SUR LES POLYNÔMES

DE

LEGENDRE, D'HERMITE ET DE POLIGNAC;

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

« A force d'étudier un sujet sous toutes ses faces,
» on finit par en tirer quelque chose. »
(SARRUS, *Recherches sur le Calcul des variations.*)

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 7 février 1891.)

AVANT-PROPOS.

Le présent Mémoire a été rédigé à l'occasion d'une série de lettres que M. *Hermite* m'a fait l'honneur de m'adresser, il y a quelques mois. Il ne m'appartient pas de rapporter les appréciations du plus illustre des Géomètres français; mais, en me communiquant de nouveaux théorèmes sur les fonctions X_n et P_n, mon excellent *ancien élève* m'engageait à reprendre des recherches auxquelles j'avais complètement renoncé. Je n'ai pas eu la force de résister à des instances très agréables, et je me suis mis à étudier, de nouveau, les polynômes de *Legendre,* d'*Hermite* et de *Polignac.*

Des extraits de ma longue réponse à M. Hermite constituent la *première partie* du Mémoire. Si l'on en prend connaissance, on verra que j'ai cru devoir rectifier, en un point, les beaux théorèmes de M. *Christofel.*

La *deuxième partie* contient des Notes sur divers sujets. La principale est relative à une expression démontrée à la page 4 des *Nouvelles propriétés des fonctions* X_n. Si je ne me trompe, cette nouvelle formule est beaucoup plus simple et plus fertile que celle qui a été donnée par l'illustre Jacobi.

Dans la *troisième partie,* on trouvera la *définition des polynômes de Polignac*, et la démonstration (peut-être incomplète) d'une relation entre ces polynômes et ceux de M. Hermite.

SUR LES POLYNÔMES

DE

LEGENDRE, D'HERMITE ET DE POLIGNAC.

PREMIÈRE PARTIE.

LETTRE A M. HERMITE.

. . . .

I

Comme je le supposais dans ma dernière lettre, les formules de M. *Christofel* doivent, pour s'appliquer aux vôtres et aux miennes, subir une légère modification.

Considérons le *premier théorème* (*), exprimé par l'égalité

$$P_m X_n - P_n X_m = \sum_{S=0}^{S=m-n-1} \frac{X_S X_{m-n-1-S}}{S+n+1} \quad \text{(A)}$$

Il donne, en particulier (comme vous me l'avez fait observer),

$$P_m = \frac{X_0 X_{m-1}}{1} + \frac{X_1 X_{m-2}}{2} + \cdots + \frac{X_{m-1} X_0}{m} \quad \text{(B)}$$

Soit $m = 3$. Alors

$$P_3 = \frac{X_0 X_2}{1} + \frac{X_1 X_1}{2} + \frac{X_2 X_0}{3} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}(3x^2 - 1) = \frac{1}{6}(15x^2 - 4);$$

(*) Jusqu'à présent (4 octobre 1890), je n'ai pu le démontrer.

et, si l'on prend $x = 1$:

$$(P_3) = \frac{11}{6} \text{ (*)}.$$

Or, dans le petit Mémoire intitulé : *Sur quelques formules d'Analyse,* on lit (p. 19) :

$$P_3 = \frac{1}{3}(15x^2 - 4);$$

d'où résulte

$$(P_3) = \frac{11}{3}.$$

En résumé, dans les théorèmes de M. Christofel, on doit remplacer P_n par $\frac{1}{2} P_n$.

II

Le Mémoire cité contient (p. 15) cette loi de *récurrence :*

$$(n + 1)N_{n+1} - (2n + 1)xN_n + nN_{n-1} = 0\,;$$

ou, ce qui est équivalent,

$$mP_m - (2m - 1)xP_{m-1} + (m - 1)P_{m-2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(C)}$$

Les valeurs initiales sont (p. 29) :

$$P_1 = 2, \quad P_2 = 3x.$$

D'un autre côté, dans mes *Recherches sur les fonctions* X_n (troisième Mémoire, p. 14), j'ai montré que, si l'on fait

$$\frac{X_0 X_{m-1}}{1} + \frac{X_1 X_{m-2}}{2} + \cdots + \frac{X_{m-1} X_0}{m} = S_{m-1},$$

(*) Je mets des parenthèses, afin d'éviter un changement de lettre.

on a

$$mS_{m-1} - (2m-1)xS_{m-2} + (m-1)S_{m-3} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)\,(*)$$

Le calcul direct donne

$$S_1 = \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}P_2; \qquad S_2 = \frac{1}{6}(15x^2 - 4) = \frac{1}{2}P_3;$$

donc, en général,

$$S_{m-1} = \frac{1}{2}P_m,$$

ou

$$P_m = 2\left[\frac{X_0X_{m-1}}{1} + \frac{X_1X_{m-2}}{2} + \cdots + \frac{X_{m-1}X_0}{m}\right]; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

ce qui est la formule (B), *corrigée*.

III

Permettez-moi de vous communiquer une conséquence, assez curieuse, du *second théorème :*

$$P_n = 2\left[\frac{2n-1}{1\,.\,n}X_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)}X_{2n-3} + \frac{2n-9}{5(n-2)}X_{n-5} + \cdots\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (F)$$

Elle consiste en cette propriété de la *série harmonique*, bornée à ses n premiers termes :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=0}\left[\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{n-k}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (G)$$

La limite supérieure des valeurs de k est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{2n-1}{4}$; c'est-à-dire, avec la notation de Legendre, $E\left(\frac{2n-1}{4}\right)$.

(*) Observez ceci : quand j'ai trouvé la relation (C), j'avais oublié la relation (D), qui ne diffère pas de la première. Ces accidents-là m'arrivent souvent.

Par exemple,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}=2\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right]-\left[\frac{1}{10}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\right].$$

La démonstration de l'égalité (G) est facile (*).

IV

On a (*Sur quelques formules ....*, p. 19) :

$$\mathrm{P}_n=\mathrm{X}_n\left[2\int\frac{dx}{(x^2-1)\mathrm{X}_n^2}+\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}\right], \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{H})(^{**})$$

$$\mathrm{P}_m=\mathrm{X}_m\left[2\int\frac{dx}{(x^2-1)\mathrm{X}_m^2}+\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}\right].$$

Par conséquent,

$$\mathrm{P}_m\mathrm{X}_n-\mathrm{P}_n\mathrm{X}_m=2\int\frac{\mathrm{X}_n^2-\mathrm{X}_m^2}{(x^2-1)\mathrm{X}_m^2\mathrm{X}_n^2}dx\,;$$

ou, à cause de l'égalité (A), *rectifiée :*

$$\mathrm{X}_m\mathrm{X}_n\int\frac{\mathrm{X}_n^2-\mathrm{X}_m^2}{(x^2-1)\mathrm{X}_m^2\mathrm{X}_n^2}dx=\sum_{s=0}^{s=m-n-1}\frac{\mathrm{X}_s\mathrm{X}_{m-n-1-s}}{s+n+1}. \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{K})$$

Ceci est, à peu près, l'un des résultats que je vous ai communiqués précédemment. Je l'ai vérifié pour $m=3$, $n=1$.

(*) Au moyen de la relation *connue*

$$\lim\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]=\mathcal{L}.2,$$

on pourrait, peut-être, *utiliser* cette formule (G). Mais il ne faut abuser de rien.

(**) Dans cette expression, le signe $\int$ désigne l'intégrale *immédiate,* sans addition de constante. Par exemple,

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{x}.$$

V

Si $n = m - 1$, (K) devient

$$X_m X_{m-1} \int \frac{X_{m-1}^2 - X_m^2}{(x^2 - 1) X_m^2 X_{m-1}^2} = \frac{1}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (L)$$

Il résulte, de cette égalité,

$$\frac{X_{m-1}^2 - X_m^2}{x^2 - 1} = -\frac{1}{m}(X_m X_{m-1})';$$

formule connue (*).

VI

Dans le Mémoire *Sur quelques formules d'Analyse,* on lit (p. 21) :

$$\frac{P_n}{X_n} = 2\left[\frac{1}{X_0 X_1} + \frac{1}{2 X_1 X_2} + \cdots + \frac{1}{n X_{n-1} X_n}\right].$$

On déduit, de cette égalité,

$$P_m X_n - P_n X_m = 2 X_m X_n \left[\frac{1}{(n+1) X_n X_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{m X_{m-1} X_m}\right]. \quad \ldots\ldots \quad (M)$$

Comparant avec l'égalité (A) (rectifiée), on a cette relation, qui me paraît remarquable :

$$X_m X_n \left[\frac{1}{(n+1) X_n X_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{m X_{m-1} X_m}\right] = \frac{X_0 X_{m-n-1}}{n+1} + \frac{X_1 X_{m-n-2}}{n+2} + \cdots + \frac{X_{m-n-1} X_n}{m}. \quad (N)$$

Je l'ai vérifiée pour $m = 5$, $n = 2$. Elle rappelle la comparaison entre le théorème de Gauss et le mien (*Sur quelques formules ....*, p. 5).

(*) *Recherches sur les fonctions* X_n, *premier Mémoire,* p. 35.

Si l'on prend $n = 0$, cette égalité (N) se réduit à

$$X_m\left[\frac{1}{X_0X_1} + \frac{1}{2X_1X_2} + \cdots + \frac{1}{mX_{m-1}X_m}\right] = \frac{X_0X_{n-1}}{1} + \frac{X_1X_{m-2}}{2} + \cdots + \frac{X_{n-1}X_m}{m};$$

c'est-à-dire, d'après (E), à

$$P_m = 2X_m\left[\frac{1}{X_0X_1} + \frac{1}{2X_1X_2} + \cdots + \frac{1}{mX_{m-1}X_m}\right] (*). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (P)$$

. . . .

IX

Je vous remercie de m'avoir communiqué votre savante démonstration de la formule

$$1 + \frac{l}{1}\frac{l'}{1} + \frac{l(l-1)}{1.2}\cdot\frac{l'(l'-1)}{1.2} + \cdots = \frac{\Gamma(l + l' + 1)}{\Gamma(l+1)\,\Gamma(l'+1)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (Q)$$

La mienne, que je crois exacte, est beaucoup plus terre à terre (*Mélanges mathématiques,* tome I, p. 141). L'intégrale définie, dont vous faites usage, est due à Poisson. Je l'ai employée souvent, en la mettant sous la forme

$$\frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi \cos(n - 2p)\varphi d\varphi = C_{n,p} \ (**).$$

. . . .

X

. . . .

Liège, 4 octobre 1890. E. C.

(*) A cause de $P_0 = 0$, l'égalité (K) donne, tout de suite, ce même résultat.

(**) *Recherches sur les fonctions* X_n, *premier Mémoire,* p. 14.

DEUXIÈME PARTIE.

NOTES DIVERSES.

I

Quelques vérifications.

1. De la formule

$$P_n = X_n \left[2\int \frac{dx}{(x^2-1)X_n^2} + \mathfrak{L}\frac{x+1}{x-1} \right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (H)\,(^*)$$

on déduit

$$X_n \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{dX_n}{dx} = -2\frac{X_n^2 - 1}{x^2 - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

On a :

$$X_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad X_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_2 = 3x, \qquad\qquad P_3 = \frac{1}{3}(15x^2 - 4)\,(^{**});$$

puis

$$\frac{dX_2}{dx} = 3x, \qquad \frac{dX_3}{dx} = \frac{3}{2}(5x^2 - 1),$$

$$\frac{dP_2}{dx} = 3, \qquad \frac{dP_3}{dx} = 10x.$$

On doit donc trouver, *identiquement :*

$$\frac{3}{2}(3x^2 - 1) - 3x \,.\, 3x = -2\frac{(3x^2-1)^2 - 4}{4(x^2-1)},$$

ou

$$(5x^3 - 3x)10x - (15x^2 - 4)(5x^2 - 1) = -\frac{(5x^3 - 3x)^2 - 4}{x^2 - 1}.$$

C'est ce qui a lieu.

(*) *Première partie*, p. 8.

(**) *Sur quelques formules d'Analyse*, pp. 13 et 21.

2. La vérification *directe,* de la même formule (H), devient rapidement laborieuse, à mesure que n augmente. Contentons-nous de faire $n = 1$, puis $n = 2$.

1° A cause de $X_1 = x$, on a

$$P_1 = x\left[2\int \frac{dx}{(x^2-1)x^2} + \mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}\right].$$

Or, l'intégrale *immédiate* de $\frac{dx}{(x^2-1)x^2}$ est (*)

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x}.$$

Ainsi

$$P_1 = x\frac{2}{x} = 2,$$

valeur connue.

2°

$$P_2 = \frac{3x^2-1}{2}\left[8\int \frac{dx}{(x^2-1)(3x^2-1)^2} + \mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}\right].$$

La fraction $\frac{8}{(x^2-1)(3x^2-1)^2}$ est décomposable en

$$-6\frac{3x^2+1}{(3x^2-1)^2} + \frac{2}{x^2-1}.$$

De plus,

$$-6\frac{3x^2+1}{(3x^2-1)^2} = \left[\frac{6x}{3x^2-1}\right]', \quad \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Donc

$$\int \frac{8dx}{(x^2-1)(3x^2-1)^2} = \frac{6x}{3x^2-1} - \mathcal{L}\frac{x+1}{x-1};$$

puis

$$P_2 = \frac{3x^2-1}{2}\,\frac{6x}{3x^2-1} = 3x;$$

ce qui est exact.

(*) *Première partie,* p. 8.

3. Pour $m = 3$, $n = 1$, la relation

$$X_m X_n \int \frac{X_n^2 - X_m^2}{(x^2 - 1) X_m^2 X_n^2} dx = \sum_{s=0}^{s=m-n-1} \frac{X_s X_{m-n-1-s}}{s+n+1} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{K})\ (*)$$

se réduit à

$$X_3 X_1 \int \frac{X_1^2 - X_3^2}{(x^2-1) X_3^2 X_1^2} dx = \frac{1}{2} X_0 X_1 + \frac{1}{3} X_1 X_0;$$

c'est-à-dire, à

$$X_3 \int \frac{X_1^2 - X_3^2}{(x^2-1) X_3^2 X_1^2} dx = \frac{5}{6} X_0;$$

ou encore, à

$$\frac{X_1^2 - X_3^2}{(x^2-1) X_1^2} = -\frac{5}{6} \frac{dX_3}{dx}.$$

A cause de :

$$X_1 = x, \qquad X_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \qquad \frac{dX_3}{dx} = \frac{3}{2}(5x^2 - 1),$$

l'égalité précédente devient

$$\frac{4x^2 - (5x^3 - 3x)^2}{4(x^2-1)x^2} = -\frac{5}{4}(5x^2 - 1),$$

puis

$$\frac{-25x^4 + 30x^2 - 5}{x^2 - 1} = -5(5x^2 - 1),$$

ou enfin

$$-5(5x^2 - 1) = -5(5x^2 - 1).$$

II

Polynômes X_n *et* P_n.

4. Lemme I.

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} - x\frac{dX_n}{dx} = (n+1) X_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)\ (**)$$

5. Lemme II.

$$X_{n+1} - x X_n = \frac{x^2 - 1}{n+1} \frac{dX_n}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)\ (***)$$

(*) *Première partie*, p. 8.
(**) *Recherches ...., premier Mémoire*, p. 34.
(***) *Ibid.*, p. 4.

6. THÉORÈME I. Pour $x = 1$,

$$(P_n) = 2\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)\ (*)$$

7. *Remarque.* $\frac{1}{2}(P_n)$ *ne peut être un nombre entier, excepté si* $n = 1$. (**)

8. THÉORÈME II. *On a, entre les polynômes* X_n, P_n, *la relation*

$$P_n \frac{dX_n}{dx} - X_n \frac{dP_n}{dx} = 2\frac{X_n^2 - 1}{X^2 - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)\ (***)$$

9. COROLLAIRE. *L'équation*

$$P_n \frac{dX_n}{dx} - X_n \frac{dP_n}{dx} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

du degré $2n - 1$, *est réductible à deux équations du degré* $n - 1$.

En effet, le second membre de (B) équivaut à

$$2\frac{X_n - 1}{x^2 - 1}(X_n + 1).$$

Or, si n est *pair*, $X_n - 1$ est divisible par $x^2 - 1$; et, si n est *impair*, $X_n - 1$ est divisible par $x - 1$, tandis que $X_n + 1$ est divisible par $x + 1$.

10. *Application.* Soit $n = 3$. Alors :

$$X_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\ (\mathrm{IV}), \quad \frac{dX_3}{dx} = \frac{3}{2}(5x^2 - 1), \quad P_3 = \frac{1}{3}(15x^2 - 4)\ (\mathrm{IV}), \quad \frac{dP_3}{dx} = 10x.$$

(*) *Première partie*, formule (E).
(**) *Mélanges mathématiques*, t. III, p. 140.
(***) C'est l'égalité (1), de la page 11. Il nous paraît utile de la *re*signaler.
(IV) Page 11.

L'équation (4) devient, après simplification,

$$(15x^2 - 4)(5x^2 - 1) - 10x(5x^3 - 3x) = 0,$$

ou

$$25x^4 - 5x^2 + 4 = 0,$$

ou enfin

$$(5x^2 - 5x + 2)(5x^2 + 5x^2 + 2) = 0.$$

11. Théorème III. a *étant une constante, supérieure à l'unité,*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{a-x}\left[n\mathrm{X}_n + \frac{\mathrm{X}_{n+1} - x\mathrm{X}_n}{a-x}\right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{C})$$

L'intégration par parties donne

$$\int \frac{\mathrm{X}_{n+1} - x\mathrm{X}_n}{(a-x)^2}\,dx = \frac{\mathrm{X}_{n+1} - x\mathrm{X}_n}{a-x} - \int \frac{\dfrac{d\mathrm{X}_{n+1}}{dx} - \mathrm{X}_n - x\dfrac{d\mathrm{X}_n}{dx}}{a-x}\,dx.$$

Pour $x = \pm 1$, le binôme $\mathrm{X}_{n+1} - x\mathrm{X}_n$ s'annule (*). Donc

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{X}_{n+1} - x\mathrm{X}_n}{(a-x)^2}\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{X}_n + x\dfrac{d\mathrm{X}_n}{dx} - \dfrac{d\mathrm{X}_{n+1}}{dx}}{a-x}\,dx.$$

Le premier membre de (C) devient

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{a-x}\left[(n+1)\mathrm{X}_n + x\frac{d\mathrm{X}_n}{dx} - \frac{d\mathrm{X}_{n+1}}{dx}\right].$$

Or, en vertu du Lemme I, cette intégrale est nulle. C. Q. F. D.

12. Corollaire I. p *étant un nombre entier, on a*

$$n\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{X}_n}{(a-x)^p}\,dx + p\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{X}_{n+1} - x\mathrm{X}_n}{(a-x)^{p+1}}\,dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

(*) En effet, il est divisible par $x^2 - 1$. (*Premier Mémoire*, p. 6.)

L'égalité (C) donne, successivement :

$$n\int_{-1}^{+1}\frac{X_n}{(a-x)^2}\,dx+2\int_{-1}^{+1}\frac{X_{n+1}-xX_n}{(a-x)^3}\,dx=0,$$

$$n\int_{-1}^{+1}\frac{X_n}{(a-x)^3}\,dx+3\int_{-1}^{+1}\frac{X_{n+1}-xX_n}{(a-x)^3}\,dx=0,$$

etc.

13. Corollaire II.

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-x)^p}\left[(n+p)X_n+p\frac{X_{n+1}-aX_n}{a-x}\right]=0. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Si, dans l'égalité (5), on remplace $-x$ par $(a-x)-a$, on trouve l'égalité (6).

14. Lemme III.

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{(x-z)^2}=\frac{2}{x^2-1} \qquad (x>1). \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

15. Théorème IV. *On a, entre les polynômes* P_n, X_n *et* Z_n, *la relation*

$$\frac{dP_n}{dx}=\frac{dX_n}{dx}\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{x-z}-2\frac{X_n}{x^2-1}+\int_{-1}^{+1}\frac{Z_n dz}{(x-z)^2}. \quad \ldots\ldots \quad (D)$$

De

$$P_n=\int_{-1}^{+1}\frac{X_n-Z_n}{x-z}\,dz, \quad \ldots\ldots \quad (8)\ (*)$$

(*) *Cours de M. Hermite*, p. 146. Les citations se rapportent à la *première* édition (1882). La *quatrième* vient de paraître. La première contient une grave faute typographique, répétée aux pages 146 et 147. Au lieu de

$$J=\int_{-1}^{+1}X_n\frac{dz}{x-z}-P_n,\quad J=X_n\mathfrak{L}\frac{x+1}{x-1}-P_n,$$

on doit lire :

$$\frac{(-1)^nJ}{2.4.6\ldots 2n}=\int_{-1}^{+1}X_n\frac{dz}{x-z},\quad \frac{(-1)^nJ}{2.4.6\ldots 2n}=X_n\mathfrak{L}\frac{x+1}{x-1}-P_n.$$

Si je signale cette erreur *d'écriture*, c'est parce que, ne l'ayant pas d'abord remarquée, elle m'a conduit à des résultats inexacts, qui m'ont fort embarrassé.

on déduit

$$\frac{dP_n}{dx} = \int_{-1}^{+1} \frac{(x-z)\frac{dX_n}{dx} - (X_n - Z_n)}{(x-z)^2} dz = \int_{-1}^{+1} \frac{\frac{dX_n}{dx}dz}{x-z} - X_n \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(x-z)^2} + \int_{-1}^{+1} \frac{Z_n dz}{(x-z)^2};$$

ou, par le Lemme IV,

$$\frac{dP_n}{dx} = \frac{dX_n}{dx}\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{x-z} - 2\frac{X_n}{x^2-1} + \int_{-1}^{+1} \frac{Z_n dz}{(x-z)^2} \quad \ldots\ldots \quad \text{(D)}$$

16. THÉORÈME V. *On a, entre les polynômes* X_n *et* P_n, *la relation*

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} - x\frac{dP_n}{dx} = (n+1)P_n - \frac{2}{n+1}\frac{dX_n}{dx} \quad \ldots\ldots \quad \text{(E)}$$

D'après la formule (D),

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} = \frac{dX_{n+1}}{dx}\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{x-z} - 2\frac{X_{n+1}}{x^2-1} + \int_{-1}^{+1} \frac{Z_{n+1}dz}{(x-z)^2}.$$

Donc

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} - x\frac{dP_n}{dx} = \left(\frac{dX_{n+1}}{dx} - x\frac{dX_n}{dx}\right)\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{x-z} - 2\frac{X_{n+1} - xX_n}{x^2-1} + \int_{-1}^{+1} \frac{Z_{n+1} - xZ_n}{(x-z)^2} dz. \quad (9)$$

En vertu des Lemmes I et II, le second membre équivaut à

$$(n+1)X_n \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{x-z} - \frac{2}{n+1}\frac{dX_n}{dx} + \int_{-1}^{+1} \frac{Z_{n+1} - xZ_n}{(x-z)^2} dz.$$

En outre,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z_{n+1} - xZ_n}{(x-z)^2} dz = \int_{-1}^{+1} \frac{Z_{n+1} - (x-z)Z_n - zZ_n}{(x-z)^2} dz = \int_{-1}^{+1} \frac{Z_{n+1} - zZ_n}{(x-z)^2} dz - \int_{-1}^{+1} \frac{Z_n dz}{x-z}.$$

Le même second membre, de l'égalité (9), devient donc

$$(n+1)X_n \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{x-z} - \frac{2}{n+1}\frac{dX_n}{dx} + \int_{-1}^{+1} \frac{Z_{n+1} - zZ_n}{(x-z)^2} dz - \int_{-1}^{+1} \frac{Z_n}{x-z} dz.$$

Le premier terme égale

$$(n+1)\left[P_n + \int_{-1}^{+1} \frac{Z_n}{x-z}dz\right] \text{ (*)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} - x\frac{dP_n}{dx} = (n+1)P_n - \frac{2}{n+1}\frac{dX_n}{dx} + \int_{-1}^{+1}\frac{dz}{x-z}\left[nZ_n + \frac{Z_{n+1} - zZ_n}{x-z}\right]$$

L'intégrale est nulle (C) (**). Donc enfin

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} - x\frac{dP_n}{dx} = (n+1)P_n - \frac{2}{n+1}\frac{dX_n}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E)}$$

17. *Application.* Soit $n = 4$. On sait que (***)

$$P_4 = \frac{5}{12}(21x^3 - 11x), \qquad P_5 = \frac{1}{60}(945x^4 - 735x^2 + 64), \qquad X_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$$

donc

$$\frac{dP_4}{dx} = \frac{5}{12}(63x^2 - 11), \qquad \frac{dP_5}{dx} = \frac{1}{2}(126x^3 - 49x), \qquad \frac{dX_4}{dx} = \frac{5}{2}(7x^3 - 3x).$$

L'égalité (E) devient, dans ce cas particulier,

$$\frac{1}{2}(126x^3 - 49x) - \frac{5}{12}(63x^3 - 11x) = \frac{25}{12}(21x^3 - 11x) - (7x^3 - 3x),$$

puis

$$6(126x^2 - 49) - 5(63x^2 - 11) = 25(21x^2 - 11) - 12(7x^2 - 3),$$

ou bien

$$(756 - 315)x^2 - (294 - 55) = (525 - 84)x^2 - (275 - 36);$$

etc.

18. Théorème VI. *Deux polynômes d'Hermite, consécutifs, satisfont à la relation*

$$2(n+1)\frac{dP_{n+1}}{dx} = (x^2 - 1)\frac{d^2P_n}{dx^2} + 2(n+2)x\frac{dP_n}{dx} + (n+1)(n+2)P_n \quad \ldots \quad \text{(F)}$$

(*) A cause de la formule (8).

(**) On ne doit pas oublier que Z_n se déduit de X_n, par le changement de x en z.

(***) *Sur quelques formules d'Analyse*, p. 12.

Écrivons ainsi l'équation (E) :

$$2(n+1)\frac{dP_{n+1}}{dx} - 2(n+1)x\frac{dP_n}{dx} = 2(n+1)^2P_n - 4\cdot\frac{dX_n}{dx}.$$

On sait que

$$(x^2-1)\frac{d^2P_n}{dx^2} + 2x\frac{dP_n}{dx} = n(n+1)P_n - 4\frac{dX_n}{dx}. \quad \ldots\ldots \quad (10)\ (^*)$$

Retranchant, on trouve

$$2(n+1)\frac{dP_{n+1}}{dx} - (x^2-1)\frac{d^2P_n}{dx^2} - 2(n+2)x\frac{dP_n}{dx} = (n+1)(n+2)P_n;$$

ce qui ne diffère pas de (F).

19. *Application.* Soit $n = 3$. On doit avoir

$$8\frac{dP_4}{dx} = (x^2-1)\frac{d^2P_3}{dx_2} + 10x\frac{dP_3}{dx} + 20P_3.$$

Mais :

$$P_3 = \frac{1}{3}(15x^2-4), \qquad P_4 = \frac{5}{12}(21x^3 - 11x)\ (^{**});$$

donc

$$\frac{dP_3}{dx} = 10x, \quad \frac{d^2P_3}{dx^2} = 10, \quad \frac{dP_4}{dx} = \frac{5}{12}(63x^2 - 11).$$

L'égalité précédente se réduit à celle-ci :

$$\frac{1}{3}(63x^2 - 11) = (x^2-1) + 10x^2 + \frac{2}{3}(15x^2-4),$$

laquelle est identique.

20. LEMME V. *On a, identiquement,*

$$-\frac{1}{2}\frac{d\dfrac{x^{2n-2p+2}}{(x^2-1)^n}}{dx} = (n-p+1)\frac{x^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^{n+1}} + (p-1)\frac{x^{2n-2p+3}}{(x^2-1)^{n+1}}. \quad \ldots \quad (11)$$

(*) *Sur quelques formules* ...., p. 18.
(**) *Ibid.*, p. 12.

En effet, le premier membre est

$$-\frac{1}{2}\,\frac{2(x^2-1)^n(n-p+1)x^{2n-2p+1}-2nx^{2n-2p+3}(x^2-1)^{n-1}}{(x^2-1)^{2n}}$$

$$=\frac{nx^{2n-2p+3}-(n-p+1)x^{2n-2p+1}(x^2-1)}{(x^2-1)^{n+1}}=\frac{(p-1)x^{2n-2p+3}+(n-p+1)x^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^{n+1}};$$

etc.

21. Lemme VI. *On a, identiquement,*

$$-\frac{1}{2}\,\frac{d\,\dfrac{C_{n,\,p-1}x^{2n-2p+2}}{(x^2-1)^n}}{dx}=n\left[C_{n-1,\,p-1}\frac{x^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^{n+1}}+C_{n-1,\,p-2}\frac{x^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^{n+1}}\right]. \quad . \quad . \quad (12)$$

Après avoir multiplié, par $C_{n,\,p-1}$, les deux membres de l'égalité (11), on obtient, au lieu du second membre,

$$(n-p+1)\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots\overline{p-1}}\;\frac{x^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^{n+1}}+(p-1)\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots\overline{p-1}}\;\frac{x^{2n-2p+3}}{(x^2-1)^{n+1}},$$

ou

$$n\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots\overline{p-1}}\;\frac{x^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^{n+1}}+n\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)}{1.2\ldots\overline{p-2}}\;\frac{x^{2n-2p+3}}{(x^2-1)^{n+1}},$$

ou

$$n\left[C_{n-1,\,p-1}\frac{x^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^{n+1}}+C_{n-1,\,p-2}\frac{x^{2n-2p+3}}{(x^2-1)^{n+1}}\right].$$

L'égalité (12) est donc démontrée.

22. *Remarque.* On peut l'écrire ainsi :

$$-\frac{1}{2n}\,\frac{d\cdot\dfrac{C_{n,\,p-1}x^{2n-2p+2}}{(x^2-1)^n}}{dx}=C_{n-1,\,p-1}\frac{x^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^{n+1}}+C_{n-1,\,p-2}\frac{x^{2n-2p+3}}{(x^2-1)^{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

III

Quelques sommations.

23. Théorème VII. *Si* S_p *représente la somme des* p *premiers termes du développement de* $(x^2 - 1)^n$, *savoir :*

$$S_p = x^{2n} - C_{n,1}x^{2n-2} + C_{n,2}x^{2n-4} - \cdots \pm C_{n,p-1}x^{2n-2p+2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (14)$$

on a

$$\frac{1}{2n}\,\frac{d\cdot\dfrac{S_p}{(x^2-1)^n}}{dx} = (-1)^p C_{n-1,p-1}\frac{x^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (G)$$

Dans l'égalité (13), faisons, successivement, $p = 1$, $p = 2$,... Nous aurons :

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{2n}\,\frac{d\cdot\dfrac{x^{2n}}{(x^2-1)^n}}{dx} = C_{n-1,0}\frac{x^{2n-1}}{(x^2-1)^{n+1}}\ (^*),\\
&\frac{1}{2n}\,\frac{d\,.\,C_{n,1}\dfrac{x^{2n-2}}{(x^2-1)^n}}{dx} = -C_{n-1,1}\frac{x^{2n-3}}{(x^2-1)^{n+1}} - C_{n-1,0}\frac{x^{2n-1}}{(x^2-1)^{n+1}},\\
&-\frac{1}{2n}\,\frac{d\,.\,C_{n,2}\dfrac{x^{2n-4}}{(x^2-1)^n}}{dx} = C_{n-2,2}\frac{x^{2n-5}}{(x^2-1)^{n+1}} + C_{n-1,1}\frac{x^{2n-3}}{(x^2-1)^{n+1}}\\
&.\ .\\
&\mp\frac{1}{2n}\,\frac{d\cdot\dfrac{C_{n,p-1}x^{2n-2p+2}}{(x^2-1)^n}}{dx} = \pm\left[C_{n-1,p-1}\frac{x^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^{n+1}} + C_{n-1,p-2}\frac{x^{2n-2p+3}}{(x^2-1)^{n+1}}\right](^{**})
\end{aligned}\right\} . \quad (15)$$

(*) Cette valeur est exacte, bien que la formule (13) semble en défaut pour $p = 1$.

(**) On doit prendre les signes *supérieurs* si p est *impair*.

Dans les égalités (15), la somme des premiers membres est

$$\frac{1}{2n}\frac{d\cdot\dfrac{S_p}{(x^2-1)^n}}{dx};$$

la somme des seconds membres est

$$\pm C_{n-1,p-1}\frac{x^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^n};$$

conséquemment,

$$\frac{1}{2n}\frac{d\cdot\dfrac{S_p}{(x^2-1)^n}}{dx}=(-1)^p C_{n-1,p-1}\frac{x^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^{n+1}}. \quad \ldots\ldots \quad (G)\ (*)$$

24. *Remarque.* Le $(p+1)^{\text{ième}}$ terme de $(x^2-1)^n$, ou $S_{p+1}-S_p$, est

$$(-1)^p C_{n,p} x^{2n-2p}.$$

Si, dans la formule (G), on change p en $p+1$, on obtient, en retranchant,

$$\frac{1}{2n}C_{n,p}\frac{d\cdot\dfrac{x^{2n-2p}}{(x^2-1)^n}}{dz}=-\frac{C_{n-1,p}\,x^{2n-2p-1}+C_{n-1,p-1}\,x^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^n};$$

ou, après suppression d'un facteur commun,

$$\frac{d\dfrac{x^{2n-2p}}{(x^2-1)^n}}{dx}=-2\frac{(n-p)x^{2n-2p-1}+px^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^{n-1}}. \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Cette identité (à peu près évidente) ne diffère pas du Lemme V. Le calcul précédent peut donc être un peu abrégé.

(*) La démonstration précédente est celle que nous avons employée, à propos d'une remarquable formule, due à Poisson, et sur laquelle nous reviendrons plus loin. Dans la *Note* LVIII des *Mélanges mathématiques,* on a imprimé, fautivement, $\frac{t^{m-p}}{(1+t)^{m+p}}$, au lieu de $\frac{t^{m-p}}{(1+t)^{m+1}}$.

25. *Application.* Soient, dans la formule (G), $n = 5$, $p = 3$. On doit trouver

$$\frac{1}{10}\frac{d\,\dfrac{S_3}{(x^2-1)^5}}{dx} = -C_{4,2}\frac{x^5}{(x^2-1)^6}.$$

Or,

$$S_3 = x^{10} - 5x^8 + 10x^6;$$

en sorte que l'égalité à vérifier est

$$\frac{1}{10}\frac{d\cdot\dfrac{x^{10}-5x^8+10x^6}{(x^2-1)^5}}{dx} = -6\frac{x^5}{(x^2-1)^6},$$

ou

$$(x^2-1)(10x^9-40x^7+60x^5)-10x(x^{10}-5x^8+10x^6) = -60x^5,$$

ou

$$(x^2-1)(x^4-4x^2+6)-(x^6-5x^4+10x^2) = -6;$$

etc.

26. *Expression de* S_p. D'après l'égalité (G),

$$S_p = (-1)^p 2nC_{n-1,p-1}(x^2-1)^n\int_0^x \frac{x^{2n-2p+1}}{(x^2-1)^{n+1}}dx \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

27. THÉORÈME VIII. *Si le nombre* q *est impair, et inférieur au nombre pair* 2n, *le produit*

$$(x^2-1)^n\int_0^x \frac{x^q dx}{(x^2-1)^{n+1}}$$

est un polynôme entier, commençant par un terme en x^{2n}, *et finissant par un terme en* x^{q+1}.

Soit, en effet, $q = 2n - 2p + 1$. Le polynôme S_p (17) satisfait aux deux conditions indiquées. En particulier,

$$(x^2-1)^n\int_0^x \frac{x^{2n-1}dx}{(x^2-1)^{n+1}} = -\frac{x^{2n}}{2n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

28. *Remarques.* I. L'intégrale contenue dans la formule (7) est la même chose que

$$\int_0^x \frac{t^{2n-2p+1}}{(t^2-1)^{n+1}}\,dt.$$

Faisant $t = \alpha x$, on a

$$\int_0^x \frac{t^{2n-2p+1}}{(t^2-1)^{n+1}}\,dt = x^{2n-2p+2}\int_0^1 \frac{\alpha^{2n-2p+1}}{(\alpha^2x^2-1)^{n+1}}\,d\alpha;$$

et, par conséquent,

$$S_p = (-1)^p 2nC_{n-1,p-1}x^{2n-2p+2}\int_0^1 \frac{(x^2-1)^n\alpha^{2n-2p+1}}{(\alpha^2x^2-1)^{n+1}}\,d\alpha \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

II. Pour $x = 1$, l'égalité (14) se réduit à

$$S_p = 1 - C_{n,1} + C_{n,2} - \cdots \pm C_{n,p-1}.$$

On sait que la somme *alternée*, formant le second membre, égale $\mp C_{n-1,p-1}$(*). Ainsi, *quand* x *tend vers* 1, *l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{(x^2-1)^n\alpha^{2n-2p+1}}{(\alpha^2x^2-1)^{n+1}}\,d\alpha$$

tend vers $-\frac{1}{2n}$.

III. Pour cette valeur-limite de x, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\alpha^{2n-2p+1}}{(\alpha^2x^2-1)^{n+1}}$$

devient

$$\int_0^1 \frac{\alpha^{2n-2p+1}}{(\alpha^2-1)^{n+1}}\,d\alpha.$$

Le produit de celle-ci, par $(x^2-1)^n$, ou *zéro*, ayant une valeur finie, cette dernière intégrale est *infinie* (**).

(*) Théorème de Genocchi (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, p. 141).

(**) On parvient à la même conclusion en posant $\alpha^2 = \theta$. En effet,

$$\int_0^1 \frac{\alpha^{2n-2p+1}}{(\alpha^2-1)^{n+1}}\,d\alpha = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}\int_0^1 \theta^{n-p}(1-\theta)^{-n-1}d\theta = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}B(n-p+1,-n);$$

etc.

29. *Une intégration.* Soit, conformément au n° 27 :

$$(x^2-1)^n \int_0^x \frac{x^q dx}{(x^2-1)^{n+1}} = a_0 x^{2n} + a_2 x^{2n-2} + a_4 x^{2n-4} + \cdots + a_{2n-q-1} x^{q+1} \quad . \quad . \quad (20)$$

D'après l'équation (17), le second membre doit être identique avec

$$(-1)^p \frac{S_p}{2nC_{n-1,p-1}} = (-1)^p \frac{1}{2nC_{n-1,p-1}} \left[x^{2n} - C_{n,1}x^{2n-2} + C_{n,2}x^{2n-4} - \cdots \pm C_{n,p-1}x^{2n-2p+2}\right],$$

pourvu que l'on prenne

$$p = n - \frac{q-1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)\ (^*)$$

Ainsi :

$$a_0 = \frac{(-1)^p}{2nC_{n-1,p-1}}, \quad a_2 = \frac{(-1)^{p+1}}{2nC_{n-1,p-1}} C_{n,1}, \quad a_4 = \frac{(-1)^p}{2nC_{n-1,p-1}} C_{n,2}, \quad a_{2n-q-1} = \pm \frac{1}{2nC_{n-1,p-1}} C_{n,p-1} \quad (22)$$

30. *Application.* Soient $n = 10$, $p = 7$. On a

$$a_0 x^{20} + a_2 x^{18} + a_4 x^{16} + a_6 x^{14} + a_8 x^{12} + a_{10} x^{10} + a_{12} x^8 =$$
$$-\frac{1}{20.84}\left[x^{20} - 10x^{18} + 45x^{16} - 120x^{14} + 210x^{12} - 252x^{10} + 210x^8\right];$$

et, par conséquent :

$$a_0 = -\frac{1}{1680}, \quad a_2 = +\frac{10}{1680}, \quad a_4 = -\frac{45}{1680}, \quad a_6 = +\frac{120}{1680},$$
$$a_8 = -\frac{210}{1680}, \quad a_{10} = +\frac{252}{1680}, \quad a_{12} = -\frac{210}{1680}.$$

31. *Remarques.* I. Si, dans le second membre de l'égalité (20), on fait $x = 1$, il se réduit à

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-q-1}.$$

D'un autre côté, d'après le théorème de Genocchi,

$$1 - C_{n,1} + C_{n,2} - \cdots \pm C_{n,p-1} = (-1)^{p+1} C_{n-1,p-1} \quad (\mathbf{27},\ \mathrm{II})$$

En conséquence,

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-q-1} = -\frac{1}{2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

(*) A cause de $2n - 2p + 2 = q + 1$ (**26**).

II. Cette relation, assez curieuse, donne lieu au petit théorème d'Arithmétique suivant, très facile à vérifier :

a, b *étant des nombres entiers, différents de zéro, la somme alternée*

$$1-\frac{a}{b+1}+\frac{a(a-1)}{(b+1)(b+2)}-\cdots\pm\frac{a(a-1)\ldots 3.2.1}{(b+1)(b+2)\ldots(b+a)}$$

égale $\frac{b}{a+b}$ (*).

III. Au lieu d'opérer comme nous venons de le faire, on peut partir de l'égalité (20), mise sous la forme

$$\int_0^x \frac{x^q dx}{(x^2-1)^{n+1}}=\frac{a_0x^{2n}+a_2x^{2n-2}+\cdots+a_{2n-q-1}x^{q+1}}{(x^2-1)^n} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Prenant alors les dérivées des deux membres, et identifiant, on trouve ce système d'équations du premier degré :

$$\left.\begin{array}{r} a_2+na_0=0, \\ 2a_4+(n-1)a_2=0, \\ 3a_6+(n-2)a_4=0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ (q+1)a_{2n-q-1}+1=0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

On y satisfait par les valeurs (22).

32. *Une formule de Gauss.* Cette formule, dont nous nous sommes plusieurs fois occupé (**), est

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}=1+\frac{\beta}{1}\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}+\cdots \quad . \; . \quad (26)\ (^{***})$$

(*) Si $b=0$, on a

$$1-C_{a,1}+C_{a,2}-\cdots\pm C_{a,a}=0;$$

relation connue.

(**) *Mélanges mathématiques*, t. I, p. 145; *Recherches sur la constante* G, p. 9; etc. Dans ce Mémoire (*Sur la constante* G), les lignes 3, 4, 5, 6, de la p. 13, doivent être *supprimées*.

(***) On suppose $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>\alpha+\beta$.

Pour la démontrer, j'observe que :

$$1=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)},\qquad \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\gamma+1)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)},\qquad \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\gamma+2)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Donc, S étant la somme de la série (supposée *convergente*) :

$$S=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)}+\frac{\beta}{1}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\gamma+1)}+\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\gamma+2)}+\cdots\right];$$

ou, en multipliant et divisant par $\Gamma(\gamma-\alpha)$:

$$S=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1(1-\theta)^{\gamma-\alpha-1}d\theta\left[\theta^{\alpha-1}+\frac{\beta}{1}\theta^{\alpha}+\cdots\right]$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1(1-\theta)^{\gamma-\alpha-1}d\theta\,.\,\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{-\beta};$$

ou, finalement,

$$S=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(27)$$

33. *Suite.* Dans le cas le plus général, la série de Gauss est

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\beta}{1}\frac{\alpha}{\gamma}x+\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots\quad\ldots\quad(28)\ (*)$$

Supposant $x^2<1$, on trouve, sans nouveau calcul,

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1\frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\gamma-\alpha-1}d\theta}{(1-\theta x)^{\beta}}\quad\ldots\ldots\quad(29)$$

34. *Une formule de Stirling.* Si, dans la relation (26), on prend $\beta=1$, elle se réduit à

$$\frac{\gamma-1}{\gamma-\alpha-1}=1+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}+\cdots\quad\ldots\ldots\ldots\quad(50)$$

Cette remarquable formule est due à Sterling (**) :

(*) Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 441.

(**) Binet, *Journal de l'École polytechnique*, 37e Cahier, p. 154. Voir, aussi, les *Mélanges mathématiques*, t. I, p. 147.

35. *Autre sommation.* Soit

$$F_n(x)=\sum_{p=1}^{p=n}(-1)^p C_{n-1,p-1}\frac{x^{2n-2p+1}}{2n-2p+1} \quad \ldots \ldots \quad (51)$$

On a

$$\frac{1}{2n-2p+1}=\int_0^1 \alpha^{2n-2p}d\alpha;$$

donc

$$F_n(x)=\int_0^1 d\alpha\sum_1^n(-1)^p C_{n-1,p-1}x^{2n-2p+1}\alpha^{2n-2p}=x\int_0^1 d\alpha\sum_1^n(-1)^p C_{n-1,p-1}(\alpha^2x^2)^{n-p},$$

ou

$$F_n(x)=-x\int_0^1(\alpha^2x^2-1)^{n-1}d\alpha; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

puis, si l'on fait $\alpha x=\theta$:

$$F_n(x)=-\int^x(\theta^2-1)^{n-1}d\theta,$$

ou enfin

$$F_n(x)=-\int_0^x(x^2-1)^{n-1}dx \text{ (*)}.$$

IV

Application d'une formule.

36. *Expression de* X_n. Dans les *Nouvelles propriétés des fonctions* X_n (**), nous avons démontré la formule

$$X_n=\frac{2^n}{\pi}\int_0^\pi \sin^n\varphi(x\sin\varphi+\sqrt{-1}\cos\varphi)^n d\varphi, \quad \ldots \ldots \quad (H)$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$X_n=\frac{2^n}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi(x+g)^n d\varphi, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (K)$$

en posant, pour abréger,

$$g=\sqrt{-1}\cot\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (53)$$

(*) On trouve le même résultat en évaluant

$$F'_n(x)=\sum_1^n(-1)^p C_{n-1,p-1}x^{2n-2p}.$$

(**) Page 4.

37. *Première application.* De (H) résulte, si $x = 1$:

$$\frac{\pi}{2^n} = \int_0^{\pi} \sin^n \varphi (\sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^n d\varphi,$$

ou

$$\frac{\pi}{(2\sqrt{-1})^n} = \int_0^{\pi} \sin^n \varphi (\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi)^n d\varphi,$$

ou

$$\frac{\pi}{(2\sqrt{-1})^n} = \int_0^{\pi} \sin^n\varphi(\cos n\varphi - \sqrt{-1} \sin n\varphi) d\varphi; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

puis, si $n = 2n'$:

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n'}\varphi \cos 2n'\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4^{n'}}(-1)^{n'}, \quad \int_0^{\pi} \sin^{2n'} \varphi \sin 2n'\varphi d\varphi = 0; \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

et, si $n = 2n' + 1$:

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n'+1}\varphi \cos (2n' + 1)\varphi d\varphi = 0; \quad \int_0^{\pi} \sin^{2n'+1}\varphi \sin (2n' + 1)\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{2n'+1}}(-1)^{n'}; \quad (36)$$

valeurs connues (*).

38. *Dérivées de* X_n. La relation (K) donne

$$\frac{d^pX_n}{dx^p} = \frac{2^n}{\pi} n(n-1)\dots(n-p+1)\int_0^{\pi} \sin^{2n}\varphi (x+g)^{n-p} d\varphi; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

et, en particulier,

$$\frac{d^nX_n}{dx^n} = \frac{2^n}{\pi}\Gamma(n+1)\int_0^{\pi} \sin^{2n}\varphi d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

(*) Voir, par exemple, la *Note* de Serret (*Journal de Liouville,* 1845, p. 13). On peut consulter, aussi, notre *Second Mémoire sur les fonctions* X_n (p. 20).

39. *Remarque.* Dans le développement de X_n, le coefficient de x^n est

$$\frac{1}{2^n} C_{2n,n} \ (*).$$

Donc

$$\frac{d^n X_n}{dx^n} = \frac{1}{2^n} C_{2n,n} \Gamma(n+1);$$

puis, par la formule (43) :

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4^n} C_{2n,n}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (59)$$

expression connue.

40. *Dérivées de* $(x^2 - 1)^n$ (**). On sait que

$$X_n = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \ (***);$$

donc, par la comparaison avec (K) :

$$\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} = C_n \int_0^\pi \sin^{2n} \varphi (x+g)^n d\varphi \quad \ldots \ldots \quad \text{(L) (IV)}$$

Afin de simplifier les calculs, donnons à n une valeur particulière, 4, par exemple. Nous aurons

$$\frac{d^4 (x^2-1)^4}{dx^4} = C_4 \int_0^\pi \sin^8\varphi d\varphi (x+g)^4.$$

Soit

$$y = (x+g)^4 = (\overline{x+1} + \overline{g-1})^4$$
$$= (x+1)^4 + 4(x+1)^3(g-1) + 6(x+1)^2(g-1)^2 + 4(x+1)(g-1)^3 + (g-1)^4.$$

(*) *Premier Mémoire*, p. 11.
(**) Sujet déjà traité, en partie, dans les *Nouvelles propriétés*...., pp. 7 et suiv.
(***) Formule de Rodrigues.
(IV) Pour abréger, nous faisons $\frac{2^n \Gamma(n+1)}{\pi} = C_n$.

De là résulte

$$\int_{-1}^{x} y\,dx = \frac{(x+1)^5}{5} + (x+1)^4(g-1) + \frac{6}{3}(x+1)^3(g-1)^2 + \frac{4}{2}(x+1)^2(g-1)^3 + (x+1)(g-1)^4,$$

ou

$$\int_{-1}^{x} y\,dx = \frac{1}{5}\left[(x+1)^5 + 5(x+1)^4(g-1) + 10(x+1)^3(g-1)^2 + 10(x+1)^2(g-1)^3 + 5(x+1)(g-1)^4\right].$$

Par conséquent,

$$\frac{d^3(x^2-1)^4}{dx^3} = \frac{C_4}{5.}\int_0^{\pi} \sin^8\varphi\,d\varphi\left[(x+1)^5 + 5(x+1)^4(g-1) + 10(x+1)^3(g-1)^2 \right.$$
$$\left. + 10(x+1)^2(g-1)^3 + 5(x+1)(g-1)^4\right] \text{ (*)}.$$

Le polynôme entre parenthèses est *l'ensemble des cinq premiers termes du développement de* $(\overline{x+1}+\overline{g-1})^5$.

On trouve, de la même manière,

$$\frac{d^2(x^2-1)^4}{dx^2} = \frac{C_4}{5.6}\int_0^{\pi} \sin^8\varphi\,d\varphi\,.\,T_6,$$

en posant

$$T_6 = (x+1)^6 + 6(x+1)^5(g-1) + 15(x+1)^4(g-1)^2 + 20(x+1)^3(g-1)^3 + 15(x+1)^2(g-1)^4.$$

Le polynôme T_6, *divisible par* $(x+1)^2$, *est l'ensemble des cinq premiers termes du développement de* $(\overline{x+1}+\overline{g-1})^6$.

Continuant ainsi, on trouve encore :

$$\frac{d(x^2-1)^4}{dx} = \frac{C_4}{5.6.7}\int_0^{\pi} \sin^8\varphi\,d\varphi\,.\,T_7, \qquad (x^2-1)^4 = \frac{C_4}{5.6.7.8}\int_0^{\pi} \sin^8\varphi\,d\varphi\,.\,T_8.$$

Dans ces deux égalités, T_7 *est l'ensemble des cinq premiers termes du développement de* $(x+g)^7$; T_8 *est l'ensemble des cinq premiers termes du développement de* $(x+g)^8$; ces développements étant ordonnés suivant les puissances décroissantes de $x+1$. De plus, T_7 *est divisible par* $(x+1)^3$, T_8 *est divisible par* $(x+1)^4$.

(*) Les deux membres sont divisibles par $x+1$.

Sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage, nous énoncerons la proposition suivante :

41. Théorème IX. *Si l'on désigne par* T_{2n} *l'ensemble des* $n+1$ *premiers termes du développement de* $(\overline{x+1}+\overline{g-1})^{2n}$, *on a*

$$(x^2-1)^n = \frac{4^n}{\pi C_{2n,n}} \int_0^{\pi} \sin^{2n}\varphi d\varphi . T_{2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{M}) \ (*)$$

42. Corollaire.

$$(x-1)^n = \frac{4^n}{\pi C_{2n,n}} \int_0^{\pi} \sin^{2n}\varphi d\varphi \, U_{2n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

U_{2n} représentant le quotient de T_{2n} par $(x+1)^n$. Ce quotient est un *polynôme entier*.

43. *Remarques*. I. On a

$$T_{2n} = (x+1)^{2n} + C_{2n,1}(x+1)^{2n-1}(g-1) + \cdots + C_{2n,n}(x+1)^n(g-1)^n, \quad . \quad . \quad (41)$$

$$U_{2n} = (x+1)^n + C_{2n,1}(x+1)^{n-1}(g-1) + \cdots + C_{2n,n}(g-1)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Donc, si $x = -1$,

$$U_{2n} = C_{2n,n}(g-1)^n;$$

et, par la relation (40),

$$(-2)^n = \frac{4^n}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^{2n}\varphi d\varphi (g-1)^n,$$

ou

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n}\varphi d\varphi (1-g)^n = \frac{\pi}{2^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Ce résultat s'accorde avec la formule (34).

(*) D'ailleurs, si l'on part de cette expression de $(x^2-1)^n$, et que l'on en prenne les dérivées successives, on retrouve la formule (K). Le second membre de (M) est donc un polynôme entier $f(x)$, dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ égale $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$, et dont toutes les autres dérivées, précédant celle-ci, s'annulent pour $x=-1$. Par conséquent, $f(x) = (x^2-1)^n$.

II. De même, $x = 0$ donne

$$U_{2n} = T_{2n} = 1 + C_{2n,1}(g-1) + C_{2n,2}(g-1)^2 + \cdots + C_{2n,n}(g-1)^n$$
$$= g^{2n} - (g-1)^{n+1}\left[C_{2n,n-1} + \cdots + (g-1)^{n-1}\right];$$

après quoi, au moyen de la formule (40), on obtient

$$(-1)^n \int_0^\pi \cos^{2n}\varphi d\varphi - \int_0^\pi \sin^{2n}\varphi d\varphi (g-1)^{n+1}\left[C_{2n,n-1} + \cdots + (g-1)^{n-1}\right] = (-1)^n \frac{C_{2n,n}}{4^n}\pi.$$

Mais cette relation peut être simplifiée. En effet,

$$\int_0^\pi \cos^{2n}\varphi d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\varphi d\varphi = \pi \frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots 2n} = \frac{\pi}{4^n} C_{2n,n}.$$

Donc

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi d\varphi (g-1)^{n+1}\left[C_{2n,n-1} + C_{2n,n-2}(g-1) + \cdots + (g-1)^{n-1}\right] = 0. \quad (44)\ (*)$$

43. *Relation entre deux intégrales.* Si, dans l'égalité (40), on change x en x^2, la comparaison avec (M) donne

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi d\varphi V_{2n} = \int_0^\pi \sin^{2n}\varphi d\varphi T_{2n}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

pourvu que l'on suppose

$$V_{2n} = (x^2+1)^n + C_{2n,1}(x^2+1)^{n-1}(g-1) + \cdots + C_{2n,n}(g-1)^n \quad \ldots \quad (46)$$

D'ailleurs (41) :

$$T_{2n} = (x+1)^n\left[(x+1)^n + C_{2n,1}(x+1)^n(g-1) + \cdots + C_{2n,n}(g-1)^n\right]. \quad . \quad (47)$$

Donc l'égalité (45) devient

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi d\varphi \left[(x^2+1)^n + C_{2n,1}(x^2+1)^{n-1}(g-1) + \cdots + C_{2n,n}(g-1)^n\right] \\ &= (x+1)^n \int_0^\pi \sin^{2n}\varphi d\varphi \left[(x+1)^n + C_{2n,1}(x+1)^{n-1}(g-1) + \cdots + C_{2n,n}(g-1)^n\right] \end{aligned}\right\}; \quad (N)$$

relation assez curieuse. Pour $x = 0$, elle se change en *identité*.

(*) Il est clair que l'on pourrait multiplier ces applications de la formule (40). Nous y reviendrons plus loin.

V

Complément d'une formule de Poisson.

44. Cette formule, dont il a été question ci-dessus (p. 10), peut être écrite ainsi :

$$\gamma^m + C_{m,1}\gamma^{m-1}(1-\gamma) + \cdots + C_{m,p}\gamma^{m-p}(1-\gamma)^p = (p+1)C_{m,p+1}(1-\gamma)^{p+1}\int_0^\gamma \frac{\theta^{m-p-1}d\theta}{(1-\gamma+\theta)^{m+1}}. \quad (48)\ (*)$$

Si l'on fait

$$\theta = \gamma\lambda,$$

et qu'on supprime, dans les deux membres, le facteur γ^{m-p}, elle devient

$$\gamma^p + C_{m,1}\gamma^{p-1}(1-\gamma) + \cdots + C_{m,p}(1-\gamma)^p = (p+1)C_{m,p+1}(1-\gamma)^{p+1}\int_0^1 \frac{\lambda^{m-p-1}d\lambda}{(1-\gamma+\gamma\lambda)^{m+1}}. \quad (49)$$

45. *Suite.* Soient

$$\gamma = \frac{x}{x+y}, \quad 1-\gamma = \frac{y}{x+y}.$$

Un calcul très simple donne, au lieu de l'égalité (49),

$$x^m + C_{m,1}x^{m-1}y + \cdots + C_{m,p}x^{m-p}y^p = (p+1)C_{m,p+1}x^{m-p}y^{p+1}(x+y)^m\int_0^1 \frac{\lambda^{m-p-1}d\lambda}{(y+\lambda x)^{m+1}}. \quad (\mathrm{P})$$

Telle est la formule qui généralise ou complète celle de Poisson.

46. *Une vérification.* Si, dans (P), on change x en y, y en x, p en q, on obtient

$$y^m + C_{m,1}y^{m-1}x + \cdots + C_{m,q}y^{m-q}x^q = (q+1)C_{m,q+1}y^{m-q}x^{q+1}(x+y)^m\int_0^1 \frac{\lambda^{m-q-1}d\lambda}{(x+\lambda y)^{m+1}};$$

et, dans le cas particulier où $q = m - p - 1$:

$$C_{m,m-p-1}x^{m-p-1}y^{p+1} + \cdots + y^m = (m-p)C_{m,m-p}y^{p+1}x^{m-p}(x+y)^m\int_0^1 \frac{\lambda^p d\lambda}{(x+\lambda y)^{m+1}}. \quad (50)$$

(*) *Mélanges mathématiques*, t. I, p. 298.

Dans les égalités (P) et (37), la somme des premiers membres est $(x+y)^m$. Conséquemment,

$$1=(p+1)C_{m,p+1}x^{m-p}y^{p+1}\int_0^1\frac{\lambda^{m-p-1}d\lambda}{(y+\lambda x)^{m+1}}+(m-p)C_{m,m-p}x^{m-p}y^{p+1}\int_0^1\frac{\lambda^p d\lambda}{(x+\lambda y)^{m+1}}; \quad (51)$$

mais cette relation peut être fort réduite.

En effet :

1° $(p+1)C_{m,p+1}=\dfrac{m(m-1)\dots(m-p)}{1.2\dots p}=(m-p)C_{m,m-p}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(m-p)}$.

2° Dans la première intégrale, changeons λ en $\frac{1}{\lambda}$ (*). Elle devient

$$\int_1^\infty\frac{\lambda^p d\lambda}{(x+\lambda y)^{m+1}}.$$

Nous avons donc, plus simplement,

$$1=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(m-p)}x^{m-p}y^{p+1}\int_0^\infty\frac{\lambda^p d\lambda}{(x+\lambda y)^{p+1}}; \quad \dots\dots \quad (52)$$

3° Soit $\lambda=\frac{xz}{y}$. On trouve enfin

$$\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(m-p)}{\Gamma(m+1)}=\int_0^\infty\frac{z^p dz}{(1+z)^{m+1}}; \quad \dots\dots \quad (53)$$

ce qui est exact (**)

47. *Application.* Soient, comme au n° 43 :

$$T_{2n}=(x+1)^{2n}+C_{2n,1}(x+1)^{2n-1}(g-1)+\dots+C_{2n,n}(x+1)^n(g-1)^n, \quad \dots \quad (54)$$

$$V_{2n}=\frac{1}{(x^2+1)^n}\left[(x^2+1)^{2n}+C_{2n,1}(x^2+1)^{2n-1}(g-1)+\dots+C_{2n,n}(x^2+1)^n(g-1)\right]^n. \quad (55)$$

La formule (P) donne tout de suite, par un changement de lettres :

$$T_{2n}=(n+1)C_{2n,n\ 1}(x+1)^n(g-1)^{n+1}(x+g)^{2n}\int_0^1\frac{\lambda^{n-1}d\lambda}{[g-1+\lambda(x+1)]^{2n+1}}, \quad (56)$$

$$V_{2n}=(n+1)C_{2n,n-1}(g-1)^{n+1}(x^2+g)^{2n}\int_0^1\frac{\lambda^{n-1}d\lambda}{[g-1+\lambda(x^2+1]^{2n+1}}. \quad \dots \quad (57)$$

(*) Transformation connue.

(**) Bierens de Haan, t. XVIII.

Substituant dans (N), on trouve

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi d\varphi (g-1)^{n+1}(x^2+g)^{2n}\int_0^1 \frac{\lambda^{n-1}d\lambda}{\left[g-1+\lambda(x^2+1)\right]^{2n+1}}\\ &=(x+1)^n\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi d\varphi (g-1)^{n+1}(x+g)^{2n}\int_0^1 \frac{\lambda^{n-1}d\lambda}{\left[g-1+\lambda(x+1)\right]^{2n+1}}\end{aligned}\right\};\qquad (58)$$

relation qui pourrait encore être réduite.

De cette formule, supposée exacte, résulte celle-ci :

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi d\varphi (g-1)^{n+1}(g+1)^{2n}\int_0^1 \frac{\lambda^{n-1}d\lambda}{(g-1+2\lambda)^{2n+1}}=0,$$

qu'il serait bon d'établir directement.

VI

Digression arithmétique.

48. *Une somme de fractions.* La *Seconde Note sur les fonctions* X_n contient (p. 6) la proposition suivante :

La somme des fractions

$$(2p+1)\frac{2.3.4\ldots p}{3.5.7\ldots\overline{2p+1}},\quad (2p-3)\frac{4.5\ldots p}{5.7\ldots\overline{2p-1}},\quad (2p-7)\frac{6.7\ldots p}{7.9\ldots\overline{2p-3}},\ \ldots$$

égale l'unité.

Cet énoncé exige que la dernière des fractions considérées échappe à la loi commune (*). Nous le rectifierons ainsi :

La somme S, *des fractions indiquées, est* $\frac{p}{p+1}$ *ou* $\frac{p-1}{p+2}$, *selon que* p *est pair ou impair* (**).

(*) *Second Mémoire sur les fonctions* X_n, p. 43.

(**) Dans le premier cas, le *dernier des numérateurs* $2.3\ldots p$, $4.5\ldots p$, $6.7\ldots p$, .. est p ; dans le second, il est $(p-1)p$.

49. *Application.* Soit $p = 9$. D'après l'énoncé :

$$19\,\frac{2.3.4\,5.6.7.8.9}{3.5.7.9.11.13.15.17.19} + 15\,\frac{4.5.6.7.8.9}{5.7.9.11.13.15.17} + 11\,\frac{6.7.8.9}{7.9.11.13.15} + 7\,\frac{8.9}{9.11.13} = \frac{8}{11},$$

ou

$$\frac{2.4.6.8}{11.13.15.17} + \frac{4.6.8}{11.13.17} + \frac{6.8}{13.15} + \frac{7.8}{11.13} = \frac{8}{11},$$

ou

$$\frac{2.4.6}{13.15.17} + \frac{24}{13.17} + \frac{66}{13.15} + \frac{7}{13} = 1;$$

puis

$$2.4.6 + 24.15 + 66.17 + 105.17 = 13.15.17,$$

ou

$$16 + 120 + 22.17 + 35.17 = 65.17,$$

ou enfin

$$8 + 22 + 35 = 65\ (^*).$$

50. *Théorie.* Les fractions précédentes jouissent de quelques propriétés assez curieuses, qu'il est, peut-être, utile de mentionner.

a étant un nombre *impair* (**), soit

$$a_n = (2a + 5 - 4n)\,\frac{2n(2n+1)(2n+2)\dots a}{(2n+1)(2n+3)\dots(2a+5-2n)}; \quad \dots \quad (59)$$

ou, en réduisant,

$$a_n = (2a + 5 - 4n)\,\frac{2n(2n+2)(2n+4)\dots\overline{a-1}}{(a+2)(a+4)\dots(2a+3-2n)} \quad \dots \quad (60)$$

De là résulte

$$a_{n+1} = (2a + 1 - 4n)\,\frac{(2n+2)(2n+4)\dots\overline{a-1}}{(a+2)(a+4)\dots(2a+1-2n)};$$

puis

$$a_n + a_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+4)\dots(a-1)}{(a+2)(a+4)\dots(2a+3-2n)}\,\mathrm{N}, \quad \dots \quad (61)$$

en posant

$$\mathrm{N} = (2a + 5 - 4n)\,2n + (2a + 1 - 4n)(2a + 3 - 2n).$$

(*) Si l'on prend $p = 10, 11, 12, \dots$, on obtient d'excellents exercices de *calcul numérique*.

(**) On verra, tout à l'heure, la raison de cette hypothèse.

Un calcul très simple donne

$$N = (2a + 1)(2a + 3 - 4n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Donc

$$a_n + a_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+4)\ldots\overline{a-1}}{(a+2)(a+4)\ldots(2a+3-2n)}(2a+1)(2a+3-4n) \quad . \quad . \quad (63)$$

51. *Suite.* Si $n = 1$, le plus grand facteur du dénominateur est

$$2a + 3 - 2 = 2a + 1;$$

et la formule (63) se réduit à

$$a_1 + a_2 = \frac{4.6.8\ldots\overline{a-1}}{(a+2)(a+4)\ldots(2a-3)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Ainsi, *le premier binôme est réductible.* Mais il n'en est pas de même pour $a_3 + a_4$, $a_5 + a_6$, ..., du moins quand $2a + 1$ est un *nombre premier.*

Pour plus de clarté, représentons par B_k le binôme $a_n + a_{n+1}$, dont k est le *rang.* Il est visible que $n = 2k - 1$.

Cela posé, la formule (63) devient

$$B_k = \frac{4k(4k+2)\ldots(a-1)}{(a+2)(a+4)\ldots(2a+5-4k)}(2a+1)(2a+7-8k) \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

La plus grande valeur de $2n + 2$ est, par cette même formule (63), $a - 1$. Soit λ *la plus grande valeur* de k. Alors :

$$\left.\begin{aligned} a &= 4\lambda + 1, \\ 2a + 1 &= 8\lambda + 3, \\ B_\lambda &= \frac{4\lambda}{(4\lambda+3)(4\lambda+5)(4\lambda+7)} 9.(8\lambda+3) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)\ (*)$$

Chacune des valeurs de B_k, sauf la première, a la forme $\frac{A}{B}(8\lambda + 3)$, $\frac{A}{B}$ étant une fraction irréductible.

(*) Ces valeurs s'accordent avec l'*application* faite dans le n° 49.

D'ailleurs,

$$B_1 = \frac{4.6.8\ldots 4\lambda}{(4\lambda+3)(4\lambda+5)\ldots(8\lambda-1)}, \quad \ldots\ldots\ldots (67)$$

et la somme $S = \frac{a-1}{a+2} = \frac{4\lambda}{4\lambda+3}$. Donc

$$\frac{4\lambda}{4\lambda+3} = \frac{4.6.8\ldots 4\lambda}{(4\lambda+3)(4\lambda+5)\ldots(8\lambda-1)} = \sum \frac{A}{B}(8\lambda+3);$$

puis, $8\lambda+3$ étant *premier :*

$$(4\lambda+5)(4\lambda+7)\ldots(8\lambda-1) - 4.6.8\ldots(4\lambda-2) = \mathfrak{M}(8\lambda+3) \quad \ldots (68)$$

Pour vérifier cette *identité,* il suffit d'observer que : 1° chacun des deux produits contient un nombre *pair* de facteurs; 2°

$$(4\lambda+5)+(4\lambda-2) = (4\lambda+7)+(4\lambda-4)+\ldots = 8\lambda+3 \text{ (*)}.$$

52. *Autre sommation* (**). Soit

$$H_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}C_{n,1} + \frac{1}{2n-3}C_{n,2} - \ldots \pm 1 \quad \ldots\ldots (69)$$

Il est visible que

$$H_n = \int_0^1 (x^{2n} - C_{n,1}x^{2n-2} + \ldots \pm 1)\,dx,$$

ou

$$H_n = (-1)^n \int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (70)$$

(*) La condition *supposée* n'est donc pas *nécessaire.*
(**) Nous en aurons besoin dans la *Troisième partie.*

Si l'on fait $x^2 = \theta$, cette formule devient

$$H_n = \frac{1}{2}(-1)^n \int_0^1 (1-\theta)^n \theta^{-\frac{1}{2}} d\theta. \qquad (71)$$

ou

$$H_n = \frac{1}{2}(-1)^n \frac{\Gamma(n+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n+\frac{5}{2}\right)};$$

et, finalement,

$$H_n = (-1)^n \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots \overline{2n+1}}. \qquad (72)$$

53. *Remarque.* On sait que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\varphi d\varphi = \frac{2.4\ldots 2n}{3.5\ldots \overline{2n+1}}.$$

Donc

$$H_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\varphi d\varphi \qquad (73)$$

TROISIÈME PARTIE.

POLYNOMES DE POLIGNAC (*).

54. Problème. *Évaluer la partie entière du développement de*

$$(x^2 - 1)^n \mathcal{L} \frac{x+1}{x-1}.$$

Soit Q_n cette partie entière (*Polynôme de Polignac*).

Il est visible que

$$Q_n = 2\left[\frac{S_n}{x} + \frac{S_{n-1}}{3x^3} + \frac{S_{n-2}}{5x^5} + \cdots + \frac{S_1}{(2n-1)x^{2n-1}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)\ (^{**})$$

Le terme général du polynôme entre parenthèses est

$$\frac{S_p}{(2n-2p+1)x^{2n-2p+1}}.$$

D'ailleurs,

$$S_p = (-1)^p 2nC_{n-1,\,p-1}\, x^{2n-2p+2} \int_0^1 \frac{(x^2-1)^n \alpha^{n-2p+1}}{(\alpha^2 x^2 - 1)^{n+1}}\, d\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Donc

$$Q_n = 4nx(x^2-1)^n \int_0^1 \frac{d\alpha}{(\alpha^2 x^2 - 1)^{n+1}} \sum_1^n C_{n-1,\,p-1} \frac{(-1)^p \alpha^{2n-2p+1}}{2n-2p+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

(*) Les polynômes que je désigne ainsi jouissent de propriétés remarquables, dont la plupart ont été indiquées par M. C. de Polignac, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. III, p. 19).

(**) Soit, par exemple, $n = 4$. Le développement dont il s'agit est

$$2(x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1)\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \cdots\right].$$

Donc

$$Q_4 = 2(x^7 - 4x^5 + 6x^3 - 4x) + \frac{2}{3}(x^5 - 4x^3 + 6x) + \frac{2}{5}(x^3 - 4x) + \frac{2}{7}x;$$

ou, en reprenant les notations employées dans le n° 23 :

$$Q_4 = 2\left[\frac{S_4}{x} + \frac{S_3}{3x^3} + \frac{S_2}{5x^5} + \frac{S_1}{7x^7}\right].$$

La somme contenue sous le signe $\int$ est celle qui a été désignée par $F_n(x)$ (35) (*). Nous avons trouvé

$$F_n(x) = -x\int_0^1 (\beta^2x^2 - 1)^{n-1}d\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Ainsi, la somme dont il s'agit a pour expression

$$-\alpha\int_0^1 (\alpha^2\beta^2 - 1)^{n-1}d\beta.$$

Conséquemment,

$$Q_n = -4nx(x^2 - 1)^n\int_0^1 \frac{\alpha d\alpha}{(\alpha^2x^2 - 1)^{n+1}}\int_0^1 (\alpha^2\beta^2 - 1)^{n-1}d\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (Q)$$

55. *Autre solution.* Le développement de $(x^2 - 1)^n \,\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}$ se compose du polynôme entier Q_n, augmenté d'une série procédant suivant les puissances négatives et impaires de x. Ainsi

$$(x^2 - 1)^n \mathcal{L}\frac{x+1}{x-1} = Q_n + \frac{B_n}{x} + \frac{C_n}{x^3} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

B_n, C_n, ... étant des coefficients numériques.

Multipliant par $x^2 - 1$, nous avons

$$Q_{n+1} = (x^2 - 1)Q_n + B_n x; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

puis ce groupe d'équations :

$$\left.\begin{aligned} Q_n &= (x^2 - 1)Q_{n-1} + B_{n-1}x, \\ Q_{n-1} &= (x^2 - 1)Q_{n-2} + B_{n-2}x, \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ Q_2 &= (x^2 - 1)Q_1 + B_1 x, \\ Q_1 &= \qquad\qquad\qquad 2x \;(**). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

(*) x remplaçant α.

(**) En effet,

$$(x^2 - 1)\,\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1} = 2(x^2 - 1)\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \cdots\right] = 2x + \cdots$$

On en déduit

$$Q_n = x[B_{n-1} + B_{n-2}(x^2 - 1) + \cdots + B_1(x^2-1)^{n-2} + 2(x^2-1)^{n-1}] \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

Si, dans l'égalité (76), on développe $(x^2 - 1)^n$ et $\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}$, puis qu'on effectue le produit, on trouve, facilement,

$$B_n = 2\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}C_{n,1} + \frac{1}{2n-3}C_{n,2} - \cdots \pm 1\right];$$

c'est-à-dire (52)

$$B_n = 2H_n = (-1)^n \int_0^1 (1-\theta)^n \theta^{-\frac{1}{2}} d\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

La formule (79) devient donc

$$Q_n = x\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} d\theta [(\theta - 1)^{n-1} + (\theta - 1)^{n-2}(x^2 - 1) + \cdots + (x^2-1)^{n-1}],$$

ou

$$Q_n = x\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} d\theta \, \frac{(\theta - 1)^n - (x^2 - 1)^n}{\theta - x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (R)$$

56. *Remarque.* A cause de

$$H_n = (-1)^n \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots \overline{2n+1}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

la formule (R) peut, avantageusement, être remplacée par celle-ci :

$$Q_n = 2x\,[H_{n-1} + H_{n-2}(x^2 - 1) + \cdots + H_1(x^2-1)^{n-2} + (x^2 - 1)^{n-1}] \quad . \quad . \quad . \quad (S)$$

Soit, par exemple, $n = 3$. On trouve

$$Q_3 = 2x\left[\frac{8}{15} - \frac{2}{3}(x^2 - 1) + (x^2 - 1)^2\right],$$

ou

$$Q_3 = 2x^5 - \frac{16}{3}x^3 + \frac{22}{5}x.$$

C'est le résultat que donne le calcul direct.

57. *Une équation différentielle.* De

$$Q_{n+1} = (x^2 - 1)Q_n + B_n x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

on déduit :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dQ_{n+1}}{dx} &= (x^2 - 1)\frac{dQ_n}{dx} + 2xQ_n + B_n, \\
\frac{d^2Q_{n+1}}{dx^2} &= (x^2 - 1)\frac{d^2Q_n}{dx^2} + 4x\frac{dQ_n}{dx} + 2Q_n, \\
\frac{d^3Q_{n+1}}{dx^3} &= (x^2 - 1)\frac{d^3Q_n}{dx^3} + 6x\frac{d^2Q_n}{dx^2} + 6\frac{dQ_n}{dx}, \\
\frac{d^4Q_{n+1}}{dx^4} &= (x^2 - 1)\frac{d^4Q_n}{dx^4} + 8x\frac{d^3Q_n}{dx^3} + 12\frac{d^2Q_n}{dx^2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

$$\frac{d^{n+1}Q_{n+1}}{dx^{n+1}} = (x^2 - 1)\frac{d^{n+1}Q_n}{dx^{n+1}} + 2(n+1)x\frac{d^nQ_n}{dx^3} + n(n+1)\frac{d^{n-1}Q_n}{dx^{n-1}} \quad . \quad . \quad . \quad (T)$$

Telle est l'équation différentielle cherchée (*).

58. *Remarque.* Les premières valeurs de Q_n sont :

$$Q_1 = 2x, \qquad Q_2 = 2\left(x^3 - \frac{5}{3}x\right), \qquad Q_3 = 2\left(x^5 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{11}{5}x\right).$$

Il en résulte :

$$\frac{dQ_1}{dx} = 2, \qquad \frac{d^2Q_2}{dx^2} = 12x, \qquad \frac{d^3Q_3}{dx^3} = 40x^3 - 32x.$$

Or, on sait que :

$$P_1 = 2, \qquad P_2 = 3x, \qquad P_3 = \frac{1}{3}(15x^2 - 4) \text{ (**)}.$$

Ainsi

$$\frac{dQ_1}{dx} = P_1, \qquad \frac{d^2Q_2}{dx^2} = 2.1.2.P_2, \qquad \frac{d^3Q_3}{dx^3} = 4.1.2.3.P_3.$$

On va voir que cette loi est générale.

(*) Plus exactement, l'équation aux *différences mêlées*.
(**) *Sur quelques formules d'Analyse*, p. 12.

59. Théorème X. *On a, entre les polynômes d'Hermite et ceux de Polignac, la relation*

$$\frac{d^{n+1}Q_{n+1}}{dx^{n+1}} = 2^n\Gamma(n+2)P_{n+1}. \quad \text{(U)}$$

Supposons, d'après la Remarque précédente,

$$\frac{d^nQ_n}{dx^n} = 2^{n-1}\Gamma(n+1)P_n; \quad (81)$$

et voyons s'il en résulte l'égalité (U). Nous avons trouvé l'équation différentielle

$$\frac{d^{n+1}Q_{n+1}}{dx^{n+1}} = (x^2-1)\frac{d^{n+1}Q_n}{dx^{n+1}} + 2(n+1)x\frac{d^nQ_n}{dx^n} + n(n+1)\frac{d^{n-1}Q_n}{dx^{n-1}} \quad \text{(T)}$$

On tire, de la relation (81) :

$$\frac{d^{n+1}Q_n}{dx^{n+1}} = 2^{n-1}\Gamma(n+1)\frac{dP_n}{dx}, \quad (82)$$

$$\frac{d^{n-1}Q_n}{dx^{n-1}} = 2^{n-1}\Gamma(n+1)\int P_n dx.$$

Le second membre de l'équation (U) est donc

$$2^{n-1}\Gamma(n+1)(x^2-1)\frac{dP_n}{dx} + 2^n\Gamma(n+1)xP_n + 2^{n-1}n\Gamma(n+2)\int P_n dx;$$

et, d'après la formule (81), il faut vérifier que cette fonction égale $2_n\Gamma(n+2)P_{n+1}$, ou que l'on a

$$(x^2-1)\frac{dP_n}{dx} + 2x(n+1)P_n + n(n+1)\int P_n dx = 2(n+1)P_{n+1}. \quad (83)$$

L'équation différentielle à laquelle satisfait P_n est

$$(x^2-1)\frac{d^2P_n}{dx^2} + 2(n+2)x\frac{dP_n}{dx} + (n+2)(n+1)P_n = 2(n+1)\frac{dP_{n+1}}{dx} \quad \text{(F) (*)}$$

(*) Page 18.

Or, dans l'égalité (85), la dérivée du premier membre est

$$(x^2-1)\frac{d^2P_n}{dx^2}+2x\frac{dP_n}{dx}+2x(n+1)\frac{dP_n}{dx}+2(n+1)P_n+n(n+1)P_n;$$

ce qui ne diffère pas du premier membre de (F). La relation (U) est donc démontrée.

60. Théorème XI. *La partie entière du développement de* $\frac{d^n[x^2-1)^n]}{dx^n}\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}$ *égale le double de la* n$^{\text{ième}}$ *dérivée de la partie entière du développement de* $(x^2-1)^n\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}$ (*).

On vient de voir que

$$\frac{d^nQ_n}{dx^n}=2^{n-1}\Gamma(n+1)P_n \quad \text{. . . . .} \quad (81)$$

Mais, d'après la formule de Rodrigues,

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}=2^n\Gamma(n+1)X_n\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}.$$

La partie entière du second membre est $2^n\Gamma(n+1)P_n$ (**). D'après l'équation (81), cette partie entière égale $2\frac{d^nQ_n}{dx^n}$. Donc :

Partie entière de $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}$ = 2 *fois partie entière de* $\frac{d^nQ_n}{dx^n}$.

C. Q. F. D. (***)

(*) Théorème de M. C. de Polignac (*Société mathématique de France*, t. III, p. 21).

(**) *Cours de M. Hermite*, p. 146.

(***) N'ayant pu saisir la démonstration donnée par M. de Polignac, j'en ai cherché une autre : celle qu'on vient de lire. Peut-être pèche t-elle en un point.

Liège, 19 janvier 1891.

ADDITIONS.

I

A la page 6 des *Nouvelles propriétés*... se trouve la relation

$$A_p(x^2-1)^p\frac{d^pX_n}{dx^p}=\frac{d\left[(x^2-1)^{p+1}\frac{d^{p+1}X_n}{dx^{p+1}}\right]}{dx}, \quad \ldots \ldots \quad (M)$$

dans laquelle A_p est un *coefficient numérique* (*).

On la ramène, facilement, à celle-ci :

$$\frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n-\nu}}=\frac{(x^2-1)^\nu}{(n-\nu+1)\ldots(n+\nu)}\frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}}; \quad \ldots \quad (M')$$

laquelle est due à Jacobi (**).

II

L'*identité*

$$\sum_0^\infty nX_nx^n=0 \text{ (***)} \quad \ldots \ldots \quad (149)$$

donne lieu à un petit théorème d'Arithmétique.

Prenons, en effet, la formule

$$X_n=\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}C_{n,p}\,.\,C_{2n-2p,n}\,x^{n-2p} \text{ (IV)} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

(*) On a imprimé $(x^p-1)^{p+1}$, au lieu de $(x^2-1)^{p+1}$.

(**) Voir, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, janvier 1891, une intéressante Note de M. Caspary. Je dois, à ce savant Géomètre, la rectification de plusieurs erreurs. Le théorème de Jacobi est celui qui avait été proposé par *M. Lucien Lévy*, dans le *Journal* de M. de Longchamps (1884), *sans indication de source.*

(***) *Second Mémoire*, p. 79.

(IV) *Premier Mémoire*, p. 11. A la page 12, on a imprimé 2_{n+1}, au lieu de 2^{n+1}.

La relation (149) devient

$$\sum \frac{n}{2^n}(-1)^p C_{n,p} C_{2n-p,n} x^{2n-p} = 0;$$

ou, si l'on suppose $n = p + q$, q étant un *nombre donné :*

$$\sum \frac{p+q}{2^{p+q}}(-1)^p C_{p+q,p} C_{2q,p+q} x^{2q} = 0.$$

Cette égalité exige que

$$\sum_{p=0}^{p=q} \frac{p+q}{2^{p+q}}(-1)^p C_{p+q,q} \,.\, C_{2q,p+q} = 0.$$

Par suite : *Prenant, en signes contraires, les termes du développement de* $(1 - 2)^q$, *à partir du deuxième, on multiplie chacun d'eux par son rang : la somme des produits égale* $2q$.

III

Dans le *Second Mémoire* (p. 93), j'ai donné la formule

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1 - x^2}{(1 - 2rx + r^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx = \frac{4}{3},$$

dont la vérification est facile. Il en résulte cette proposition de Géométrie : *Si l'on considère toutes les courbes représentées par*

$$y = \frac{1 - x^2}{(1 - 2\lambda x + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}},$$

λ *étant un paramètre; les segments, déterminés par chacune de ces lignes et par l'axe des abscisses, sont équivalents.*

Liège, 30 mai 1891.