RECHERCHES

SUR

QUELQUES PRODUITS INDÉFINIS

ET SUR LA CONSTANTE G

PAR

Eugène CATALAN

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE

COMPLÉMENT

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 3 décembre 1892.)

RECHERCHES

SUR

QUELQUES PRODUITS INDÉFINIS

ET SUR LA CONSTANTE G.

Dans son beau Rapport sur mes travaux, M. Mansion a considéré, particulièrement, les *Recherches sur quelques produits indéfinis* (*). Mon savant Confrère et ami a bien voulu indiquer, en quelques lignes, les résultats principaux auxquels j'étais parvenu, dès 1871, sur cette matière (**).

A diverses reprises, depuis vingt et un ans, j'ai fait des *additions* aux *Recherches*. Je les résume aujourd'hui, par le petit Mémoire que j'ai l'honneur de soumettre à l'Académie. Puisse-t-il être favorablement accueilli par les juges compétents !

La *Lettre à M. Hermite* se rapporte, principalement, à la *fonction de Binet* et la *série de Gudermann*. Elle est, en partie, *critique*. Mon illustre ancien élève m'a demandé d'attendre, pour répondre à mes objections, sa rentrée à Paris. J'espère que cette petite discussion, quel qu'en soit le résultat, sera profitable à la Science.

Liége, 3 septembre 1892.

(*) *Mélanges mathématiques*, t. I, p. 3.

(**) « Le Mémoire contient plus de quatre cents formules numérotées, plus ou moins importantes, et les Mémoires ultérieurs de l'auteur en renferment peut-être encore une centaine. » *Loc. cit.*, p. 34.

I

Rectifications.

1. J'ai déjà eu l'occasion de faire observer que la formule *absurde :*

$$\frac{dq}{q}=\frac{\pi dk}{\omega^2 kk'^2}(\omega' d\omega-\omega d\omega')\ (^*),$$

due à un *compositeur,* doit être remplacée par

$$\frac{dq}{q}=\pi\frac{\omega' d\omega-\omega d\omega'}{\omega^2}\ (^{**}).$$

2. A la page 99, l'égalité tirée des ***Fundamenta,*** a été ***mal copiée.*** Elle doit être lue ainsi :

$$\frac{q}{1-q^2}+2^3\frac{q^2}{1-q^4}+3^3\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots=\frac{k^2\omega^4}{\pi^4}\ (^{***}).$$

3. *La formule d'Euler :*

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots=\sum_0^\infty(-1)^l q^{\frac{3l^2\mp l}{2}}\ (^{\text{IV}})\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (46)$$

doit être ainsi rectifiée :

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots=1+\sum_1^\infty(-1)^l q^{\frac{3l^2-l}{2}}(1+q^l)\ .\ .\ .\ .\ [1]$$

(*) *Recherches sur quelques produits indéfinis,* p. 91.

(**) Celle-ci résulte, immédiatement, de la *définition :*

$$q=e^{-\pi\frac{\omega'}{\omega}}.$$

(***) De là résulte que, dans le second membre de l'identité (378), l'exposant 4 doit être remplacé par 8. Le reste est exact.

(IV) Les *numéros* des égalités contenues dans l'ancien Mémoire sont entre parenthèses. Ceux qui se rapportent au Mémoire actuel sont entre crochets.

En effet, le développement du second membre est

$$1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \cdots,$$

série connue (*).

4. La formule

$$(\beta\beta')^3 = \frac{1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots}{1 - 2q + 2q^6 - 2q^2 + \cdots} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (170)$$

est *exacte;* mais celle-ci :

$$(\beta\beta')^3 = \frac{1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} \cdots}{1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{16} + \cdots} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171)$$

est *fausse,* car elle est contradictoire avec la première (**).

Par suite, l'égalité (181), conséquence de (171), est *inexacte.*

II

Rappel de relations connues. — Des quantités α, α', β, β'.

5. Ces transcendantes, définies par les formules :

$$\alpha = \prod_1^\infty (1 - q^{2n-1}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\alpha' = \prod_1^\infty (1 - q^{2n}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\beta = \prod_1^\infty (1 + q^{2n-1}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\beta' = \prod_1^\infty (1 + q^{2n}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

(*) *Introduction à l'Analyse,* p. 250. La valeur donnée par M. Bertrand (*Calcul différentiel,* p. 329), contient des fautes de signe.

(**) Si l'on fait les divisions indiquées, on trouve, d'une part :

$$1 + 3q + \cdots;$$

et, de l'autre,

$$1 - q + \cdots$$

ont pour valeurs, respectivement :

$$\alpha = 2^{\frac{1}{6}} k^{-\frac{1}{12}} k'^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}}, \qquad (3)$$

$$\alpha' = 2^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (kk')^{\frac{1}{6}} q^{-\frac{1}{12}}, \qquad (4)$$

$$\beta = 2^{\frac{1}{6}} (kk')^{-\frac{1}{12}} q^{\frac{1}{24}}, \qquad (5)$$

$$\beta' = 2^{-\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{6}} (k'q)^{-\frac{1}{12}}. \qquad (6)$$

En outre, elles jouissent des propriétés exprimées par les équations suivantes :

$$\alpha\beta\beta' = 1, \qquad (7)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \beta\beta' = \sum_0^\infty \varphi(n) q^n, \qquad (32)$$

$$\beta^8 - \alpha^4 = 16 q \beta'^8 \ (^*), \qquad [2]$$

$$\beta = \sum_0^\infty \varphi_i(n) q^n, \qquad (34)$$

$$\beta' = \sum_0^\infty \varphi(n) q^{2n}, \qquad (36)$$

$$\alpha = \sum_0^\infty \varphi_i(n) (-q)^n, \qquad (39)$$

$$\alpha\beta = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n) q^{2n}, \qquad (40)$$

$$\alpha\alpha' = 1 + \sum_1^\infty (-1)^l q^{\frac{3l^2-l}{2}} (1 + q^l), \qquad (46)$$

$$\alpha' = 1 + \sum_1^\infty (-1)^l q^{\frac{3l^2-l}{2}} (1 + q^l), \qquad (50)$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots, \qquad (20)$$

(*) *Recherches*..., p. 3.

$$\alpha'\beta' = 1 + \sum_1^\infty (-1)^l q^{6l^2-2l}(1 + q^{4l}), \quad \ldots \quad (54)$$

$$\frac{1}{\alpha\alpha'} = \sum_0^\infty \psi(n) q^n, \quad \ldots \quad (65)$$

$$\frac{1}{\alpha'} = \sum_0^\infty \psi(n) q^{2n}, \quad \ldots \quad (68)$$

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{\sum_0^\infty \psi(n) q^n}{\sum_0^\infty \varphi(n) q^n}, \quad \ldots \quad (69)$$

$$\alpha = \sum_0^\infty \left[\varphi_p(n) - \varphi_i(n)\right] q^n, \quad \ldots \quad (74)$$

$$\alpha'\beta = 1 + \sum_1^\infty q^{\frac{3l^2-l}{2}}\left[(-1)^l + q^l\right], \quad \ldots \quad (77)$$

$$\alpha^2\alpha' = \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}} \ (*). \quad \ldots \quad [3]$$

6. *Suite.* Avant d'aller plus loin, résolvons les équations (5), (6), (4), par rapport à k, k' et $\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$.

1° La combinaison des deux premières donne

$$\beta^2\beta' = k'^{-\frac{1}{4}};$$

ou, à cause de

$$\beta\beta' = \frac{1}{\alpha}, \quad \ldots \quad (7)$$

$$k'^2 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^8 \quad \ldots \quad [4]$$

2° L'équation (5) étant écrite ainsi :

$$\beta^{24} = 16\, q k^{-2} k'^{-2},$$

(*) Pour vérifier cette relation, il suffit de remplacer α et α' par leurs valeurs (3), (4).

nous trouvons, par substitution,

$$k^2 = 16q\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^8 \frac{1}{\beta^{24}}$$

ou

$$k^2 = \frac{16q}{(\alpha\beta^2)^8}. \qquad \text{[5]}$$

3° De l'équation (4), on tire

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{6}}\alpha'(kk')^{-\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{12}}.$$

Mais

$$(kk')^{-\frac{1}{6}} = \frac{\beta^2}{(16q)^{\frac{1}{12}}};$$

donc

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{6}}\alpha'\beta^2 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{2}}\alpha'\beta^2,$$

ou

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} = \alpha'\beta^2 \text{ (*)} \qquad \text{[6]}$$

III

Nouveaux développements (**).

7. On trouve, dans le Recueil cité, les formules

$$\alpha = 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots, \qquad \text{[7]}$$

$$\beta = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots, \qquad \text{[8]}$$

$$\beta' = 1 + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^{12}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots. \qquad \text{[9]}$$

(*) HERMITE, *Remarques sur Lacroix*, p. 419. L'illustre Géomètre établit cette relation, par un procédé tout différent du nôtre. Du reste, la combinaison des formules (4), (5) conduit, immédiatement, au même résultat.

(**) Ce paragraphe est tiré, en partie, du *Bulletin de la Société mathématique*, t. XIX.

8. On a aussi cette autre relation, conséquence de la formule [9] :

$$\beta\beta' = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots \quad (239)$$

Donc, en particulier :

$$1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots = \prod_1^\infty (1+q^n)\ (*). \quad [10]$$

9. On a :

$$\alpha\alpha' = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - \cdots, \quad (46)$$

$$\alpha' = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots, \quad (50)$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots \quad (20)$$

Par conséquent,

$$(1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots)(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots) = \left[1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \cdots\right]^2. \quad [12]$$

10. Des formules (3), (6), on déduit

$$\alpha\beta = \prod_1^\infty (1 - q^{2n-1})(1 + q^{2n-1}) = \prod_1^\infty (1 - q^{4n-2}),$$

ou

$$\alpha\beta = \prod_1^\infty \left[1 - (q^2)^{2n-1}\right].$$

Le second membre est ce que devient le produit α, quand on y change q en q^2. En le désignant par α_1 (**), on a donc cette relation très simple :

$$\alpha\beta = \alpha_1 \quad [12]$$

(*) En effet, si n est *impair*, le produit des binômes $1 + q^n$ égale β ; et si n est *pair*, et différent de zéro, ce produit égale β' [(5), (6)].

(**) *Recherches*..., p. 10.

A cause de la formule d'Euler (7), il en résulte celle-ci :

$$\alpha_1\beta' = 1 \ (^*) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [13]$$

11. De même, par les formules (13), (5) :

$$\alpha'\beta' = \prod_1^\infty (1 - q^{4n}) = \prod_1^\infty \left[1 - (q^4)^n\right],$$

ou

$$\alpha'\beta' = \alpha'_1 \ (^{**}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [14]$$

12. Si, entre les équations [13] et [14], on élimine β', on trouve

$$\alpha' = \alpha_1\alpha'_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [15]$$

ou

$$\frac{\alpha'}{\alpha'_1} = \alpha_1, \qquad \frac{\alpha'_1}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha_1};$$

puis, à cause des développements connus :

$$\frac{1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - \cdots}{1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - \cdots} = 1 - \varphi_i(1)\,q^2 + \varphi_i(2)\,q^4 - \cdots, \quad \ldots \quad [16]$$

$$\frac{1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots}{1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots} = 1 + \varphi(1)q^2 + \varphi(2)q^4 + \varphi(3)q^6 + \cdots \quad \ldots \quad (17)$$

On peut déduire, de chacune des deux dernières identités, des théorèmes d'Arithmétique (***).

(*) Pour vérifier cette relation, il suffit de se rappeler que, d'après la formule (32),

$$\frac{1}{\alpha_1} = \sum_0^\infty \varphi(n)\,q^{2n},$$

et que

$$\beta' = \sum_0^\infty \varphi(n)\,q^{2n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

(**) Les identités [12], [13] auraient dû être trouvées il y a vingt-quatre ans. Mais les choses simples sont, très souvent, tardives.

(***) Congrès de Marseille, 1891.

12. *Remarques.* Dans l'égalité [13], mise sous la forme

$$\beta' = \frac{1}{\alpha_1},$$

remplaçons β' et α_1 par les *valeurs de définition* (6), (3). Nous aurons

$$(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^8)(1+q^{10})\cdots = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})(1-q^{14})(1-q^{18})\ldots};$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^8)(1+q^{10})\cdots = (1+q^2+q^4+q^6+\cdots)\times(1+q^6+q^{12}+q^{18}+\ldots)$$
$$\times(1+q^{10}+q^{20}+q^{30}+\cdots)\times(1+q^{14}+q^{28}+q^{42}+\cdots)\times(1+q^{18}+q^{36}+q^{54}+\cdots)\times\cdots;$$

ou encore, en supposant $q^2 = x$:

$$\left.\begin{array}{l}(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\cdots=(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)\times(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)\\ \times(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots)\times(1+x^7+x^{14}+x^{21}+\cdots)\times(1+x^9+x^{18}+\cdots)\times\cdots\end{array}\right\}\ [17]$$

Nous retrouvons donc ce théorème d'Arithmétique (*) :

Le nombre des décompositions de n, *en parties entières, inégales* [ou $\varphi(n)$], *égale le nombre des décompositions de* n *en parties appartenant aux progressions*

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9, ...,
3,	6,	9,	12,	15,	18,	21,	24,	27, ...,
5,	10,	15,	20,	25,	30,	35,	40,	45, ...,
7,	14,	21,	28,	35,	42,	49,	56,	63, ...,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

II. *Théorème d'Analyse.* x étant un nombre inférieur à l'unité, et P, Q désignant les produits indéfinis

$$(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ldots,$$

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots:$$

(*) *Recherches...*, p. 72.

1° *Le produit* PQ *égale* 1 ;

2° *Le produit indéfini* P, *dont tous les facteurs sont moindres que l'unité, n'a pas pour limite zéro;*

3° *Le produit* Q, *dont tous les facteurs surpassent l'unité, a une limite* (*).

13. *Autres identités.* Prenons les formules

$$\frac{2\omega}{\pi} = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots)^2, \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

$$\frac{2\omega}{\pi} = 1 + 4\left[\frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \cdots\right] \text{ (**)}, \quad \ldots \quad [18]$$

$$\frac{2\omega}{\pi} = 1 + 4\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}} \text{ (***)} \quad \ldots \ldots \quad [19]$$

Il en résulte, par des combinaisons simples,

$$(q + q^4 + q^9 + q^{16} + \cdots)(1 + q + q^4 + q^9 + \cdots) = \sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}} \quad \ldots \quad [20]$$

19. *Suite.* Soient encore les formules connues :

$$\frac{2\omega}{\pi} = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots)^2, \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

$$\frac{2\omega k'}{\pi} = (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \cdots)^2, \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

$$\frac{(1-k')\omega}{4\pi} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} \cdots \quad \ldots \ldots \quad (279)$$

Posant, pour abréger :

$$A = q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \cdots,$$

$$B = q^4 + q^{16} + q^{36} + \cdots;$$

(*) Cette remarque aurait pu être faite par l'illustre auteur des *Fundamenta.* L'a-t-elle été? Le 3° est démontré dans les *Mélanges mathématiques*, t. I, p. 170.

(**) *Mélanges mathématiques,* t. II, p. 119.

(***) *Mélanges,* t. II, p. 121.

on tire, des deux premières formules,

$$\frac{2\omega(1-k')}{\pi} = (2+4B)4A,$$

ou

$$\frac{\omega(1-k')}{4\pi} = (1+2B)A;$$

c'est-à-dire [à cause de l'égalité (279)] :

$$\frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \cdots = (q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots)\times(1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+\cdots)\ (^*). \quad [21]$$

Ce n'est pas tout. On a

$$\frac{\omega k}{2\pi} = \frac{\sqrt{q}}{1-q} - \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3} + \frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5} - \cdots\ (^{**});$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\frac{\omega_1 k_1}{2\pi} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \cdots$$

On a aussi

$$\frac{\omega_1 k_1}{2\pi} = q(1+q^4+q^{12}+q^{24}+q^{40}+\cdots)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Donc, par comparaison, et eu égard à l'égalité [21] :

$$(1+q^4+q^{12}+q^{24}+q^{40}+\cdots)^2 =$$
$$(1+q^8+q^{24}+q^{48}+\cdots)\times(1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+\cdots);$$

ou, plus simplement,

$$(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)^2 =$$
$$(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)\times(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)\ (^{***}). \quad . \quad . \quad . \quad [22]$$

(*) *Fundamenta*, p. 113.

(**) Quand j'ai trouvé cette identité, je la croyais nouvelle. Mais j'apprends, par une lettre de M. Baschwitz, qu'elle est due à l'illustre Dirichlet. (*Cours sur la théorie des Nombres*, publié par Dedekind.)

(***) Pour vérifier cette relation, indiquée par Legendre, il suffit de prendre les formules (20), (19), (18) et (17.

20. *Un développement de α.* Prenons deux formules dues à Cauchy (*) :

$$(1 + x)(1 + tx)(1 + t^2x)\dots(1 + t^{n-1}x) =$$

$$1 + \frac{1 - t^n}{1 - t}x + \frac{(1 - t^n)(1 - t^{n-1})}{(1 - t)(1 - t^2)}tx^2 + \frac{(1 - t^n)(1 - t^{n-1})(1 - t^{n-2})}{(1 - t)(1 - t^2)(1 - t^3)}t^3x^3 + \cdots,$$

$$\frac{1}{(1 + x)(1 + tx)\dots(1 + t^{n-1}x)} = 1 - \frac{1 - t^n}{1 - t}x + \frac{(1 - t^n)(1 - t^{n-1})}{(1 - t)(1 - t^2)}tx^2$$

$$- \frac{(1 - t^n)(1 - t^{n-1})(1 - t^{n-2})}{(1 - t)(1 - t^2)(1 - t^3)}t^3x^3 + \cdots \text{ (**)}$$

Il en résulte, par multiplication,

$$1 = \left[1 + \frac{1 - t^n}{1 - t}x + \frac{(1 - t^n)(1 - t^{n-1})}{(1 - t)(1 - t^2)}tx^2 + \cdots + t^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n\right]$$

$$\times \left[1 + \frac{1 - t^n}{1 - t}x + \frac{(1 - t^n)(1 - t^{n+2})}{(1 - t)(1 - t^2)}x^2 - \cdots\right] \text{ (***)};$$

et, si l'on suppose n infini :

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \left[1 + \dfrac{x}{1 - t} + \dfrac{tx^2}{(1 - t)(1 - t^2)} + \dfrac{t^3x^3}{(1 - t)(1 - t^2)(1 - t^3)} + \cdots\right] \\ \times \left[1 - \dfrac{x}{1 - t} + \dfrac{x^2}{(1 - t)(1 - t^2)} - \cdots\right] \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad [23]$$

Soient $t = x = q$: l'identité devient

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \left[1 + \dfrac{q}{1 - q} + \dfrac{q^3}{(1 - q)(1 - q^2)} + \dfrac{q^6}{(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3)} + \cdots\right] \\ \times \left[1 - \dfrac{q}{1 - q} + \dfrac{q^2}{(1 - q)(1 - q^2)} - \dfrac{q^3}{(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3)} + \cdots\right] \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad [24]$$

Dans les *Recherches*, on trouve

$$\beta\beta' = 1 + \frac{q}{1 - q} + \frac{q^5}{(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3)} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (239)$$

(*) *C. R.*, septembre 1843.

(**) Dans la seconde, nous avons changé x en $-x$...

(***) Les coefficients des puissances de x, dans le second facteur, sont des polynômes entiers. Voir *Lettres à quelques Mathématiciens*, p. 19.

Donc, à cause de $\alpha\beta\beta' = 1$:

$$\alpha = 1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots \qquad [25]$$

Telle est la formule que nous voulions établir.

21. *Suite.* En la rapprochant de celle-ci :

$$\alpha = 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^9)} + \cdots \qquad [7]$$

on a ce théorème d'Analyse, qui nous paraît remarquable :

Les séries

$$1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots$$

$$1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^9)} + \cdots$$

représentent la même fonction (*). Autrement dit, si on les suppose développées suivant :

$$1 + A_1 q + A_2 q^2 + A_3 q^3 + \cdots,$$

$$1 + B_1 q + B_2 q^2 + B_3 q^3 + \cdots;$$

on a :

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad A_3 = B_3,$$

De plus, ces deux séries représentent

$$\alpha = \sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q)^n; \qquad (39)$$

savoir :

$$\alpha = 1 - q - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 + 2q^8 - 2q^9 + 2q^{10} - 2q^{11} + 3q^{12} + \cdots \qquad [26]$$

(*) Conclusion formulée à la page 60 des *Notes sur la théorie des fractions continues ;* mais d'une manière moins *nette.*

22. *Vérifications.* Il n'est pas inutile, croyons-nous, de constater la concordance des valeurs [24], [7] et [23], limitées aux termes en q^{12}, par exemple.

La première vérification est facile. On trouve, en effet, par la formule [7] :

$$\begin{aligned}
\alpha = 1 &- q\,(1 + q^2 + q^4 + q^6 + q^8 + q^{10}) \\
&+ q^4\,(1 + q^2 + q^4 + q^6 + q^8 + q^{10})\,(1 + q^2 + q^8) \\
&- q^9\,(1 + q^2 + q^4 + q^6 + q^8 + q^{10})\,(1 + q^2 + q^8)\,(1 + q^9) \\
= 1 &- q\,(1 + q^2 + q^4 + q^6 + q^8 + q^{10}) + q^4\,(1 + q^2 + 2q^4 + 2q^6 + 3q^8) - q^9\,(1 + q^2) \\
= 1 &- q - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 + 2q^8 - 2q^9 + 2q^{10} - 2q^{11} + 3q^{12};
\end{aligned}$$

comme ci-dessus [26].

Le second calcul est plus pénible. Dans la formule [23], posons, pour abréger,

$$\alpha = 1 - Aq + Bq^2 - Cq^3 + Dq^4 - Eq^5 + Fq^6 - Gq^7 + Hq^8 - Kq^9 + Lq^{10} - Mq^{11} + Nq^{12};$$

de manière que :

$$\begin{aligned}
&A = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + q^8 + q^9 + q^{10} + q^{11} + q^{12}, \\
&B = A\,(1 + q^2 + q^4 + q^6 + q^8 + q^{10} + q^{12}), \\
&C = B\,(1 + q^3 + q^6 + q^9 + q^{12}), \\
&D = C\,(1 + q^4 + q^8 + q^{12}), \\
&E = D\,(1 + q^5 + q^{10}), \quad F = E\,(1 + q^6 + q^{12}), \quad G = F\,(1 + q^7), \quad H = G\,(1 + q^8), \\
&K = H\,(1 + q^9), \quad L = K\,(1 + q^{10}), \quad M = L\,(1 + q^{11}), \quad N = M\,(1 + q^{12});
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
&A = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + q^8 + q^9 + q^{10} + q^{11}, \\
&B = 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 3q^5 + 4q^6 + 4q^7 + 5q^8 + 5q^9 + 6q^{10}, \\
&C = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 5q^5 + 7q^6 + 8q^7 + 10q^8 + 12q^9, \\
&D = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 6q^5 + 9q^6 + 11q^7 + 15q^8, \\
&E = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 10q^6 + 13q^7, \\
&F = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6, \\
&G = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5, \\
&H = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4, \\
&K = 1 + q + 2q^2 + 3q^3, \quad L = 1 + q + 2q^2, \quad M = 1 + q, \quad N = 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha = 1 &- q(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + q^8 + q^9 + q^{10} + q^{11})\\
&+ q^2(1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 3q^5 + 4q^6 + 4q^7 + 5q^8 + 5q^9 + 6q^{10})\\
&- q^3(1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 5q^5 + 7q^6 + 8q^7 + 10q^8 + 12q^9)\\
&+ q^4(1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 6q^5 + 9q^6 + 11q^7 + 15q^8)\\
&- q^5(1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 10q^6 + 13q^7)\\
&+ q^6(1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6)\\
&- q^7(1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5)\\
&+ q^8(1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4) - q^9(1 + q + 2q^2 + 3q^3)\\
&+ q^{10}(1 + q + 2q^2) - q^{11}(1 + q) + q^{12};\end{aligned}$$

ou, après réductions,

$$\alpha = 1 - q - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 + 2q^8 - 2q^9 + 2q^{10} - 2q^{11} + 3q^{12} \ldots \quad [26]$$

23. *Développements de* β, β'. Si, dans la formule [25], on change q en $(-q)$, on a

$$\beta = 1 + \frac{q}{1+q} + \frac{q^2}{(1+q)(1+q^2)} + \frac{q^3}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)} + \cdots \quad [27]$$

On a aussi

$$\beta = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^9)} + \cdots (^*). \quad [28]$$

$$\frac{1}{\alpha_1} = \beta' = 1 + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^{12}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots \quad [29]$$

ou, par le changement de q^2 en q :

$$\frac{1}{\alpha} = \beta\beta' = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots \quad (259)$$

etc., etc. (**).

24. *Développement de* $\mathcal{L}(\alpha\alpha')$. Prenons l'identité, presque évidente,

$$\frac{x}{1-tx} + \frac{x^2}{1-tx^2} + \frac{x^3}{1-tx^3} + \cdots = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2}t + \frac{x^3}{1-x^3}t^2 + \cdots (^{***}). \quad [30]$$

(*) *Société Mathématique de France*, t. XIX, p. 148.

(**) Nous n'avons pu trouver, pour $\alpha\alpha'$, un développement analogue aux précédents.

(***) Elle m'a été communiquée par M. *Baschwitz*. Pour la vérifier, il suffit de développer, suivant les puissances de t, chacun des termes du premier membre.

Multipliant par dt, et intégrant, nous avons, pour $t = 1$:

$$-\mathcal{L}[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots] = \frac{x}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{1-x^3} + \cdots;$$

et, en particulier,

$$-\mathcal{L}(\alpha\alpha') = \frac{q}{1-q} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{2-q^2} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^3} + \cdots \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [31]$$

Le second membre, ordonné suivant les puissances de q, devient

$$q + \frac{1+2}{2}q^2 + \frac{1+3}{3}q^3 + \frac{1+2+4}{4}q^4 + \cdots$$

Donc

$$-\mathcal{L}(\alpha\alpha') = \sum_1^\infty \frac{\int n}{n} q^n \text{ (*)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [32]$$

IV (**).

Formules de M. Baschwitz.

25. Depuis quelques mois, mon honorable Correspondant (***) a trouvé de nombreuses relations entre des séries. Pour abréger, je citerai seulement celles-ci, qui me paraissent fort remarquables :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^4}{1-q^4} - \frac{q^5}{1-q^5} + \frac{q^6}{1-q^6} - \frac{q^7}{1-q^7} + \cdots \\ &\qquad = q + q^4 + q^9 + q^{16} + q^{25} + \cdots \text{ (IV)};\end{aligned}\right\} \quad [33]$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} - \frac{q^5}{1-q^{10}} - \frac{q^7}{1-q^{14}} + \frac{q^9}{1-q^{18}} - \frac{q^{11}}{1-q^{22}} - \cdots \\ &\qquad = q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \cdots\end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \quad [34]$$

(*) Cette expression est plus simple que la formule (360) des *Recherches ;* mais, au fond, les deux résultats s'accordent.

(**) Paragraphe rédigé pendant l'impression du Mémoire.

(***) M. B. habite Berlin : il est commis chez un banquier !

(IV) Dans le premier membre, un terme quelconque, $\frac{q^a}{1-q^a}$, est précédé de + ou de —, selon que a est composé d'un nombre *pair* ou d'un nombre *impair* de facteurs premiers. On fait abstraction de l'unité, qui n'est pas comptée comme nombre premier.

26. Pour appliquer la formule [33], supposons le premier membre développé suivant les puissances de q, et formons, par exemple, le coefficient C de q^{24}.

A cause de

$$24 = 2^3 . 3 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6 = 6 \times 4 = 8 \times 3 = 12 \times 2 = 24 \times 1,$$

il est clair que les seules fractions *efficaces* sont

$$\frac{q}{1-q}, \quad \frac{q^2}{1-q^2}, \quad \frac{q^3}{1-q^3}, \quad \frac{q^4}{1-q^4}, \quad \frac{q^6}{1-q^6}, \quad \frac{q^8}{1-q^8}, \quad \frac{q^{12}}{1-q^{12}}, \quad \frac{q^{24}}{1-q^{24}}.$$

Donc, conformément à la règle énoncée,

$$C = +1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 = 0 \ (^*).$$

27. Par analogie avec ce qu'on peut lire dans le paragraphe VI des *Recherches,* posons

$$f(q) = q + q^4 + q^9 + q^{16} + q^{25} + q^{36} + \cdots,$$

$$F(q) = q + q^9 + q^{25} + \cdots$$

Il est clair que

$$F(q) = f(q) - f(q^4), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [35]$$

puis

$$f(q) = F(q) + F(q^4) + F(q^{16}) + F(q^{64}) + \cdots \quad \ldots\ldots\ldots \quad [36]$$

(*) Encore afin d'abréger, nous avons considéré un cas particulier, simple. Mais, généralement, on a ce petit théorème d'Arithmétique, assez curieux, et dont la démonstration est facile :

Soit un nombre n, *non carré, et égal à* $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$

1° *On prend les décompositions suivantes :*

$$1 \times a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

$$a \times a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots, \quad b \times a^\alpha b^{\beta-1} c^\gamma \ldots, \quad c \times a^\alpha b^\beta c^{\gamma-1} \ldots, \ldots$$

$$a^2 \times a^{\alpha-2} b^\beta c^\gamma \ldots, \quad ab \times a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^\gamma \ldots, \quad ac \times a^{\alpha-1} b^\beta c^{\gamma-1} \ldots, \quad bc \times a^\alpha b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2° *On remplace la première ligne par* $+1$; *puis chacun des termes de la deuxième, par* -1; *puis chacun des termes de la troisième, par* $+1$; *et ainsi de suite.*

Cela posé, le total est nul.

Pour démontrer la relation [35], appliquons les formules connues :

$$f(q) = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\right),$$

$$f(q^4) = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}\right),$$

$$F(q) = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} - \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}}\right] \text{ (*)}.$$

Il en résulte, au lieu de l'égalité à vérifier,

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} - \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}} = 2\left[\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} - \sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}\right];$$

ou, à cause des valeurs connues (**), d'où résulte

$$\sqrt{\omega_2} = \frac{1 + \sqrt{k'}}{2}\sqrt{\omega}:$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2k'} = 2\left[\sqrt{2} - (1 + k')\frac{1}{\sqrt{2}}\right];$$

ce qui est identique.

28. *Remarques.* I. Les égalités [33], [34] rentrent l'une dans l'autre.

II. D'après la seconde, *les quantités*

$$\left[\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} - \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}}\right], \left[\sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}} - \sqrt{\frac{2\omega_2 k'_2}{\pi}}\right], \left[\sqrt{\frac{2\omega_4}{\pi}} - \sqrt{\frac{2\omega_4 k'_4}{\pi}}\right], \ldots$$

forment une série convergente, dont la somme est

$$2\left(-1 + \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\right) \text{ (***)}.$$

(*) *Recherches*..., pp. 2 et 10.

(**) *Recherches*..., p. 10.

(***) Proposition analogue à celle qui est établie dans les *Recherches*, p. 74. Le dernier énoncé peut être simplifié; mais nous ne pouvons nous arrêter à ces détails.

V

Lettre à M. Hermite (extrait).

I.

Dans votre *Cours de la Sorbonne* (première édition, p. 99) vous donnez ce résultat *connu* (*) :

$$\mathcal{L}[a\Gamma(a)] = \sum_1^\infty \left[a\mathcal{L}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \mathcal{L}\left(1+\frac{a}{n}\right)\right],$$

lequel équivaut à

$$\mathcal{L}\Gamma(x+1) = \sum_1^\infty \left[x\,\mathcal{L}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right) - \mathcal{L}\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)\right];$$

ou, encore, à

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty \left[(x-1)\mathcal{L}\left(1+\frac{2}{\lambda}\right) - \mathcal{L}\left(1+\frac{x-1}{\lambda}\right)\right]; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

et vous ajoutez (ou M. Andoyer ajoute) :

« *Cette série est celle de Gudermann.* » C'est là une petite erreur (**), que j'ai partagée un instant (***). La série de Gudermann est

$$\sum_0^\infty \left[\left(x+\lambda+\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}\frac{x+\lambda+1}{x+\lambda} - 1\right] \text{ (IV)} \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(*) Dans les *Recherches sur la constante* G, page 23, on lit :

$$\Gamma(x+1) = \prod_1^\infty \frac{(n+1)^x}{n^{x-1}(n+x)};$$

ce qui ne diffère pas de votre formule.

(**) *Recherches sur la constante* G, p. 62. Elle se trouve, avec une autre notation, dans le célèbre Mémoire de Binet.

(***) Voyez ma lettre, imprimée, du 12 novembre dernier.

(IV) SERRET, *Notes sur Lacroix*, p. 310; CATALAN, *Recherches sur la constante* G, p. 28. Binet cite Gudermann (*Mémoire sur les intégrales eulériennes*, p. 137), sans donner la série (2).

II.

Vous connaissez l'équation

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}\frac{x+1}{x} - 1 \text{ (*)}, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$\varpi(x)$ étant la fonction de Binet.

Il en résulte, immédiatement,

$$\varpi(x) = \sum_0^\infty \left[\left(x + \lambda + \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}\frac{x+\lambda+1}{x+\lambda} - 1\right]. \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Ainsi, *la fonction de Binet est égale à la série de Gudermann* (**).

On a, entre les fonctions $\varphi(x)$ et $\varpi(x)$, cette relation, également connue :

$$\varphi(x) - \varpi(x) = \frac{1}{2} \mathcal{L}(2\pi) + \left(x - \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}x - x(\mu). \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Soient S_1 la somme de la série (1), S_2 la somme de la série de Gudermann. On aurait donc, suivant vous,

$$S_1 = S_2.$$

Or, d'après l'égalité (5),

$$S_1 - S_2 = \frac{1}{2} \mathcal{L}(2\pi) + \left(x - \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}x - x,$$

ou

$$S_1 - S_2 = \mathcal{L}\left[\frac{x^{x-\frac{1}{2}}}{e^x} \sqrt{2\pi}\right].$$

Cette quantité croît indéfiniment avec x. Donc, etc.

III.

En partant de la formule de Wallis, Serret est parvenu à la relation

$$\mathcal{L}\Gamma(x+1) = \frac{1}{2} \mathcal{L}(2\pi) - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}x + \sum_0^\infty \left[\left(x + n + \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}\left(1 + \frac{1}{x+n}\right) - 1\right] \text{(***)}.$$

(*) Antérieurement à 1882, ce théorème n'a été remarqué, je crois, par aucun Géomètre, pas même par le savant Binet.

(**) *Recherches sur la constante* G, p. 28, etc.

(***) *Notes sur Lacroix*, p. 348. La notation $\varphi(x)$, employée par Serret, désigne une fonction assez mal définie, me semble-t-il, et toute différente de $\mathcal{L}\Gamma(x)$.

On peut l'écrire ainsi :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(2\pi) - (x-1) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathcal{L}(x-1) + \sum_{0}^{\infty}\left[\left(x+\lambda-\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}\frac{x+\lambda}{x+\lambda-1} - 1\right]. \quad (6)$$

Le premier terme de la série est

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\mathcal{L}\frac{x}{x-1} - 1.$$

Donc, en réduisant :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(2\pi) - x + \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathcal{L}(x) + \sum_{1}^{\infty}\left(x+\lambda-\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}\frac{x+\lambda}{x+\lambda-1} - 1;$$

puis, par comparaison avec la relation (5) :

$$\varpi(x) = \sum_{1}^{\infty}\left[\left(x+\lambda-\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}\frac{x+\lambda}{x+\lambda-1} - 1\right].$$

On aurait donc ce théorème :

La fonction de Binet égale la série de Gudermann, abstraction faite du premier terme.

Cette conséquence de la formule de Serret est en contradiction avec le théorème énoncé précédemment. Or, celui-ci est vrai; donc la formule de Serret est fausse (*).

La combinaison des valeurs de $\varpi(x)$, $\varphi(x)$, donne cette intégrale définie, assez remarquable, et que je ne trouve pas dans les Tables de M. Bieren de Haan :

$$\int_0^{\infty}\frac{\text{arc tg}\, x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}\,dx = \frac{1}{4}\mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (^{**}).$$

(*) Elle résulte, probablement, d'une simple inadvertance.

(**) *Recherches*..., p. 18.

IV.

Autre petit détail. Dans la quatrième édition de votre *Cours,* vous considérez la série

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \cdots;$$

et vous dites :

« *La série est toujours convergente, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de* a. »

Il y a exception, évidemment, pour

$$a = 0, \qquad a = -1, \qquad a = -2, \cdots$$

Voyez le texte de ma lettre du 18 novembre.

V.

Dans son dernier Mémoire imprimé (dont je vous ai déjà entretenu), B. donne la formule

$$\mathrm{B}(p, p) = \frac{1}{p \cdot 2^p} \prod_1^\infty \left[1 - \frac{p^2 - p}{(2a + p - 1)(2n + p)}\right]. \qquad (7)$$

Elle est *inexacte*. En effet, $p = 1$ la réduit à $\mathrm{B}(1, 1) = \frac{1}{2}$.

Or,

$$\mathrm{B}(1, 1) = \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(2)} = 1.$$

De mon côté, j'ai trouvé

$$\mathrm{B}(p, p) = \frac{1}{p} \prod_0^\infty \frac{(1+\lambda)(2p+\lambda)}{(p+\lambda)(1+p+\lambda)} (^*). \qquad (8)$$

Après discussion, nous avons reconnu, B. et moi, que le facteur 2^p doit être remplacé par 2^{p-1}.

(*) *Intégrales eulériennes ou elliptiques,* p. 10.

Ainsi, semble-t-il,

$$B(p, p) = \frac{1}{p \cdot 2^{p-1}} \prod_1^\infty \frac{2\lambda(2\lambda + 2p - 1)}{(2\lambda + p - 1)(2\lambda + p)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7^{bis})$$

Mais, si l'on suppose $p = \frac{1}{2}$, cette formule *rectifiée* devient

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \prod_1^\infty \frac{4\lambda^2}{\left(2\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(2\lambda + \frac{1}{2}\right)},$$

ou

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \prod_1^\infty \frac{16\lambda^2}{16\lambda^2 - 1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdots$$

Or, le second membre représente $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ (*).

Il y a donc contradiction.

Remarque. Par la formule (8), on trouve

$$\pi = 2 \prod_0^\infty \frac{(\lambda + 1)^2}{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{3}{2}\right)},$$

ou

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots,$$

formule de *Wallis*.

Liége, 7 août 1892.

ADDITIONS (**).

A

A la page 10 du Mémoire intitulé : *Intégrales eulériennes ou elliptiques,* j'ai donné la formule

$$B(p, q) = \frac{p + q}{pq(1 + q)} \prod_1^\infty \frac{(\lambda + 1)(\lambda + p + q)}{(\lambda + p)(\lambda + q + 1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

(*) *Sur la constante d'Euler, etc.*, p. 136.

(**) Rédigées pendant l'impression.

Elle manque de *symétrie ;* mais on peut l'écrire ainsi :

$$B(p, q) = \frac{p+q}{pq} \prod_{1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda+p+q)}{(\lambda+p)(\lambda+q)}; \quad \ldots \ldots \quad (28^{\text{bis}})$$

et celle-ci résulte, très facilement, de

$$\Gamma(p+1) = \prod_{1}^{\infty} \frac{(\lambda+1)^{p}}{\lambda^{p-1}(\lambda+q)} \text{ (*)} \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

En effet :

$$p\Gamma(p) = \prod_{1}^{\infty} \frac{(\lambda+1)^{p}}{\lambda^{p-1}(\lambda+p)},$$

$$q\Gamma(q) = \prod_{1}^{\infty} \frac{(\lambda+1)^{q}}{\lambda^{q-1}(\lambda+q)},$$

$$(p+q)\Gamma(p+q) = \prod_{1}^{\infty} \frac{(\lambda+1)^{p+q}}{\lambda^{p+q-1}(\lambda+p+q)};$$

puis, par division,

$$\frac{pq}{p+q} B(p, q) = \prod_{1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda+p+q)}{(\lambda+p)(\lambda+q)};$$

etc.

28 septembre 1892 (**).

(*) Page 9 du Mémoire.

(**) La page 11 contient quelques fautes typographiques :

au lieu de $\dfrac{B(p, 1)}{B\left(p, \frac{1}{2}\right)}$, *lisez* $\dfrac{B(p, p)}{B\left(p, \frac{1}{2}\right)}$;

au lieu de $\prod_{0}^{\infty} \dfrac{(1+\lambda)(3+2\lambda)}{(p_1+2\lambda)(2+\lambda)}$, *lisez* $\prod_{0}^{\infty} \dfrac{(1+\lambda)(3+2\lambda)}{(1+2\lambda)(2+\lambda)}$;

etc.

B

On trouve, dans les *Recherches* (p. 114), la double égalité

$$\frac{(1-k')\omega}{4\pi}=\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^3}{1-q^6}+\frac{q^5}{1-q^{10}}-\cdots=\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^{4n+1} \quad . \; . \; . \quad (414)$$

D'un autre côté, on a vu, ci-dessus, que

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{q}{1-q^2}-\dfrac{q^3}{1-q^6}+\dfrac{q^5}{1-q^{10}}-\cdots \\ =(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots)\times(1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+\cdots)\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad [21]$$

Conséquemment,

$$(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots)\times(1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+\cdots)=\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^{4n+1}. \quad . \quad [57]$$

Cette relation peut servir à démontrer un beau théorème de Fermat. En effet, si $4n+1$ est un nombre premier, p, ε_{4n+1} *égale* 2 (*). Supprimant, dans le premier membre, la série

$$q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots,$$

on a

$$(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots)\times(q^4+q^{16}+q^{36}+\cdots)=\sum q^p \quad . \; . \; . \; . \quad [58]$$

D'après cette dernière égalité (**), dans laquelle $p=5, 13, 17, 29, \ldots$:

Tout nombre premier $4n+1$ *est, d'une seule manière, la somme de deux carrés*. C. Q. F. D. (***).

(*) *Recherches*..., p. 75.

(**) *Égalité* n'est peut-être pas le mot propre; car il n'y a pas *identité* entre les deux membres. Par exemple, le premier membre contient q^{9+16}, terme qui n'entre pas dans le second membre.

(***) On peut consulter, relativement à ce théorème capital, deux remarquables Notes de Serret et de M. Hermite (*Journal de Liouville*, 1848, pp. 12 et 15).

C

Au dernier moment, M. Baschwitz me communique, par une lettre du 9 mars 1893, la formule

$$\frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^3} - \frac{q^5}{1-q^5} + \frac{q^6}{1-q^6} - \cdots = q \ (^*) \quad . \quad . \quad . \quad [39]$$

Très facile à démontrer, elle n'en est pas moins fort curieuse.

(*) Dans la fraction $\frac{q^a}{1-q^a}$, a est composé de facteurs premiers *inégaux*. La *loi des signes* est la même que dans les égalités [33], [34].

P. S. — L'identité [39] a été donnée, en 1851, par M. *Tchébychef*. (*Journal de Liouville*, p. 340.)