = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{n'} - \frac{1}{n''} - \frac{1}{n'''} - \cdots \pm \textit{entier},$$

ou, ce qui est équivalent,

$$-B_q = E_q + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \frac{1}{n'''} + \cdots \qquad \text{(F)}$$

III. *Remarques.* — 1° Soit

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \frac{1}{n'''} + \cdots = \frac{N}{2\,.\,3\,.\,n'n''n'''}\cdot$$

Cette fraction est *irréductible* (*). Donc la forme *la plus simple* des nombres de Bernoulli est

$$B_q = \pm \frac{N_q}{2\,.\,3\,.\,n'n''n'''\ldots}\cdot \qquad \text{(G)}$$

2° *Tous les dénominateurs sont divisibles par* 6.

En effet, le nombre pair, $q + 1$, est divisible par $2 - 1$ et par $3 - 1$.

3° *Si* n' = 5, q = $\mathfrak{M}\,4 - 1$ : $B_3, B_7, B_{11}, \ldots$ *contiennent, en dénominateur, le facteur* 5.

De même, $B_5, B_{11}, B_{17}, \ldots$ *contiennent, en dénominateur, le facteur* 7 ; etc.

(*) Proposition démontrée dans les éléments d'arithmétique.

4° *Si 4 divise* q + 1, *et que les nombres* 2n′ — 1, 2n″ — 1, ... *soient composés,* $B_q$ *et* $B_{2q+1}$ *ont même partie fractionnaire.*

Les diviseurs de $q+1$ étant

$$1,\quad 2,\quad n'-1,\quad n''-1, \ldots,$$

ceux de $2q+2$ sont

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 2n'-2,\quad 2n''-2, \ldots$$

Ceux-ci, augmentés de l'unité, deviennent

$$2,\quad 3,\quad 5,\quad 2n'-1,\quad 2n''-1, \ldots$$

Si $2n'-1$ était premier, $B_{2q+1}$ contiendrait la fraction $\frac{1}{2n'-1}$; mais, par hypothèse, $2n'-1$ est un nombre *non-premier*. Donc $B_{2q+1}$ et $B_q$ sont composés des mêmes fractions.

Par exemple,

$$-B_{15} = 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17},$$

$$-B_{31} = 15\,116\,315\,766 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17};$$

donc

$$B_{15} - B_{31} = 15\,116\,315\,760.$$

5° Généralisation du Lemme II :

$$C_{p+q,\,q} \pm C_{n-p-1,\,q} = \mathcal{M}n\ (^*).$$

Exemple :

$$\frac{11\,.\,10\,.\,9\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{21\,.\,20\,.\,19\,.\,18}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = \mathcal{M}\,29.$$

(*) Si $q$ est *pair,* on doit prendre le signe —.

*Addition.* — (*Janvier* 1885.)

IV. Le Lemme II peut être énoncé ainsi :
n *étant un nombre premier, supérieur à* k,

$$C_{n-2,\,k-1} = \mathfrak{M}\,n \mp k,$$

*selon que* k *est pair ou impair.*

Si l'on change $k$ en $k - 1$, on a donc

$$C_{n-2,\,k-2} = \mathfrak{M}\,n \pm (k-1);$$

et, par conséquent,

$$C_{n-2,\,k-1} + C_{n-2,\,k-2} = \mathfrak{M}\,n + (-1)^{k+1}. \qquad \text{(H)}$$

Ainsi, *dans le développement de* $(x + a)^{n-2}$ ($n$ premier), *la somme de deux coefficients consécutifs est un multiple de* n, *augmenté ou diminué de* 1.

En outre :

*la somme des deux premiers coefficients égale* $\mathfrak{M}\,n - 1$,
*la somme des quatre premiers coefficients égale* $\mathfrak{M}\,n - 2$,
*la somme des six premiers coefficients égale* $\mathfrak{M}\,n - 3$,
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
*la somme de tous les coefficients égale* $\mathfrak{M}\,n - \dfrac{n-1}{2}$ (*).

V. On sait que

$$C_{n-2,\,k-1} + C_{n-2,\,k-2} = C_{n-1,\,k-1}.$$

Par conséquent :

*Dans le développement de* $(x + a)^{n-1}$ ($n$ premier), *chaque coefficient est un multiple de* n, *augmenté ou diminué de* 1 (**).

(*) Cette dernière somme est $2^{n-2}$. Donc

$$2^{n-1} = \mathfrak{M}\,n + 1,$$

conformément au Théorème de Fermat.

(**) La démonstration directe est semblable à celle du Lemme II.

**VI.** *Si* n — 2 *est premier,* le premier membre de l'égalité (**H**) a, simultanément, la forme $nx \pm 1$ et la forme $(n-2)y$. Donc, pour satisfaire à l'équation

$$nx - (n-2)y = \pm 1,$$

on peut prendre

$$y = \frac{1}{n-2} C_{n-1,k-1},$$

$k$ étant compris entre 3 et $n-3$, inclusivement.

*Exemple :*

$$13x - 11y = \pm 1.$$

Faisant

$$k = 3, \quad k = 4, \ldots k = 10,$$

on trouve

$$y = 6, \quad y = 20, \quad y = 45, \quad y = 72, \quad y = 84;$$

puis

$$x = 5, \quad x = 19, \quad x = 38, \quad x = 61, \quad x = 71.$$

**VII.** De la relation

$$C_{p+q,q} \pm C_{n-p-1,q} = \mathfrak{M}n,$$

ou

$$C_{p+q,q} + (-1)^{q+1} C_{n-p-1,q} = \mathfrak{M}n,$$

on conclut aisément

$$C_{n-p-1,q} \mp C_{n-q-1,p} = \mathfrak{M}n \text{ (*)};$$

puis

$$C_{n-p-1,0} + C_{n-p-1,1} + \cdots + C_{n-p-1,n-p-1} =$$
$$\pm [C_{n-1,p} - C_{n-2,p} + \cdots \pm C_{p,p}] + \mathfrak{M}n.$$

Le premier membre égale $2^{n-p-1}$. Donc, si l'on multiplie par $2^p$, et qu'on applique le Théorème de Fermat, on a

$$\pm 2^p [C_{n-1,p} - C_{n-2,p} + \cdots \pm C_{p,p}] = \mathfrak{M}n - 1 \text{ (**)}. \qquad \text{(K)}$$

(*) On doit prendre le signe supérieur, si $p$ et $q$ sont *de même parité.*
(**) Le signe +, si $p$ est *pair.*

Par exemple,

$$2^6[C_{10,6} - C_{9,6} + C_{8,6} - C_{7,6} + C_{6,6}] = \mathcal{M}11 - 1.$$

En effet, la quantité entre parenthèses égale 148; et, si l'on néglige les multiples de 11, il reste

$$2 \times 5 = 11 - 1.$$

VIII. *Remarque.* — La relation (K) deviendrait plus intéressante si l'on savait évaluer

$$C_{n-1,p} - C_{n-2,p} + \cdots \pm C_{p,p};$$

mais cette recherche nous semble difficile.

## LXXVII. — Sur une série double (*).

**1.** Théorème. — *Soit*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

*Soit la série double, supposée convergente :*

$$\begin{aligned} S = {} & a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \\ & + \frac{m+1}{1} y(a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ & + \frac{(m+1)(m+2)}{1.2} y^2(a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots) \\ & + \cdots; \end{aligned}$$

m *étant un nombre entier.*

*Si l'on pose*

$$\varphi(x, y) = \frac{y^m}{1-y}[f(x) - yf(xy)],$$

*on a*

$$S = \frac{1}{1.2.3 \ldots m} \frac{d^m\varphi(x,y)}{dy^m}.$$

(*) *Bulletin de l'Académie* (juin 1883).

*Démonstration.* — En admettant que les termes puissent être groupés dans un ordre arbitraire :

$$\begin{aligned} S = a_0 &+ \left[1 + \frac{m+1}{1} y\right] a_1 x \\ &+ \left[1 + \frac{m+1}{1} y + \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2} y^2\right] a_2 x^2 \\ &+ \cdots \\ &+ \left[1 + \frac{m+1}{1} y + \cdots \frac{(m+1)\dots(m+p)}{1 \cdot 2 \dots p} y^p\right] a_p x^p \\ &+ \cdots ; \end{aligned}$$

ou, si l'on fait

$$Y_p = 1 + \frac{m+1}{1} y + \cdots + \frac{(m+1)\dots(m+p)}{1 \cdot 2 \dots p} y^p ;$$

$$S = \sum_{p=0}^{p=\infty} Y_p a_p x^p.$$

Le polynôme $Y_p$ est la dérivée $m^{\text{ième}}$ de

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots m}\left[y^m + y^{m+1} + \cdots + y^{m+p}\right] = \frac{y^m(1 - y^{p+1})}{1 \cdot 2 \dots m(1-y)} \cdot$$

Donc S est la dérivée $m^{\text{ième}}$ de

$$\frac{y^m}{1 \cdot 2 \dots m(1-y)} \sum_{p=0}^{p=\infty} (1 - y^{p+1}) a_p x^p ;$$

c'est-à-dire, la dérivée $m^{\text{ième}}$ de

$$\frac{y^m}{1 \cdot 2 \dots m(1-y)} \left[f(x) - y f(xy)\right],$$

conformément à l'énoncé.

**2.** *Remarque.* — Si $m = 0$,

$$S = \frac{f(x) - y f(xy)}{1 - y} \cdot$$

**3.** *Exemple* (*) :

$$m = 1,$$

$$f(x) = \frac{1}{1.2.3.4} - \frac{x}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^2}{1.2..7} - \dots$$

Il est visible que

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left[\cos(\sqrt{x}) - 1 + \frac{1}{2}x\right].$$

Donc

$$f(xy) = \frac{1}{x^2y^2}\left[\cos(\sqrt{xy}) - 1 + \frac{1}{2}xy\right].$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{x^2} + \frac{\cos(\sqrt{x}) - \cos(\sqrt{xy})}{(1-y)x^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{(1-y)^2x^2}\left[\frac{(1-y)\sqrt{x}\sin(\sqrt{xy})}{2\sqrt{y}} + \cos(\sqrt{x}) - \cos(\sqrt{xy})\right];$$

et, finalement,

$$S = \frac{1}{(1-y)^2x^2}\left[\frac{(1-y)\sqrt{x}\sin(\sqrt{xy})}{2\sqrt{y}} + \cos(\sqrt{x}) - \cos\sqrt{xy}\right].$$

## LXXVIII. — Quelques théorèmes de Géométrie élémentaire (**).

**1.** *Annexes d'un triangle.* — Soient M, N, P les points symétriques des sommets A, B, C d'un triangle, relativement aux côtés BC, CA, AB. Si l'on mène les droites PB, NC, elles déterminent en général, avec BC, un triangle BCA′ (***), que l'on peut appeler *annexe* de ABC, suivant BC. De même, CAB′, ABC′ sont

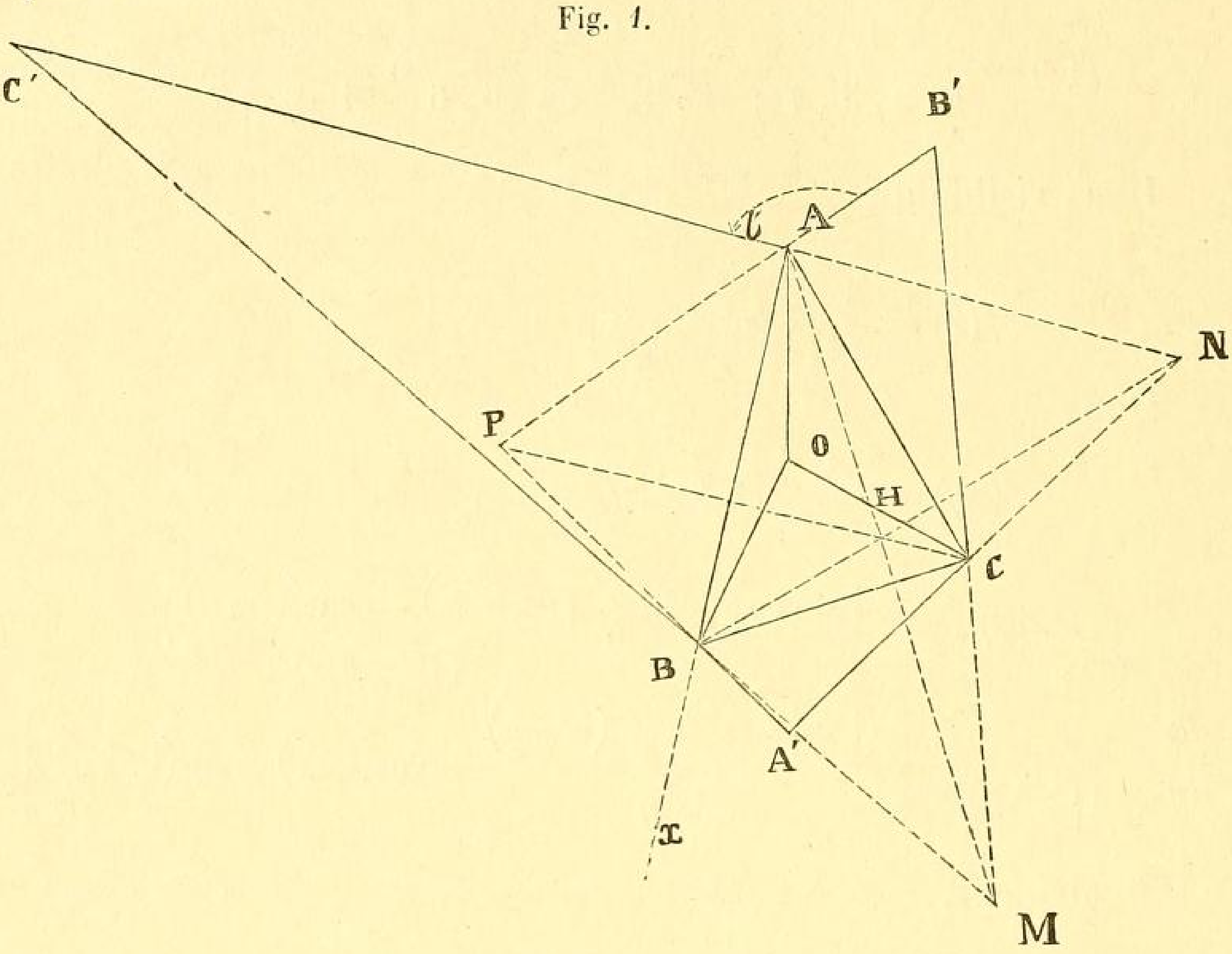
(*) Proposé par un Astronome.

(**) *Bulletin de l'Académie*, 1882.

(***) Il est visible que, si l'angle A est droit, les lignes PB, NC sont parallèles entre elles. Cette conclusion résulte, d'ailleurs, des valeurs suivantes.

des annexes. Ces triangles jouissent de propriétés assez remarquables.

Fig. 1.




**2.** *Angles des annexes.* — Soit $Bx$ le prolongement de AB. D'après la construction,

$$A'Bx = PBA = CBA = B;$$

donc

$$A'BC = 2^d - 2B.$$

De même,

$$BCA' = 2^d - 2C.$$

Par suite,

$$A' = 2^d - 2A\ (^*).$$

Ainsi, *les angles de l'annexe suivant* BC *sont les suppléments des doubles des angles de* ABC. Il en est de même pour les deux autres annexes. Conséquemment, *les trois annexes sont semblables;* et, en outre :

$$A'BC = ABC' = B',$$
$$BCA' = ACB' = C',$$
$$BAC' = CAB' = A'.$$

(*) Lorsque $A = 1^d$, A' est nul, conformément à la remarque précédente.

**3.** *Remarque.* — Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. L'angle *au centre,* BOC, est double de A. Donc

$$BOC + A' = 2^d :$$

*le quadrilatère* BOCA′ *est inscriptible.* De même, COAB′, AOCA′ sont des *quadrilatères inscriptibles* (*).

**4.** *Hexagone des annexes.* — Dans l'hexagone A′CB′AC′BA′, les angles en A′, B′, C′ ont pour valeurs, respectivement :

$$2^d - 2A, \quad 2^d - 2B, \quad 2^d - 2C.$$

L'angle en A égale

$$CAB' + A + BAC' = 2A' + A = 4^d - 3A.$$

Donc *l'angle extérieur* (**), B′AC′, *est le triple de* A. Semblablement :

$$\textit{angle ext } B'CA' = 3C,$$
$$\textit{angle ext. } C'BA' = 3B.$$

**5.** *Remarques.* — I. La somme des angles *intérieurs,* en A, B, C, est

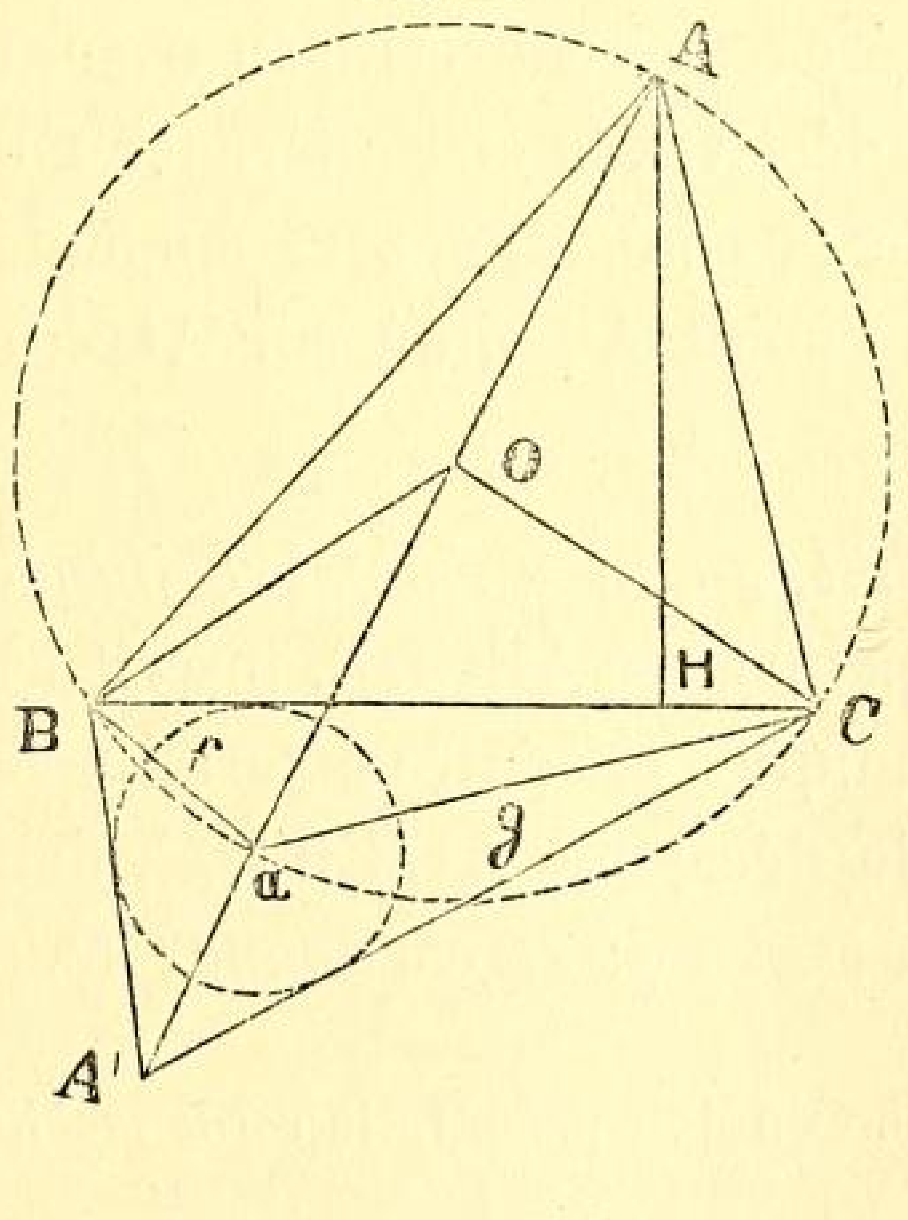
$$12^d - 3(A + B + C) = 6^d;$$

donc *un au moins, de ces trois angles, surpasse* 2 *droits.*

II. *L'hexagone est non-convexe.*

III. *La somme des angles intérieurs, en* A′, B′, C′, *égale* 2 *droits.*

Fig. 2.




**6.** Théorème. — 1° *La droite* AA′, *qui joint un sommet de* ABC *au sommet correspondant d'une annexe* BCA′, *contient le centre* O *de la circonférence circonscrite au premier triangle et le centre* α *de la circonférence inscrite à l'annexe;* 2° *le second centre est situé sur la première circonférence.*

Soient B$f$ perpendiculaire à BA, C$g$ perpendiculaire à CA. D'après la *définition* (1), ces droites sont

(*) Nous reviendrons sur cette propriété.

(**) L'expression : *angle extérieur,* n'a pas, ici, la signification habituelle.

bissectrices des angles CBA′, BAC′; donc elles se coupent au centre $\alpha$ du cercle inscrit à l'annexe.

En second lieu, la circonférence décrite sur A$\alpha$, comme diamètre, contient les sommets B, C : elle est circonscrite au triangle ABC.

Menons la droite $\alpha$A′, laquelle est bissectrice de l'angle A′. Nous aurons :

$$B\alpha A' = 2^d - \frac{1}{2}(A' + B') = A + B;$$

et, parce que B$\alpha$A, BCA sont inscrits au même segment :

$$B\alpha A = BCA = C.$$

Donc

$$B\alpha A' + B\alpha A = A + B + C = 2^d:$$

A′$\alpha$OA *est une ligne droite.*

**7.** Corollaires. — I. *Si, dans le cercle* O, *la corde* BC *est fixe, et que le point* A *soit mobile, le lieu du point* A′ *est un arc de la circonférence* BOC (3).

II. *Si, au contraire, le point* A *est fixe, et que la corde* BC *soit mobile, le lieu du point* A′ *est le prolongement du diamètre passant en* A (*).

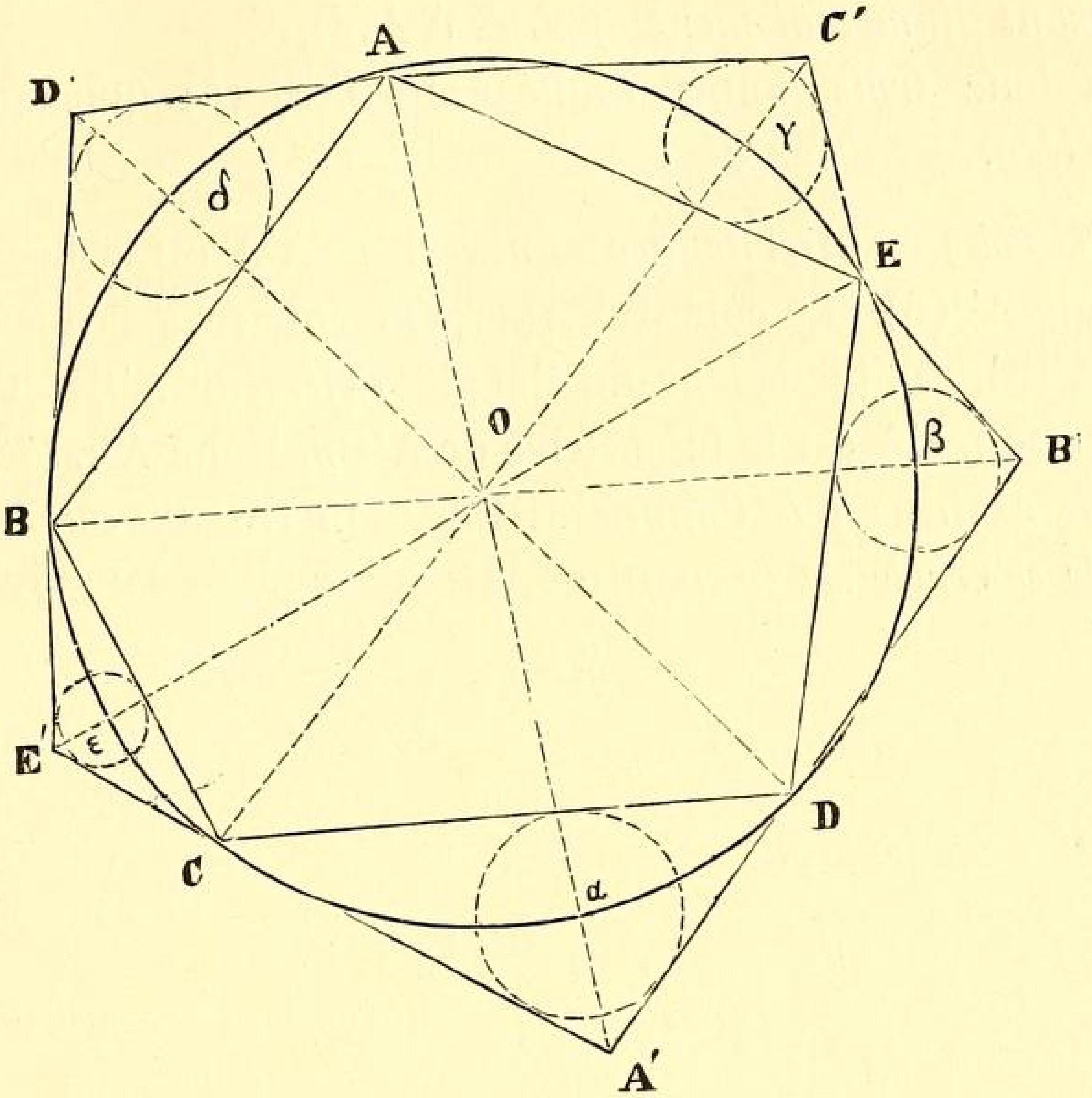
**8.** *Autre construction de l'annexe.* — Soit $\alpha$ le point diamétralement opposé à A, dans la circonférence circonscrite au triangle ABC. De ce point, comme centre, décrivez la circonférence tangente au côté BC. Des extrémités de ce côté, menez les tangentes BA′, CA′ : elles se coupent en un point A′, situé sur AO$\alpha$; et BA′C est l'annexe demandée.

**9.** *Annexes d'un polygone inscrit, ayant un nombre impair de côtés.* — Soit, par exemple, le pentagone ABCDE, inscrit à la circonférence O. La construction indiquée ci-contre détermine les annexes DA′C, EB′D, ...; puis le décagone AC′EB′D..., dans lequel *les diagonales se coupent au centre du cercle donné* (**).

(*) On verra, tout à l'heure, comment on doit prendre la *corde mobile,* pour que le point A′ soit *fixe.*

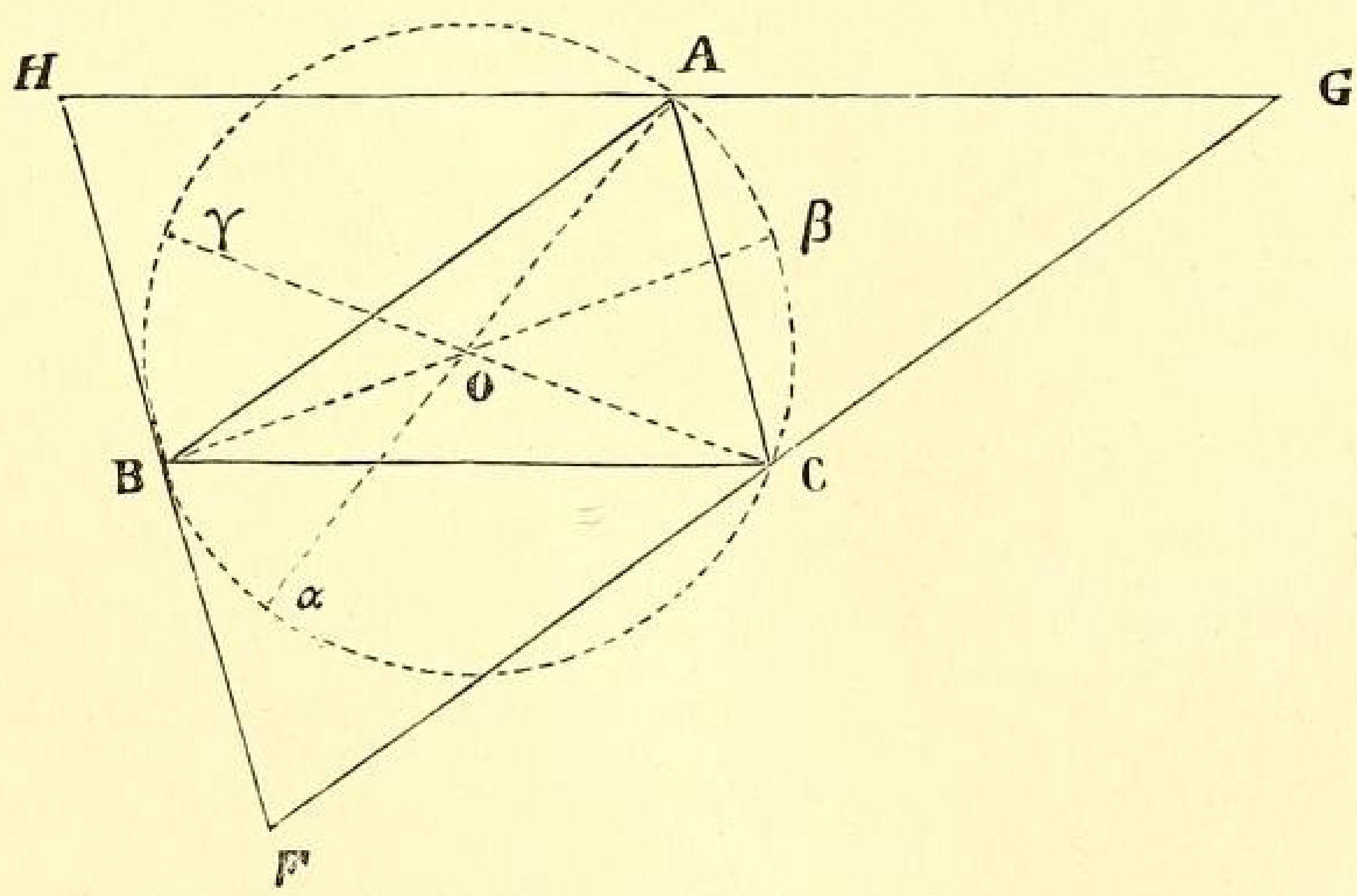
(**) En outre, *les quadrilatères* AC′EO, EB′DO, DA′CO, CE′BO, BD′AO *sont inscriptibles.*

Fig. 3.




**10.** *Circonférence des neuf points.* — Supposons que A, B, C soient les milieux des côtés d'un triangle FGH. La circonférence O devient la *circonférence des neuf points* (milieux des

Fig. 4.

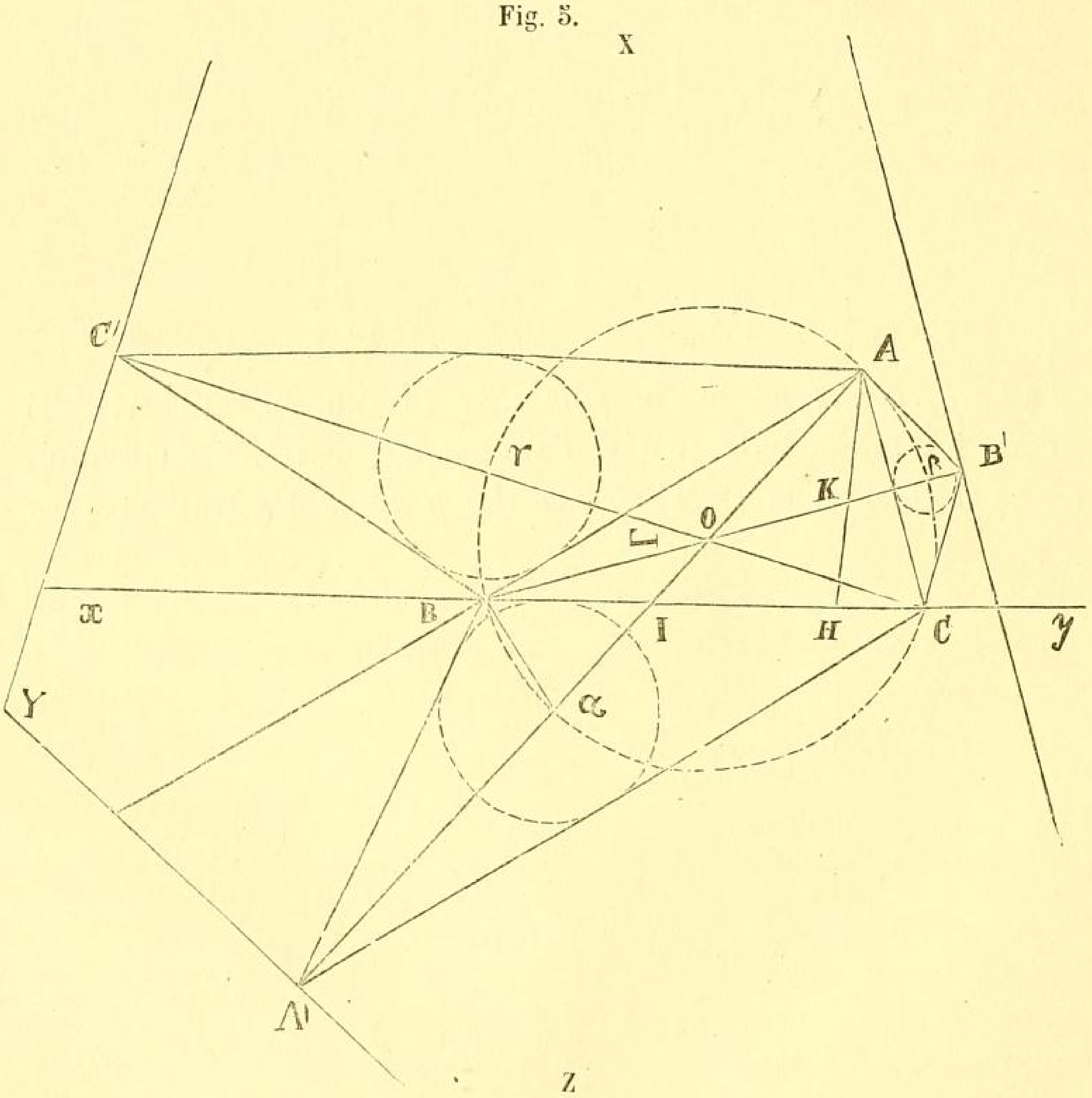



côtés, pieds des hauteurs, milieux des segments compris entre les sommets et le point de concours des hauteurs), relative à ce triangle. D'après le Théorème (6), *cette circonférence contient les* *centres* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *des cercles inscrits aux annexes de* ABC ; *et ces centres sont diamétralement opposés à* A, B, C.

Voilà donc *trois* points ajoutés aux *neuf* (*) que l'on connaissait (**).

**11.** *Cercles ex-inscrits aux annexes.* — A'A est la bissectrice de l'angle A' (6). Le côté BA, perpendiculaire à la bissectrice B$\alpha$ de A'BC, est bissecteur de l'angle *extérieur* A'B$x$. Pour la même raison, CA est la bissectrice de A'C$y$. Donc A *est le centre du cercle ex-inscrit à l'annexe* BCA', *tangent au côté* BC. *Le rayon de ce cercle est la hauteur* AH.

Fig. 5.




(*) Ou plutôt aux *quinze*. (*Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6e édit., p. 177.)

(**) Je fais abstraction, bien entendu, des points remarquables, *en nombre indéfini*, où la circonférence O touche certains cercles. (*Loc. cit.*, p. 181.)

Considérons les deux autres cercles ex-inscrits à BCA′. Le centre de l'un est l'intersection de AB avec la droite YZ, menée par A′, perpendiculairement à A′A ; le centre de l'autre est l'intersection de cette même droite YZ avec AC. Par conséquent :

*Les centres des cercles ex-inscrits aux trois annexes sont :*

1° *Les sommets du triangle* ABC ;

2° *Les intersections des côtés de ce triangle avec les droites* YZ, ZX, XY, *menées par* A′, B′, C′, *perpendiculairement à* A′A, B′B, C′C.

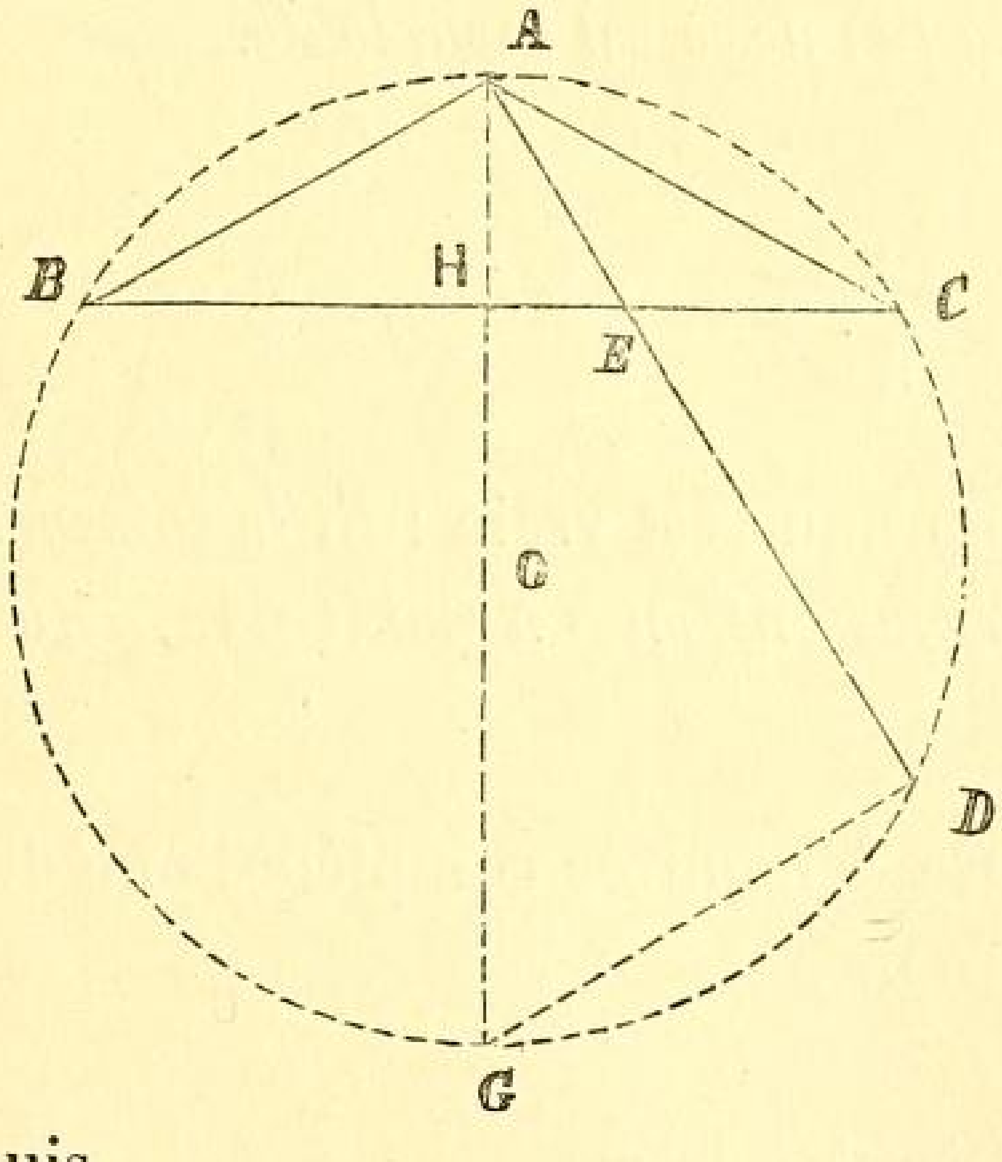
**12.** *Remarque.* — Ces droites sont parallèles aux tangentes, en A, B, C, au cercle O.

**13.** LEMME. — *Soit* ABC *un triangle isoscèle, inscrit à un cercle* O. *Si l'on trace la corde* AD, *coupant en* E *la base du triangle, on a*

$$AD \,.\, AE = \overline{AB}^2.$$

Menons le diamètre AOG et la corde GD. Le quadrilatère DEHG, qui a deux angles opposés droits, est inscriptible (*). Donc

Fig. 6.




$$AD \,.\, AE = AG \,.\, AH.$$

D'après un théorème connu, le second membre égale

$$AB \,.\, AC = \overline{AB}^2 ;$$

donc la proposition est démontrée.

**14.** *Relation métrique.* — Le Lemme précédent, appliqué à la figure 5, donne

$$OA' = \frac{OB \,.\, OC}{OI} = \frac{R^2}{OI},$$

puis

$$AA' = R\frac{AI}{OI},$$

ou

$$\frac{R}{AA'} = \frac{OI}{AI}.$$

(*) Autrement dit, les triangles ADG, AHE sont semblables.

De même :

$$\frac{R}{BB'}=\frac{OK}{BK},\quad \frac{R}{CC'}=\frac{OL}{CL}.$$

Par conséquent,

$$\frac{R}{AA'}+\frac{R}{BB'}+\frac{R}{CC'}=\frac{OI}{AI}+\frac{OK}{BK}+\frac{OL}{CC}.$$

Mais il est connu (et évident) que la somme des trois derniers rapports se réduit à l'unité (*). Donc enfin

$$\frac{1}{AA'}+\frac{1}{BB'}+\frac{1}{CC'}=\frac{1}{R};$$

relation semblable à celle qui existe entre les rayons des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle (**). Par suite, on peut *construire un triangle dans lequel ces quatre rayons soient égaux à* R, AA', BB', CC' (***).

**15.** Théorème. — *Si un triangle inscrit* ABC *a un sommet fixe* A, *et que le côté* BC *passe par un point fixe* I, *appartenant au diamètre* $A\alpha$, *le sommet* A' *de l'annexe est invariable.*

En effet, on vient de voir que

$$OA'=\frac{R^2}{OI}.$$

**16.** *Remarques.* — I. La réciproque est vraie : *Si le sommet* A' *est fixe, toutes les cordes* BC *passent en un point fixe, situé sur* AA'.

II. La propriété qui vient d'être démontrée complète l'une de celles qui l'ont été ci-dessus (7, II).

(*) De là résulte que, *dans tout triangle rectiligne,*

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

Cette proposition, également connue, est facile à vérifier directement.

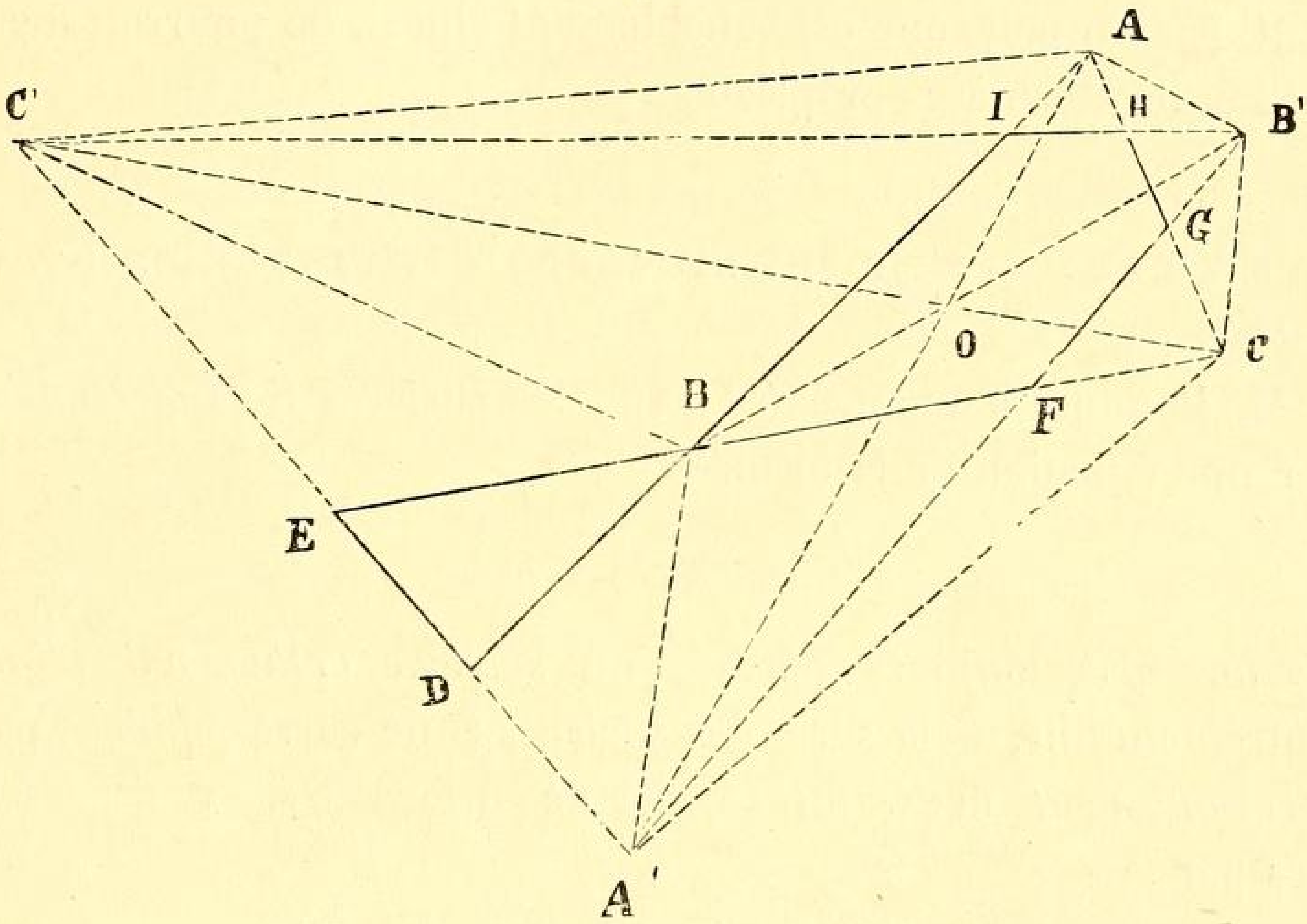
(**) *Théorèmes et Problèmes...,* p. 198.

(***) *Ibidem,* p. 116.

III. Les points I, A′ sont *réciproques* (*). Donc *la polaire du point* I *est la droite* YZ (II). De même, ZX et XY sont les polaires des points L, K.

**17.** *Hexagone de Brianchon.* — Les diagonales de l'hexagone A′CB′AC′B se coupent au point O. Donc *cet hexagone est circonscrit à une conique.*

Fig. 7.




**18.** *Hexagone de Pascal.* — On vient de voir que C′BA′CB′A est un hexagone de Brianchon. Donc les droites C′A, BC, A′B′, CA, B′C′, AB, *jonctions successives* des sommets de cette figure, sont les côtés successifs d'un hexagone de Pascal (**). *Cet hexagone est* DEFGHI. Autrement dit, *les points* D, E, F, G, H, I *sont situés sur une conique.*

**19.** *Circonférence des neuf points.* — Supposons, comme précédemment (10), que A, B, C soient les milieux des côtés d'un triangle T (***). Soit O la circonférence des neuf points,

(*) *Éléments de Géométrie*, p. 114.
(**) *Note* LXXXIX.
(***) Non représenté sur la figure.

relative à T, et soient ABC′, BCA′, CAB′ les annexes de ABC. Les dernières remarques donnent lieu à la proposition suivante :

1° *L'hexagone* AC′BA′CB *est circonscrit à une conique;*

2° *L'hexagone* DEFGHI, *formé par les intersections successives des droites* AB, C′A′, BC, A′B′, CA, B′C′, AB, *est inscrit à une conique.*

**20.** *Remarque.* — Si, comme au n° 9, on remplaçait le triangle ABC par un polygone convenablement choisi, on pourrait généraliser les dernières propriétés.

## LXXIX. — Sur les surfaces orthogonales (*).

M. Bouquet a montré (**) que les surfaces S, représentées par une équation de la forme

$$F(x, y, z) = \lambda,$$

ne font pas toujours partie d'un *système orthogonal triple.* Autrement dit, à la série des surfaces S ne correspondent pas, *nécessairement,* deux autres séries de surfaces $S_1$, $S_2$, représentées par

$$F_1(x, y, z) = \lambda_1, \quad F_2(x, y, z) = \lambda_2,$$

et telles qu'une surface quelconque, prise arbitrairement dans une des séries, coupe orthogonalement toutes les surfaces appartenant aux deux autres groupes.

Récemment, on est allé plus loin dans cette voie *restrictive;* et un jeune Géomètre, déjà célèbre, suppose qu'*une surface quelconque ne peut faire partie d'un système triple orthogonal* (***). Quand il a énoncé cette proposition, M. Darboux ignorait probablement l'existence du Mémoire (IV) dans lequel j'ai établi, implicitement, le théorème contraire. Il n'est donc peut-être pas

(*) *Bulletin de l'Académie* (juin 1868).
(**) *Journal de Liouville,* t. XI, p. 646.
(***) *Annales de l'École normale,* t. II, p. 59.
(IV) *Académie royale de Belgique* (Mémoires couronnés, t. XXXII, p. 15).

inutile de revenir sur ce théorème, en y insistant un peu plus que la première fois.

I. Commençons par rappeler une définition et quelques théorèmes (*).

« *Définition.* — Par un point M, pris sur une surface S, on » élève une normale MM′, ayant une longueur donnée *l*. Le lieu » des points M′ est une surface S′ qui peut être dite *parallèle* » à S. »

« Théorème. — *Si une surface* S′ *est parallèle à la surface* S, » *réciproquement celle-ci est parallèle à* S′.

« Théorème. — *Les surfaces parallèles à une surface dévelop-* » *pable sont développables.*

« Théorème. — *Des surfaces parallèles* S, S′, S″, ... *appar-* » *tiennent toujours à un système orthogonal.* »

Corollaire. I. — *Toute surface fait partie d'un système triple orthogonal.* En effet, quelle que soit une surface donnée, S, on peut construire une infinité de surfaces S′, S″, ... parallèles à S.

Corollaire II. — *Le nombre des systèmes orthogonaux triples est infini* (**).

II. On connait peu de systèmes orthogonaux, sans doute à cause des difficultés que présente la recherche de l'équation des surfaces parallèles à une surface donnée S. Par exemple, on n'a pas encore, paraît-il, *écrit* l'équation des surfaces parallèles à l'ellipsoïde. M. Cayley lui-même a reculé devant ce travail (***). Dans le Mémoire cité plus haut, j'indique, sans effectuer les calculs, le système triple déterminé par des *tores elliptiques parallèles.* Pour compléter la présente Note, je chercherai successivement :

1° *L'équation des tores elliptiques* S, S′, S″, ... *enveloppes de sphères dont les centres parcourent une ellipse* E *donnée ;*

(*) Les passages guillemetés sont extraits du Mémoire cité.

(**) Dans un très beau Mémoire sur les surfaces orthogonales (*Journal de Liouville,* t. XII, p. 242), M. Serret a émis, sous forme dubitative, cette opinion : *Le nombre des surfaces susceptibles de faire partie d'un système triple pourrait bien être assez limité.* On voit que l'hypothèse de ce Géomètre ne s'est pas réalisée.

(***) *Annali di Matematica,* t. III, p. 345.

2° *L'équation des plans* $\Sigma_1$, $\Sigma'_1$, $\Sigma''_1$, ... *normaux à cette ellipse* (*);

3° *L'équation des surfaces développables* $\Sigma_2$, $\Sigma'_2$, $\Sigma''_2$, ... *orthogonales à* S, S', S'', ... *et à* $\Sigma_1$, $\Sigma'_1$, $\Sigma''_1$, ...

III. *Équation des tores elliptiques.* — Soit une ellipse E, déterminée par les équations

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \tag{1}$$

$$z = 0. \tag{2}$$

Si le centre d'une sphère $s$ décrit E, le *tore elliptique* S, enveloppe de $s$, ne diffère pas de la surface qui serait engendrée par la circonférence $c$ du grand cercle dont le plan est normal à E (**). Dans ce mouvement, un point quelconque de $c$ engendre une *toroïde* T, dont l'équation est (***)

$$(AB - 9C)^2 = 4(A^2 + 3B)(B^2 + 3AC), \tag{A}$$

en supposant

$$\left.\begin{aligned} A &= x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2, \\ B &= a^2y^2 + b^2x^2 - a^2k^2 - b^2k^2 - a^2b^2, \\ C &= a^2b^2k^2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

D'ailleurs $k^2 = \lambda^2 - z^2$, $\lambda$ désignant le rayon de la sphère; donc les tores elliptiques S, S', S'', ... sont représentés par l'équation (A), dans laquelle

$$\left.\begin{aligned} A &= x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - \lambda^2, \\ B &= a^2y^2 + b^2x^2 + (a^2 + b^2)z^2 - (a^2 + b^2)\lambda^2 + a^2b^2, \\ C &= a^2b^2(\lambda^2 - z^2). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

IV. *Équation des plans normaux.* — Cette équation est

$$y = mx + \frac{(a^2 - b^2)m}{\sqrt{a^2 + b^2m^2}},$$

(*) Mémoire cité, p. 18.

(**) Mémoire cité, p. 18.

(***) *Note* XIX, p. 51.

ou sous une forme plus symétrique,

$$(x \sin \mu - y \cos \mu)^2 (a^2 \cos^2 \mu + b^2 \sin^2 \mu) = (a^2 - b^2)^2 \sin^2 \mu \cos^2 \mu. \quad \text{(B)}$$

V. *Équation des développables* $\Sigma$. — Chacune de ces surfaces est engendrée par une normale à l'ellipse E et à la toroïde T; d'où il résulte que $\Sigma_2$ est une *surface à pente constante, dont les lignes de niveau sont des toroïdes* (*). Si $\nu$ est l'angle de la génératrice avec l'axe des $z$, on a

$$k = z \operatorname{tg} \nu.$$

Ainsi, l'équation cherchée est encore

$$(AB - 9C)^2 = 4(A^2 + 3B)(B^2 + 3AC), \quad \text{(A)}$$

pourvu que

$$\left.\begin{aligned} A &= x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \nu - a^2 - b^2, \\ B &= a^2y^2 + b^2x^2 - (a^2 + b^2) z^2 \operatorname{tg}^2 \nu - a^2b^2, \\ C &= a^2b^2z^2 \operatorname{tg}^2 \nu. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

### *Addition.* — (1875.)

VI. *Autres systèmes orthogonaux.* — 1° $s$ étant une surface donnée, soit S la surface déduite de $s$ au moyen de la transformation due à Mac-Cullagh : les surfaces $s$, S ... sont dites *conjuguées* (**). Cela posé, *les conjuguées de surfaces parallèles étant des surfaces parallèles* (***), il s'ensuit que :

*A tout système orthogonal, composé de surfaces parallèles* s, s′, ..., *de surfaces développables* $\sigma_1$, $\sigma_1'$, $\sigma_1''$, ..., *et d'autres surfaces développables* $\sigma_2$, $\sigma_2'$, $\sigma_2''$, ..., *correspond un second système orthogonal, composé de surfaces parallèles* S, S′, S″, ..., *de*

(*) Mémoire cité, p. 19.

(**) *Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes* (pp. 1, 5).

(***) *Ibidem*, p. 29.

*surfaces développables* $\Sigma_1$, $\Sigma_1'$, $\Sigma_1''$, ..., *et d'autres surfaces développables* $\Sigma_2$, $\Sigma_2'$, $\Sigma_2''$ (*).

2° Soient, dans un plan P, un système de courbes AB, $A_1B_1$, $A_2B_2$, ... dont les trajectoires orthogonales soient CD, $C_1D_1$, $C_2D_2$, ... Supposons que le plan *s'enroule* sur une développable $s$, de manière à prendre les positions $P_1$, $P_2$, ... Chacune des courbes engendrera une *surface d'enroulement* (**), et *les surfaces appartenant à la première série seront orthogonales à toutes les autres* (***). De plus, *ces surfaces coupent, orthogonalement, les plans* P, $P_1$, $P_2$.

Voilà donc un *système orthogonal triple,* composé de *plans* et de *surfaces d'enroulement.*

## LXXX. — Théorèmes d'Arithmétique (IV).

Les propriétés suivantes, qui n'ont peut-être pas encore été signalées, sont des conséquences *immédiates* de la théorie des équations binômes. Il suffit donc de les énoncer.

*Quelle que soit la base* b *du système de numération :*

1° p, q *étant deux nombres impairs, premiers entre eux,*

$$\frac{b^{(q-1)p}+b^{(q-2)p}+\cdots+b^p+1}{b^{q-1}+b^{q-2}+\cdots+b+1}=\frac{b^{(p-1)q}+b^{(p-2)q}+\cdots+b^q+1}{b^{p-1}+b^{p-2}+\cdots+b+1}$$

$=$ *entier.*

Par exemple, pour $p=3$, $q=5$ :

$$\frac{1\,001\,001\,001\,001}{11\,111}=\frac{10\,000\,100\,001}{111}=\textit{entier}.$$

(*) *Mémoire,* p. 51.

(**) *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces,* p. 16.

(***) Deux surfaces de révolution, qui ont même axe, sont orthogonales si leurs sections méridiennes le sont. Or, à chaque instant, les lignes AB, ..., CD, ... tournent autour d'une génératrice de $s$.

(IV) *Mémoires de la Société des sciences de Liége* (février 1877).

2° *Le plus grand commun diviseur, entre deux nombres de la forme* 111 ... 11, *a cette même forme.*

3° *Si le premier nombre contient* n *chiffres et que le second en contienne* n′, *le plus grand commun diviseur en contiendra* $\Delta$; $\Delta$ *étant le plus grand commun diviseur entre* n *et* n′.

Exemple : Le plus grand commun diviseur entre

111 111 111 111 et 111 111 111,

est 111.

Autre exemple. — Les nombres 11 111, 11 111 111 sont premiers entre eux.

4° *Les nombres*

1, 11, 111, 11 111, 1 111 111, 11 111 111 111, ...

*composés de un, deux, trois, cinq, sept, onze, ... chiffres, sont premiers entre eux, deux à deux;*

Etc.

## LXXXI. — Problèmes et théorèmes d'Arithmétique (*).

**1.** Problème I. — *De* 1 *à* n (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers donnés,* $\beta, \gamma, \ldots \pi$?

Soit N le nombre cherché. On sait (**) que

$$N = n - \sum \left(\frac{n}{\beta}\right) + \sum \left(\frac{n}{\beta\gamma}\right) - \sum \left(\frac{n}{\beta\gamma\delta}\right) + \cdots \qquad (1)$$

**2.** Théorème I. — *Soit* n *un nombre entier, compris entre* $2^k$ *et*

(*) *Mémoires de la Société des sciences de Liége* (1882).
(**) *Note* XXXVI, p. 120.

$2^{k+1}-1$ (inclusivement); *soient* $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ *les nombres premiers, supérieurs à* 2. *On a*

$$n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right) - \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma\delta}\right) + \cdots = k + 1 \text{ (*)}. \qquad (2)$$

Dans la suite

$$1,\ 2,\ 3, \ldots n,$$

les seuls nombres premiers avec

$$\beta = 3, \quad \gamma = 5, \quad \delta = 7, \ldots$$

sont

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \ldots 2^k.$$

Ainsi, $N = k + 1$.

**3.** *Remarque.* — De $n = 4$ à $n = 14$, le premier membre se réduit à $n - \Sigma\left(\frac{n}{\beta}\right)$;

De $n = 15$ à $n = 104$ (**), ce premier membre se réduit à

$$n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right);$$

et ainsi de suite.

**4.** Problème II. — *Connaissant les nombres premiers qui ne surpassent pas* n, *trouver combien il y a de nombres premiers compris entre* n + 1 *et* $2n$.

Soit $\pi$ le plus grand nombre premier, non supérieur à $n$. De 1 à $2n$, les nombres non divisibles par

$$\beta = 3, \quad \gamma = 5, \quad \delta = 7, \ldots, \pi,$$

sont, d'une part,

$$1,\ 2,\ 2^2, \ldots 2^{k+1};$$

(*) L'égalité (2), à peu près évidente, est une simple variante de celle-ci :

$$n - \Sigma\left(\frac{\alpha}{n}\right) + \Sigma\left(\frac{n}{\alpha\beta}\right) - \Sigma\left(\frac{n}{\alpha\beta\gamma}\right) + \cdots = 1,$$

qui résulte de la *Remarque* 2° (p. 120).

(**) $15 = 3.5$, $104 = 3.5.7 - 1$.

et, en second lieu, les nombres premiers compris entre $n+1$ et $2n$. Soit $x$ la *quotité* (*) de ceux-ci. Nous avons, en vertu de l'égalité (2) :

$$k+2+x=2n-\sum\left(\frac{2n}{\beta}\right)+\sum\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right)-\sum\left(\frac{2n}{\beta\gamma\delta}\right)+\cdots \quad (3)$$

**5.** *Application. — Entre* 25 *et* 50, *combien y a-t-il de nombres premiers ?*

Dans cet exemple,

$$n=25,\quad 2n=50,\quad k=4.$$

En outre, les diviseurs *simples* sont :

$$3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23;$$

et les diviseurs *composés :*

$$15,\ 21,\ 33,\ 39,\ 35.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}6+x=50-[&16+10+7+4+3+2+2+2]\\ &+[3+2+1+1+1];\end{aligned}$$

d'où

$$x=6.$$

En effet, entre 25 et 50, il y a *six* nombres premiers, savoir :

$$29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47.$$

**6.** *Remarque.* — La combinaison des égalités (2), (3) donne celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}k-x=\sum\left[\left(\frac{2n}{\beta}\right)-2\left(\frac{n}{\beta}\right)\right]-\sum\left[\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right)-2\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right)\right]\\ +\sum\left[\left(\frac{2n}{\beta\gamma\delta}\right)-2\left(\frac{n}{\beta\gamma\delta}\right)\right]-\cdots\end{aligned}\right\}\quad (4)$$

Pour simplifier le second membre, on peut s'appuyer sur la proposition suivante.

(*) J'emploie ce mot pour éviter l'expression : *nombre des nombres.*

**7.** LEMME. — *Selon que* $\left(\frac{2n}{a}\right)$ *est* PAIR *ou* IMPAIR,

$$\left(\frac{2n}{a}\right) - 2\left(\frac{n}{a}\right)$$

*égale zéro ou un.*

1° De

$$2n = a \cdot 2\mu + r,$$

on déduit

$$n = a\mu + \frac{2}{r}\cdot$$

Donc, à cause de $r < a$, $\mu$ *est le quotient entier de* n *par* a (*). Autrement dit :

$$\left(\frac{2n}{a}\right) = 2\mu = 2\left(\frac{n}{a}\right), \quad \left(\frac{2n}{a}\right) - 2\left(\frac{n}{a}\right) = 0.$$

2° Soit

$$2n = a(2\mu + 1) + r;$$

et, par conséquent,

$$n = a\mu + \frac{a + r}{2}\cdot$$

De $r < a$, on conclut $\frac{a+r}{2} < a$ : $\mu$ *est le quotient entier de* n *par* a. Nous avons donc, simultanément :

$$\left(\frac{2n}{a}\right) = 2\mu + 1, \quad \left(\frac{n}{a}\right) = \mu, \quad \left(\frac{2n}{a}\right) - 2\left(\frac{n}{a}\right) = 1.$$

**8.** Revenons à la formule (4). En vertu du Lemme, *chacun des binômes* soumis au signe $\Sigma$ *égale* 0 *ou* 1, *selon que son premier terme est pair ou impair.*

D'après cela, si l'on appelle :

$I_1$, *le nombre de ceux, des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta}\right)$, *qui sont impairs;*

$I_2$, *le nombre de ceux, des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right)$, *qui sont impairs;*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

(*) Ce petit théorème se trouve dans tous les Traités d'arithmétique.

l'égalité (4) peut être énoncée ainsi :

Théorème II. — *En conservant les hypothèses et les dénominations précédentes, on a*

$$x = k - l_1 + l_2 - l_3 + \cdots \tag{A}$$

**9.** *Application. — Entre* 25 *et* 50, *combien y a-t-il de nombres premiers ?*

Je divise

$$50$$

par

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3, | 5, | 7, | 11, | 13, | 17, | 19, | 23; |
| | | + | | + | | | |

puis par

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15, | 21, | 33, | 39, | 35, |
| + | | + | + | + |

*en négligeant les quotients pairs.*

Je trouve $l_1 = 2$, $l_2 = 4$ ; donc

$$x = 4 - 2 + 4 = 6 ;$$

comme ci-dessus.

**10.** *Autre application. — De* 61 *à* 120, *combien y a-t-il de nombres premiers ?*

$$n = 60, \quad k = 5.$$

*Dividende :*

$$120.$$

*Premiers diviseurs :*

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3, | 5, | 7, | 11, | 13, | 17, | 19, | 23, | 29, | 31, | 37, | 41, | 43, | 47, | 53, | 59. | |
| | | + | | + | + | | + | | + | + | | | | | | $l_1 = 6.$ |

*Deuxièmes diviseurs :*

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15, | 21, | 33, | 39, | 51, | 57, | 69, | 87, | 93, | 111, | 35, | 55, | 65, | 85, | |
| | + | + | + | | | + | + | + | + | + | | + | + | |
| 95, | 115, | 77, | 91, | 119. | | | | | | | | | | |
| + | + | + | + | + | | | | | | | | | | $l_2 = 15.$ |

*Troisièmes diviseurs :*

$$105.$$

$$+ \qquad\qquad\qquad l_3 = 1.$$

$$x = 5 - 6 + 15 - 1 = 13.$$

Les *treize* nombres premiers, compris entre 61 et 120 (inclusivement), sont

61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113.

**11.** *Remarque.* — Si l'on admet qu'*entre* n + 1 *et* 2n, *il y a, au moins, un nombre premier* (*), l'égalité (A) donne

$$k - l_1 + l_2 - l_3 + \cdots \overline{\geq} 1.$$

Inversement, si l'on pouvait, *a priori*, établir la relation (B), le *postulatum* serait démontré (**).

**12.** Théorème III. — n *étant toujours un nombre entier, compris entre* $2^k$ *et* $2^{k+1} - 1$, *soient* $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ *les nombres premiers, supérieurs à* 2. *Soient, en outre :*

$\lambda_1$, *le nombre de ceux, des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta}\right)$, *qui sont impairs;*

$\lambda_2$, *le nombre de ceux, des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right)$, *qui sont impairs;*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*On a*

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \cdots = k. \tag{B}$$

Ce théorème, conséquence des égalités

$$n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right) - \cdots = k + 1, \tag{2}$$

$$2n - \sum\left(\frac{2n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right) - \cdots = k + 2\ (***), \tag{2'}$$

résulte aussi du Théorème II.

(*) Cette proposition ne diffère pas, au fond, du *postulatum* de M. Bertrand, démontré par M. Tchebychef (*Journal de Liouville*, t. XVII, p. 381).

(**) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, p. 263.

(***) Voyez les paragraphes 6 et 8.

Soient, en effet, $\rho, \sigma, \theta, \dots \omega$ les $x$ nombres premiers, compris entre $n + 1$ et $2n$.

Chacun des quotients $\left(\frac{2n}{\rho}\right)$, $\left(\frac{2n}{\sigma}\right)$, $\left(\frac{2n}{\theta}\right)$,... égale 1; et chacun des quotients $\left(\frac{2n}{\beta\rho}\right)$, $\left(\frac{2n}{\rho\sigma}\right)$, ... *est nul* (*). Donc

$$\lambda_1 = l_1 + x, \quad \lambda_2 = l_2, \quad \lambda_3 = l_3, \dots$$

Par suite, l'égalité (A) devient

$$x = k - (\lambda_1 - x) + \lambda_2 - \lambda_3 + \cdots,$$

ou

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \cdots = k. \tag{C}$$

**13.** *Application.* $n = 25$, $k = 4$.

*Dividende* :

50.

*Premiers diviseurs :*

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
$+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$ $\lambda_1 = 8$.

*Deuxièmes diviseurs :*

15, 21, 33, 39, 35.
$+ \quad + \quad + \quad +$ $\lambda_2 = 4$.

$$8 - 4 = 4.$$

**14.** *Remarque.* — La fonction qui constitue le premier membre de l'égalité (C) dépend, *uniquement*, de $n$ : appelons-la $F(n)$. *Cette fonction conserve la même valeur quand* n *varie entre* $2^k$ *et* $2^{k+1} - 1$ (inclusivement). En outre, *chaque fois que* n *dépasse une nouvelle puissance de* 2, F(n) *augmente d'une unité.* Cet exemple de discontinuité, analogue à celui que présente la fonction $E(x)$, nous paraît remarquable.

**15.** *Sur une équation indéterminée.* — L'identité

$$(\alpha + \beta)^2(\alpha - 2\beta)^2(\beta - 2\alpha)^2 + 27\alpha^2\beta^2(\alpha - \beta)^2 = 4(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)^3, \tag{D}$$

(*) A cause de $\beta > 2$, $\rho > n$.

facile à vérifier, donne une infinité de solutions, en nombres entiers, de

$$x^2 + 3y^2 = z^3. \qquad (5)$$

En effet, on peut prendre

$$x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\alpha - 2\beta)(\beta - 2\alpha), \quad y = \frac{3}{2}\alpha\beta(\alpha - \beta), \quad z = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2. \quad (6)$$

Ces valeurs seront entières, si $\alpha$, $\beta$ sont de *même parité*.

**16.** *Remarque.* — Ces formules ne donnent pas toutes les solutions. Par exemple, on n'en saurait déduire

$$x = y = z = 4.$$

**17.** *Autres identités.*

$$\left.\begin{aligned} (a^2 + b^2)^4 &= (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)^2 + \left[4(a^2 - b^2)\,ab\right]^2 \\ &= (a^4 + b^4)^2 + (2a^3b)^2 + (2a^2b^2)^2 + (2ab^3)^2. \end{aligned}\right\} \quad (E)$$

Ainsi, $(a^2 + b^2)^4$ *est : un carré; une somme de deux carrés; une somme de quatre carrés.* Généralement, ce nombre n'est pas la somme de trois carrés.

---

M. Realis, à qui j'avais communiqué les identités (D), (E), m'a répondu par l'intéressante Note suivante :

« La résolution de l'équation

» $x^2 + 3y^2 = z^3$,

» en nombres entiers, se rattache directement à la théorie générale développée, par Lagrange, dans le § IX des *Additions à l'Analyse indéterminée d'Euler.*

» Le nombre $z$, diviseur du premier membre, ne peut être » que de la forme $\alpha^2 + 3\beta^2$; on a donc l'identité

» $\alpha^2(\alpha^2 - 9\beta^2)^2 + 3\beta^2(3\alpha^2 - 3\beta^2)^2 = (\alpha^2 + 3\beta^2)^3$,

» renfermant toutes les solutions entières de l'équation. En effet,

» à toute valeur de $z$ de la forme indiquée, c'est-à-dire à tout » système de valeurs de $\alpha$ et $\beta$, correspondra un système de » valeurs de $x$ et $y$; comme $\alpha$ et $\beta$ peuvent toujours être supposés » premiers entre eux, autant il y aura de manières de représen- » ter $z$ par la forme susdite, autant il y aura (pour le $z$ considéré) » de solutions distinctes de l'équation. On s'assure sans peine, » d'ailleurs, que l'identité ci-dessus, où $\alpha$ et $\beta$ restent indéter- » minés, ne saurait être remplacée par aucune autre formule » donnant l'expression de $(\alpha^2+3\beta^2)^3$ sous la forme requise.

» Quant à l'égalité $4^2+3.4^2=4^3$, où $4^2$ est facteur commun » à tous les termes, elle ne conduit pas à une solution, car en » écrivant comme on doit le faire $1^2+3.1^2=4.1^3$, on n'a pas » un cube dans le second membre.

» Quant, enfin, à l'identité

$$» \ (\alpha+\beta)^2(\alpha-2\beta)^2(\beta-2\alpha)^2+27\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)^2=4\,(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)^3,$$

» rapportée par M. Catalan, elle n'est manifestement qu'une » transformée de celle qui précède.

» II. L'expression $(a^2+b^2)^4$ est assurément : un carré, — » une somme de deux carrés, — une somme de quatre carrés. » On ne peut pas affirmer qu'elle est généralement une somme » de trois carrés effectifs, puisque $(1^2+1^2)^4=16$, par exemple, » ne l'est pas. Cependant, pour des nombres $a$, $b$ premiers entre » eux (ou simplement inégaux), on peut mettre en évidence, » par des formules, que l'expression considérée est toujours une » somme de trois carrés.

» 1° Si $a$ et $b$ sont premiers avec 3, posons l'identité

$$» \ a^2+(a+3h)^2=(a+h)^2+(a+2h)^2+(2h)^2 \ (^*),$$

» dans laquelle on prendra $a$ premier avec $h$; il s'en déduit, par » l'emploi répété de la formule connue

$$» \ (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2+(2\alpha\gamma)^2\,(2\beta\gamma)^2,$$

(*) Lettre de M. Catalan à D. B. Boncompagni, en date de « Liége, 14 novembre 1880 ».

» le théorème général exprimé par la relation

$$» \left[a^2 + (a + 3h)^2\right]^m = A^2 + B^2 + C^2,$$

» où A, B, C sont des entiers dont aucun n'est nul, et $m$ est
» une puissance de 2.

» Il s'ensuit, comme corollaire, que : $a$ et $b$ étant deux entiers,
» dont un seul est divible par 3, et $m$ désignant une puissance
» de 2, l'expression $[2(a^2 + b^2)]^m$ est la somme de trois carrés.

» 2° Si l'un des nombres $a$, $b$, premiers entre eux, est un mul-
» tiple de 3, par exemple, $a = 3a'$, on pose l'identité

$$» (9a'^2 + b^2)^2 = (7a'^2 - b^2)^2 + 16a'^2(a' + b)^2 + 16a'^2(a' - b)^2,$$

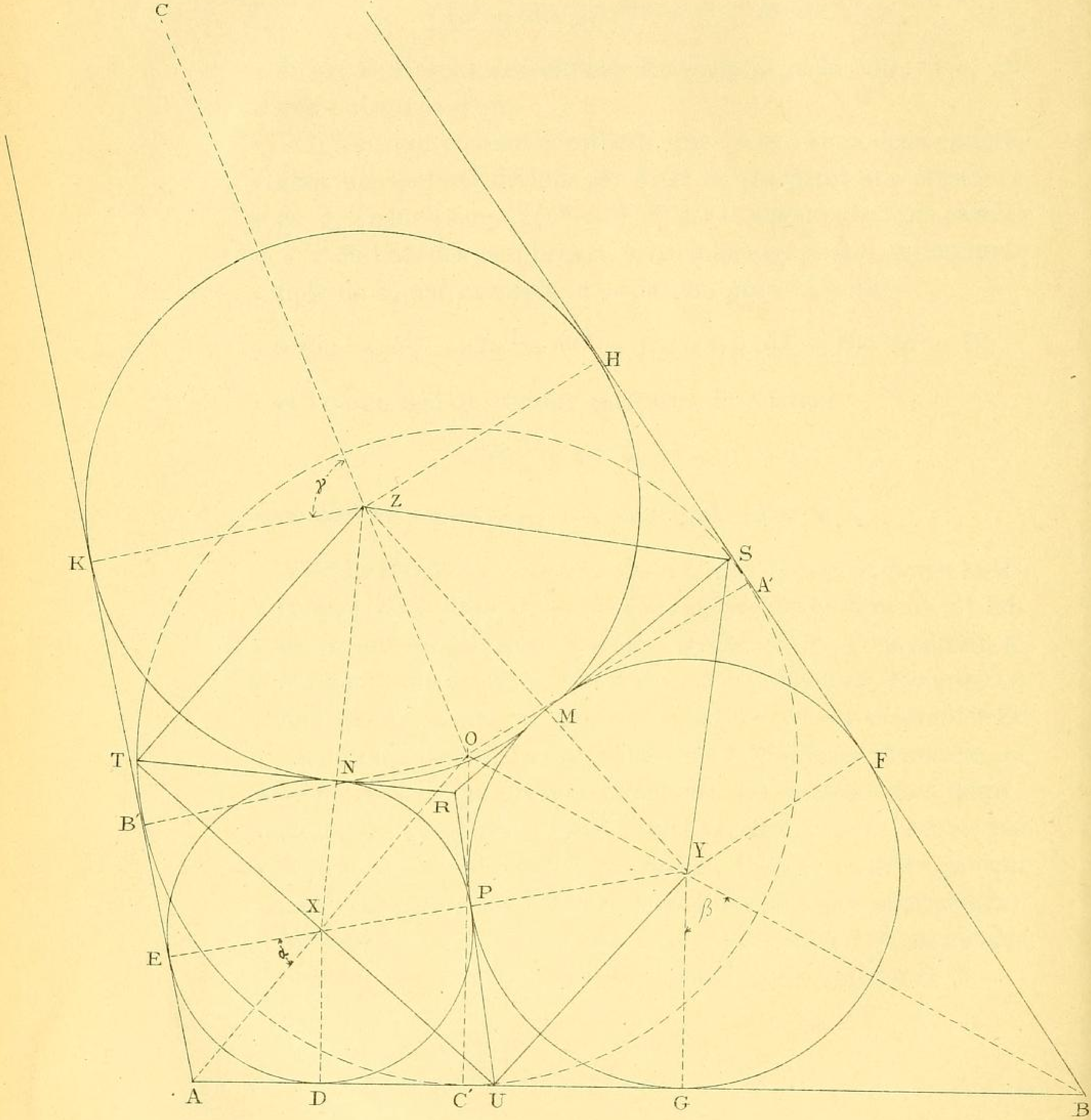
» et l'on en déduit, comme ci-dessus, la relation

$$» (9a'^2 + b^2)^m = A^2 + B^2 + C^2,$$

» en nombres entiers, $m$ étant une puissance de 2.

» *Observation.* — Tout ce qui précède est entièrement indé-
» pendant de la *Théorie des nombres* proprement dite; on n'y fait
» usage que de formules directes, exprimant les propositions, et
» indiquant en même temps les calculs à effectuer. Mais si l'on
» sort des éléments, et que l'on s'appuie sur les théorèmes de
» l'arithmétique supérieure, toutes les propositions énoncées, et
» bien d'autres, se présentent comme des conséquences immé-
» diates de ce principe, que : *tout bicarré impair, autre que*
» *l'unité, est la somme de trois carrés.* D'après ce principe (qui
» ne se démontre pas à l'aide de simples identités algébriques),
» *un nombre de la forme* $(a^2 + b^2)^4$ *est toujours décomposable*
» *en trois carrés, s'il ne se réduit pas à une puissance de* 2. »

» Turin, 6 mars 1882. »




Problème de Malfatti.

*Addition.* — (*Janvier* 1885.)

Quelques-unes des questions traitées ci-dessus ont été reprises et développées dans le *Mémoire sur certaines décompositions en carrés* (*). Parmi les nouveaux résultats auxquels nous sommes parvenu, indiquons ceux-ci :

*Toute puissance entière, d'une somme de trois carrés, est une somme de trois carrés;*

x, y *étant deux nombres entiers, premiers entre eux,*

$$x^{4n} - x^{4n-2}y^2 + x^{4n-4}y^4 - \cdots + y^{4n}$$

*est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés.*

*Soit, conformément au Théorème de Gauss,*

$$4\frac{z^{2p}+1}{z^2+1} = Y_1^2 - pZ_1^2:$$

*le polynôme* $Y_1^2$ *est la somme de quatre carrés et la somme de cinq carrés.*

*La somme des puissances* 4n, *de deux nombres entiers, inégaux, est une somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux.*

*Soit* s *le nombre des puissances de* 2 *ayant* n *pour somme :* $4^{2n-s}$ *est la somme de* $4^n$ *carrés impairs.*

## LXXXII. — Sur le problème de Malfatti (**).

La solution de ce célèbre problème, que j'ai donnée (d'après M. Lechmütz) dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. V, p. 61), peut être notablement réduite.

**1.** ABC étant le triangle donné, dont les angles sont A, B, C; soient :

$\rho = OA' = OB' = OC'$ le rayon du cercle inscrit;

$2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ les *suppléments* respectifs de A, B, C ;

X, Y, Z les centres des cercles cherchés;

$x$, $y$, $z$ les rayons de ces cercles.

(*) Académie des *Nuovi Lincei,* 16 décembre 1883.

(**) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique,* octobre 1874.

**2.** PU étant la tangente commune aux cercles X, Y, il est visible que le triangle XUY est rectangle en U; donc $PU = DU = GU = \sqrt{xy}$. Projetant AXYB sur AB, on a la première des trois équations du problème :

$$x \operatorname{tg} \alpha + 2\sqrt{xy} + y \operatorname{tg} \beta = \rho(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta). \tag{1}$$

Pour la simplifier, résolvons-la par rapport à $\sqrt{x}$ : la valeur *positive* de cette inconnue est

$$-\sqrt{y} \cot \alpha + \sqrt{y \cot \alpha (\cot \alpha - \operatorname{tg} \beta) + \rho(1 + \cot \alpha \operatorname{tg} \beta)}.$$

Ainsi

$$\sqrt{x} \sin \alpha + \sqrt{y} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\cos \beta}} \sqrt{y \cos a \cos (\alpha + \beta) + \rho \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}.$$

Et comme $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, cette égalité devient

$$\sqrt{x} \sin \alpha + \sqrt{y} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\cos \beta}} \sqrt{\rho \sin \alpha \sin \gamma - y \cos \alpha \cos \gamma}. \tag{2}$$

**3.** Le second membre est une fonction symétrique de $\alpha$, $\gamma$; donc

$$\sqrt{x} \sin \alpha + \sqrt{y} \cos \alpha = \sqrt{z} \sin \gamma + \sqrt{y} \cos \gamma ; \tag{3}$$

puis, au moyen d'une permutation tournante :

$$\sqrt{y} \sin \beta + \sqrt{z} \cos \beta = \sqrt{x} \sin \alpha + \sqrt{z} \cos \alpha, \tag{4}$$

$$\sqrt{z} \sin \gamma + \sqrt{x} \cos \gamma = \sqrt{y} \sin \beta + \sqrt{x} \cos \beta. \tag{5}$$

Ces équations (3), (4), (5) déterminent les rapports de $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$. Au moyen des deux premières, on trouve

$$\sqrt{y}(\cos \alpha - \cos \gamma + \sin \beta) = \sqrt{z}(\cos \alpha - \cos \beta + \sin \gamma);$$

ou, par une transformation simple,

$$\sqrt{y} \cos \frac{1}{2} \beta \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{z} \cos \frac{1}{2} \gamma \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right);$$

ou encore

$$\sqrt{y}\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\right)=\sqrt{z}\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right).$$

Nous pouvons donc prendre, au lieu des équations ci-dessus, les proportions

$$\frac{x}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\right)^2}=\frac{y}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)^2}=\frac{z}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\right)^2}. \tag{6}$$

**4.** $\lambda$ étant la valeur commune des trois rapports, soient, pour abréger :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=f,\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta=g,\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma=h.$$

L'équation (1) se transforme en

$$\left[\frac{f(1+f)}{1-f}+(1+f)(1+g)+\frac{g(1+g)}{1-g}\right]\lambda=\rho\left(\frac{f}{1-f^2}+\frac{g}{1-g^2}\right).$$

On tire, de celle-ci,

$$\lambda=\rho\frac{f+g}{(1+f)(1+g)(1+f+g-fg)}.$$

Mais, à cause de

$$\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma=\frac{\pi}{2},$$

on a la relation connue :

$$fg+gh+hf=1, \tag{7}$$

ou

$$1-fg=(f+g)h;$$

donc

$$\lambda=\frac{\rho}{(1+f)(1+g)(1+h)}; \tag{8}$$

puis, par les relations (6) :

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= \rho \frac{1+f}{(1+g)(1+h)}, \\
y &= \rho \frac{1+g}{(1+h)(1+f)}, \\
z &= \rho \frac{1+h}{(1+f)(1+g)},
\end{aligned}
\right. \tag{9}
$$

$$
\sqrt{yz} = \frac{\rho}{1+f}, \quad \sqrt{zx} = \frac{\rho}{1+g}, \quad \sqrt{xy} = \frac{\rho}{1+h}. \tag{10}
$$

**5.** Pour construire ces expressions, il suffit d'observer que

$$
\frac{1}{1+f} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha + \sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\left(\cos\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha\right)}{\cos\alpha}
$$

$$
= \frac{1}{2}\,\frac{1+\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1 - \operatorname{tg}\alpha\right).
$$

En effet, cette transformation donne

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\rho}{1+f} &= \sqrt{yz} = \mathrm{FS} = \frac{1}{2}(\mathrm{AO} + \mathrm{OC'} - \mathrm{AC'}), \\
\frac{\rho}{1+g} &= \sqrt{zx} = \mathrm{KT} = \frac{1}{2}(\mathrm{BO} + \mathrm{OA'} - \mathrm{BA'}), \\
\frac{\rho}{1+h} &= \sqrt{xy} = \mathrm{DU} = \frac{1}{2}(\mathrm{CO} + \mathrm{OB'} - \mathrm{CB'}).
\end{aligned}
\right\} \tag{11}
$$

On trouve, de la même manière :

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\rho}{1-f} &= \frac{1}{2}(\mathrm{AO} + \mathrm{OC'} + \mathrm{AC'}), \\
\frac{\rho}{1-g} &= \frac{1}{2}(\mathrm{BO} + \mathrm{OA'} + \mathrm{BA'}), \\
\frac{\rho}{1-h} &= \frac{1}{2}(\mathrm{CO} + \mathrm{OB'} + \mathrm{CB'}).
\end{aligned}
\right\} \tag{12}
$$

**6.** *Remarque.* — Si l'on se rappelle les propriétés des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle donné, on arrive à cette interprétation géométrique des formules (11), (12) :

*A l'angle* AOC′, *inscrivez les deux cercles tangents à* C′A : *les distances du sommet* O, *aux points où ces cercles touchent le côté* OC′, *représentent* $\frac{\rho}{1+f}$ *et* $\frac{\rho}{1-f}$. *La même construction, appliquée aux triangles* BOA′, COB′, *détermine* $\frac{\rho}{1+g}$, $\frac{\rho}{1-g}$, $\frac{\rho}{1+h}$ *et* $\frac{\rho}{1-h}$.

**7.** *Autre remarque.* — Chacune des équations

$$\sqrt{x}\sin\alpha + \sqrt{y}\cos\alpha = \sqrt{z}\sin\gamma + \sqrt{y}\cos\gamma, \tag{3}$$
$$\sqrt{y}\sin\beta + \sqrt{z}\cos\beta = \sqrt{x}\sin\alpha + \sqrt{z}\cos\alpha, \tag{4}$$
$$\sqrt{z}\sin\gamma + \sqrt{x}\cos\gamma = \sqrt{y}\sin\beta + \sqrt{x}\cos\beta \tag{5}$$

exprime une propriété assez curieuse, dont il serait intéressant de trouver une démonstration directe. Considérons, par exemple, l'équation (4). En l'écrivant ainsi

$$\sqrt{xz}\sin\alpha + z\cos\alpha = \sqrt{yz}\sin\beta + z\cos\beta,$$

et en observant que $\sqrt{xz} = \text{KT}$, $z = \text{KZ}$, etc., on en conclut :

*projection de* TZ, *sur* AO = *projection de* SZ, *sur* BO.

De même,

*projection de* UX, *sur* BO = *projection de* TX, *sur* CO,
*projection de* SY, *sur* CO = *projection de* UY, *sur* AO.

**8.** La valeur commune des binômes

$$\sqrt{xz}\sin\alpha + z\cos\alpha, \quad \sqrt{yz}\sin\beta + z\cos\beta$$

est

$$\text{P} = \frac{\rho}{1+g}\,\frac{2f}{1+f^2} + \rho\,\frac{1+h}{1+f)(1+g)}\,\frac{1-f^2}{1+f^2}$$
$$= \frac{\rho}{(1+g)(1+f^2)}\left[2f + (1+h)(1-f)\right]$$

La quantité entre parenthèses égale

$$1 + f + h(1-f) = 1 + f + \frac{(1-fg)(1-f)}{f+g} = \frac{(1+f^2)(1+g)}{f+g};$$

donc

$$P = \frac{\rho}{f+g}, \tag{13}$$

formule très simple.

**9.** On a

$$AU = AD + \sqrt{xy} = x \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{xy};$$

et, par les formules (9), (10) :

$$AU = \rho \frac{1+f+g-fg}{(1+g)(1+h)(1-f)}.$$

Mais, à cause de la relation (7),

$$1+h = \frac{1+f+g-fg}{f+g};$$

donc

$$AU = \rho \frac{f+g}{(1+g)(1-f)}; \tag{14}$$

ou, ce qui est équivalent,

$$AU = \rho \left[\frac{1}{1-f} - \frac{1}{1+g}\right]. \tag{14}$$

**10.** D'après les formules (11), (12), (14) :

$$AU = \frac{1}{2}(AO - BO + AC' + BA'),$$

ou

$$AU = \frac{1}{2}(AO + AB - BO). \tag{15}$$

Cette valeur a la même forme que l'expression de DU (5); donc la remarque faite ci-dessus (6) est applicable, et, en conséquence :

*Le point* U *est celui où le côté* AB *touche la circonférence inscrite au triangle* AOB (*).

(*) Propriété connue. En outre, la droite PU, tangente commune aux cercles X, Y, touche aussi les cercles inscrits aux triangles BOC, COA (Théorème de Steiner).

De même, les circonférences inscrites aux triangles BOC, COA déterminent les points S, T.

Ces points U, S, T étant construits, il en résulte les points D, G, F, ... où les circonférences cherchées touchent les côtés du triangle donné.

**11.** *Remarques.* — I. On a

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AU} - \mathrm{DU} = \frac{1}{2}(\mathrm{AO} + \mathrm{AB} - \mathrm{BO} - \mathrm{CO} - \mathrm{OB}' + \mathrm{CA}');$$

ou, si l'on désigne par $p$ le demi-périmètre du triangle ABC :

$$\mathrm{AD} = \frac{1}{2}(\mathrm{AO} - \mathrm{BO} - \mathrm{CO} + p - \rho).$$

Pour que le second membre devienne une fonction symétrique, il suffit de le retrancher de AO ; on trouve ainsi

$$\mathrm{AO} - \mathrm{AD} = \mathrm{BO} - \mathrm{BF} = \mathrm{CO} - \mathrm{CK} = \frac{1}{2}(\mathrm{AO} + \mathrm{BO} + \mathrm{CO} - p + \rho). \quad (16)$$

Ce résultat simple et la construction qui en résulte sont dus à M. Simons (*).

II. D'après les relations (11),

$$\frac{1}{2}(\mathrm{AO} + \mathrm{BO} + \mathrm{CO} + \rho - p) = \rho\left[\frac{1}{1+f} + \frac{1}{1+g} + \frac{1}{1+h} - 1\right]. \quad (17)$$

III. Si l'on désigne par $a$, $b$, $c$ les rayons des cercles inscrits aux triangles BOC, COA, AOB, on trouve :

$$a = \rho\frac{g+h}{(1+g)(1+h)}, \quad b = \rho\frac{h+f}{(1+h)(1+f)}, \quad c = \rho\frac{f+g}{(1+f)(1+g)}. \quad (18)$$

IV. Enfin, $\rho_1$ étant le rayon du cercle inscrit au triangle XYZ :

$$\rho_1 = \frac{\rho}{f+g+h+1}. \quad (19)$$

(*) *Bulletin de l'Académie*, juillet 1874.

## LXXXIII. — Nouvelle formule d'intérêt composé (*).

I. La relation

$$A = a(1 + r)^n,$$

conséquence *nécessaire* du principe de l'*intérêt proportionnel au temps,* conduit à des résultats presque absurdes (**).

D'un autre côté, il est admis que, *si l'on paye l'intérêt simple, on doit toujours le capital.* De cet axiome résultent les rentes perpétuelles (***), l'accumulation des capitaux dans quelques mains, etc.

II. Il s'agit de remplacer la formule ci-dessus par une autre qui ne présente pas les mêmes conséquences antisociales, et qui, cependant, s'accorde sensiblement avec la première, tant que $n$ ne dépasse pas la durée des contrats ordinaires : 40 ans, 50 ans, ou au plus 100 ans. Cette nouvelle formule doit encore satisfaire aux deux conditions suivantes :

1° Que, pour de petites valeurs de $n$, l'intérêt soit à peu près proportionnel à $n$;

2° Que, $n$ augmentant indéfiniment, A *tende vers une limite* assez restreinte : on peut la supposer, par exemple, inférieure à 10 $a$.

(*) Un résumé de cette Note a été communiqué au Congrès de Bordeaux, le 6 septembre 1871.

(**) *Un franc,* placé à 5 pour 100 au commencement de l'an 800, aurait valu, à la fin de 1869, 47 049 000 000 000 000 000 francs.

(***) La France vient de contracter un emprunt de trois milliards, au taux de 85. Notre malheureuse patrie doit donc distribuer, à ses créanciers bénévoles, environ 176 millions par an. Dans cent ans, après avoir payé presque *six fois* la valeur de la dette primitive, *elle ne sera pas plus avancée que le premier jour!*

**III.** Après quelques tâtonnements, j'ai trouvé, comme solution de ce *problème indéterminé*,

$$y = p\left[e - \left(1 + \frac{n}{100}\right)^{\frac{100}{n}}\right], \tag{1}$$

d'où résulte

$$A = a + pa\left[e - \left(1 + \frac{n}{100}\right)^{\frac{100}{n}}\right], \tag{2}$$

c'est-à-dire

$$A = a(1 + y). \tag{3}$$

$y$ représente l'*intérêt de 1 franc, pour $n$ années;*
$e$ est la *base des logarithmes népériens;*
$p$ est un *nombre entier, constant,* déterminé par la condition

$$p\left[e - \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}\right] = \textit{taux de l'intérêt de 1 franc } (^*).$$

**IV.** Soit

$$z = \left(1 + \frac{n}{100}\right)^{\frac{100}{n}};$$

alors

$$\log z = \frac{100}{n} \log \frac{100 + n}{100}, \tag{4}$$

$$y = p(e - z). \tag{5}$$

Au moyen des formules (4) et (5), on peut facilement con-

(*) Plus exactement $p$ est le *quotient entier* du second membre par

$$e - \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 0{,}013\,468.$$

Si, par exemple, le taux est 5 pour 100, comme $\frac{0{,}05}{0{,}013\,468} = 3{,}7\ldots$, on fait $p = 4$.

struire une Table numérique, sorte de ***Barême des intérêts.*** Voici un spécimen de cette Table, calculé pour $p = 4$ :

| $n$ | $\log \frac{100+n}{100}$ | $\log z$ | $z$ | $e - z$ | $y$ | INTÉRÊTS successifs de 100 fr. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | fr. |
| 1 | 0,0043214 | 0,432137 | 2,704814 | 0,013468 | 0,05387 | 5,887 |
| 2 | 0,0086002 | 0,430009 | 2,691587 | 0,026695 | 0,10678 | 5,291 |
| 3 | 0,0128372 | 0,427907 | 2,678599 | 0,039683 | 0,15873 | 5,195 |
| 4 | 0,1703334 | 0,425833 | 2,665836 | 0,052446 | 0,20978 | 5,105 |
| 5 | 0,0211893 | 0,423786 | 2,653297 | 0,064985 | 0,25994 | 5,016 |
| 6 | 0,0253059 | 0,421764 | 2,640974 | 0,077308 | 0,30923 | 4,929 |
| 7 | 0,0293838 | 0,419768 | 2,628864 | 0,089418 | 0,35767 | 4,844 |
| 8 | 0,0334237 | 0,417797 | 2,616959 | 0,101323 | 0,40529 | 4,762 |
| 9 | 0,0374265 | 0,415850 | 2,605251 | 0,113031 | 0,45212 | 4,683 |
| 10 | 0,0413927 | 0,413927 | 2,593742 | 0,124540 | 0,49816 | 4,604 |
| 20 | 0,0791812 | 0,395906 | 2,488320 | 0,229962 | 0,91985 | 3,925 |
| 30 | 0,1139434 | 0,379811 | 2,397790 | 0,320492 | 1,28197 | 3,211 |
| 40 | 0,1461280 | 0,365320 | 2,319100 | 0,399182 | 1,59673 | |
| 50 | 0,1760913 | 0,352183 | 2,250000 | 0,468282 | 1,87313 | |
| 60 | 0,2041200 | 0,340200 | 2,188770 | 0,529512 | 2,11805 | |
| 70 | 0,2304489 | 0,329213 | 2,134090 | 0,584192 | 2,13677 | |
| 80 | 0,2552725 | 0,3190906 | 2,084926 | 0,633356 | 2,53342 | |
| 90 | 0,2787536 | 0,309726 | 2,040451 | 0,677831 | 2,71132 | |
| 100 | 0,3010300 | 0,301030 | 2,000000 | 0,718282 | 2,87313 | |
| 500 | 0,7781513 | 0,155630 | 1,430969 | 1,287313 | 5,14915 | |
| 1000 | 1,0413927 | 0,104139 | 1,270981 | 1,547301 | 6,18920 | |
| $\infty$ | | | | | $p(e-1)=6,873$ | |

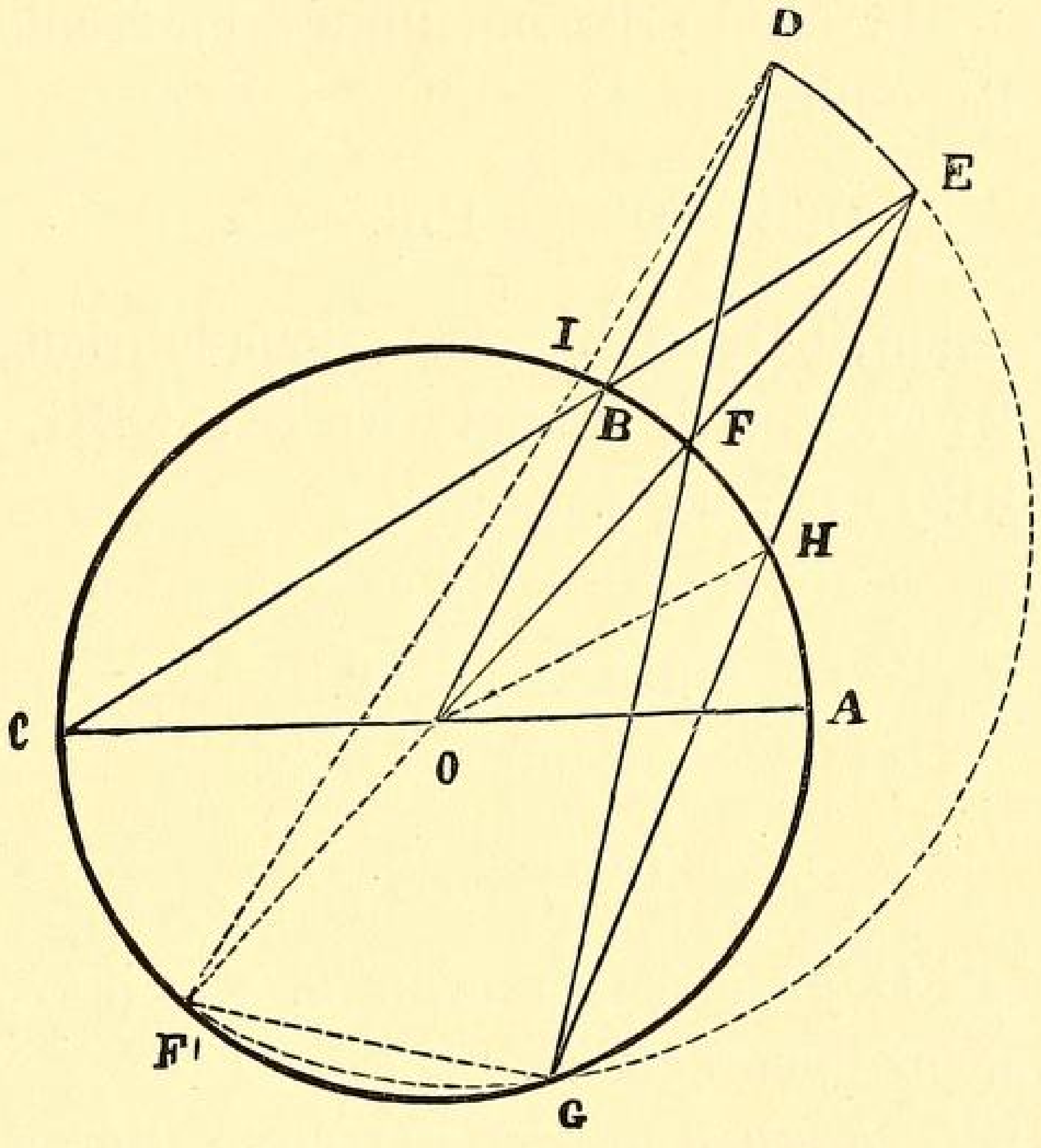
## LXXXIV. — Une trisection de l'angle.

(*Septembre* 1882.)

(A PROPOS D'UNE NOTE DE M. B.)

I. Voici le commencement de la Note.

« *Diviser un angle* AOB *ou arc quelconque* AB *en trois par-*
» *ties progressives et proportionnelles aux nombres* 3, 4, 5.




» *Construction.* — Achevez le cercle, tirez le diamètre AOC,
» ainsi que CBE et OBD, de manière que BD et BE soient égaux
» au rayon en décrivant de B l'arc DE. *Joignez* EO coupant le
» cercle en F; tirez et prolongez DF en G et joignez ce point G
» du cercle avec le point E *coupant* alors le cercle en H, enfin
» *joignez* OH. La construction se trouve faite : BF, FH, HA sont
» successivement proportionnels aux nombres 3, 4, 5. »

La somme de ces nombres est 12, et 4 en est le tiers. Le problème que M. B. croit avoir résolu est donc celui de la *trisection de l'angle.*

Tous les élèves qui ont vu quelque peu d'Algèbre et de Géométrie analytique connaissent cette proposition, surabondamment démontrée : « *au moyen de la règle et du compas, on ne peut diviser, en trois parties égales, un angle quelconque* ». Néanmoins, de même qu'il y a des *quadrateurs,* il y a des *trisecteurs* qui, ordinairement, ignorent les premières notions de la Géométrie. L'auteur de la Note n'appartient pas à cette classe : circonstance aggravante, il est, paraît-il, ancien *Professeur de Mathématiques !*

Quoi qu'il en soit, la construction indiquée donne lieu à une intéressante discussion.

II. Le rayon OA étant pris pour unité, représentons, par $4\alpha$, l'arc AB. De là résulte

$$OCB = OBC = DBE = 2\alpha.$$

Par construction, $BD = BE = OB$; donc le triangle OED est rectangle en E; et, dans le triangle isoscèle OBE, chacun des angles BOE, BEO égale $\alpha$ (*).

Dès lors,

$$BF = \alpha = \frac{1}{4} AB.$$

Soit

$$FOH = \beta \text{ (**)}.$$

Prolongeons EO jusqu'à sa rencontre, en F′, avec la circonférence; et traçons la corde F′G.

L'angle F′GF, inscrit à un demi-cercle, est droit. Et comme OED l'est également, la circonférence, décrite sur DF′ comme diamètre, contient les points E, G.

Par conséquent,

$$DGE = DF'E.$$

Mais DGE, ou FGH, est la moitié de $\beta$. Donc aussi

$$DF'E = \frac{1}{2}\beta.$$

(*) Il faudrait dire : *a pour mesure* $\alpha$; mais il est permis d'abréger.

(**) Suivant M. B., $\beta = \frac{4}{3}\alpha$.

Dans le triangle rectangle DEF',

$$\cos DF'E = \cos\frac{1}{2}\beta = \frac{EF'}{DF'}.$$

Le triangle isoscèle OBE donne $OE = 2\cos\alpha$; donc

$$EF = 2\cos\alpha - 1, \quad EF' = 2\cos\alpha + 1.$$

De plus, $DE = 2\sin\alpha$. Par suite,

$$DF' = \sqrt{(2\cos\alpha + 1)^2 + 4(1 - \cos^2\alpha)} = \sqrt{5 + 4\cos\alpha};$$

et, finalement,

$$\cos\frac{1}{2}\beta = \frac{2\cos\alpha + 1}{\sqrt{5 + 4\cos\alpha}}. \qquad (1)$$

Si cette valeur satisfaisait à la condition $\beta = \frac{4}{3}\alpha$, ou $\frac{1}{2}\beta = \frac{2}{3}\alpha$, on aurait, *identiquement*,

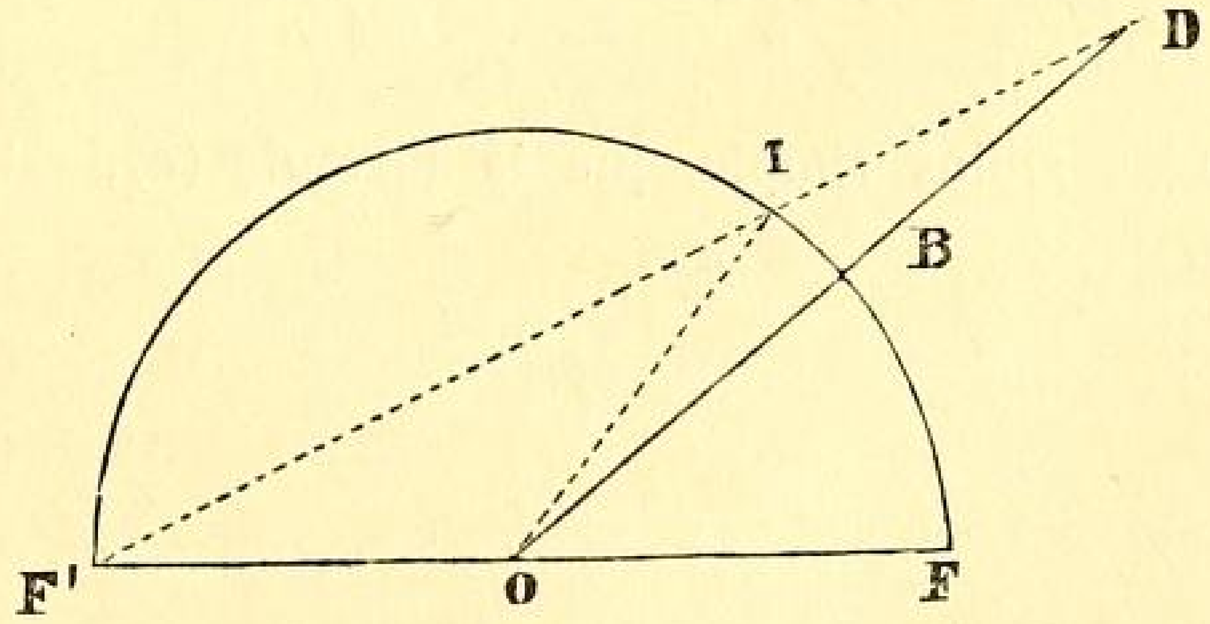
$$\cos\frac{3}{2}\beta = \cos 2\alpha;$$

ou, en faisant $\cos\alpha = c$ :

$$4\left(\frac{2c+1}{\sqrt{5+4c}}\right)^3 - 3\left(\frac{2c+1}{\sqrt{5+4c}}\right) = 2c^2 - 1. \qquad (2)$$

Or cette équation, vérifiée par $c = 1$, est loin d'être identique.

III. Soit I le point où DF' coupe la circonférence. L'égalité des angles F', G entraîne celle des arcs IF, FH. On a vu que $BF = \alpha$.




Si donc FH, ou $\beta$, était égal à $\frac{4}{3}\alpha$, on aurait $IB = \frac{1}{3}BF$. Ainsi, la construction proposée peut être réduite à ce qui suit.

*Soit* FB *l'arc donné. On trace la circonférence* FBF'; *on prend* OBD=FF'; *on trace la droite* DIF'. I *étant le point où elle coupe la circonférence, on doit avoir* BI $=\frac{1}{3}$ FB.

Or, c'est ce qui n'a pas lieu. Soient, en effet, $y$ et $x$ les deux arcs. On a :

$$\overline{\mathrm{DF'}}^2 = 1 + 4 + 4\cos x = 5 + 4\cos x,$$

$$\overline{\mathrm{DI}}^2 = \frac{9}{5 + 4\cos x} = 5 - 4\cos y;$$

puis

$$\cos y = \frac{4 + 5\cos x}{5 + 4\cos x}. \tag{2}$$

Le second membre n'est pas égal à $\cos\frac{1}{3}x$; mais, *si l'arc* x *est suffisamment petit,* on peut adopter la *formule approximative :*

$$\cos\frac{1}{3}x = \frac{4 + 5\cos x}{5 + 4\cos x} \text{ (*)}. \tag{3}$$

(*) Si l'on suppose

$$\cos\frac{1}{3}x = \frac{1 + a\cos x}{b + c\cos x},$$

on trouve, en remplaçant les cosinus par leurs développements, et en négligeant les puissances supérieures à la sixième :

$$a = \frac{7}{20}, \quad b = \frac{23}{20}, \quad c = \frac{1}{5}.$$

Par conséquent,

$$\cos\frac{1}{3}x = \frac{20 + 7\cos x}{23 + 4\cos x}.$$

Cette formule, moins simple que la formule (3), est beaucoup plus *approximative.*

## LXXXV. — Sur les équations linéaires.

(*Novembre* 1868.)

I. Soient, pour fixer les idées :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + P\frac{d^2y}{dx^2} + Q\frac{dy}{dx} + Ry = V, \tag{1}$$

$$\frac{d^3Y}{dx^3} + P\frac{d^2Y}{dx^2} + Q\frac{dY}{dx} + RY = 0; \tag{2}$$

$y$ et Y étant les intégrales générales, je suppose

$$y = Y + z. \tag{3}$$

La substitution donne

$$\frac{d^3z}{dx^3} + P\frac{d^2z}{dx^2} + Q\frac{dz}{dx} + Rz = V. \tag{4}$$

On voit que $z$ est une *intégrale particulière de l'équation* (1). *Cette intégrale ne doit contenir aucune constante,* sans quoi $y$ en contiendrait trop. De plus, d'après la formule (3), z *est ce que devient* y *quand on suppose* Y = 0 ; ou encore, z *est ce que devient* y *quand les constantes de* Y *sont nulles.* Enfin, *la fonction* z *est unique.* En effet, si cette quantité pouvait avoir deux valeurs, $z_1$, $z_2$, l'équation (1) aurait *deux intégrales générales.*

II. Par conséquent : *l'intégrale complète, de l'équation avec second membre, se compose de l'intégrale complète de l'équation sans second membre, augmentée de l'intégrale particulière dont il vient d'être question* (*).

(*) Dans son *Traité de Calcul infinitésimal* (t. II, p. 423), M. Hoüel énonce la proposition suivante :

« *Si* z *est une intégrale* PARTICULIÈRE QUELCONQUE *de l'équation complète,*
» *et si* y *est l'intégrale générale de l'équation sans second membre,*

$$y = Y + z$$

» *sera l'intégrale générale...* »

*Addition.* — (*Avril* 1884.)

III. On sait que $y_1$, $y_2$, $y_3$, étant trois intégrales particulières de l'équation (2), l'intégrale générale de l'équation (1) peut être représentée par

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3; \tag{5}$$

les *fonctions inconnues* $C_1$, $C_2$, $C_3$ satisfaisant aux relations

$$\left.\begin{aligned} y_1\frac{dC_1}{dx} + y_2\frac{dC_2}{dx} + y_3\frac{dC_3}{dx} &= 0,\\ \frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx}\frac{dC_3}{dx} &= 0,\\ \frac{d^2y_1}{dx^2}\frac{dC_1}{dx} + \frac{d^2y_2}{dx^2}\frac{dC_2}{dx} + \frac{d^2y_3}{dx^2}\frac{dC_3}{dx} &= V. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Il en résulte :

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{N_1}{\Delta}V, \quad \frac{dC_2}{dx} = \frac{N_2}{\Delta}V, \quad \frac{dC_3}{dx} = \frac{N_3}{\Delta}V; \tag{7}$$

en supposant :

$$N_1 = y_2\frac{dy_3}{dx} - y_3\frac{dy_2}{dx}, \quad N_2 = y_3\frac{dy_1}{dx} - y_1\frac{dy_3}{dx}, \quad N_3 = y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx}; \tag{8}$$

$$\Delta = N_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + N_2\frac{d^2y_2}{dx^2} + N_3\frac{d^2y_3}{dx^2}. \tag{9}$$

IV. On conclut, des formules (7) :

$$C_1 = c_1 + \int\frac{N_1}{\Delta}V\,dx, \quad C_2 = c_2 + \int\frac{N_2}{\Delta}V\,dx, \quad C_3 = c_3 + \int\frac{N_3}{\Delta}V\,dx; \tag{10}$$

puis, en supposant nulles les *constantes* $c_1$, $c_2$, $c_3$, et en substituant dans l'égalité (5) :

$$z = y_1\int\frac{N_1}{\Delta}V\,dx + y_2\int\frac{N^2}{\Delta}V\,dx + y_3\int\frac{N_3}{\Delta}V\,dx. \tag{11}$$

V. Il est visible que, pour une équation linéaire d'ordre $n$, on aurait des résultats analogues à ceux-là. En particulier,

$$z = \sum_{1}^{n} y_i \int \frac{N_i}{\Delta} V dx. \tag{A}$$

Telle est l'expression de l'*intégrale sans constante* (*).

VI. Soit l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_0 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_n y = V, \tag{12}$$

les coefficients $A_0$, ... $A_n$ étant des constantes. Dans ce cas, les intégrales particulières de l'équation *sans second membre* sont données par les racines de l'équation *caractéristique :*

$$f(t) = t^n + A_0 t^{n-1} + \cdots + A_n = 0. \tag{13}$$

Si, pour plus de simplicité, ces racines sont supposées *inégales*, la formule (A) devient, comme on sait,

$$z = \sum_{1}^{n} \frac{e^{t_i x}}{f'(t_i)} \int e^{-t_i x} V dx. \tag{14}$$

VII. Supposons, en outre, que V soit un polynôme entier, du degré $p$. Il en est de même pour $z$, ainsi qu'on le reconnaît aisément. On a donc ce théorème :

*Soit* f(t) *le produit de* n *facteurs inégaux :* t — a, t — b, ..., t — l. *Soit* V *un polynôme entier. La quantité*

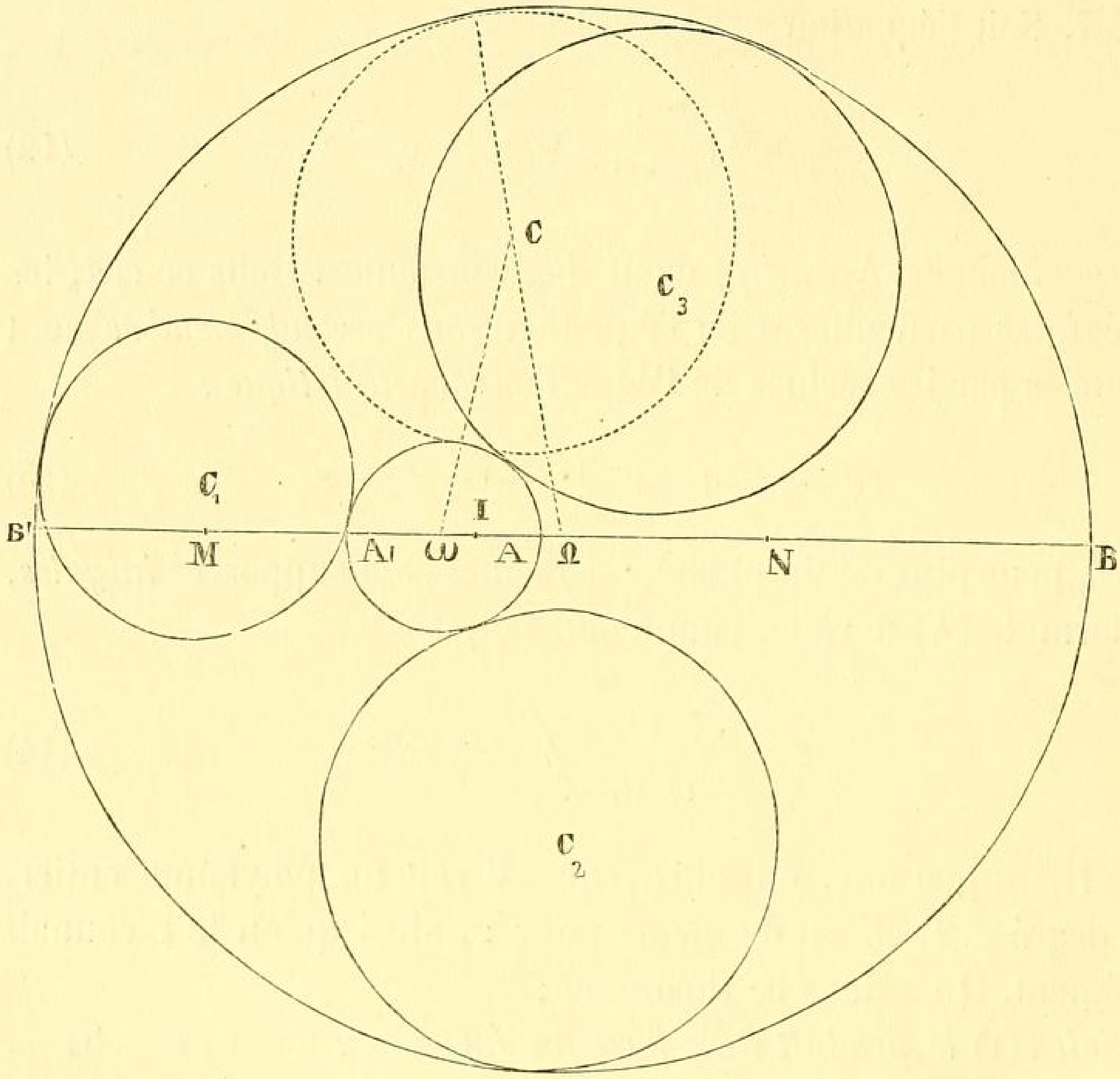
$$z = \sum \frac{e^{ax}}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} \int e^{-ax} V dx$$

*est un polynôme entier, de même degré que* V.

(*) Il serait bon de trouver, pour cette fonction si remarquable, une autre dénomination.

## LXXXVI. — Sur la cyclide de Dupin (*).

I. *Génération de la cyclide.* — Soient $c_1$, $c_2$, $c_3$ trois circonférences, *sections principales* de trois sphères données, $s_1$, $s_2$, $s_3$. Soient $\omega$, $\Omega$ deux circonférences *conjuguées*, tangentes à $c_1$, $c_2$, $c_3$.




Soit enfin $c$ une circonférence quelconque, tangente à $\omega$, $\Omega$ : $c$ est la section principale d'une sphère mobile $s$, dont trois positions particulières sont $s_1$, $s_2$, $s_3$.

*La cyclide est l'enveloppe de la sphère* s (**).

(*) Cette Note complète l'article sur le même sujet, qui a paru dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. VI, p. 439), et auquel nous renverrons fréquemment

(**) *Loc. cit.*

De plus, le lieu du centre $c$ est l'ellipse E qui a pour foyers $\omega, \Omega$, et dont deux sommets sont les milieux M, N des segments A'B', AB du diamètre $B'\omega\Omega B$ (*).

II. *Équation de la cyclide.* — Prenons ce diamètre pour axe des abscisses, et plaçons l'origine au centre I de E, milieu de $\omega\Omega$.

$\lambda$ représentant le rayon du cercle $c$ et de la sphère $s$, l'équation de cette surface est

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = \lambda^2. \tag{1}$$

Soient encore :

$$MN = 2a, \quad \omega\Omega = 2c, \quad \omega A = \rho, \quad \Omega B = R.$$

Nous aurons, par les propriétés de l'ellipse :

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{a^2 - c^2} = 1, \tag{2}$$

$$c\omega = \rho + \lambda = a + \frac{c}{a}\alpha,$$

$$c\Omega = R - \lambda = a - \frac{c}{a}\alpha;$$

puis

$$\rho + R = 2a, \quad 2\lambda + \rho - R = 2\frac{c}{a}\alpha. \tag{3}$$

Si nous posons

$$R - \rho = 2b, \quad \lambda - b = \mu, \tag{4}$$

les paramètres $\mu$ et $\lambda$ seront déterminés, en fonction de $\alpha$, par les formules

$$\mu = \frac{c}{a}\alpha, \quad \lambda = b + \frac{c}{a}\alpha. \tag{5}$$

On satisfait à l'équation (2) en prenant

$$\alpha = a\cos\varphi, \quad \beta = \sqrt{a^2 - c^2}\sin\varphi. \tag{6}$$

(*) *Loc. cit.*

Au moyen de ces valeurs, l'équation (1) devient, après quelques réductions fort simples,

$$x^2+y^2+z^2+a^2-b^2-c^2=2(ax+bc)\cos\varphi+2\sqrt{a^2-c^2}\,y\sin\varphi. \quad (7)$$

La combinaison de celle-ci, avec

$$0=-2(ax+bc)\sin\varphi+2\sqrt{a^2-c^2}\,y\cos\varphi, \quad (8)$$

donne l'équation d'une *nappe de la cyclide :*

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2-c^2)^2=4(ax+bc)^2+4(a^2-c^2)y^2. \quad (A)$$

III. *Remarques.* — I. L'équation (8) représente une infinité de *plans cycliques.* Elle est vérifiée, indépendamment de toute valeur attribuée à $\varphi$, par

$$x=-\frac{bc}{a}, \quad y=0.$$

*Ces plans passent* donc *par une droite fixe, axe radical des sphères données* (*).

II. L'équation (A) peut être écrite ainsi :

$$(x^2+y^2+z^2-a^2-b^2+c^2)^2=4(cx+ab)^2+4(c^2-a^2)z^2. \quad (B)$$

Conséquemment, *la surface admet un second système de plans cycliques ;* etc.

IV. *Nouvelle génération de la cyclide.* — Soit P l'un des deux *plans-limites* qui touchent la cyclide suivant une circonférence. Soit $t$ le point où la sphère $s$ touche ce plan P. Le rayon $ct$ est perpendiculaire à P, et c appartient à l'ellipse E. Par suite :

*La cyclide est l'enveloppe d'une sphère dont le centre* c *parcourt une ellipse* E, *tracée sur un cylindre de révolution, et dont le rayon est la partie de la génératrice du cylindre, comprise entre* c *et la base* (**).

(*) Théorème connu (*Nouvelle Correspondance mathématique,* t. VI, p. 443).

(**) Un calcul, semblable au précédent, conduit à la même conclusion.

V. *Remarque.* — Toute section droite du cylindre peut être prise comme base. Donc : *les surfaces, parallèles à une cyclide donnée, sont des cyclides* (*).

*Addition.* — (*Décembre* 1884.)

VI. *Circonférence de Dupuis.* — La sphère $s$ touche la cyclide suivant une circonférence dont le plan est représenté par l'équation (8). Le coefficient angulaire de la trace de ce plan est

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{tg} \varphi.$$

D'un autre côté, le coefficient angulaire de la normale à l'ellipse E, au point $c$, est

$$\frac{a^2}{a^2 - c^2} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{tg} \varphi.$$

Ainsi, *le plan cyclique* (8) *est parallèle à la normale à l'ellipse* E, *au point* c (**). En particulier :

*Le plan de la circonférence suivant laquelle la sphère* $s_1$ *touche la cyclide* (*circonférence de Dupuis*) *est parallèle à la bissectrice intérieure de l'angle* $\omega c_1 \Omega$ (***).

VII. *Coniques sphériques.* — Dans l'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(ax + bc)^2 + 4(a^2 - c^2)y^2, \quad \text{(A)}$$

supposons

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2 - c^2 = 2p^2, \quad (9)$$

(*) De là résulte un système orthogonal fort simple : *des cyclides parallèles entre elles, et deux séries de cônes de révolution.*

(**) Cette propriété devient évidente à l'inspection du triangle $\omega c \Omega$.

(***) Cette remarque, peut-être nouvelle, complète le Théorème de Dupuis. Comment ce Géomètre, *prédécesseur* de Dupin, a-t-il laissé échapper, pour ainsi dire, la théorie de la cyclide?

équation d'une sphère ayant son centre à l'origine. Il résulte, de ces égalités,

$$(ax + bc)^2 + (a^2 - c^2)y^2 = p^4. \tag{10}$$

Par conséquent :

*Les intersections de la cyclide, avec une infinité de sphères ayant leur centre commun au point* I, *se projettent, sur le plan principal* xy, *suivant des coniques homothétiques : le centre d'homothétie est celui des circonférences* $\omega$, $\Omega$.

De même, si l'on combine l'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^3 - b^2 + c^2)^2 = 4(cx + ab)^2 + 4(c^2 - a^2)z^2 \tag{B}$$

avec

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 + c^2 = 2q^2, \tag{11}$$

on trouve

$$(cx + ab)^2 + (c^2 - a^2)z^2 = q^4\ (^*). \tag{12}$$

D'ailleurs, les sphères (10) et (12) coïncident si les paramètres $p$, $q$ satisfont à la condition

$$p^2 - q^2 = a^2 - c^2. \tag{13}$$

Ainsi, *la cyclide peut être considérée comme le lieu des intersections de sphères concentriques, soit avec des cylindres elliptiques, soit avec des cylindres hyperboliques* (**).

VIII. *Volume de la cyclide.* — Soit d'abord, pour plus de généralité, une surface $\Sigma$, engendrée par une circonférence dont le centre $m$ parcourt une directrice plane $amb$, dont le plan est perpendiculaire à celui de $amb$, et dont *le diamètre,* MM', *varie proportionnellement au rayon vecteur* Om (***).

(*) Si l'équation (10) représente des *ellipses,* l'équation (12) représente des *hyperboles.*

(**) La forme remarquable des équations (A), (B), conduit, aisément, à d'autres générations de la cyclide ; mais elles semblent peu intéressantes. Notons, cependant, celle qui résulte de l'intersection des cylindres (10) et (11), si les paramètres satisfont à la relation (13).

(***) Le lecteur est prié de faire la figure.

En observant que, d'après une propriété connue, les tangentes en **M**, **M'**, $m$ sont parallèles, on peut prendre, comme élément, le volume de la tranche *cylindrique* comprise entre deux plans consécutifs OM$m$M', ON$n$N.

D'après une autre propriété, également connue, ce volume a pour expression

$$\pi \,.\, \overline{\mathrm{M}m}^2 \,.\, mn \sin m. \tag{14}$$

Si donc

$$u = f(\omega)$$

est l'équation de $ab$, que l'on suppose $\mathrm{M}m = uk$, et que l'on ait égard à la formule

$$ds \,.\, \sin m = u d\omega\,;$$

on aura

$$\mathrm{V} = \pi k^2 \int_0^{2\pi} u^3 d\omega, \tag{15}$$

V étant le volume cherché.

Dans le cas de la cyclide, l'équation (14) est

$$u = r\left(e \cos \omega + \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \omega}\right),$$

$r$ représentant le rayon de la directrice, et $e$, une fraction donnée (*).

De là résulte, avec la notation de Legendre :

$$\frac{u^3}{r^3} = e^3 \cos^3 \omega + 3e^2 \cos^2 \omega \,.\, \Delta + 3e \cos \omega(1 - e^2 \sin^2 \omega) + \Delta^3.$$

Donc, en négligeant les intégrales nulles :

$$\mathrm{V} = 2\pi k^2 r^3 \int_0^{\pi} (3e^2 \cos^2 \omega + 1 - e^2 \sin^2 \omega)\Delta d\omega\,,$$

ou

$$\mathrm{V} = 4\pi k^2 r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(1 + 3e^2) \cos^2 \omega + (1 - e^2) \sin^2 \omega\right] \Delta d\omega.$$

(*) Pour abréger, nous admettons cette hypothèse.

On sait que (*)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \omega \, \Delta d\omega = \frac{1}{3e^2}\left[(1 + e^2)E_1 - (1 - e^2)F_1\right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \omega \, \Delta d\omega = \frac{1}{3e^2}\left[-(1 - 2e^2)E_1 + (1 - e^2)F_1\right].$$

Par suite,

$$V = \frac{4}{3}\pi k^2 r^3 \left[(7 + e^2)E_1 - (1 + 3e^2)F_1\right]. \tag{C}$$

## LXXXVII. — Théorèmes empiriques (**).

I. $2^n - 1$ *étant un nombre premier* p, $2^p - 1$ *est un nombre premier* p', $2^{p'} - 1$ *est un nombre premier* p'', etc.

*Exemple.* Si $n=3$, on trouve $p=7$, $p'=127$, $p''=2^{127}-1$ (***).

II. *Le triple de tout carré impair, non divisible par* 3, *est égal à la somme des carrés de trois nombres premiers, autres que* 2 *et* 3 (IV).

III. n *étant un nombre entier,* $6n^2 + 6n - 3$ *est la somme de trois carrés, entiers et positifs.*

(*) Bierens de Haan, T. 53.

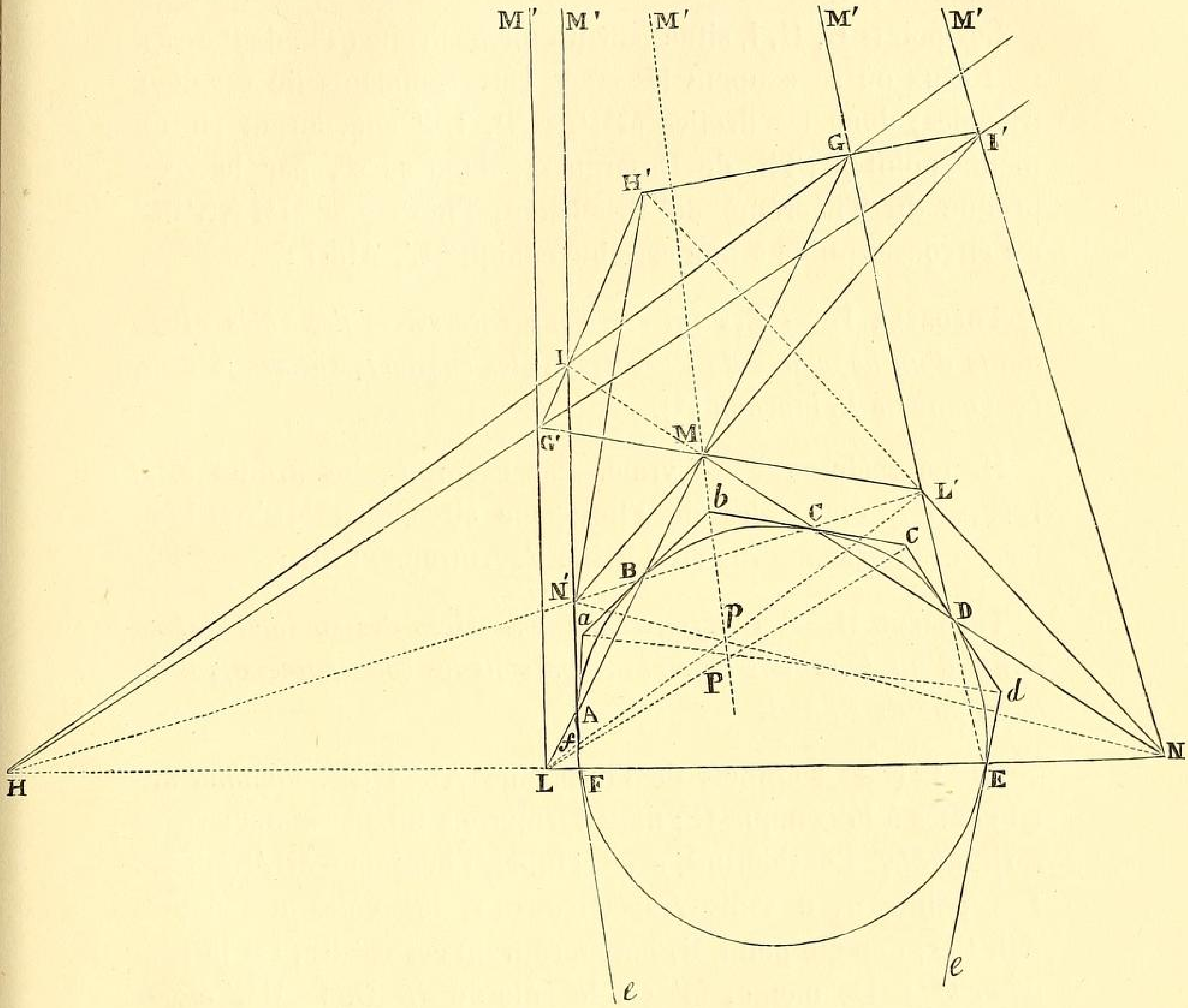
(**) *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. II, III et VI.

(***) Suivant M. Édouard Lucas, $p''$ est *premier* (*Nouvelle Correspondance mathématique,* t. II, p. 96).

(IV) Nous avons fait la vérification jusqu'au nombre $3.87^2 = 107^2 + 97^2 + 43^2$ (*Nouvelle Correspondance mathématique,* t. III, p. 30). Mais, *très probablement,* la proposition est inexacte.

## LXXXVIII. — Théorèmes sur les coniques (*).

I. Soit ABCDEF un hexagone inscrit à une conique C, et dont




(*) Ces théorèmes datent de 1848. A cette époque, ils ont été publiés dans un ouvrage lithographié, intitulé : *Application de l'Algèbre à la Géométrie*, épuisé depuis longtemps. En 1852, afin de *prendre date*, je les ai reproduits, sans démonstration, dans les *Nouvelles Annales* (t. XI, p. 175).

Malgré cette précaution, ils ont été si bien oubliés (même par l'auteur) que M. Folie, mon savant Confrère à l'Académie de Belgique, a *réinventé* les deux premiers (*Bulletin de l'Académie*, août 1877, p. 186). Un peu plus tard, M. Folie a spontanément reconnu mes droits d'*ancienneté* [*Restitution de priorité en faveur de M. Catalan* (Bulletin, octobre 1878)].

Sauf quelques légères corrections et abréviations, le texte qu'on va lire est conforme au texte primitif.

les côtés se rencontrent en H, G, I. Prolongeons les côtés alternatifs AB, CD, EF : nous obtiendrons un triangle MNL. De même, les côtés BC, DE, FA, prolongés, forment un triangle M'N'L'.

Les points G, H, I, situés sur un même droite (Th. de Pascal), sont ceux où se coupent les côtés correspondants de ces deux triangles; donc les droites MM', NN', LL' concourent en un même point $p$ (Th. de Desargues); donc aussi, par la réciproque du Théorème de Brianchon, l'hexagone MM'NN'LL' est circonscriptible à une certaine conique C'. Ainsi :

Théorème I. — *Les intersections successives des côtés alternants d'un hexagone de Pascal sont les sommets successifs d'un hexagone de Brianchon* (*).

II. La réciproque est vraie. Par exemple, les droites MN, L'N', NL, diagonales de l'hexagone circonscrit ML'NM'LN', forment l'hexagone inscrit ABCDEF. Autrement dit :

Théorème II. — *Les jonctions successives des sommets alternants d'un hexagone de Brianchon sont les côtés successifs d'un hexagone de Pascal.*

III. Par les sommets de l'hexagone ABCDEF, menons des tangentes à la conique C : nous formerons un hexagone circonscrit, *abcdef*. Considérons, avec celui-ci, l'hexagone ML'NM'LN'. Les points $a$, $c$ sont, respectivement, les pôles des cordes AB, CD; donc le point M, où concourent ces cordes, est le pôle de $ac$ (**). De même, M' est le pôle de $df$. Donc MM' est la polaire du point de concours, $s$, des droites $ac$, $df$.

Semblablement, NN' est la polaire du point de concours, $t$, des droites $ce$, $bf$; LL' est la polaire du point de concours, $u$, des droites $db$, $ae$. D'ailleurs, MM', NN', LL' concourent en un

(*) Comme dans la *Note sur les hexagones de Pascal et de Brianchon* (Bulletin, décembre 1878), j'adopte, presque textuellement, les énoncés de M. Folie, qui ont le double avantage d'être concis et clairs.

(**) On a omis les droites $ac$, $df$, $be$, pour ne pas trop compliquer la figure.

même point $p$; donc *les points* s, t, u *sont situés sur une même droite, polaire de* p.

Les diagonales *ac*, *bd* sont, d'après ce qui a été démontré plus haut, les côtés d'un hexagone inscriptible; et les points *s*, *t*, *u* sont ceux où concourent les côtés opposés de cet hexagone. En conséquence :

Théorème III. — *Lorsque deux hexagones* H, H′ *sont l'un inscrit, l'autre circonscrit à une même conique* C, *de manière que les sommets du premier soient les points de contact des côtés du second; l'hexagone de Brianchon, déduit de* H (Th. I), *et l'hexagone de Pascal, déduit de* H′ (Th. II), *sont polaires réciproques, relativement à la conique* C.

IV (*). Voici, je pense, la manière la plus simple de formuler les relations entre les théorèmes de Pascal, de Desargues et de Brianchon :

*Dans deux triangles homologiques :* 1° *les côtés sont ceux d'un hexagone de Pascal;* 2° *les sommets sont ceux d'un hexagone de Brianchon* (**).

## LXXXIX. — Trajectoires orthogonales des lignes de courbure constante, sur la surface d'un ellipsoïde donné.

(*Juin* 1869.)

I. $R_1$, $R_2$ étant les rayons principaux, en un point M d'une surface S, j'appelle ligne de *courbure constante* le lieu des points M pour lesquels le produit $\frac{1}{R_1R_2}$ est constant (***). Dans le cas où S est un ellipsoïde, cette ligne C, *lieu des points*

(*) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, décembre 1878.

(**) D'après une bienveillante communication de M. J. Neuberg, mon savant Collègue à l'Université de Liége, les théorèmes précédents seraient dus à Möbius. *Nil novi sub sole !* (1er février 1885).

(***) *Recherches sur les surfaces gauches*, p. 45.

*de contact des plans tangents dont la distance au centre est une constante* (*) $\Delta$, ne diffère pas de la *polhodie* de Poinsot (**).

II. Les équations du problème sont :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{\Delta^2}, \tag{2}$$

$$\frac{x\delta x}{a^2}+\frac{y\delta y}{b^2}+\frac{z\delta z}{c^2}=0, \tag{3}$$

$$\frac{x\delta x}{a^4}+\frac{y\delta y}{b^4}+\frac{z\delta z}{c^4}=0, \tag{4}$$

$$\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}=0, \tag{5}$$

$$\delta x dx+\delta y dy+\delta z dz=0 \text{ (***)}. \tag{6}$$

III. Des équations (3), (4), on déduit

$$\frac{x\delta x}{a^4(b^2-c^2)}=\frac{y\delta y}{b^4(c^2-a^2)}=\frac{z\delta z}{c^4(a^2-b^2)}. \tag{7}$$

Par suite, la condition (6) devient

$$a^4(b^2-c^2)\frac{dx}{x}+b^4(c^2-a^2)\frac{dy}{y}+c^4(a^2-b^2)\frac{dz}{z}=0,$$

ou

$$\left(\frac{a^2}{c^2}-\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{dx}{x}+\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{c^2}\right)\frac{dy}{y}+\left(\frac{c^2}{b^2}-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{dz}{z}=0. \tag{8}$$

L'intégrale de cette équation est, évidemment,

$$\left(\frac{a^2}{c^2}-\frac{a^2}{b^2}\right)\mathcal{L}\frac{x}{h}+\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{c^2}\right)\mathcal{L}\frac{y}{h}+\left(\frac{c^2}{b^2}-\frac{c^2}{a^2}\right)\mathcal{L}\frac{z}{h}=0, \tag{9}$$

(*) *Recherches sur les surfaces gauches*, p. 45.

(**) *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces*, p. 57 (janv. 1885).

(***) La caractéristique $\delta$ se rapporte aux courbes C, et la caractéristique *d*, à leurs trajectoires orthogonales.

ou

$$\left(\frac{x}{h}\right)^{\frac{a^2}{c^2}-\frac{a^2}{b^2}}\left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{c^2}}\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{c^2}{a^2}-\frac{c^2}{b^2}}=1\,; \tag{A}$$

$h$ étant la constante arbitraire (*).

IV. *Remarques.* — I. Les surfaces $\Sigma$, représentées par l'équation (A), sont orthogonales à l'ellipsoïde S, et à tous les ellipsoïdes homothétiques à celui-ci. En effet, la condition

$$\sum\frac{a^4(b^2-c^2)}{x}\cdot\frac{x}{a^2}=0,$$

est remplie.

II. Elles sont orthogonales, également, aux ellipsoïdes $S_1$, que représente l'équation (2), si $\Delta$ est un paramètre variable; car la condition

$$\sum\frac{a^4(b^2-c^2)}{x}\cdot\frac{x}{a^4}=0$$

se réduit à *l'identité :*

$$\sum(b^2-c^2)=0.$$

III. Toutes ces surfaces sont homothétiques; car l'équation (A) n'est pas altérée si l'on y change

$$x,\ y,\ z,\ h$$

en

$$\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z,\ \lambda h.$$

*Addition.* — (*Janvier* 1885.)

V. L'équation (9) a la forme

$$g\,\mathcal{L}x+h\,\mathcal{L}y+k\,\mathcal{L}z=0. \tag{B}$$

(*) On voit que l'équation (5) est inutile. C'est à quoi l'on pouvait s'attendre : chaque trajectoire est l'intersection de S avec une certaine surface.

D'après une intéressante remarque, due à M. Bouquet (*), les surfaces $\Sigma$, qu'elle représente, appartiennent à un *système orthogonal triple.*

En appliquant la méthode que nous avons développée ailleurs (**), nous trouvons l'équation *homogène,* et par conséquent *intégrable :*

$$g\alpha d\beta^2 - \left[(h + k)\beta - (g + k)\alpha\right] d\alpha d\beta - h\beta d\alpha^2 = 0, \qquad \text{(C)}$$

déjà rencontrée par M. Serret (***).

VI. *Remarque.* — Les surfaces $\Sigma$, orthogonales aux surfaces $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ définies par l'équation (C), sont orthogonales, encore, aux ellipsoïdes S, $S_1$ (IV). Mais chacune de ces séries d'ellipsoïdes, comme l'a démontré M. Bouquet (IV), ne peut faire partie d'un *système orthogonal triple.* Ainsi, particularité assez curieuse : *les ellipsoïdes* $S_1$, *les ellipsoïdes* $S_2$, *les surfaces* $\Sigma_1$ *et les surfaces* $\Sigma_2$ *rencontrent, orthogonalement, toutes les surfaces* $\Sigma$.

## XC. — Énoncé d'un théorème de Liouville (V).

Soient :

$$X_1 = x, \quad X_2 = (x - 1)X_1 + \frac{n}{4}, \quad X_3 = (x - 2)X_2 + \frac{n}{4}X_1, \ldots,$$

$$X_{n+1} = (x - n + 1)X_n + \frac{n}{4}X_{n-1} :$$

*l'équation* $X_{n+1} = 0$ *a toutes ses racines égales à* $\frac{n}{2}$.

(*) *Journal de Liouville,* 1846, p. 449.

(**) *Recherches des lignes de courbure de la surface...,* p. 8; *Note sur les surfaces orthogonales* (Comptes rendus, juillet 1874); etc.

(***) *Journal de Liouville,* 1847, p. 246. Dans cette équation :

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{h} - \frac{z^2}{k}\right), \quad \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{g} - \frac{z^2}{k}\right).$$

(IV) *Loc. cit.*

(V) Retrouvé dans des notes de 1858. J'ignore si mon illustre maître l'a publié.

## XCI. — Sur une formule de Gauss.

(*Juin* 1867.)

I. Cette formule, l'une des plus importantes de la théorie des surfaces, est, comme on sait (*) :

$$\left.\begin{aligned}
4(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)^2 k = {} & \mathrm{E}\left(\frac{d\mathrm{G}}{dp}\right)^2 + \mathrm{G}\frac{d\mathrm{E}}{dp}\frac{d\mathrm{G}}{dp} - 2\,\mathrm{EG}\frac{d^2\mathrm{G}}{dp^2} \\
& + \mathrm{G}\left(\frac{d\mathrm{E}}{dq}\right)^2 + \mathrm{E}\frac{d\mathrm{G}}{dq}\frac{d\mathrm{E}}{dq} - 2\,\mathrm{GE}\frac{d^2\mathrm{E}}{dq^2} \\
& + 4\,\mathrm{EG}\frac{d^2\mathrm{F}}{dpdq} - 2\left(\mathrm{E}\frac{d\mathrm{F}}{dp}\frac{d\mathrm{G}}{dq} + \mathrm{G}\frac{d\mathrm{F}}{dq}\frac{d\mathrm{E}}{dp}\right) \\
& + 2\,\mathrm{F}\left(\mathrm{F}\frac{d^2\mathrm{G}}{dp^2} + \mathrm{F}\frac{d^2\mathrm{E}}{dq^2} - \frac{d\mathrm{F}}{dp}\frac{d\mathrm{G}}{dp} - \frac{d\mathrm{F}}{dq}\frac{d\mathrm{E}}{dq}\right) \\
& + \mathrm{F}\left(\frac{d\mathrm{E}}{dp.}\frac{d\mathrm{G}}{dq} + \frac{d\mathrm{E}}{dq}\frac{d\mathrm{G}}{dp}\right) \\
& + 4\,\mathrm{F}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dp}\frac{d\mathrm{F}}{dq} - \mathrm{F}\frac{d^2\mathrm{F}}{dpdq}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dans cette équation, $k$ est la *mesure* de la courbure, c'est-à-dire $\frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}$; $\mathrm{R}_1$, $\mathrm{R}_2$ étant les rayons principaux ; etc.

II. Dans le *Journal de Mathématiques* (t. XII, p. 306), M. Liouville a fait observer que, si les *courbes coordonnées*, représentées par

$$p = const., \quad q = const.,$$

sont *orthogonales*, et que, de plus, $\mathrm{E}=1$, la formule (1) se réduit à

$$k = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{d^2\sqrt{\mathrm{G}}}{dp^2}. \quad (2)$$

(*) Monge, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, édition de Liouville, p. 525. A la deuxième ligne, au lieu de $-\frac{d\mathrm{E}}{dq}\frac{d\mathrm{G}}{dp}$, on doit lire : $+\frac{d\mathrm{E}}{dq}\frac{d\mathrm{G}}{dp}$. Cette faute a été corrigée dans la traduction du Mémoire de Gauss, faite par M. d'Abadie (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 218).

III. Pour généraliser ce résultat, supposons d'abord $F = 0$. Alors

$$4\,E^2G^2k = E\left(\frac{dG}{dp}\right)^2 + G\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\,EG\frac{d^2G}{dp^2}$$
$$+ G\left(\frac{dE}{dq}\right)^2 + E\frac{dG}{dq}\frac{dE}{dq} - 2\,GE\frac{d^2E}{dq^2}.$$

La première ligne égale

$$-2(EG)^{\frac{3}{2}}\frac{d\left(\dfrac{\frac{dG}{dp}}{\sqrt{EG}}\right)}{dp};$$

la seconde :

$$-2(EG)^{\frac{3}{2}}\frac{d\left(\dfrac{\frac{dE}{dq}}{\sqrt{EG}}\right)}{dq}.$$

Ainsi, *lorsque* $F = 0$, la formule de Gauss est remplacée par celle-ci :

$$-2k\sqrt{EG} = \frac{d\left(\dfrac{\frac{dG}{dp}}{\sqrt{EG}}\right)}{dp} + \frac{d\left(\dfrac{\frac{dE}{dq}}{\sqrt{EG}}\right)}{dq} \;(^*). \qquad (3)$$

IV. Quand les courbes coordonnées ne sont pas orthogonales, on peut, comme il suit, simplifier la relation (1).

1° *La somme des deux premières lignes* est, par ce qui précède,

$$-2(EG)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{d\left(\dfrac{\frac{dG}{dp}}{\sqrt{EG}}\right)}{dp} + \frac{d\left(\dfrac{\frac{dE}{dq}}{\sqrt{EG}}\right)}{dq}\right].$$

(*) Au lieu du second membre, M. Bertrand obtient, par une méthode particulière :

$$2\frac{d\left(\dfrac{\frac{d\sqrt{G}}{dp}}{\sqrt{E}}\right)}{dp} + 2\frac{d\left(\dfrac{\frac{d\sqrt{E}}{dq}}{\sqrt{G}}\right)}{dq}$$

(*Calcul différentiel*, p. 763.) Mais les deux expressions sont équivalentes.

2° La troisième ligne égale

$$2\,\mathrm{EG}\left[\mathrm{E}\,\frac{d\left(\frac{\frac{d\mathrm{F}}{dq}}{\mathrm{E}}\right)}{dp}+\mathrm{G}\,\frac{d\left(\frac{\frac{d\mathrm{F}}{dp}}{\mathrm{G}}\right)}{dq}\right].$$

3° La quatrième :

$$2\,\mathrm{F}^3\left[\frac{d\left(\frac{\frac{d\mathrm{E}}{dq}}{\mathrm{F}}\right)}{dq}+\frac{d\left(\frac{\frac{d\mathrm{G}}{dp}}{\mathrm{F}}\right)}{dp}\right]$$

4° La sixième :

$$-\,2\,\mathrm{F}^3\left[\frac{d\left(\frac{\frac{d\mathrm{F}}{dp}}{\mathrm{F}}\right)}{dq}+\frac{d\left(\frac{\frac{d\mathrm{F}}{dq}}{\mathrm{F}}\right)}{dp}\right].$$

On a donc, finalement,

$$\left.\begin{aligned}2(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)^2k = &-(\mathrm{EG})^{\frac{3}{2}}\left[\frac{d\left(\frac{\frac{d\mathrm{G}}{dp}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\right)}{dp}+\frac{d\left(\frac{\frac{d\mathrm{E}}{dq}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\right)}{dq}\right]\\
&+\mathrm{EG}\left[\mathrm{E}\,\frac{d\left(\frac{\frac{d\mathrm{F}}{dq}}{\mathrm{E}}\right)}{dp}+\mathrm{G}\,\frac{d\left(\frac{\frac{d\mathrm{F}}{dp}}{\mathrm{G}}\right)}{dq}\right]\\
&+\mathrm{F}^3\left[\frac{d\left(\frac{\frac{d\mathrm{E}}{dq}-\frac{d\mathrm{F}}{dp}}{\mathrm{F}}\right)}{dq}+\frac{d\left(\frac{\frac{d\mathrm{G}}{dp}-\frac{d\mathrm{F}}{dq}}{\mathrm{F}}\right)}{dp}\right]\\
&+\frac{1}{2}\mathrm{F}\left(\frac{d\mathrm{E}}{dp}\frac{d\mathrm{G}}{dq}+\frac{d\mathrm{E}}{dq}\frac{d\mathrm{G}}{dp}\right).\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

## XCII. — Sur les roulettes et les podaires (*).

Soit une courbe ACB, roulant sur une droite fixe DE, en entraînant un point M, de manière à lui faire décrire une *roulette* MM′M″... Soit ensuite PP′P″... le lieu des projections du point M sur les tangentes DCE, D′C′E′, ... à la courbe ACB, c'est-à-dire la *podaire* du point M (supposé fixe) relativement à cette courbe (supposée fixe).

Comme le fait Legendre (**), rapportons la podaire au point M, pris pour pôle, et à un certain axe $Mx$ : soit $u = f(\omega)$ l'équation de cette ligne. Désignons par $\rho$, $r$, R les rayons de courbure des trois courbes, aux points *correspondants* C, M, P. Désignons encore par $v$ la droite MC. On trouve aisément

$$\rho = u + u'', \quad R = \frac{(u^2 + u'^2)^{\frac{3}{2}}}{uu'' - u'^2}.$$

D'ailleurs,

$$r = \frac{(u^2 + u'^2)^{\frac{3}{2}}}{u^2 + 2u'^2 - uu''}.$$

La comparaison des deux dernières valeurs donne la relation suivante, qui n'a peut-être pas été remarquée :

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{R} = \frac{1}{v}. \qquad \text{(A)}$$

On a donc ce théorème :

*La somme* (***) *des courbures de la roulette et de la podaire, en deux points correspondants, est égale à l'inverse de la distance comprise entre le point décrivant la roulette et le point où la courbe roulante touche la droite fixe.*

(*) *Bulletin de l'Académie de Belgique,* 1869.

(**) *Traité des fonctions elliptiques,* t. II, p. 588.

(***) Il s'agit ici, bien entendu, de *somme algébrique.*

Les applications de la formule (A) sont nombreuses. On en conclut, par exemple, le Théorème de Steiner, retrouvé par MM. Mannheim et Paul Serret, puis généralisé par notre Confrère M. Lamarle (*).

### XCIII. — Quelques intégrales définies (**).

I. Considérons, en premier lieu, l'intégrale

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \, \mathfrak{L}(1 + \cos\varphi)\, d\varphi. \tag{1}$$

Il est visible que

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi . \, \mathfrak{L} \frac{4\cos^2 \frac{1}{2}\varphi}{2} d\varphi,$$

$$= - \mathfrak{L}. 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \, d\varphi + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \, \mathfrak{L}\left(2\cos\frac{1}{2}\varphi\right) d\varphi.$$

La première intégrale a pour valeur $\frac{\pi}{4}$. Conséquemment, si l'on pose

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \, \mathfrak{L}\left(2\cos\frac{1}{2}\varphi\right) d\varphi : \tag{2}$$

$$A = -\frac{\pi}{4}\mathfrak{L}. 2 + 2B. \tag{3}$$

On a (p. 207)

$$\mathfrak{L}\left(2\cos\frac{1}{2}\varphi\right) = \cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi - \frac{1}{4}\cos 4\varphi + \cdots$$

$$\sin^2 2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 4\varphi)\ (^{***}).$$

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 40e Cahier; *Bulletin de l'Académie*, 2e série, t. IV.

(**) Sous ce titre, déjà employé (p. 201), je réunis certains résultats, plus ou moins intéressants, obtenus à diverses époques.

(***) C'est cette décomposition qui donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Donc le produit est

$$\frac{1}{2}\left(\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi - \frac{1}{4}\cos 4\varphi + \cdots\right),$$

$$-\frac{1}{4}\left[2\cos\varphi\cos 4\varphi - \frac{1}{2}.2\cos 2\varphi\cos 4\varphi + \frac{1}{3}.2\cos 3\varphi\cos 4\varphi - \frac{1}{4}.2\cos 4\varphi\cos 4\varphi + \cdots\right];$$

ou bien :

$$\frac{1}{2}\left(\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi - \frac{1}{4}\cos 4\varphi + \cdots\right),$$

$$-\frac{1}{4}\left[(\cos 3\varphi + \cos 5\varphi) - \frac{1}{2}(\cos 2\varphi + \cos 6\varphi)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}(\cos\varphi + \cos 7\varphi) - \frac{1}{4}(1 + \cos 8\varphi) + \cdots\right].$$

Multipliant par $d\varphi$, puis intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, je trouve :

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots\right),$$

$$-\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{7}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{11}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{13}\right) + \cdots\right].$$

La première ligne égale $\frac{1}{2}$G. La seconde peut être écrite ainsi :

$$\frac{\pi}{32} - \frac{1}{8}\left[\frac{4}{1.5} - \frac{4}{3.7} + \frac{4}{5.9} - \frac{4}{7.11} + \frac{4}{9.13} - \cdots\right].$$

Elle a donc pour valeur :

$$\frac{\pi}{32} - \frac{1}{8}\left[1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \cdots\right];$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\pi}{32} - \frac{1}{12}.$$

Par suite :

$$B = \frac{1}{2}G + \frac{\pi}{32} - \frac{1}{12}, \quad A = -\frac{\pi}{4}\,\mathcal{L}.\,2 + G + \frac{\pi}{16} - \frac{1}{6}. \qquad (4)$$

II. Soit la relation

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}\,\mathcal{L}\,\frac{1 + \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}{1 + \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$\sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} - 1 + a\,E(k', \mu) + \frac{1 - a^2}{a}F(k', \mu),$$

dans laquelle

$$a = \sin\mu, \quad b = ak' \ (^*).$$

Si l'on fait

$$k = \sqrt{1 - k'^2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

le premier membre devient

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - a^2(1 - k^2\sin^2\theta)}{a\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}\,\mathcal{L}\,\frac{1 + a\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}{1 - a\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}\,d\theta.$$

Ainsi, avec la notation de Legendre :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - a^2\Delta^2}{a\Delta}\,\mathcal{L}\,\frac{1 + a\Delta}{1 - a\Delta} = \sqrt{(1 - a^2)(1 - a^2k'^2)}$$

$$- 1 + a\,E(k', \mu) + \frac{1 - a^2}{a}F(k', \mu),$$

ou

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta}(1 - \Delta^2\sin^2\mu)\,\mathcal{L}\,\frac{1 + \Delta\sin\mu}{1 - \Delta\sin\mu} \\ &= \pi\left[\sin\mu\cos\mu\sqrt{1 - k'^2\sin^2\mu} - \sin\mu + \sin^2\mu\,E(k', \mu) + \cos^2\mu\,F(k', \mu)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

(*) *Bulletin de l'Académie,* août 1870.

D'après M. W. Roberts (*),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta} \mathcal{L} \frac{1+\Delta \sin \mu}{1-\Delta \sin \mu} = \pi \, F(k', \mu).$$

Donc, par soustraction,

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta \, . \, d\theta \, . \, \mathcal{L} \frac{1+\Delta \sin \mu}{1-\Delta \sin \mu} \\ &= \pi \left[ F(k', \mu) - E(k', \mu) + \frac{1-\cos \mu \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \mu}}{\sin \mu} \right]; \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

puis, par une nouvelle soustraction,

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta \, d\theta}{\Delta} \mathcal{L} \frac{1+\Delta \sin \mu}{1-\Delta \sin \mu} \\ &= \frac{\pi}{k^2} \left[ E(k', \mu) - \frac{1-\cos \mu \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \mu}}{\sin \mu} \right]. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

A cause de la relation évidente

$$\mathcal{L}(1-\Delta^2) = 2\,\mathcal{L}(k) + 2\,\mathcal{L}(\sin \theta),$$

on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta} \mathcal{L}(1-\Delta^2) = 2\,\mathcal{L}(k)\,F_1(k) + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta} \mathcal{L}(\sin \theta).$$

Cette dernière intégrale a pour valeur

$$-\frac{1}{2}\mathcal{L}(k)\,F_1(k) - \frac{\pi}{4} F_1(k') \; (^{**}).$$

Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta} \mathcal{L}(1-\Delta^2) = \mathcal{L}(k)\,F_1(k) - \frac{\pi}{2} F_1(k'). \quad (8)$$

(*) *Journal de Liouville*, t. XI, p. 165.

(**) BIERENS DE HAAN, T. 322.

La formule de W. Roberts donne, lorsque $\mu = \frac{\pi}{2}$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta}\, \mathcal{L}\, \frac{1+\Delta}{1-\Delta} = \pi\, \mathrm{F}_1(k').$$

Par suite :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta}\, \mathcal{L}(1+\Delta) = \frac{1}{2}\, \mathcal{L}(k)\, \mathrm{F}_1(k) + \frac{\pi}{4}\, \mathrm{F}_1(k'), \tag{9}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta}\, \mathcal{L}(1-\Delta) = \frac{1}{2}\, \mathcal{L}(k)\, \mathrm{F}_1(k) - \frac{5\pi}{4}\, \mathrm{F}_1(k'). \tag{10}$$

On a trouvé, ci-dessus,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta}\, \mathcal{L}(\sin\theta) = -\frac{1}{2}\, \mathcal{L}(k)\, \mathrm{F}_1(k) - \frac{\pi}{4}\, \mathrm{F}_1(k').$$

Il en résulte, par la comparaison avec l'égalité (9) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta}\, \mathcal{L}\left[(1+\Delta)\sin\theta\right] = 0. \tag{11}$$

III. Nous avons considéré, précédemment (*), l'intégrale

$$\mathrm{N} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi\, d\varphi\, \mathcal{L}\left(\cos\varphi + \sqrt{1-\sin^2\gamma\, \sin^2\varphi}\right). \tag{12}$$

Soit

$$\mathrm{N}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi\, d\varphi\, \mathcal{L}\left(-\cos\varphi + \sqrt{1-\sin^2\gamma\, \sin^2\varphi}\right); \tag{13}$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{N}+\mathrm{N}_1 = 2\,\mathcal{L}(\cos\gamma)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi\, d\varphi + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi\, d\varphi\, \mathcal{L}(\sin\varphi). \tag{14}$$

(*) Page 274.

La première intégrale auxiliaire égale $\frac{\pi}{4}$ (*). La seconde se décompose en

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \mathcal{L}(\sin\varphi) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi\, d\varphi\, \mathcal{L}(\sin\varphi).$$

Ainsi déjà :

$$\mathrm{N}+\mathrm{N}_1=\frac{\pi}{2}\mathcal{L}(\cos\gamma)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \mathcal{L}(\sin\varphi)-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4\varphi\, d\varphi\, \mathcal{L}(\sin\varphi). \quad (15)$$

On sait que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \mathcal{L}(\sin\varphi) = -\frac{\pi}{2}\mathcal{L}2.$$

D'un autre côté, l'intégration par parties donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi\, d\varphi\, \mathcal{L}(\sin\varphi)=\frac{1}{4}\Big[\sin 4\varphi\, \mathcal{L}(\sin\varphi)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4\varphi \cos\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi};$$

ou, comme le terme intégré s'annule aux deux limites (**) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi\, d\varphi\, \mathcal{L}(\sin\varphi) = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4\varphi \cos\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi};$$

ou encore, par des simplifications évidentes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi\, d\varphi\, \mathcal{L}(\sin\varphi) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cos 2\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{8}.$$

L'égalité (15) devient

$$\mathrm{N}+\mathrm{N}_1 = \frac{\pi}{2}\left[\mathcal{L}\left(\frac{\cos\gamma}{2}\right)+\frac{1}{4}\right]. \quad (16)$$

(*) Page 387.

(**) En général, $x\,\mathcal{L}x = 0$ *pour* $x = 0$.

D'ailleurs (*),

$$N = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}\,\ell\left(\frac{1+\sin\gamma}{2}\right) + \frac{\cos\gamma\,(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)}{2\sin^3\gamma}$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\gamma} \frac{\alpha\, d\alpha}{\sin\alpha};$$

donc

$$N_1 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}\,\ell\,\frac{1-\sin\gamma}{2} - \frac{\cos\gamma\,(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)}{2\sin^3\gamma}$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\gamma} \frac{\alpha\, d\alpha}{\sin\alpha}. \tag{17}$$

Si $\gamma = 0$, ces formules donnent :

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{4}\,\ell\,2 - \frac{1}{6} + G, \\ N_1 &= \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{4}\,\ell\,2 + \frac{1}{6} - G. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

La première valeur ne diffère pas de celle que nous avons obtenue pour l'intégrale A. En effet, lorsque $\gamma = 0$, N se réduit à A.

IV. Soit

$$A_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-\frac{1}{2}} x\, dx, \tag{19}$$

$m$ étant un nombre entier.

Posant, suivant l'usage, $\cos^2 x = \theta$, on trouve

$$A_m = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2m+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2m+3}{4}\right)}; \tag{20}$$

(*) Page 280.

et, par le changement de $m$ en $m-1$ :

$$A_{m-1}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2m-1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2m+1}{4}\right)}.$$

Conséquemment,

$$A_m A_{m-1}=\frac{\pi}{2m-1}; \tag{21}$$

relation simple et remarquable.

Il en résulte, si $m$ est *pair* :

$$A_m = A_0\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}\cdots\frac{2m-3}{2m-1}; \tag{22}$$

et, si $m$ est *impair* :

$$A_m=\frac{\pi}{A_0}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{13}\cdots\frac{2m-3}{2m-1}. \tag{23}$$

D'ailleurs, par la formule (20), combinée avec un théorème d'Euler,

$$A_0=\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{2\sqrt{2\pi}}. \tag{24}$$

Cette dernière expression est réductible à une intégrale elliptique, de première espèce. En effet, la formule (19) donne

$$A_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

Donc, si l'on pose $\cos x=\cos^2\varphi$ :

$$A_0=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}=\sqrt{2}\,F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right). \tag{25}$$

Par suite, $$F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2; \qquad (26)$$

relation connue (*).

V. L'intégrale

$$C_{n+1} = \int_0^\pi \frac{dx}{(\lambda - \cos x)^{n+1}},$$

dans laquelle $\lambda$ surpasse l'unité, peut, généralement, être développée en série convergente; mais, si $n$ est *entier positif,* elle est exprimable sous forme finie.

En effet,

$$C_1 = \int_0^\pi \frac{dx}{\lambda - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \ (^{**});$$

et il est visible que

$$C_{n+1} = (-1)^{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n C_1}{d\lambda^n},$$

ou

$$C_{n+1} = (-1)^{n-\frac{1}{2}} \frac{\pi}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n\left[(1-\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}\right]}{d\lambda^n} \ (^{***}). \qquad (27)$$

Or, d'après l'une de mes *Notes d'Algèbre et d'Analyse* (IV) :

1° $$\frac{d^n\left[(1-\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}\right]}{d\lambda^n} = (1-\lambda^2)^{-\frac{2n+1}{2}} P_n,$$

$P_n$ étant *un polynôme à coefficients entiers, du* n^ième^ *degré, dans lequel les exposants sont de même parité que* n ;

(*) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques,* t. II, p. 586. Dans les *Recherches sur la constante* G (Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg, 1883), j'ai donné le développement, en *produit indéfini,* de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{q-1} x dx.$$

(**) Bierens de Haan, T. 82.

(***) On suppose

$$(\lambda^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = (-1)^{-\frac{1}{2}}(1-\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

(IV) *Mémoires de l'Académie de Belgique,* 1877.

2°
$$P_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\pi}\int_0^\pi (\lambda + \cos\varphi)^n d\varphi.$$

Par suite,

$$C_{n+1} = (-1)^{n-\frac{1}{2}}(1-\lambda^2)^{-\frac{2n+1}{2}}\int_0^\pi (\lambda+\cos\varphi)^n d\varphi,$$

ou

$$C_{n+1} = (\lambda^2-1)^{-\frac{2n+1}{2}}\int_0^\pi (\lambda+\cos\varphi)^n d\varphi \text{ (*)}.$$

Finalement,

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(\lambda-\cos x)^{n+1}} = (\lambda^2-1)^{-\frac{2n+1}{2}}\int_0^\pi (\lambda+\cos\varphi)^n d\varphi \text{ (**)}. \quad (28)$$

VI. Dans la relation connue :

$$\frac{2q+1}{1}B_1 + \frac{(2q+1)2q(2q-1)}{1.2.3}B_3 + \cdots + \frac{(2q+1)2q}{1.2}B_{2q-1} = \frac{1}{2} \text{ (***)}, \quad (29)$$

(*) Parce que, en vertu de l'hypothèse précédente,

$$(1-\lambda^2)^{-\frac{2n+1}{2}} = (-1)^{-\frac{2n+1}{2}}(\lambda^2-1)^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

Ainsi, des identités *équivalentes :*

$$a = -a \times -1, \quad -a = a \times -1,$$

on ne doit pas conclure celles-ci :

$$\sqrt{a} = \sqrt{-a}\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1},$$

lesquelles sont contradictoires, si le symbole $\sqrt{-1}$ a *le même signe* dans l'une et dans l'autre.

(**) Cette relation est démontrée, d'une autre manière, dans mon premier *Mémoire sur les fonctions* $X_n$ (p. 24). Elle subsiste pour toute valeur de $n$.

(***) Elle résulte de ces deux-ci :

$$\frac{2q+1}{1}B_{2q-1} + \frac{(2q+1)2q(2q-1)}{1.2.3}B_{2q-3} + \cdots + \frac{(2q+1)2q}{1.2}B_1 = q - \frac{1}{2},$$

$$\frac{(2q+2)(2q+1)}{1.2}B_{2q-1} + \frac{(2q+2)(2q+1)2q(2q-1)}{1.2.3.4}B_{2q-3} + \cdots$$
$$+ \frac{(2q+2)(2q+1)}{1.2}B_1 = q,$$

dont la première est attribuée à Moivre, et la seconde à Le Besgue.

remplaçons les Nombres de Bernoulli par leurs valeurs, exprimées en intégrales définies (*). Elle devient

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{T}dt}{e^{2\pi t}-1}=\frac{1}{8}, \tag{30}$$

si nous posons, pour abréger,

$$\mathrm{T}=\mathrm{C}_{2q+1,1}\,t-2\,\mathrm{C}_{2q+1,3}\,t^3+3\,\mathrm{C}_{2q+1,5}\,t^5-\cdots\pm q\,\mathrm{C}_{2q+1,1}\,t^{2l-1}.$$

Soit encore

$$\mathrm{T}_1=\mathrm{C}_{2q+1,1}t^2-\mathrm{C}_{2q+1,3}t^4+\cdots\pm\mathrm{C}_{2q+1,1}t^{2q};$$

de manière que

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{T}_1}{dt}.$$

Évidemment,

$$\mathrm{T}_1=t\frac{\left(1+t\sqrt{-1}\right)^{2q+1}-\left(1-t\sqrt{-1}\right)^{2q+1}}{2\sqrt{-1}};$$

donc

$$\mathrm{T}=\frac{1}{4\sqrt{-1}}\left[\left(1+t\sqrt{-1}\right)^{2q+1}-\left(1-t\sqrt{-1}\right)^{2q+1}\right]$$

$$+\frac{2q+1}{4}\,t\left[\left(1+t\sqrt{-1}\right)^{2q}+\left(1-t\sqrt{-1}\right)^{2q}\right].$$

Au moyen de cette valeur, la formule (30) est réduite à

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\Big\{(1+t\sqrt{-1})^{2q+1}-(1-t\sqrt{-1})^{2q+1}\\[2ex] \quad+(2q+1)\,t\sqrt{-1}\left[(1+t\sqrt{-1})^{2q}+(1-t\sqrt{-1})^{2q}\right]\Big\}\\[2ex] \displaystyle=\frac{1}{2}\sqrt{-1}.\end{array}\right\} \tag{31}$$

(*) Voir, page 95, la *formule de Plana*.

Pour simplifier celle-ci, j'emploie la transformation habituelle :

$$t = \operatorname{tg}\varphi.$$

Il en résulte :

$$1 + t\sqrt{-1} = \frac{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$1 - t\sqrt{-1} = \frac{\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

etc. ;

puis

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(e^{2\pi\operatorname{tg}\varphi} - 1)\cos^2\varphi} \left\{ \frac{\sin(2q+1)\varphi}{\cos^{2q+1}\varphi} + (2q+1)\operatorname{tg}\varphi\frac{\cos 2q\varphi}{\cos^{2q}\varphi} \right\} = \frac{1}{4},$$

ou

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(e^{2\pi\operatorname{tg}\varphi} - 1)\cos^{2q+3}\varphi}\left[\sin(2q+1)\varphi + (2q+1)\sin\varphi\cos 2q\varphi\right] = \frac{1}{4}. \quad (32)$$

J'ai donné, autrefois, la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2q\alpha\, d\alpha}{(e^{2\pi\cot\alpha} - 1)\sin^{2q+2}\alpha} = \pm\frac{2q-1}{4(2q+1)} \ (^*).$$

Si l'on y remplace $\alpha$ par $\frac{\pi}{2} - \varphi$, elle devient, sans ambiguïté de signe,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2q\varphi\, d\varphi}{(e^{2\pi\operatorname{tg}\varphi} - 1)\cos^{2q+2}\varphi} = \frac{2q-1}{4(2q+1)}.$$

Il en résulte, à cause de l'égalité (32) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\cos 2q\varphi\, d\varphi}{(e^{2\pi\operatorname{tg}\varphi} - 1)\cos^{2q+3}\varphi} = \frac{1}{4(q+1)(2q+1)}. \quad (33)$$

(*) Voyez page 95.

VII. La théorie de la *fonction de Binet* donne, comme on sait (*) :

$$A = \int_0^\infty \left(\frac{2}{e^{2x}-1} + 1 - \frac{1}{x}\right)\frac{e^{-x}}{x}\,dx = 1 - \mathfrak{L}.2, \qquad (34)$$

$$B = \int_0^\infty \left(\frac{2}{e^{x}-1} + 1 - \frac{2}{x}\right)\frac{e^{-x}}{x}\,dx = 2 - \mathfrak{L}(2\pi), \qquad (35)$$

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} - e^{-x} - \frac{1}{x}\right)\frac{e^{-x}}{x}\,dx = 1. \qquad (36)$$

Il en résulte :

$$C - A = \mathfrak{L}.2, \quad A + C - B = \mathfrak{L}.\pi, \quad 2A - B = \mathfrak{L}.\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

1° $$C - A = \int_0^\infty (1 - e^{-x})\frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_0^\infty (e^x - 1)\frac{e^{-2x}}{x}\,dx.$$

Ainsi

$$\int_0^\infty (e^x - 1)\frac{e^{-2x}}{x}\,dx = \mathfrak{L}.2\ (^{**}). \qquad (37)$$

2° $$A + C - B = \int_0^\infty \left[2\frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x}-1} - e^{-x}\right]\frac{e^{-x}}{x}\,dx,$$

ou

$$A + C - B = \int_0^\infty \frac{(e^x - 1)(2e^x + 1)}{e^x + 1}\frac{e^{-2x}}{x}\,dx.$$

Conséquemment,

$$\int_0^\infty \frac{(e^x - 1)(2e^x + 1)}{e^x + 1}\frac{e^{-2x}}{x}\,dx = \mathfrak{L}.\pi,$$

(*) *Recherches sur la constante* G, *et sur les intégrales eulériennes ;* formules (57), (58), (64).

(**) Pour vérifier ce résultat connu, il suffit d'observer que le développement de la différentielle est

$$e^{-2x}dx\left[1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \cdots\right],$$

d'intégrer chaque terme et de faire la somme des intégrales.

ou

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-x})(2 + e^{-x})}{1 + e^{-x}} \frac{e^{-x}}{x} dx = \ell \,.\, \pi. \tag{38}$$

3°

$$2A - B =$$

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{4}{e^{2x} - 1} - \frac{2}{e^x - 1} + 1 \right] \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

Donc

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \frac{e^{-x}}{x} dx = \ell \,.\left( \frac{\pi}{2} \right) (^*). \tag{39}$$

VIII. Considérons l'intégrale

$$D = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} e^{-x} x dx. \tag{40}$$

Il est visible que

$$D = 1 - 2 \int_0^{\infty} e^{-x} x dx \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-nx}$$

$$= 1 - 2 \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} e^{-(n+1)x} x dx.$$

Or,

$$\int_0^{\infty} e^{-(n+1)x} x dx = \frac{1}{(n+1)^2},$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots;$$

ou, par une formule connue,

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$$

Conséquemment,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} e^{-x} x dx = \frac{\pi^2}{6} - 1. \tag{41}$$

(*) Cette formule, due à Euler, est une conséquence des égalités (34), (35). Elle se vérifie aussi facilement que la première.

Des formules (39), (41), on conclut, par le changement de $x$ en $\operatorname{tg}\varphi$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{-\operatorname{tg}\varphi}}{1 + e^{-\operatorname{tg}\varphi}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos^3\varphi} = \frac{\pi^2}{6} - 1 + \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2}\right). \qquad (42)$$

IX. On a

$$\frac{1}{1+\alpha^2}\int_0^1 \frac{\alpha dx}{1+\alpha^2 x^2} = \frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha}{1+\alpha^2},$$

puis

$$\int_0^1 dx \int_0^\alpha \frac{2\alpha d\alpha}{(1+\alpha^2)(1+\alpha^2x^2)} = (\operatorname{arc\,tg}\alpha)^2.$$

La fraction

$$\frac{1}{(1+\alpha^2)(1+\alpha^2x^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{1+\alpha^2} - \frac{x^2}{1+\alpha^2x^2}\right];$$

donc l'intégrale relative à $\alpha$ est

$$\frac{1}{1-x^2}\left[\mathcal{L}(1+\alpha^2) - \mathcal{L}(1+\alpha^2x^2)\right].$$

Par suite, l'égalité précédente devient

$$\int_0^1 \frac{\mathcal{L}(1+\alpha^2) - \mathcal{L}(1+\alpha^2x^2)}{1-x^2} dx = (\operatorname{arc\,tg}\alpha)^2. \qquad (43)$$

Cette formule (*), peut-être nouvelle, en donne plusieurs autres.

Soient, par exemple :

$$\alpha = \operatorname{tg}\beta, \qquad \alpha x = \operatorname{tg}\varphi;$$

d'où

$$\mathcal{L}\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2x^2} = 2\,\mathcal{L}.\frac{\cos\varphi}{\cos\beta}, \quad dx = \frac{d\varphi}{\operatorname{tg}\beta\cos^2\varphi}, \text{ etc.};$$

(*) On y arrive, d'une autre manière, en faisant *le carré* de

$$\frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \dots$$

puis

$$\int_0^{\beta} \frac{\mathfrak{L}.\dfrac{\cos\varphi}{\cos\beta}}{\operatorname{tg}^2\beta - \operatorname{tg}^2\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\beta^2}{2\operatorname{tg}\beta},$$

ou

$$\int_0^{\beta} \frac{\mathfrak{L}.\dfrac{\cos\varphi}{\cos\beta}}{\sin^2\beta\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\beta} = \frac{\beta^2}{\sin^2\beta}, \tag{44}$$

ou encore :

$$\int_0^{\beta} \frac{d\varphi\,\mathfrak{L}.\dfrac{\cos\varphi}{\cos\beta}}{\sin(\beta+\varphi)\sin(\beta-\varphi)} = \frac{\beta^2}{\sin^2\beta}. \tag{45}$$

En particulier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi\,\mathfrak{L}\left(\sqrt{2}\cos\varphi\right)}{\cos^2\varphi} = \frac{\pi^2}{32}. \tag{46}$$

Dans la formule (44), posons

$$\cos\varphi = z\cos\beta.$$

Elle se transforme en

$$\int_1^{\text{séc}\,\beta} \frac{\mathfrak{L}\,z\,.\,dz}{(z^2-1)\sqrt{1-z^2\cos^2\beta}} = \frac{\beta^2}{2\sin\beta}. \tag{47}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (*).

(*) Note interrompue par une grave maladie de l'Auteur. Il ne désespère pas de la compléter dans le tome *second*.

Liège, 19 avril 1885.

# ERRATA.

Page 179, ligne 7, *au lieu de* 1862, *lisez* 1823.

— 245, dernière ligne. Le second signe = doit être supprimé.

— 274, ligne 16, *au lieu de* $N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi...$, *lisez* $N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi...$

— 305, — 25, — perpendiculaire à MT, — parallèle à l'axe.

— 309, — 27, — cyclotomique, *lisez* cyclide.

# TABLE DES MATIÈRES.