INTÉGRALES EULÉRIENNES OU ELLIPTIQUES;

PAR

Eugène CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté à la Classe des Sciences, dans la séance du 6 février 1892.)

INTÉGRALES EULÉRIENNES OU ELLIPTIQUES.

I

Une vieille formule.

1. En 1839, dans le *Journal de Liouville,* j'ai indiqué l'application suivante, très particulière, d'une méthode relative aux *intégrales multiples :*

$$A = \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{2\pi}} - \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Pour vérifier cette formule (1), on peut poser

$$x = \theta^{\frac{1}{4}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

En effet, l'intégrale A devient

$$\int_0^1 \theta^{-\frac{3}{4}} d\theta \left(1 - \theta^{\frac{1}{2}}\right) (1 - \theta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\int_0^1 \theta^{-\frac{3}{4}} d\theta (1 - \theta)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{4}} d\theta (1 - \theta)^{-\frac{1}{2}} \ (^*);$$

ou

$$A = \frac{1}{4}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}\right];$$

(*) A cause de

$$\sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}} = \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

ou, plus simplement,

$$A = \sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right]. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Mais, par une formule d'Euler, bien connue,

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

Donc enfin,

$$A = \sqrt{\pi}\left[\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\pi\sqrt{2}} - \frac{\pi\sqrt{2}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}\right] = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{2\pi}} - \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2} \quad \ldots \quad (1)$$

2. *Suite.* On sait, au moins depuis Legendre, que

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 = 4\sqrt{\pi}\,F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \text{ (*)}. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Par conséquent, la formule (1) peut être écrite ainsi :

$$\int_0^1 dx\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \frac{F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{2}} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

3. Ce n'est pas tout.

Le beau théorème de Legendre, exprimé par l'équation

$$F_1(b)E_1(c) + E_1(b)F_1(c) - F_1(b)F_1(c) = \frac{\pi}{2},$$

donne, si l'on prend $b = c = \sqrt{\frac{1}{2}}$,

$$2F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)E_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \left[F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right]^2 = \frac{\pi}{2}. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

(*) *Mélanges mathématiques*, t. I, p. 395.

Éliminant π, entre les égalités (5) et (6), on trouve

$$\int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \sqrt{2}\left[F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - E_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right]; \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

résultat simple et connu (*).

II

Produit de deux intégrales eulériennes.

4. Après avoir lu l'ancienne Note citée, un homme que je crois fort à plaindre (**), a considéré les intégrales

$$B = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \qquad C = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Ayant développé les différentielles, il a calculé, *numériquement*, B et C; et il est arrivé à ces deux relations, très simples :

$$B - C = A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$BC = \frac{\pi}{4}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

La première est évidente. Pour vérifier la seconde, il suffit d'employer la transformation (2). On trouve ainsi :

$$B = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}, \qquad C = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

(*) Bierens de Haan (seconde édition), T. 35.

(**) Je ne l'ai jamais vu. Ses lettres, en général très incohérentes, portaient, le plus souvent, la signature *Albert*.

5. *Généralisation.* Soient

$$P = \int_0^1 x^p dx \left(1 - x^n\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad Q = \int_0^1 x^q dx \left(1 - x^n\right)^{-\frac{1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Posant

$$x = \theta^{\frac{1}{n}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

on a :

$$P = \frac{1}{n} \int_0^1 \theta^{\frac{p+1}{n}-1} d\theta \left(1 = \theta\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} \mathrm{B}\left(\frac{p+1}{n}, \frac{1}{2}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$Q = \frac{1}{n} \int_0^1 \theta^{\frac{q+1}{n}-1} d\theta \left(1 - \theta\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} \mathrm{B}\left(\frac{q+1}{n}, \frac{1}{2}\right); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

puis, à cause de

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \mathrm{B}\left(\frac{p+1}{n}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{n} + \frac{1}{2}\right)}, \text{ etc.} :$$

$$PQ = \frac{\pi}{n^2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{n} + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{n} + \frac{1}{2}\right)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

6. *Suite.* Si l'on prend

$$q = p + \frac{n}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

d'où résulte

$$\frac{q+1}{n} = \frac{p+1}{n} + \frac{1}{2},$$

la relation (16) se réduit à

$$PQ = \frac{\pi}{n^2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{n}+1\right)};$$

c'est-à-dire, à

$$PQ = \frac{\pi}{n(p+1)}. \qquad (18)$$

7. Plus généralement, soit

$$\frac{q+1}{n} = \frac{p+1}{n} + \frac{1}{2} + k, \qquad (19)$$

k étant un nombre entier, différent de zéro. La fraction qui entre dans l'égalité (16) est

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{n}+\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{n}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{n}+1+k\right)}.$$

Or :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{n}+1+k\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{n}\right)} = \frac{p+1}{n}\left(\frac{p+1}{n}+1\right)\cdots\left(\frac{p+1}{n}+k\right),$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{n}+\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{n}+\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{p+1}{n}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{n}+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{p+1}{n}+\frac{2k-1}{2}\right),$$

Donc

$$PQ = \frac{\pi}{n^2} \frac{\left(\frac{p+1}{n}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{n}+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{p+1}{n}+\frac{2k-1}{2}\right)}{\frac{p+1}{n}\left(\frac{p+1}{n}+1\right)\cdots\left(\frac{p+1}{n}+k\right)} \qquad (20)$$

8. *Application.* Soient : $p = 5$, $n = 8$, $k = 3$; et, par conséquent, $q = 33$.

D'après les formules (14), (15) :

$$P = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}, \qquad Q = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{19}{4}\right)};$$

puis

$$PQ = \frac{\pi}{64} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{17}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{19}{4}\right)} = \frac{\pi}{64} \frac{\frac{13}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{4}}{\frac{15}{4}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}};$$

ou enfin

$$PQ = \frac{\pi}{16} \frac{13}{77}.$$

C'est le résultat auquel conduit la formule (20).

9. *Valeur de* $E_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. Legendre a donné, peut-être après Euler, l'expression de $F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, en fonction de $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$; savoir :

$$F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

J'ignore si cet illustre Géomètre a résolu la même question pour l'intégrale complète $E_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. Du reste, le second problème se ramène, immédiatement, au premier.

En effet,

$$2F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)E_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \left[F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right]^3 = \frac{\pi}{2}; \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

donc

$$E_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \frac{\pi}{4F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)},$$

ou

$$E_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 + \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}. \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Si l'on a égard à la relation

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\pi\sqrt{2},$$

on transforme ainsi le second membre :

$$\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\pi\sqrt{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}+\frac{\pi\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\pi\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{8}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)};$$

d'où résulte enfin

$$E_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2\pi}}{8}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}+4\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right]; \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

expression assez simple (*).

III

Produits indéfinis.

10. Dans les *Recherches sur la constante* G (**), on trouve les formules importantes :

$$\Gamma(p+1)=\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{(\lambda+1)^p}{\lambda^{p-1}(\lambda+p)} \; (***), \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

$$\frac{B(p,q+m)}{B(q,p+m)}=\prod_0^{\infty}\frac{(q+\lambda)(p+m+\lambda)}{(p+\lambda)(q+m+\lambda)} \; (^{\text{IV}}). \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Il est facile de simplifier la seconde, et d'en conclure le développement de $B(p, q)$, en produit indéfini.

(*) Elle m'a été suggérée par l'infortuné Albert; mais il était arrivé à un résultat inexact.
(**) *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, 1882.
(***) Page 23. p est une quantité quelconque, *positive*; λ est un nombre entier.
(IV) Page 14. m, p et q sont *positifs*.

En effet, par un théorème d'Euler, le premier membre équivaut à $\frac{B(p,m)}{B(q,m)}$. Ainsi

$$\frac{B(p, m)}{B(q, m)} = \prod_0^\infty \frac{(q+\lambda)(p+m+\lambda)}{(p+\lambda)(q+m+\lambda)}. \qquad (25)$$

Dans cette égalité, prenons $q = 1$. Le diviseur $B(1, m) = \int_1^0 \theta^{m-1} d\theta = \frac{1}{m}$. Donc, par le changement de m en q :

$$B(p, q) = \frac{1}{q} \prod_0^\infty \frac{(1+\lambda)(p+q+\lambda)}{(p+\lambda)(1+q+\lambda)}; \qquad (26)$$

formule que nous nous proposions de trouver.

11. *Suite.* Un simple changement de lettres donne

$$B(p, q) = \frac{1}{p} \prod_0^\infty \frac{(1+\lambda)(p+q+\lambda)}{(q+\lambda)(1+p+\lambda)};$$

puis, par division,

$$\frac{p}{q} = \prod_0^\infty \frac{(p+\lambda)(1+q+\lambda)}{(q+\lambda)(1+p+\lambda)}, \qquad (27)$$

identité presque évidente.

12. *Remarque.* Dans la formule (26), le premier facteur du produit indéfini est $\frac{p+q}{q(1+p)}$. Ainsi

$$B(p, q) = \frac{p+q}{pq(1+q)} \prod_1^\infty \frac{(1+\lambda)(p+q+\lambda)}{(p+\lambda)(1+q+\lambda)}. \qquad (28)$$

IV

Développements remarquables.

13. Si, dans la relation (25), on fait $m = p$, $q = \frac{1}{2}$, elle devient

$$\frac{B(p, p)}{B\left(p, \frac{1}{2}\right)} = \prod_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)(2p+\lambda)}{(p+\lambda)\left(p+\frac{1}{2}+\lambda\right)} \qquad (29)$$

Mais, d'après un célèbre théorème de Legendre,

$$\frac{B(p, 1)}{B\left(p; \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2^{2p-1}} \text{ (*)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \tag{30}$$

Conséquemment,

$$2^{2p-1} = \prod_0^\infty \frac{(p + \lambda)(2p + 1 + 2\lambda)}{(1 + 2\lambda)(2p + \lambda)}; \quad \ldots \ldots \ldots \tag{31}$$

et, en particulier,

$$2 = \prod_0^\infty \frac{(1 + \lambda)(3 + 2\lambda)}{(p + 2\lambda)(2 + \lambda)}. \quad \ldots \ldots \ldots \tag{32}$$

14. La formule (31) donne

$$2^{2p+1} = \prod_0^\infty \frac{(p + 1 + \lambda)(2p + 3 + 2\lambda)}{(1 + 2\lambda)(2p + 2 + \lambda)} \quad \ldots \ldots \ldots \tag{31 bis}$$

Donc, par division,

$$4 = \prod_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(p + 1 + \lambda)(2p + 3 + 2\lambda)(2p + \lambda)}{(p + \lambda)(2p + 1 + \lambda)(2p + 2 + \lambda)}. \quad \ldots \ldots \tag{33}$$

Dans cette nouvelle relation, *le second membre est indépendant du paramètre* p; ce qui est assez remarquable.

En particulier, si $p = 1$:

$$4 = \prod_0^\infty \frac{(2 + \lambda)^2 (5 + 2\lambda)}{(1 + \lambda)(3 + \lambda)(4 + \lambda)} \text{ (**)}. \quad \ldots \ldots \ldots \tag{34}$$

15. Dans l'égalité

$$\frac{B(p, p)}{B\left(p, \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2^{2p-1}}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \tag{30}$$

(*) SERRET, *Notes sur le Calcul intégral de Lacroix*, p. 328.

(**) Si, λ ayant une valeur donnée, *finie*, on fait croître p indéfiniment, la fraction considérée *tend vers l'unité*. Nous pourrions discuter ce cas singulier; mais nous nous rappelons un vers de Boileau.

prenons $p = \frac{1}{2} \pm k$ (*); nous aurons :

$$\frac{B\left(\frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}+k\right)}{B\left(\frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2^{2k}},$$

$$\frac{B\left(\frac{1}{2}-k, \frac{1}{2}-k\right)}{B\left(\frac{1}{2}-k, \frac{1}{2}\right)} = 2^{2k};$$

et, par conséquent,

$$\frac{B\left(\frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}+k\right)}{B\left(\frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{B\left(\frac{1}{2}-k, \frac{1}{2}-k\right)}{B\left(\frac{1}{2}-k, \frac{1}{2}\right)} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Autrement dit : *la fraction* $\frac{B\left(\frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}+k\right)}{B\left(\frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}\right)}$ *se change en son inverse, quand on y remplace* k *par* — k $\left(k < \frac{1}{2}\right)$.

16. De la formule (28), on déduit

$$\frac{B(p, q)}{B(p', q')} = \frac{p+q}{p'+q'} \frac{p'q'}{pq} \prod_1^\infty \frac{(p+q+\lambda)(p'+\lambda)(q'+\lambda)}{(p'+q'+\lambda)(p+\lambda)(q+\lambda)};$$

et, si

$$p + q = p' + q' = s : \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

$$\frac{B(p, q)}{B(p', q')} = \frac{p'q'}{pq} \prod_0^\infty \frac{(p'+\lambda)(q'+\lambda)}{(p+\lambda)(q+\lambda)};$$

ou, plus simplement,

$$\frac{B(p, q)}{B(p', q')} = \prod_0^\infty \frac{(p'+\lambda)(q'+\lambda)}{(p+\lambda)(q+\lambda)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

(*) Le nombre k doit être inférieur à $\frac{1}{2}$.

17. *Suite.* A cause de la condition (36), le premier membre de la dernière égalité est

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p')\,\Gamma(q')}.$$

Si s est un nombre *entier*, le produit des fractions $\frac{p'+\lambda}{p+\lambda}$, entrant dans le second membre, est

$$\prod_0^\infty \frac{p'+\lambda}{p+\lambda} = \prod_0^{s-1} \times \prod_s^\infty$$

$$= \frac{p'(p'+1)(p'+2)\ldots(p'+s-1)}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+s-1)} \prod_0^\infty \frac{p'+\lambda}{p+\lambda} = \frac{\Gamma(p'+s)\,\Gamma(p)}{\Gamma(p+s)\,\Gamma(p')} \times \prod_s^\infty \frac{p'+\lambda}{p+\lambda}.$$

De même,

$$\prod_0^\infty \frac{q'+\lambda}{q+\lambda} = \frac{\Gamma(q'+s)}{\Gamma(q+s)}\,\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q')} \prod_0^\infty \frac{q'+\lambda}{q+\lambda}.$$

Donc la formule (37) devient, après suppression d'un facteur,

$$1 = \frac{\Gamma(p'+s)}{\Gamma(p+s)}\,\frac{\Gamma(q'+s)}{\Gamma(q+s)} = \prod_s^\infty \frac{(p'+\lambda)(q'+\lambda)}{(p+\lambda)(q+\lambda)},$$

ou

$$\frac{\Gamma(p+s)\,\Gamma(q+s)}{\Gamma(p'+s)\,\Gamma(q'+s)} = \prod_s^\infty \frac{(p'+\lambda)(q'+\lambda)}{(p+\lambda)(q+\lambda)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Si, par exemple, $p=3$, $q=9$, $p'=5$, $q'=7$, $s=12$:

$$\prod_{12}^\infty \frac{(5+\lambda)(7+\lambda)}{(3+\lambda)(9+\lambda)} = \frac{\Gamma(15)\,\Gamma(21)}{\Gamma(17)\,\Gamma(19)} = \frac{19}{12}.$$

18. Dans les formules (34), (37), supposons $s=1$; d'où résultent :

$$q = 1 - p, \qquad q' = 1 - p'.$$

Nous trouvons

$$\frac{B(p, 1-p)}{B'(p', 1-p')} = \prod_0^\infty \frac{(p'+\lambda)(1-p'+\lambda)}{(p+\lambda)(1-p+\lambda)}.$$

Le premier membre égale

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)}{\Gamma(p')\,\Gamma(1-p')};$$

ou, d'après un théorème d'Euler, déjà cité : $\frac{\sin p'\pi}{\sin p\pi}$. Conséquemment,

$$\frac{\sin p'\pi}{\sin p\pi} = \prod_0^\infty \frac{(p'+\lambda)(1-p'+\lambda)}{(p+\lambda)(1-p+\lambda)}, \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

ou

$$\frac{\sin p'\pi}{\sin p\pi} = \frac{p'(1-p')}{p(1-p)} \times \frac{(p'+1)(2-p')}{(p+1)(2-p)} \times \frac{(p'+2)(3-p')}{(p+2)(3-p)} \times \cdots \quad \ldots \quad (40)$$

Ainsi qu'on pouvait le prévoir, cette égalité est *identique,* en vertu des développements connus :

$$\sin p'\pi = p'\pi(1-p'^2)\left(1-\frac{p'^2}{4}\right)\left(1-\frac{p'^2}{9}\right)\left(1-\frac{p'^2}{16}\right)\cdots,$$

$$\sin p\pi = p\pi(1-p^2)\left(1-\frac{p^2}{4}\right)\left(1-\frac{p^2}{9}\right)\left(1-\frac{p^2}{16}\right)\cdots$$

19. *Un développement de* $\frac{\pi}{4}$. Reprenons les formules

$$B = \frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}, \qquad C = \frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}, \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

$$BC = \frac{\pi}{4}; \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

d'où résulte

$$4\pi = B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

En général,

$$B(p, q) = \frac{1}{q}\prod_0^\infty \frac{(1+\lambda)(p+q+\lambda)}{(p+\lambda)(1+q+\lambda)}. \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

Donc :

$$B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 2\prod_0^\infty \frac{(1+\lambda)\left(\frac{3}{4}+\lambda\right)}{\left(\frac{1}{4}+\lambda\right)\left(\frac{3}{2}+\lambda\right)},$$

$$B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = 2\prod_0^\infty \frac{(1+\lambda)\left(\frac{5}{4}+\lambda\right)}{\left(\frac{3}{4}+\lambda\right)\left(\frac{3}{2}+\lambda\right)};$$

puis

$$\frac{\pi}{4} = \prod_0^\infty \frac{(1+\lambda)^2(3+4\lambda)}{(3+2\lambda)^2(1+4\lambda)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Tel est le développement cherché. On peut en trouver une infinité d'autres (*).

20. *Simplification d'une formule.* Il ne sera pas inutile de vérifier, *a posteriori*, quelqu'une des égalités précédentes; par exemple, celle-ci :

$$4 = \prod_0^\infty \frac{(p+1+\lambda)(2p+\lambda)(2p+3+2\lambda)}{(p+\lambda)(2p+2+\lambda)(2p+1+2\lambda)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

A cet effet, représentons par P_1, P_2, P_3, ... les produits que l'on obtient en prenant, dans le second membre, 1, 2, 3 ... facteurs. On trouve ainsi : pour $\lambda = 0$,

$$P_1 = 2\frac{(p+1)(2p+3)}{(2p+1)(2p+2)},$$

pour $\lambda = 1$,

$$P_2 = 2\frac{(p+2)(2p+5)}{(2p+2)(2p+3)};$$

pour $\lambda = 2$,

$$P_3 = 2\frac{(p+3)(2p+7)}{(2p+3)(2p+4)};$$

pour $\lambda = 3$,

$$P_4 = 2\frac{(p+4)(2p+9)}{(2p+4)(2p+5)}.$$

Ces valeurs sont comprises dans la formule

$$P_{\lambda+1} = 2\frac{(p+\lambda+1)(2p+2\lambda+3)}{(2p+\lambda+1)(2p+\lambda+2)} \text{ (**)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Ainsi, l'égalité (33) est réductible à

$$2 = \lim \frac{(p+1+\lambda)(2p+3+2\lambda)}{(2p+1+\lambda)(2p+2+\lambda)}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

et celle-ci est évidente.

(*) *Recherches sur la constante* G, p. 15.

(**) Au moyen du procédé connu, on prouve qu'elle est générale.

21. *Remarque.* Dans le second membre de l'égalité (33), le produit des λ premiers facteurs est

$$L = \frac{(p+1)\,2p\,(2p+3)}{p\,(2p+2)\,(2p+1)} \times \frac{(p+2)\,(2p+1)\,(2p+5)}{(p+1)\,(2p+3)\,(2p+3)} \times \cdots$$
$$\times \frac{(p+\lambda)\,(2p+\lambda-1)\,(2p+2\lambda+1)}{(p+\lambda-1)\,(2p+\lambda+1)\,(2p+2\lambda-1)}.$$

D'après ce que l'on vient de voir, ce produit est, *identiquement*, égal à P_λ. En d'autres termes,

$$L = 2\frac{(p+\lambda)\,(2p+1+2\lambda)}{(2p+\lambda)\,(2p+1+\lambda)} \text{(*)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

22. *Autre limite.* Reprenons la formule (31^{bis}), écrite ainsi :

$$2^{2p+1} = \prod_0^\infty \frac{(p+1+\lambda)\left(p+\frac{3}{2}+\lambda\right)}{(1+2\lambda)\left(p+1+\frac{\lambda}{2}\right)}.$$

Soient P_1, P_2, P_3, ... les valeurs successives du produit. Opérant comme au paragraphe 20, on trouve :

$$P_1 = \frac{p+\frac{3}{2}}{1}, \qquad P_2 = \frac{(p+2)\left(p+\frac{5}{2}\right)}{1\,.\,3}, \qquad P_3 = \frac{\left(p+\frac{5}{2}\right)(p+3)\left(p+\frac{7}{2}\right)}{1\,.\,3\,.\,5},$$

$$P_4 = \frac{(p+3)\left(p+\frac{7}{2}\right)(p+4)\left(p+\frac{9}{2}\right)}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7};$$

et, en général,

$$P_n = \frac{\left(p+\frac{n+2}{2}\right)\left(p+\frac{n+3}{2}\right)\left(p+\frac{n+4}{2}\right)\cdots\left(p+\frac{2n+1}{2}\right)}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)} \quad \ldots \quad (46)$$

(*) Un groupement plus ou moins convenable, des fractions composant chaque facteur de L, conduit à ce même résultat.

Conséquemment, on a ce théorème : p *étant une constante positive, et* n *un nombre entier, qui croît indéfiniment,*

$$\operatorname{Lim} P_n = 2^{2p+1}.$$

23. *Suite.* La quantité P_n peut être mise sous une forme plus simple.

1° Le numérateur

$$= \frac{\Gamma\left(p+n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(p+1+\frac{n}{2}\right)};$$

2° Le dénominateur

$$= \frac{2.4.6\ldots\overline{2n-2}}{1.2.3.4..\overline{2n-1}} = \frac{2^{n-1}\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47')$$

3° D'après un théorème de Legendre, cité plusieurs fois,

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(2n)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \frac{1}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)};$$

La formule (46) devient donc

$$P_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \frac{\Gamma\left(p+n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(p+1+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

En conséquence,

$$\operatorname{Lim} \frac{\Gamma\left(p+n+\frac{3}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(p+1+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{2p+1}}{\sqrt{\pi}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

24. *Remarque.* Soit $f(x)$ une fonction *continue,* telle que $y = f(x)$ représente une courbe *convexe,* possédant une *asymptote parallèle à l'axe des abscisses,* et n'ayant, à la droite de l'autre axe, *aucun point singulier.* Quelle que soit la loi des valeurs de x, $f(x)$ tendra vers une limite *unique,* répondant à $x = \infty$. La fraction

$$\frac{\Gamma\left(p+n+\frac{3}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(p+1+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

à la forme indiquée. Conséquemment : p *étant une constante positive, et* x *une variable qui croît indéfiniment, à partir de zéro :*

$$\text{Lim}\cdot\frac{\Gamma\left(p+x+\frac{5}{2}\right)}{2^x\Gamma\left(p+1+\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{2^{2p+1}}{\sqrt{\pi}}\ (^*)\quad\ldots\ldots\quad(49)$$

25. *Égalité de deux limites.* Nous avons trouvé

$$\frac{2^{2p+1}}{\sqrt{\pi}}=lim\,\frac{\Gamma\left(p+n+\frac{5}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(p+1+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}.\quad\ldots\ldots\quad(48)$$

D'ailleurs, il est évident que

$$2=lim\,\frac{\left(p+n+\frac{5}{2}\right)}{\left(p+1+\frac{n}{2}\right)}.$$

Donc

$$\frac{2^{2p+2}}{\sqrt{\pi}}=lim\,\frac{\Gamma\left(p+n+\frac{5}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(p+2+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}.\quad\ldots\ldots\quad(50)$$

Si, dans la formule (48), on remplace p par $p+\frac{1}{2}$, elle devient

$$\frac{2^{2p+2}}{\sqrt{\pi}}=lim\cdot\frac{\Gamma(p+n+2)}{2^n\Gamma\left(p+\frac{n+3}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

Conséquemment,

$$1=lim\,\frac{\Gamma\left(p+n+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(p+n+2\right)}\;\frac{\Gamma\left(p+\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{n+4}{2}\right)};$$

ou enfin, par une transformation facile,

$$Lim\,\mathrm{B}\left(p+n+2,\frac{1}{2}\right)=lim\,\mathrm{B}\left(p+n+\frac{3}{2}+2,\frac{1}{2}\right)\ (^{**}).\quad\ldots\quad(51)$$

(*) On ne considère, bien entendu, que les valeurs arithmétiques de 2^x.

(**) La limite commune est *zéro*.

V

Lettre à M. Hermite (extrait).

« Le dernier Mémoire (imprimé) de B., se termine par la formule de
» M. Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{Ca} \prod_1^\infty \left[\left(1+\frac{a}{m}\right)e^{-\frac{a}{m}}\right] \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

» Je ne la connaissais pas, bien qu'elle se trouve dans votre *Cours de la*
» *Sorbonne*. Permettez-moi, pour deux motifs, de ne pas l'admirer :

» 1° Elle est, absolument, inapplicable;

» 2° Elle résulte, tout de suite, de la formule de Gudermann, telle que
» vous l'écrivez (*) :

$$\mathcal{L}.\Gamma(a+1) = \sum_1^\infty \left[a\mathcal{L}\left(1+\frac{1}{m}\right) - \mathcal{L}\left(1+\frac{a}{m}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

» J'observe, d'abord, que

$$a\mathcal{L}\left(1+\frac{1}{m}\right) - \mathcal{L}\left(1+\frac{a}{m}\right)$$

» est le terme général d'une *série convergente*.

» En second lieu, on a, *en série convergente,*

$$-Ca = \sum_1^\infty \left[a\mathcal{L}\left(1+\frac{1}{m}\right) - \frac{a}{m}\right] (^{**}) \quad \ldots\ldots \quad (C)$$

(*) *Telle que je l'ai écrite*, serait plus exact. Voir, dans les *Recherches sur la constante* G, la relation (74). (*Janvier* 1892.)

(**) D'après votre *Cours*, la petite transformation

$$\mathcal{L}n = \mathcal{L}\frac{n}{n-1} + \mathcal{L}\frac{n-1}{n-2} + \cdots + \mathcal{L}.\frac{2}{1} + \mathcal{L}1,$$

que j'ai *trouvée* en 1856 (*Mélanges mathématiques*), l'avait été, antérieurement, par Gauss. Tant mieux pour moi!

» Ceci posé, la série formée par les différences, terme à terme, des
» séries (B), (C), est encore convergente. Donc

$$-Ca + \mathcal{L}\Gamma(a+1) = \sum_1^\infty \left[\frac{a}{m} - \mathcal{L}\left(1 + \frac{a}{m}\right)\right];$$

» ou, ce qui est équivalent, la formule (A). Comment W. ne s'est-il pas
» aperçu de cette concordance?

» Le Mémoire de B. me procure bien d'autres surprises. A la page 61,
» à propos de la formule (171), il dit :

» *La série*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{m(m^2 - a^2)}$$

» *est absolument convergente, quel que soit le module de* a.

» Et si a est un nombre entier? Voilà donc une série, dont un terme est
» infini, et qui, néanmoins, est convergente!

» ... Il soutient que ce résultat (qui me semble absurde), est *d'accord*
» *avec vos principes*. Alors, *où allons-nous?* A-t-on, en Analyse, mis le cœur
» à droite, comme faisait Sganarelle? J'aime à croire que B. se trompe...

» 12 novembre 1891. »

Liège, 31 janvier 1892.