QUELQUES FORMULES

RELATIVES AUX

TRIANGLES RECTILIGNES;

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté, à la Classe des sciences, dans la séance du 1er mars 1890.)

QUELQUES FORMULES

RELATIVES AUX

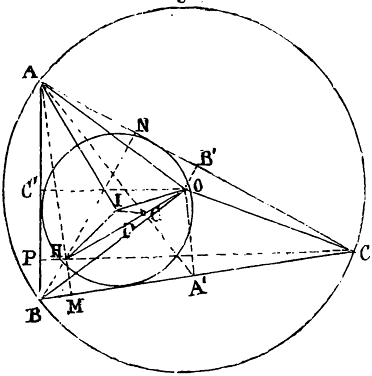
TRIANGLES RECTILIGNES (*).

I.

PRÉLIMINAIRES.

1. ABC (fig. 1) étant le triangle donné, soient :

Fig. 1.



O, le centre du cercle circonscrit;

I, le centre du cercle inscrit;

H, le point des hauteurs AM, BN, CP (*orthocentre*);

G, le centre de gravité (**);

Γ, le centre de la circonférence des neuf points (***).

(*) A propos d'une Note de M. le professeur Azzarelli (*Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei;* 17 avril 1887).

(**) On sait qu'il est au tiers de OH, à partir du centre O.

(***) Γ est le milieu de OH (*Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire,* 6e édit., p. 170.

2. Si l'on fait :

$$IG = \Delta, \quad IH = \delta, \quad IO = d, \quad OH = h;$$

on a

$$\Delta^2 = r^2 + \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{3}p^2 \text{ (*)}, \quad \ldots \quad (1)$$

$$\delta^2 = 4R^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \text{ (*)}, \quad \ldots \quad (2)$$

$$d^2 = R(R - 2r) \text{ (**)}, \quad \ldots \quad (3)$$

$$h^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \text{ (***)} \quad \ldots \quad (4)$$

3. T désignant l'aire du triangle ABC, on a

$$abc = 4RT = 4Rrp \quad \ldots \quad (5)$$

4. *Remarque.* La formule $T = pr$ étant symétrique, par rapport à r et p, on peut se demander si, étant donné le triangle ABC, on en peut construire un autre, équivalent au premier, circonscrit à un cercle de rayon p, et dont le périmètre soit $2r$.

Prenons $r' = p$, $p' = r$. On a

$$2\pi r < 2p, \quad \text{ou} \quad 2\pi p' < 2r';$$

donc *le second triangle est impossible.*

(*) *Loc. cit.*, pp. 151, 152. Dans celle-ci, on a imprimé, par erreur,

$$\delta^2 = 4R^2 + 2r^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

(**) *Théorème d'Euler. Loc. cit.*, p. 143. D'après *M. Marcus Baker* (de Washington), la relation (3) a été publiée en 1746, dans le *Ladies Diary*. Le Mémoire d'Euler n'a paru qu'en 1765.

(***) *Loc. cit.*, p 147. Par un procédé différent de celui qui est indiqué dans les *Th et Pr.*, on trouve

$$h^2 = \left(\frac{a}{2} - c\cos B\right)^2 + \frac{a^2b^2c^2}{T^2}(\cos A - 2\cos B\cos C)^2$$

$$= \frac{(b^2 - c^2)^2}{4a^2} + \frac{1}{64a^2T^2}\left[a^4 + (a^2 - b^2 - c^2)a^2 - (b^2 - c^2)^2\right];$$

après quoi il n'est pas difficile de réduire le second membre à

$$9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

II.

UNE RÉDUCTION.

5. Dons la Note citée, M. Azzarelli démontre l'égalité

$$\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}=\frac{2}{R}(\cos A+\cos B+\cos C \ (^*) \ . \quad . \qquad (6)$$

La quantité $\cos A+\cos B+\cos C$ est une fonction symétrique de A, B, C : elle doit donc être exprimable au moyen des *éléments* du triangle ; savoir : R, r, p.

En effet, si A′, B′, C′ sont les milieux des côtés (fig. 1), il est visible que

$$OA'=R\cos A, \quad OB'=R\cos B, \quad OC'=R\cos C;$$

donc

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{OA'+OB'+OC'}{R}.$$

Mais

$$OA'+OB'+OC'=R+r \ (^{**}).$$

Ainsi

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{R+r}{R}(^{***}); \quad . \quad . \quad . \qquad (7)$$

et la formule (6) devient

$$\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}=\frac{2(R+r)}{R^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (8)$$

(*) *Atti* . . ., p. 150. Au lieu de r, nous écrivons R.

(**) *Th. et Pr.*, p. 48.

(***) Pour obtenir, directement, cette relation (7), il suffit d'observer que

$$\cos A+\cos B+\cos C-1=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)-2\sin^2\frac{1}{2}C$$

$$=2\sin\frac{1}{2}C\left[\cos\frac{1}{2}(A-B)-\cos\frac{1}{2}(A+B)\right]=4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$$

$$=4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=4\frac{T^2}{pabc}=\frac{r}{R}.$$

III.

UNE RÉDUCTION (Suite).

6. De la formule (7), on peut conclure les valeurs d'autres fonctions symétriques.

En effet,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

donc

$$\frac{R+r}{R} = \frac{1}{2}\sum \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} = \frac{1}{2abc}\sum (b^2 + c^2 - a^2)a$$
$$= \frac{1}{2abc}\sum \left[(b^2 + c^2 + a^2)\,a - 2a^3\right],$$

ou

$$\frac{R+r}{R} = \frac{p}{abc}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \quad . \quad . \quad (9)$$

7. On sait que

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab) \text{ (*)}.$$

Conséquemment, au moyen de la valeur (5), l'égalité (9) devient

$$\frac{R+r}{R} = -3 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4Rr} + \frac{bc + ca + ab}{2Rr};$$

ou, après quelques réductions :

$$2(bc + ca + ab) - (a^2 + b^2 + c^2) = 4r(4R + r). \qquad (10)$$

Et comme

$$2(bc + ca + ab) + (a^2 + b^2 + c^2) = 4p^2,$$

on a

$$bc + ca + ab = 4Rr + r^2 + p^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr) \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

(*) *Manuel des candidats à l'École polytechnique,* t. I, p. 9.

8. Cette expression de $a^2 + b^2 + c^2$, substituée dans les formules (1), (2), (4), les transforme en

$$9\Delta^2 = 5r^2 - 16Rr + p^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (13)$$

$$\delta^2 = 4R^2 + 4Rr + 5r^2 - p^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (14)$$

$$h^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15)$$

9. On conclut de celles-ci, par l'élimination de p^2 :

$$9\Delta^2 + \delta^2 = 4(R - r)(R - 2r), \quad . \quad . \quad . \qquad (16)$$

$$h^2 - 2\delta^2 = (R + 2r)(R - 2r), \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (17)$$

$$18\Delta^2 + h^2 = 3(3R - 2r)(R - 2r), \quad . \quad . \quad . \qquad (18)$$

relations assez simples, et peut-être nouvelles (*).

IV.

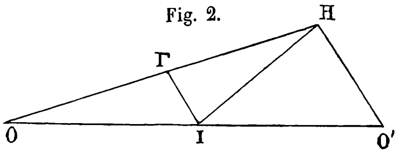
CIRCONFÉRENCE DES NEUF POINTS (**).

10. Reprenons la formule

$$h^2 - 2\delta^2 = R^2 - 4r^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (17)$$

Soit (fig. 2) O′ le point symétrique de O, relativement au point I. Soit, comme ci-dessus, H l'*hortocentre* du triangle ABC (fig. 1).

Fig. 2.



On a, dans le triangle OHO′ :

$$\overline{OH}^2 + \overline{O'H}^2 = 2\overline{IH}^2 + 2\overline{OI}^2,$$

ou

$$h^2 + \overline{O'H}^2 = 2\delta^2 + 2d^2;$$

(*) L'égalité (17), sur laquelle nous allons revenir, est une conséquence, immédiate, des formules (2), (4).

(**) On peut consulter, sur ce sujet : la *Note* de M. Azzarelli ; les *Nouvelles Annales*, 1883 ; le *Bulletin de l'Académie de Belgique*, oct. 1882, etc.

ou, par les relations (3) et (17) :

$$\overline{O'H}^2 = 2R(R - 2r) - R^2 + 4r^2 = (R - 2r)^2;$$

puis, comme $2r$ ne surpasse pas R :

$$O'H = R - 2r. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Ainsi, *pour tous les triangles* ABC, *la distance* O'H *est constante*. Autrement dit :

Quand le triangle ABC, *variable de forme, reste inscrit au cercle* O *et circonscrit au cercle* I, *l'orthocentre* H *décrit une circonférence qui a pour centre le point* O', *et dont le rayon est* $R - 2r = \frac{d^2}{R}$ (*).

11. Soit Γ le milieu de OH, c'est-à-dire le centre de la circonférence des neuf points (1, note). On sait que le rayon ρ, de cette circonférence, égale $\frac{1}{2}$ R (**). Or, la droite $I\Gamma$ est la moitié de O'H. Ainsi

$$I\Gamma' = \rho - r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Cette formule démontre une propriété connue : *La circonférence des neuf points est tangente au cercle inscrit* (***).

12. Quand les cercles *directeurs* O, I sont donnés, le point O est fixe. D'ailleurs, $OG = \frac{1}{3}OH$, $O\Gamma = \frac{1}{2}OH$. Si donc, comme on vient de le voir, le point H décrit une circonférence, *les points* G, Γ *décrivent* également *des circonférences* (IV). Le centre de similitude de ces trois lignes est le point O.

(*) La première partie de ce théorème est due, croyons-nous, à M. Weill (*N. A.*, 1880, p. 256).

(**) *Th. et Pr.*, p. 170.

(***) *Loc. cit.*, p. 176. On prouverait, aussi facilement, que *la circonférence* Γ *est tangente aux cercles ex-inscrits*. Ce beau théorème porte le nom de *Feuerbach*. A l'endroit cité, je l'ai attribué, probablement par erreur, au Dr Hart : *On ne prête qu'aux riches !*

(IV) WEILL (*N. A.*, 1880, p. 256).

13. Plus généralement, *si le triangle* ABC *contient un point remarquable* T, *dont les distances aux centres* I, O *dépendent des seuls paramètres* R, r; *ce point* T *décrit une circonférence, quand le triangle* ABC *se déplace* (*).

14. Supposons que, le centre I étant fixe, le centre O décrive, autour de I, une circonférence dont le rayon soit d. Pour une position O_1, de O, il y aura une infinité de triangles $A_1B_1C_1$, circonscrits au cercle I, et inscrits au cercle O (**).

Le point H_1, déterminé par I, O_1, R, r, décrit une circonférence égale à celle qui est décrite par le point H (***). Les centres de ces circonférences (en nombre infini) sont diamétralement opposés aux points O, O_1, ... sur la circonférence OO_1O_2... Donc *ces circonférences* H, H_1, H_2 ... *enveloppent deux circonférences fixes, concentriques avec le cercle* I.

Etc.

V.

ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE.

15. Reprenons les égalités

$$abc = 4Rrp, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$bc + ca + ab = 4Rr + r^2 + p^2. \quad \ldots \quad (11)$$

A cause de

$$a + b + c = 2p, \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

le triangle ABC *est déterminé par la connaissance du cercle*

(*) Rappelons, en passant, un théorème bien connu :

Soient u, v, w, ... *les distances d'un point mobile* M, *à des points donnés* A, B, C, ... *L'équation*

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + \cdots = const.$$

représente, en général, une circonférence, lieu de M. *Il y a exception si*

$$A + B + C + \cdots = 0.$$

Dans ce cas particulier, le lieu est une droite.

(**) Il est facile de voir que les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont égaux deux à deux.

(***) En effet, $O'_1H_1 = R - 2r = O'H$.

inscrit, du cercle circonscrit, et du périmètre. L'équation qui donne les longueurs des côtés est

$$x^3 - 2px^2 + (4Rr + r^2 + p^2)x - 4Rrp = 0 \ (^*) \ . \quad (22)$$

Le premier membre étant écrit ainsi :

$$x(x-p)^2 + \left[(4R + r)x - Rp\right]r,$$

on voit que

$$\frac{4R}{4R+r}p$$

est une limite supérieure des racines (**).

(*) Les relations (10), (11), ... (22) sont plus simples que celles qui ont été données par Terquem, d'après Euler (*Nouvelles Annales*, 1842, pp. 82, 84). Contrairement à l'usage adopté en France, ce savant Géomètre désignait par p le *périmètre* du triangle.

(**) La discussion complète de l'équation (22) constitue un *exercice* de calcul, assez peu intéressant. Nous ferons, à ce sujet, une simple remarque :

Si le triangle ABC *est isoscèle, de manière que le plus petit côté,* AC, *soit perpendiculaire à la droite* OI, *on a*

$$p = \sqrt{R + r + d}\left[\sqrt{2R} + \sqrt{R - r - d}\right].$$

Dans ce cas, les valeurs des racines sont :

$$a = c = \sqrt{2R(R + r + d)}, \qquad b = 2\sqrt{R^2 - (d + r^2)}.$$

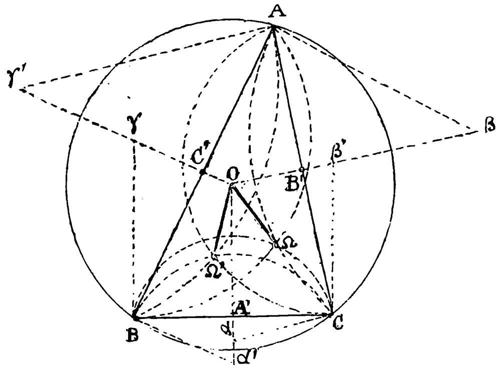
VI.

ANGLE DE BROCARD. — POINTS DE BROCARD.

16. ABC étant toujours le triangle donné, soient (fig. 3) les droites :

$C\alpha$, $A\gamma'$ perpendiculaires au côté CA;
$A\beta$, $B\alpha'$ perpendiculaires au côté AB;
$B\gamma$, $C\beta'$ perpendiculaires au côté BC.

Fig. 3.



Ces six droites rencontrent en α, α', β, β', γ, γ' les perpendiculaires OA′, OB′, OC′ aux côtés du triangle.

Cela posé :

1° Les arcs $B\Omega C$, $C\Omega A$, $A\Omega B$, décrits des points α, β, γ, comme centres, se coupent en Ω, *point de Brocard;*

2° Les arcs $C\Omega' B$, $A\Omega' C$, $B\Omega' A$, décrits des points α', β', γ', comme centres, se coupent en Ω', autre *point de Brocard* (*).

De plus, chacun des six angles égaux $B\Omega C$, $C\Omega A$, $A\Omega B$,

(*) *N. C. M.*, t. V, p. 429. Suivant les dénominations proposées par M. Lemoine, Ω est le *point direct;* Ω', le *point rétrograde* (VIGARIÉ, *Journal de M. S.*, 1888, p. 58). Cette page renferme quelques fautes.

CΩ'B, AΩ'C, BΩ'A (*), est l'*angle de Brocard*, déterminé par la formule fondamentale

$$\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C \ (^{**}) \quad . \ . \ . \quad (23)$$

17. *Transformation.* On a

$$\sin A = \frac{2T}{bc}, \qquad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

donc

$$\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4T}, \quad \cot B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4T}, \quad \cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4T};$$

puis

$$\cot \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4T}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (24)$$

formule connue (***).

18. (*Suite.*) Posant, pour abréger,

$$\lambda^4 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2, \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (25)$$

on trouve.

$$\cos \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\lambda^2}, \qquad \sin \omega = \frac{4T}{2\lambda^2} \quad . \ . \ . \quad (26)$$

19. *Autres formules.* Celles qui viennent d'être écrites donnent, immédiatement,

$$\cos 2\omega = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{2\lambda^4}, \qquad \sin 2\omega = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)T}{2\lambda^4}; \quad (27)$$

puis, par un calcul facile :

$$\left.\begin{aligned} \cos 3\omega &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4 - \lambda^4)}{2\lambda^6}, \\ \sin 3\omega &= \frac{4(a^4 + b^4 + c^4)T}{2\lambda^6}. \end{aligned}\right\} \quad . \ . \quad (28)$$

(*) Non représentés sur la figure.
(**) *N. C. M.*, t. III, p. 67.
(***) BROCARD, *Congrès d'Alger*, p. 144.

20. *Remarques.* — I. A cause de $\cos^2 3\omega + \sin^2 3\omega = 1$, on a, *identiquement*,

$$\left.\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2)^2(a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2)^2\\&\quad+(a^4+b^4+c^4+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)^2\\&\times(-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2)\\&\qquad=4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)^3.\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

Soient, par exemple,

$$a=5,\quad b=4,\quad c=3\ (^*);$$

auquel cas :

$$a^2+b^2+c^2=50,$$
$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=144+225+400=769,$$
$$a^4+b^4+c^4=625+256+81=762.$$

L'identité devient

$$50^2(962-769)^2+(962+769)^2(-962+1538)=4\ 769^3,$$

ou

$$625\,.\,193^2+1731^2\,.\,144=769^3,$$

ou

$$4825^2+20\,772^2=769^3,$$

ou enfin

$$23\ 280\ 625+431\ 475\ 984=454\ 756\ 609;$$

ce qui est exact.

II. On a vu, ci-dessus (p. 5), que

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

Donc, si l'on change a^2 en a, b^2 en b, c^2 en c, l'identité (29) se réduit à

$$\left.\begin{aligned}&(a^3+b^3+c^3-3abc)^2\\&\quad+(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2\\&\times(-a^2-b^2-c^2+2bc+2ca+2ab)\\&\qquad=4(bc+ca+ab)^3.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(30)$$

(*) Le triangle est rectangle.

III. *L'équation*

$$(x^3 - 3bcx + b^3 + c^3)^2 - 4\left[(b+c)x + bc\right]^3 = 0 \quad . \quad (31)$$

équivaut à

$$\left[x^2 + (b+c)x + b^2 + bc + c^2\right]^2 \left[x^2 - 2(b+c)x + (b-c)^2\right] = 0;$$

donc *elle est complètement résoluble.*

IV. Si l'on fait

$$b + c = p, \quad bc = q,$$

cette même équation (31) devient

$$(x^3 - 3qx + p^3 - 3pq)^2 - 4(px + q)^3 = 0; \quad . \quad (32)$$

ou, en vertu de la dernière Remarque,

$$(x^2 + px + p^2 - q)^2 (x^2 - 2px + p^2 - 4q) = 0 \quad . \quad (33)$$

V. Par exemple, l'équation

$$(x^3 - 9x - 8)^2 - 4(x+3)^3 = 0,$$

ou

$$x^6 - 18x^4 - 20x^3 + 45x^2 + 36x - 44 = 0,$$

est *complètement résoluble.* Les valeurs des racines sont :

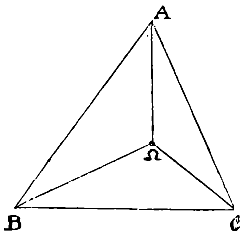
$$+1, \quad +1, \quad -2, \quad -2, \quad 1 + 2\sqrt{3}, \quad 1 - 2\sqrt{3}.$$

VII.

(Suite.) — ÉVALUATION DE QUELQUES DISTANCES.

21. *Coordonnées de* Ω, Ω'. Dans le triangle $B\Omega C$:

Fig. 4.



$$\frac{B\Omega}{C\Omega} = \frac{\sin(C - \omega)}{\sin \omega}.$$

D'après la formule (23), le second membre égale

$$\sin C(\cot A + \cot B + \cot C) - \cos C$$
$$= \sin C(\cot A + \cot B) = \frac{\sin^2 C}{\sin A \sin B} = \frac{c^2}{ab}.$$

Par conséquent, si l'on fait

$$A\Omega = u, \quad B\Omega = v, \quad C\Omega - w,$$

on a

$$\frac{v}{w} = \frac{c^2}{ab}, \quad \frac{w}{u} = \frac{a^2}{bc}, \quad \frac{u}{v} = \frac{b^2}{ca}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

puis, par un calcul facile :

$$u = \frac{b^2 c}{\lambda^2}, \quad v = \frac{c^2 a}{\lambda^2}, \quad w = \frac{a^2 b}{\lambda^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

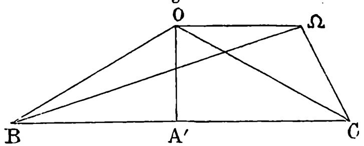
De même, pour le point Ω' :

$$u' = \frac{bc^2}{\lambda^2}, \quad v' = \frac{a^2 c}{\lambda^2}, \quad w' = \frac{b^2 a}{\lambda^2} \; (*) \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

(*) Ces formules, qui donnent les coordonnées *trilinéaires* des points de Brocard, ont été trouvées par M. Chadu (*N. A.*, 1875, p. 287).

22. *Valeur de* $O\Omega$. Dans le triangle isoscèle BOC,

Fig. 5.



$$OB = OC = R,$$

$$ang.\ CBO = 1^d - A.$$

Donc, dans le triangle $OB\Omega$:

$$\overline{O\Omega}^2 = R^2 + v^2 - 2Rv\cos(1^d - A - \omega),$$

ou

$$\overline{O\Omega}^2 = R^2 + v^2 - 2Rv\sin(A + \omega) \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Nous avons trouvé, ci-dessus :

$$\sin A = \frac{4T}{2bc}, \qquad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\sin \omega = \frac{4T}{2\lambda^2}, \qquad \cos \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\lambda^2}.$$

Conséquemment

$$\sin(A + \omega) = \frac{2T}{bc\lambda^2}(b^2 + c^2); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

puis

$$\overline{O\Omega}^2 = R^2 + v^2 - 4\frac{RvT}{bc\lambda^2}(b^2 + c^2).$$

Mais

$$R = \frac{abc}{4T}, \qquad v = \frac{ac^2}{\lambda^2};$$

donc

$$\overline{O\Omega}^2 = \frac{R^2}{\lambda^4}(a^4 + b^4 + c^4 - \lambda^4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

23. *Remarques.* — I. Le second membre est une fonction symétrique. Conséquemment : *les distances* $O\Omega$, $O\Omega'$ *sont égales* (*).

(*) Ce théorème, que j'ai cru avoir découvert, est dû à M. Brocard, l'ingénieux auteur de toute cette théorie (*N. C. M*, t. VI, p. 99).

II. La formule (38) équivaut à la proportion

$$\frac{\sin (A + \omega)}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2}{\lambda^2}.$$

Or, par les expressions (35) et (36) :

$$v + w' = \frac{a (b^2 + c^2)}{\lambda^2}.$$

Donc, à cause de

$$a = 2R \sin A,$$

l'égalité (38) se réduit à

$$\sin (A + \omega) = \frac{v + w'}{2R}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

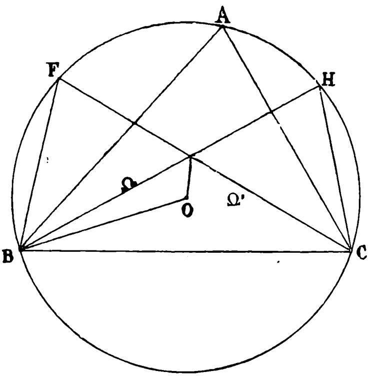
et la valeur de $\overline{O\Omega}^2$ (37) prend cette forme simple :

$$\overline{O\Omega}^2 = R^2 - vw' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

III. $R^2 - \overline{O\Omega}^2$ (fig. 6) est la *puissance* du point Ω, relativement au cercle O. Cette puissance égale $B\Omega \,.\, \Omega H = vw'$. Or, $B\Omega = v$ (*); donc

$$\Omega H = w' = C\Omega' \text{ (**)}. \quad (42)$$

Fig. 6.



IV. Soit F le point où la droite $C\Omega'$, prolongée, rencontre la circonférence O. L'angle

$$F\Omega'B = \Omega\, BC + BC\Omega' = 2\omega.$$

Donc, si l'on fait tourner le triangle $B\Omega O$ autour de O, jusqu'à ce que $O\Omega$ s'applique

(*) D'après la formule (41), BH est la corde passant en Ω.

(**) En observant que, dans le triangle BHC :

$$\textit{angle}\, BHC = A, \quad \textit{angle}\, BCH = 2^d - (A + \omega),$$

on arrive, plus rapidement, à la relation (40).

sur $O\Omega'$, le sommet B, qui n'a pas quitté la circonférence, viendra en F. Par conséquent,

$$CF = B\Omega + C\Omega' = v + w' = 2R \sin(A + \omega), \quad . \quad (43)$$

ou

$$\frac{CF}{a} = \frac{\sin(A + \omega)}{\sin A} \text{ (*)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

relation identique, à cause de

$$\textit{angle } FBC = 2^d - BFC - BCF = 2^d - (A + \omega) = BCH.$$

V. L'égalité des angles FBC, BCH entraîne celle des cordes CF, BH. Par conséquent : *si l'on mène les cordes* $B\Omega H$, $C\Omega'F$: 1° *ces cordes sont égales ;* 2° *les segments déterminés sur ces droites, par les points de Brocard, sont égaux deux à deux* (**).

24. *Valeur de* $\Omega\Omega'$. M. Brocard a trouvé (***) :

$$\Omega\Omega' = 2R \sin\omega \sqrt{1 - 4\sin^2\omega}.$$

A cause de

$$\sin\omega = \frac{4T}{2\lambda^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

cette formule équivaut à celle-ci :

$$\Omega\Omega' = \frac{abc}{\lambda^4} \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - \lambda^4}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

ou à cette autre :

$$\Omega\Omega' = O\Omega \frac{4T}{\lambda^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

25. Soit, dans le triangle isoscèle $\Omega O \Omega'$, 2θ l'angle $\Omega O \Omega'$. On a

$$\sin\theta = \frac{\Omega\Omega'}{2O\Omega} = \frac{2T}{\lambda^2} = \sin\omega.$$

Ainsi, *l'angle* $\Omega O \Omega'$ *est double de l'angle de Brocard* (IV).

(*) On pourrait donc, en partant de cette identité (44), supprimer les calculs précédents. C'est ce qui arrive ordinairement : *si un long calcul conduit à un résultat simple, ce calcul est, presque toujours, inutile.*

(**) $B\Omega = F\Omega'$, $C\Omega' = H\Omega$.

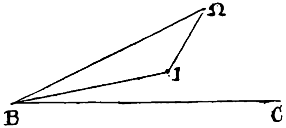
(***) *N. C. M.*, t. V, p. 296.

(IV) Voir, dans la *N. C. M.* (t. VI, p. 99), la démonstration, plus simple que celle-ci, donnée par notre jeune Camarade.

26. *Valeur de* $I\Omega$. I étant toujours (fig. 7) le centre du cercle inscrit :

$$\overline{I\Omega}^2 = \overline{B\Omega}^2 + \overline{BI}^2 - 2B\Omega \,.\, BI \cos\left(\omega - \frac{1}{2}B\right).$$

Fig. 7.



On a, dans le triangle $AB\Omega$ (*),

$$B\Omega = \frac{c \sin \omega}{\sin B}.$$

De plus :

$$BI = \frac{r}{\sin \frac{1}{2} B} = \frac{T}{p \sin \frac{1}{2} B},$$

$$\sin B = \frac{2T}{ac}, \qquad \sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$

$$2 \sin \omega \cos\left(\omega - \frac{1}{2} B\right) = \sin\left(2\omega - \frac{1}{2} B\right) + \sin \frac{1}{2} B.$$

Donc

$$\overline{I\Omega}^2 = c^2 \frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 B} + \frac{ac(p-b)}{p} - \frac{ac^2}{2p}\left[\frac{\sin\left(2\omega - \frac{1}{2}B\right)}{\sin \frac{1}{2} B} + 1\right].$$

Le binôme

$$\frac{ac(p-b)}{p} - \frac{ac^2}{2p}$$

se réduit à

$$\frac{ac(a-b)}{2p}.$$

Par conséquent

$$\overline{I\Omega}^2 = c^2 \frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 B} + \frac{ac(a-b)}{2p} - \frac{ac^2}{2p}\left[\sin 2\omega \,.\, \cot \frac{1}{2} B - \cos 2\omega\right].$$

(*) Non représenté sur la figure.

La quantité entre parenthèses égale

$$\frac{4T(a^2+b^2+c^2)}{2\lambda^4}\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}}-\frac{a^4+b^4+c^4}{2\lambda^4}$$

$$=\frac{1}{2\lambda^4}\left[(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(a+c-b)-a^4-b^4-c^4\right]$$

$$=\frac{1}{2\lambda^4}\left[ac(a^2+b^2+c^2+ac)-b^4\right].$$

Par suite,

$$\overline{I\Omega}^2=\frac{a^2c^4}{\lambda^4}+\frac{ac(a-b)}{2p}-\frac{ac}{2p\lambda^4}\left[ac(a^2+b^2+c^2+ac)-b^4\right]=\frac{ac}{2p\lambda^4}\,P,$$

en posant

$$P=2pac^3+\lambda^4(a-b)-c\left[ac(a^2+b^2+c^2+ac)-b^4\right].$$

Ce polynôme P, développé, devient

$$b\left[a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\right].$$

Donc

$$\overline{I\Omega}^2=\frac{abc}{2p\lambda^4}\left[a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\right];$$

ou, finalement,

$$\overline{I\Omega}^2=\frac{2Rr}{\lambda^4}\left[a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\right]\ (^*)\ . \quad (47)$$

27. *Remarques.* — I. *Dans tout triangle rectiligne, les longueurs des côtés satisfont à la relation*

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqq 0\ .\ .\quad (48)$$

(*) Cette formule, *relativement* simple, est le résultat d'un long calcul. Si elle est exacte, comme je l'espère, il y a lieu de croire (23) qu'on y peut parvenir par une méthode beaucoup plus rapide que celle-ci Cette méthode *élégante*, je l'ai cherchée en vain.

II. Si l'on change a, b, c en a, c, b, on a :

$$\overline{\mathrm{I}\Omega'}^2 = \frac{2\mathrm{R}r}{\lambda^4}\left[b^2a(b-a) + c^2b(c-b) + a^2c(a-c)\right] . \quad (49)$$

III. Donc, *dans tout triangle rectiligne, les longueurs des côtés satisfont à la relation*

$$b^2a(b-a) + c^2b(c-b) + a^2c(a-c) \overline{\gt} 0 \quad . \quad . \quad (50)$$

28. *Une fonction symétrique.* Des formules (47), (49), on déduit :

$$\overline{\mathrm{I}\Omega}^2 + \overline{\mathrm{I}\Omega'}^2 = \frac{2\mathrm{R}r}{\lambda^4}\left[ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2\right].$$

Soit Q le polynôme entre parenthèses :

$$\begin{aligned} \mathrm{Q} &= ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) - 2\lambda^4 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(bc + ca + ab) - 2pabc - 2\lambda^4. \end{aligned}$$

Mais

$$\lambda^4 = (bc + ca + ab)^2 - 4pabc;$$

donc

$$\mathrm{Q} = (bc + ca + ab)(a + b + c)^2 - 4(bc + ca + ab)^2 + 6pabc;$$

et, par les valeurs trouvées précédemment (**15**) :

$$\mathrm{Q} = 4\left[p^2(4\mathrm{R}r + r^2 + p^2) - (4\mathrm{R}r + r^2 + p^2)^2 + 6\mathrm{R}rp^2\right];$$

ou enfin

$$\mathrm{Q} = 4r\left[(2\mathrm{R} - r)p^2 - (4\mathrm{R} + r)^2 r\right].$$

Conséquemment,

$$\overline{\mathrm{I}\Omega}^2 + \overline{\mathrm{I}\Omega'}^2 = 8\frac{\mathrm{R}r^2}{\lambda^4}\left[(2\mathrm{R} - r)p^2 - (4\mathrm{R} + r)^2 r\right]. \quad . \quad (51)$$

29. *Remarques.* — I. Le premier membre étant la somme de deux carrés, *la fonction*

$$(2\mathrm{R} - r)p^2 - (4\mathrm{R} + r)^2 r$$

ne peut être négative.

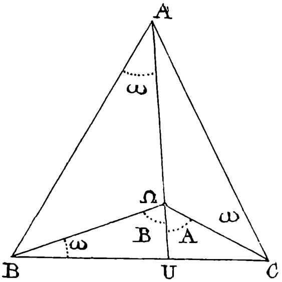
II. *Quand le triangle est équilatéral, cette fonction est nulle* (*).

(*) La réciproque n'est pas vraie. Je trouve que, si les points de Brocard coïncident avec le centre I, les angles A, B, C satisfont à la condition

$$1 = \cos 2\mathrm{A} \cos 2\mathrm{B} + \cos 2\mathrm{B} \cos 2\mathrm{C} + \cos 2\mathrm{C} \cos 2\mathrm{A} - 2 \cos 2\mathrm{A} \cos 2\mathrm{B} \cos 2\mathrm{C}$$

30. *Segments des côtés.* 1° Soit U (fig. 8) le point où la droite AΩ rencontre BC. Dans le triangle BUΩ :

Fig. 8



$$BU = B\Omega \frac{\sin B}{\sin (B + \omega)}.$$

De même, dans le triangle CUΩ :

$$CU = C\Omega \frac{\sin A}{\sin (B + \omega)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{BU}{CU} = \frac{B\Omega}{C\Omega}\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{bv}{aw} = \frac{c^2}{a^2} \quad (52)$$

Ainsi, *les segments* BU, CU *sont proportionnels aux carrés des côtés* AB, BC (*).

2° U′ étant le point où AΩ′ coupe BC, on trouve, de la même manière,

$$\frac{BU'}{CU'} = \frac{a^2}{b^2}: \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

les segments BU′, CU′ *sont proportionnels aux carrés des côtés* BC, AC.

31. (*Suite*). Des proportions (52), (53), on déduit :

$$BU = \frac{ac^2}{a^2 + c^2}, \quad CU = \frac{a^3}{a^2 + c^2}, \quad BU' = \frac{a^3}{a^2 + b^2}, \quad CU' = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}; \quad (54)$$

après quoi, par des permutations tournantes :

$$CV = \frac{ba^2}{b^2 + a^2}, \quad AV = \frac{b^3}{b^2 + a^2}, \quad CV' = \frac{b^3}{b^2 + c^2}, \quad AV' = \frac{bc^2}{b^2 + c^2}; \quad (55)$$

$$AW = \frac{cb^2}{c^2 + b^2}, \quad BW = \frac{c^3}{c^2 + b^2}, \quad AW' = \frac{c^3}{c^2 + a^2}, \quad BW' = \frac{ca^2}{c^2 + a^2} \text{ (**)}. \quad (56)$$

(*) *N. C. M.*, t. V, p. 439.

(**) V, V′ sont les points d'intersection des droites BΩ, BΩ′ avec le côté CA; W, W′ les points d'intersection de CΩ, CΩ′ avec AB.

32. *Expressions de* AU, UΩ, BV, BΩ, ...

1° Dans les triangles ABU, BΩU (fig. 8), l'angle U est commun. De plus, *angle* BΩU $= \omega + (B - \omega) = B$. Donc ces triangles sont semblables ; c'est-à-dire que

$$\frac{AB}{B\Omega} = \frac{BU}{U\Omega} = \frac{AU}{BU}.$$

D'ailleurs,

$$AB = c, \qquad B\Omega = v = \frac{ac^2}{\lambda^2}, \qquad BU = \frac{ac^2}{a^2 + c^2}.$$

Par suite,

$$U\Omega = \frac{a^2c^3}{\lambda^2(a^2 + c^2)}, \qquad AU = \frac{c\lambda^2}{a^2 + c^2}; \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

puis

$$V\Omega = \frac{b^2a^3}{\lambda^2(b^2 + a^2)}, \qquad BV = \frac{a\lambda^2}{b^2 + a^2}; \quad . \quad . \quad (58)$$

$$W\Omega = \frac{c^2b^3}{\lambda^2(c^2 + b^2)}, \qquad CW = \frac{b\lambda^2}{c^2 + b^2}; \quad . \quad . \quad (59)$$

2° La similitude des triangles ACU′, CΩU′ donne, de la même manière,

$$\frac{AC}{C\Omega'} = \frac{CU'}{U'\Omega'} = \frac{AU'}{CU'};$$

puis :

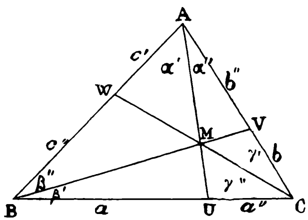
$$\left.\begin{aligned} U'\Omega' &= \frac{a^2b^3}{\lambda^2(a^2 + b^2)}, & AU' &= \frac{b\lambda^2}{a^2 + b^2}; \\ V'\Omega' &= \frac{b^2c^3}{\lambda^2(b^2 + c^2)}, & BV' &= \frac{c\lambda^2}{b^2 + c^2}; \\ W'\Omega' &= \frac{c^2a^3}{\lambda^2(c^2 + a^2)}, & CW' &= \frac{a\lambda^2}{c^2 + a^2}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (60)$$

VIII.

PROBLÈME GÉNÉRAL.

33. *Les droites* AM, BM, CM (fig. 9) *rencontrent, en* U, V, W, *les côtés* BC, CA, AB *du triangle* ABC. *Déterminer : 1° les longueurs* x, y, z *des droites* AU, BV, CW ; *2° les distances* AM $= u$, BM $= v$, CM $= w$.

Fig. 9.



La première partie de la solution est connue. En effet, par le théorème de Stewart, appliqué aux points A, B, C, U :

$$\overline{AB}^2 \cdot CU + \overline{AC}^2 \cdot BU = \left(\overline{AU}^2 + BU \cdot CU\right) BC \ (^*);$$

ou

$$c^2a'' + b^2a' = a(x^2 + a'a'').$$

Ainsi :

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{c^2a'' + b^2a' - aa'a''}{a}, \\ y^2 &= \frac{a^2b'' + c^2b' - bb'b''}{b}, \\ z^2 &= \frac{b^2c'' + a^2c' - cc'c''}{c} \ (^{**}) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

(*) *Théorèmes et Problèmes,* p. 141.

(**) On ne doit pas oublier que les six segments a', a'', b', b'', c' c'' sont liés par la condition

$$a'b'c' = a''b''c''.$$

34. (*Suite.*) L'inspection de la figure donne les égalités

$$a' \sin B = x \sin \alpha', \quad a'' \sin C = x \sin \alpha'', \quad . \quad . \quad (62)$$

$$b' \sin C = y \sin \beta', \quad b'' \sin A = y \sin \beta'', \quad . \quad . \quad (63)$$

$$c = a' \sin B + x \cos \alpha' = b'' \cos A + y \cos \beta'', \quad . \quad (64)$$

$$\frac{u}{\sin \beta''} = \frac{v}{\sin \alpha'} = \frac{c}{\sin(\alpha' + \beta'')} \ (^*) \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Soit θ la valeur commune des trois rapports. Soit R_c le rayon du *cercle circonscrit au triangle* AMB. Il est visible (et connu) que

$$c = 2R_c \sin AMB = 2R_c \sin(\alpha' + \beta'') \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Donc

$$\theta = 2R_c;$$

puis

$$u = 2R_c \sin \beta'' = 2R_c \frac{b'' \sin A}{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

On a

$$\sin(\alpha' + \beta'') = \frac{a' \sin B}{x} \frac{c - b'' \cos A}{y} + \frac{c - a' \sin B}{x} \frac{b'' \sin A}{y}$$

$$= \frac{1}{xy}\left[c(a' \sin B + b'' \sin A) - a'b'' \sin C\right],$$

ou

$$\sin(\alpha' + \beta'') = \frac{2T}{abxy}\left[ba' + ab'' - a'b''\right].$$

Le trinôme est réductible à $ab'' + a'b'$. Donc

$$\sin(\alpha' + \beta'') = \frac{ab'' + a'b'}{xy}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

(*) Comme

$$c^2 = u^2 + v^2 + 2uv \cos(\alpha' + \beta''),$$

on trouve une identité qui, étant écrite ainsi :

$$\sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y \cos(x + y) = \sin^2(x + y),$$

peut être utile.

puis

$$R_c = \frac{1}{2} \frac{Cxy}{(ab'' + a'b') \sin C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

$$u = \frac{ab''x}{ab'' + a'b'}, \qquad v = \frac{bc''y}{bc'' + b'c'}, \qquad w = \frac{ca''z}{ca'' + c'a'} . \quad (70)$$

Telles sont les formules demandées.

35. *Applications.* — I. Si M est le centre de gravité,

$$a' = a'' = \frac{1}{2} a, \qquad b' = b'' = \frac{1}{2} b, \qquad c' = c'' = \frac{1}{2} c.$$

Donc

$$\frac{u}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{3};$$

expression connue.

II. Supposons que M soit le point Ω. Alors (**31**) :

$$a' = \frac{c^2 a}{a^2 + c^2}, \qquad a'' = \frac{a^3}{a^2 + c^2}, \qquad b' = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}, \qquad b'' = \frac{b^3}{a^2 + b^2},$$

$$ab'' + a'b' = \frac{ab\left[b^2(a^2 + c^2) + a^2c^2\right]}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} = \frac{ab\lambda^4}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} .$$

De plus (32),

$$x = AU = \frac{c\lambda^2}{a^2 + c^2} .$$

Conséquemment,

$$u = \frac{b^2 c}{\lambda^2}, \qquad v = \frac{c^2 a}{\lambda^2}, \qquad w = \frac{a^2 b}{\lambda^2},$$

valeurs déjà trouvées (21).

III. Si M est le *point de Lemoine*, on a

$$\frac{a'}{a''} = \frac{c^2}{b^2} \; (*),$$

$$a' = \frac{c^2 a}{b^2 + c^2}, \quad a'' = \frac{b^2 a}{b^2 + c^2}, \quad b' = \frac{a^2 b}{a^2 + c^2}, \quad b'' = \frac{bc^2}{a^2 + c^2},$$

$$ab'' + a'b' = \frac{abc^2 (a^2 + b^2 + c^2)}{(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}.$$

Donc

$$\frac{u}{x} = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \ldots \ldots \quad (71)$$

La première des formules (61) donne

$$x = \frac{bc}{b^2 + c^2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Par conséquent :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{bc \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{a^2 + b^2 + c^2}, \\ v &= \frac{ca \sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}}{a^2 + b^2 + c^2}, \\ w &= \frac{ab \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (72)$$

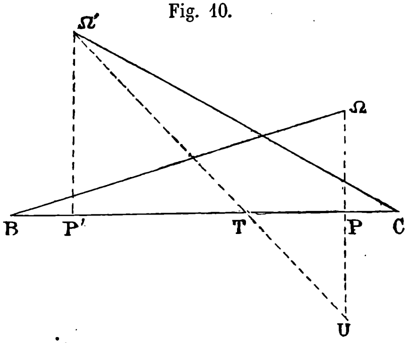
27 février 1890.

(*) *Th. et Prob.*, p. 232.

ADDITION.

36. *Ellipse de Brocard.* Les points Ω, Ω' (fig. 10) sont les foyers d'une ellipse tangente au côté BC. Pour trouver le point de contact T, il faut prendre le point U, symétrique de Ω, et tracer Ω'U. Cette droite est égale au grand axe f.

Fig. 10.



Or :

$$BP = v \cos \omega,$$

$$BP' = a - w' \cos \omega, \quad \text{etc.};$$

puis

$$\left.\begin{aligned} f^2 &= (a - v \cos \omega - v' \cos \omega)^2 + (v + w')^2 \sin^2 \omega \\ &= a^2 - 2a(v + w') \cos \omega + (v + w')^2 \end{aligned}\right\}. \quad (73)$$

Nous avons trouvé, ci-dessus :

$$v = \frac{c^2 a}{\lambda^2}, \quad w' = \frac{b^2 a}{\lambda^2} \cos \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\lambda^2}.$$

Par conséquent,

$$f^2 = \frac{a^2}{\lambda^4}\left[b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - (b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2) + (b^2 + c^2)^2\right]$$

$$= \frac{a^2}{\lambda^4}\left[b^2c^2 + (b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2 - a^2 - b^2 - c^2)\right];$$

d'où

$$f = \frac{abc}{\lambda^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (74)$$

37. *Remarques.* — I. Le second membre est une fonction symétrique. Donc *l'ellipse* considérée *est tangente aux trois côtés du triangle.* Ce théorème est dû à M. Brocard.

II. D'après les formules (35) et (36) :

$$uvw = u'v'w' = \frac{a^3b^3c^3}{\lambda^6}.$$

Par conséquent, *le grand axe de l'ellipse de Brocard égale, soit la moyenne géométrique entre les distances* AΩ, BΩ, CΩ, *soit la moyenne géométrique entre les distances* AΩ', BΩ', CΩ'.

III. Il y a d'autres théorèmes simples que nous omettons.

(23 mai 1890.)