SUR

L'ELLIPSE DE BROCARD;

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté, à la Classe des sciences, dans la séance du 11 octobre 1890.)

SUR

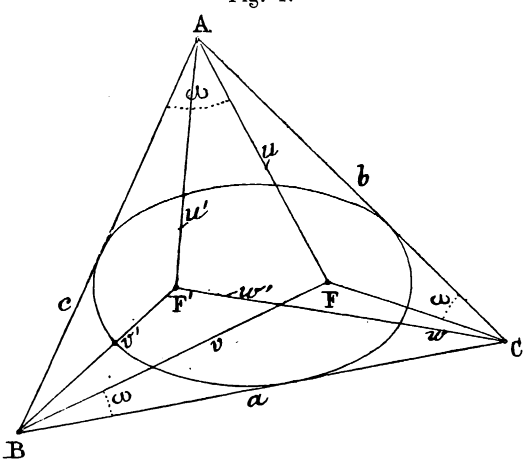
L'ELLIPSE DE BROCARD (*).

I. Préliminaires.

1. *Rappel de formules.* Les foyers F, F' (fig. 1) de l'ellipse inscrite au triangle ABC, sont, relativement à ce triangle, les *points de Brocard* (**).

Chacun des six angles FAB, FBC, FCA, F'AB, F'BC, F'CA est l'*angle de Brocard*, ω; etc. On a, entre les distances $a, b, c, u, v, w, u', v', w'$ et la quantité auxiliaire λ^2, les équations

Fig. 1.



$$\frac{a^2}{bc}=\frac{w}{u}, \quad \frac{b^2}{ca}=\frac{u}{v}, \quad \frac{c^2}{ab}=\frac{a}{w}, \quad . \quad (1)$$

$$u=\frac{b^2c}{\lambda^2}, \quad v=\frac{c^2a}{\lambda^2}, \quad w=\frac{ba^2}{\lambda^2},$$

$$u'=\frac{bc^2}{\lambda^2}, \quad v'=\frac{ca^2}{\lambda^2}, \quad w'=\frac{ab^2}{\lambda^2}, \quad . \quad (2)$$

$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=\lambda^4 \text{ (***)}. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(*) Complément à la Note intitulée : *Quelques formules relatives aux triangles rectilignes.* Celle-ci renferme diverses fautes typographiques, indiquées plus loin.

Si x, y, z désignent les distances, aux côtés a, b, c, d'un point quelconque M, ou les *coordonnées normales* de M, l'*ellipse de Brocard* a pour équation

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=0.$$

(Vigarié, *Congrès de Toulouse.*)

(**) *Quelques formules.....*, p. 28.

(***) *Loc. cit.*, pp. 15 et 12.

En outre, le grand axe f, de l'ellipse, est donné par chacune des formules :

$$f = \sqrt[3]{uvw}, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$f = \sqrt[3]{u'v'w'}, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$f = \frac{abc}{\lambda^2} \text{ (*)}. \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

II. Relations algébriques.

2. *Valeurs de* a, b, c. En combinant, deux à deux, les équations (1), on trouve celles-ci :

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{vw}{u^2}, \quad \frac{b^3}{c^3} = \frac{wu}{v^2}, \quad \frac{c^3}{a^3} = \frac{uv}{w^2}; \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

ou, à cause de la formule (4) :

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{f^3}{u^3}, \quad \frac{b^3}{c^3} = \frac{f^3}{v^3}, \quad \frac{c^3}{a^3} = \frac{f^3}{w^3} \text{ (**)} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Il résulte, de cette suite de rapports égaux :

$$\frac{a^3}{\left(\frac{w}{u}\right)} = \frac{b^3}{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{c^3}{\left(\frac{v}{w}\right)} = \theta,$$

ou

$$a^2 = \left(\theta \frac{w}{u}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad b^2 = \left(\theta \frac{u}{v}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad c^2 = \left(\theta \frac{v}{w}\right)^{\frac{2}{3}}; \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

θ étant une inconnue auxiliaire.

Pour en déterminer la valeur, on peut observer que, d'après ces dernières

(*) *Loc. cit.*, p. 28.

(**) Il ne serait pas plus simple, croyons-nous, d'écrire :

$$\frac{a}{b} = \frac{f}{u}, \quad \frac{b}{c} = \frac{f}{v}, \quad \frac{c}{a} = \frac{f}{w}.$$

formules, jointes à l'égalité (3), on a

$$\lambda^4 = \theta^{\frac{4}{3}}\left[\left(\frac{w}{v}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{u}{w}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{2}{3}}\right],$$

ou

$$\lambda^4 = \frac{\theta^{\frac{4}{3}}}{(uvw)^{\frac{2}{3}}}\left[v^{\frac{4}{3}}w^{\frac{2}{3}} + w^{\frac{4}{3}}u^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right].$$

Mais

$$\lambda^4 = \frac{a^2b^2c^2}{(uvw)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\theta^2}{(uvw)^{\frac{2}{3}}};$$

donc si l'on fait, pour abréger,

$$P = v^{\frac{4}{3}}w^{\frac{2}{3}} + w^{\frac{4}{3}}u^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

on aura

$$\theta = P^{\frac{3}{2}}, \quad a^2 = \left(\frac{w}{u}\right)^{\frac{2}{3}}P, \quad b^2 = \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{2}{3}}P, \quad c^2 = \left(\frac{v}{w}\right)^{\frac{2}{3}}P; \quad \ldots \quad (11)$$

puis

$$\lambda^2 = \frac{P^{\frac{3}{2}}}{f}\ (^*). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

3. *Autres équations.* Des formules (2), on tire :

$$\frac{a^2}{bc} = \frac{v'}{u'}, \quad \frac{b^2}{ca} = \frac{w'}{v'}, \quad \frac{c^2}{ab} = \frac{u'}{v'}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

On satisfait à ces équations en supposant

$$\frac{a^3}{\left(\frac{v'}{u'}\right)} = \frac{b^3}{\left(\frac{w'}{v'}\right)} = \frac{c^3}{\left(\frac{u'}{w'}\right)} = \theta'; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

θ' étant une nouvelle inconnue auxiliaire.

Un calcul semblable à celui qui précède donne :

$$\theta' = Q'^{\frac{3}{2}}, \quad a^2 = \left(\frac{v'}{u'}\right)^{\frac{2}{3}}Q', \quad b^2 = \left(\frac{w'}{v'}\right)^{\frac{2}{3}}Q', \quad c^2 = \left(\frac{u'}{w'}\right)^{\frac{2}{3}}Q', \quad \ldots \quad (15)$$

(*) Cette formule ne diffère pas de la relation (6), car, d'après les valeurs (11), $a^2b^2c^2 = P^3$.

en supposant

$$Q' = w'^{\frac{4}{3}}v'^{\frac{2}{3}} + u'^{\frac{4}{3}}w'^{\frac{2}{3}} + v'^{\frac{4}{3}}u'^{\frac{2}{3}} \text{ (*)}. \qquad (16)$$

4. *Expression de* $a^2 + b^2 + c^2$. Par les formules (11):

$$a^2 + b^2 + c^2 = \left[\left(\frac{v}{w}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{w}{u}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{2}{3}}\right]P = \frac{P}{f^2}\left[w^{\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{4}{3}}w^{\frac{2}{3}} + v^{\frac{4}{3}}u^{\frac{2}{3}}\right].$$

Donc, si l'on fait

$$Q = w^{\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{4}{3}}w^{\frac{2}{3}} + v^{\frac{4}{3}}u^{\frac{2}{3}}: \qquad (17)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{PQ}{f^2}. \qquad (18)$$

5. *Remarque.* Afin de simplifier les résultats, posons :

$$u = \alpha^{\frac{3}{2}}, \quad v = \beta^{\frac{3}{2}}, \quad w = \gamma^{\frac{3}{2}}. \qquad (19)$$

Alors :

$$P = \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha^2\beta, \qquad (20)$$

$$Q = \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 + \alpha\beta^2. \qquad (21)$$

On trouve

$$PQ = 3\alpha^2\beta^2\gamma^2 + (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)\alpha\beta\gamma + \beta^3\gamma^3 + \gamma^3\alpha^3 + \alpha^3\beta^3. \qquad (22)$$

Par conséquent :

1° *Ce polynôme est le produit de deux polynômes entiers, à coefficients entiers;*

2° *Si* α, β, γ *sont des nombres entiers, différents de zéro, le nombre*

$$N = 3\alpha^2\beta^2\gamma^2 + (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)\alpha\beta\gamma + \beta^3\gamma^3 + \gamma^3\alpha^3 + \alpha^3\beta^3$$

est le produit de deux facteurs entiers, supérieurs à l'unité : N *n'est pas premier.*

(*) On va voir, à l'instant, le motif de cette notation.

6. Des formules de M. Chadu (*) :

$$u=\frac{b^2c}{\lambda^2},\quad v=\frac{c^2a}{\lambda^2},\quad w=\frac{a^2b}{\lambda^2},\quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

$$u'=\frac{bc^2}{\lambda^2},\quad v'=\frac{ca^2}{\lambda^2},\quad w'=\frac{ab^2}{\lambda^2},\quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

on déduit, par exemple,

$$\frac{u}{u'}=\frac{b}{c}=\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{3}}:\left(\frac{v}{w}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{(uw)^{\frac{1}{3}}}{v^{\frac{2}{3}}};$$

ou, à cause de la formule (4) :

$$\frac{u}{u'}=\frac{f}{v};\quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

puis, par une permutation tournante :

$$\frac{v}{v'}=\frac{f}{w},\quad \frac{w}{w'}=\frac{f}{u}.\quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Autrement dit :

$$u'=\frac{uv}{f},\quad v'=\frac{vw}{f},\quad w'=\frac{wu}{f}.\quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

On conclut, de ces valeurs :

$$u'=\frac{f^2}{w},\quad v'=\frac{f^2}{u},\quad w'=\frac{f^2}{v}.\quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

7. *Remarques.* — I. *Le grand axe est une quatrième proportionnelle à* u', u, v, *à* v', v, w, *à* w', w, u ; *et une moyenne proportionnelle entre* u *et* v', *entre* v *et* w', *entre* w *et* u'.

II. La proportion $\frac{u}{u'}=\frac{b}{c}$, trouvée ci-dessus, revient à $uc = u'b$. Par conséquent, *les triangles* AFB, AF'C *sont équivalents* (**). De même, BFC, BF'A *sont équivalents ;* CFA, CF'B *sont équivalents.*

(*) *Loc. cit.*, p. 15.

(**) A cause des angles AFB, AF'C, égaux à ω.

III. On déduit, des formules (26), (27) :

$$\frac{u}{w}=\frac{u'}{v'},\quad \frac{v}{u}=\frac{v'}{w'},\quad \frac{w}{v}=\frac{w'}{u'}, \qquad (28)$$

ou

$$\frac{AF}{CF}=\frac{AF'}{BF'},\quad \frac{BF}{AF}=\frac{BF'}{CF'},\quad \frac{CF}{BF}=\frac{CF'}{AF'}. \qquad (29)$$

Ces proportions peuvent être résumées ainsi :

Les distances d'un foyer, à deux sommets du triangle ABC, *sont comme les distances de l'autre foyer, au premier sommet et au troisième.*

8. *Relations entre* P, Q, P', Q'. Écrivons ainsi la formule (10) :

$$P=\sum u^{\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}},$$

et reprenons les formules

$$u=\frac{f^2}{v'},\quad v=\frac{f^2}{w'},\quad w=\frac{f^2}{u'}. \qquad (27)$$

La substitution donne

$$P=f^4\sum\frac{1}{v'^{\frac{4}{3}}w'^{\frac{2}{3}}}=\frac{f^4}{(u'v'w')^{\frac{4}{3}}}\sum u'^{\frac{4}{3}}w'^{\frac{2}{3}}=\sum u'^{\frac{4}{3}}w'^{\frac{2}{3}},$$

ou

$$P=Q'. \qquad (30)$$

On trouve, avec la même facilité,

$$Q=P', \qquad (31)$$

en supposant

$$P'=v'^{\frac{4}{3}}w'^{\frac{2}{3}}+w'^{\frac{4}{3}}u'^{\frac{2}{3}}+u'^{\frac{4}{3}}v'^{\frac{2}{3}}. \qquad (32)$$

9. *Une équation algébrique.* On a vu que :

$$a^2+b^2+c^2=\frac{PQ}{f^2}, \qquad (18)$$

$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=\lambda^4=\frac{P^3}{f^2}, \qquad (12)$$

$$a^2b^2c^2=P^3, \qquad (6)$$

Donc *l'équation*

$$X^3 - \frac{PQ}{f^2} X^2 + \frac{P^3}{f^2} X - P^3 = 0, \quad \ldots \quad (33)$$

a pour racines a^2, b^2, c^2.

10. *Suite.* Si l'on fait $X = PZ$, cette équation devient

$$Z^3 - \frac{Q}{f^2} Z^2 + \frac{P}{f^2} Z - 1 = 0. \quad \ldots \quad (34)$$

Celle-ci doit être vérifiée par

$$Z = \left(\frac{w}{u}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{v'}{u'}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad Z = \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{w'}{v'}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad Z = \left(\frac{v}{w}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{u'}{w'}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

11. *Autre équation.* Reprenons les formules

$$u' = \frac{uv}{f}, \quad v' = \frac{vw}{f}, \quad w' = \frac{wu}{f} \quad \ldots \quad (26)$$

Il en résulte :

$$u' + v' + w' = \frac{vw + wu + uv}{f}, \quad \ldots \quad (35)$$

$$v'w' + w'u' + u'v' = f(u + v + w) \quad \ldots \quad (36)$$

Et comme

$$u'v'w' = uvw = f^3, \quad \ldots \quad (4)$$

il s'ensuit que :

L'équation

$$V^3 - \frac{vw + wu + uv}{f} V^2 + f(u + v + w) V - f^3 = 0 \quad \ldots \quad (37)$$

a pour racines u', v', w'.

12. *Application numérique.* Prenons

$$u = 8, \quad v = 27, \quad w = 64; \quad \ldots \quad (38)$$

et, par conséquent :

$$u^{\frac{2}{3}} = 4, \quad v^{\frac{2}{3}} = 9, \quad w^{\frac{2}{3}} = 16,$$

$$u^{\frac{4}{3}} = 16, \quad v^{\frac{4}{3}} = 81, \quad w^{\frac{4}{3}} = 256;$$

puis

$$f = 24.$$

Ensuite, par les formules (26) :

$$u' = \frac{216}{24} = 9, \qquad v' = \frac{27 \,.\, 64}{24} = 9 \,.\, 8 = 72, \qquad w' = \frac{64 \,.\, 8}{24} = \frac{64}{3};$$

puis

$$\mathrm{P} = 16 \,.\, 9 \;+ 81 \,.\, 16 + 256 \,.\, 4 = 2\,464,$$

$$\mathrm{Q} = 16 \,.\, 16 + 81 \;\; 4 \;+ 256 \,.\, 9 = 2\,884.$$

Des formules (11), on conclut :

$$a^2 = 4 \,.\, 2\,464 = 9\,856, \quad b^2 = \frac{4}{9} \,.\, 2\,464 = \frac{9\,856}{9}, \quad c^2 = \frac{9}{16} \,.\, 2\,464 = 1\,386.$$

Les équations (33), (34) sont donc :

$$\mathrm{X}^3 - \frac{2\,464 \,.\, 2\,884}{576} \mathrm{X}^2 + \frac{2\,464^3}{576} \mathrm{X} - 2\,464^3 = 0,$$

$$\mathrm{Z}^3 - \frac{2\,884}{576} \mathrm{Z}^2 + \frac{2\,464}{576} \mathrm{Z} - 1 = 0.$$

Celle-ci est réductible à

$$\mathrm{Z}^3 - \frac{721}{144} \mathrm{Z}^2 + \frac{77}{18} \mathrm{Z} - 1 = 0.$$

D'ailleurs,

$$\left(\frac{w}{u}\right)^{\frac{2}{3}} = 4 = \left(\frac{v'}{u'}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9} = \left(\frac{w'}{v'}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \left(\frac{v}{w}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} = \left(\frac{u'}{w'}\right)^{\frac{2}{3}};$$

et, si l'on remplace Z par 4, on trouve

$$64 - \frac{721}{9} + \frac{154}{9} - 1 = 0;$$

ce qui est exact. Etc.

13. *Suite.* Avec les données précédentes, l'équation (37) devient

$$V^3 - \frac{307}{3} V^2 + 2\,376\,V - 13\,824 = 0.$$

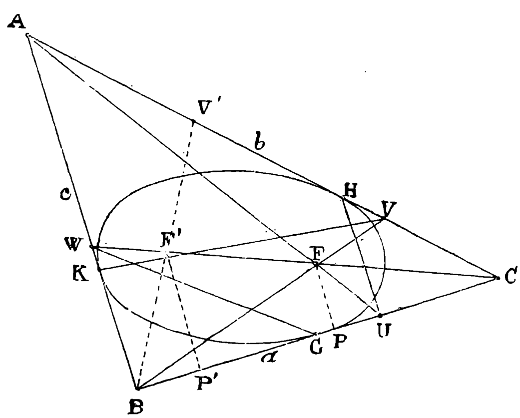
On vérifie aisément que :

$$V = 9 = u', \quad V = 72 = v', \quad V = \frac{64}{3} = w'.$$

III. Points et droites remarquables.

14. *Points de contact.* Soient G, H, K les points où les côtés du triangle ABC touchent l'*ellipse de Brocard* (*); soient U, V, W les intersections de ces côtés avec les rayons AF, BF, CF, prolongés. On a les relations connues :

Fig. 2.



$$\frac{BU}{CU} = \frac{c^2}{a^2}, \quad \frac{CV}{AV} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{AW}{BW} = \frac{b^2}{c^2} (^{**}). \quad (39)$$

Cherchons à évaluer le rapport des segments BG, CG.

P, P' étant les projections, sur le côté BC, des foyers F, F', il est visible que :

$$BP = v \cos \omega, \qquad CP' = w' \cos \omega,$$
$$FP = v \sin \omega, \qquad F'P' = w' \sin \omega;$$

donc

$$P'P = v \cos \omega - (a - w' \cos \omega) = (v + w') \cos \omega - a.$$

(*) L'équation de cette courbe, en coordonnées *normales*, est :

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 0,$$

x, y, z sont les *distances d'un point* M *aux côtés* a, b, c (Vigarié, *Congrès de Toulouse*).

(**) *Loc. cit.*, pp. 22, 21.

Par suite,

$$P'G = [(v + w')\cos\omega - a]\frac{w'}{v + w'}\ (^*);$$

$$BG = a - w'\cos\omega + [(v + w')\cos\omega - a]\frac{w'}{v + w'}.$$

ou

$$BG = \frac{v}{v + w'}a. \quad (40)$$

De même,

$$CG = \frac{w'}{v + w'}a. \quad (41)$$

Conséquemment,

$$\frac{BG}{CG} = \frac{v}{w'} = \frac{c^2}{b^2}\ (^{**}). \quad (42)$$

La comparaison avec l'une des formules (39) donne

$$\frac{BG}{CG} = \frac{BW}{AW}. \quad (43)$$

Ainsi, *les côtés* BC, BA *sont partagés, dans le même rapport, par les points* G, W. Autrement dit :

La droite GW *est parallèle au côté* CA. De même, HU *est parallèle au côté* AB; KV *est parallèle au côté* BC (***).

15. *Suite.* U′, V′, W′ étant les points où les rayons AF′, BF′, CF′ coupent, respectivement, BC, CA, AB :

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{AV'}{CV'}\ (^{IV}).$$

(*) Le point G partage P′P dans le rapport de F′P′ à FP.

(**) *Loc. cit.*, p. 28. Le point G appartient à la *symédiane* issue de A. En outre, *les symédianes* AG, BH, CK *se coupent au point de Lemoine* (D'Ocagne, *N. A.*, 1883, p. 452).

(***) Plus exactement : *devrait être parallèle.* Les figures 1, 2, 3 sont de simples croquis.

(IV) *Loc. cit.*, p. 22.

Donc, par les proportions (42) :

$$\frac{BG}{CG} = \frac{AV'}{CV'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

En résumé : *les droites* GV', HW', KU' *sont, respectivement, parallèles aux côtés* BA, CB, AC.

16. *Droites égales à* f. Soient F'_a, F'_b, F'_c les points symétriques du foyer F', relativement aux côtés BC, CA, AB. D'après la construction habituelle,

$$FGF'_a = FHF'_b = FKF'_c = f. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

Ainsi, *les points* F'_a, F'_b, F'_c *appartiennent à la circonférence décrite du foyer* F *comme centre, avec* f *comme rayon* (*).

17. *Suite.* Prolongeons BF, CF' (fig. 4) jusqu'à ce que ces droites rencontrent, en B_1, C'_1, la circonférence circonscrite au triangle ABC, puis traçons les cordes CB_1, AB'_1.

L'angle *au centre*, B_1OC, égale $2B_1BC = 2\omega$. Donc

$$CB_1 = 2R \sin \omega.$$

Or :

$$R = \frac{abc}{4T}, \quad \sin \omega = \frac{2T}{\lambda^2} \ (^{**}).$$

Conséquemment,

$$CB_1 = 2\frac{abc}{4T} \cdot \frac{2T}{\lambda^2},$$

ou

$$CB_1 = f. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (46)$$

(*) Cas particuliers d'une propriété très connue. Rappelons, à ce propos, que *les projections des deux foyers, sur les côtés du triangle* ABC, *sont les sommets d'un hexagone inscrit à une circonférence dont le centre est le milieu de* FF' (centre de l'*ellipse de Brocard*), *et dont le diamètre égale* f.

(**) *Loc. cit.*, pp. 4 et 12.

La même propriété subsiste pour les cordes AC_1, BC'_1, BA_1, CA'_1. On a donc ce théorème :

Si l'on prolonge les rayons vecteurs AF, AF', BF, BF', CF, CF', *jusqu'à ce qu'ils rencontrent, en* A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1, C'_1 *la circonférence circonscrite au triangle* ABC, *puis que l'on trace les cordes* AB'_1, AC_1, BC'_1, BA_1, CA'_1, CB_1, *ces six droites sont égales au grand axe,* f, *de l'ellipse de Brocard* (*).

18. *Segments de* AA_1, BB_1, CC_1. L'angle $BB_1C = BAC = A$. Donc, par la formule (46), et à cause de $CBB_1 = \omega$:

$$BB_1 = a\cos\omega + f\cos A = a\frac{a^2+b^2+c^2}{2\lambda^2} + \frac{abc}{\lambda^2}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

ou

$$BB_1 = \frac{a(b^2+c^2)}{\lambda^2} = w' + v.$$

Et comme $BF = v$, il reste

$$B_1F = w' = CF'. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

De même, par une permutation tournante :

$$C_1F = u' = AF', \qquad A_1F = v' = BF' \text{ (**)}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Ainsi : *Les cordes égales* AA_1, BB_1, CC_1 *sont divisées, par les foyers* F, F', *en segments qui sont égaux deux à deux.*

19. *Valeur du petit axe.* Soit g la longueur du petit axe de l'ellipse. On a

$$g^2 = f^2 - \overline{FF'}^2 = \frac{a^2b^2c^2}{\lambda^4} - \frac{a^2b^2c^2}{\lambda^8}(a^4+b^4+c^4-\lambda^4) \text{ (***)},$$

ou

$$g^2 = \frac{a^2b^2c^2}{\lambda^8}[2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4] = \frac{16\,a^2b^2c^2}{\lambda^8}T^2;$$

(*) La figure 4 contient, ainsi, *neuf droites remarquables, égales à ce grand axe.*

(**) Cette démonstration, *directe,* est préférable à celle qui se trouve dans la Note citée (p. 17).

(***) *Loc. cit.*, p. 18.

donc

$$g = \frac{4abc}{\lambda^4} T ;$$

puis, à cause de la formule (6) :

$$g = \frac{4T}{abc} f^2,$$

et enfin

$$g = \frac{f^2}{R} . \qquad (49)$$

Ainsi, *le petit axe de l'ellipse est une troisième proportionnelle au grand axe et au rayon du cercle circonscrit.*

20. *Remarque.* Si, du point B_1, on abaisse B_1P perpendiculaire au diamètre CC', on a

$$f^2 = 2R . CP.$$

Conséquemment, la formule (49) se réduit à

$$\frac{g}{2} = CP, \qquad (50)$$

et celle-ci exprime la valeur du demi *petit axe.*

21. *Valeurs des cordes* $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$. On a : $AOB'_1 = 2\omega$, $AOC = 2B$; donc $B_1OB'_1 = 2B - 4\omega$; puis

$$B_1B'_1 = 2R \sin (B - 2\omega).$$

D'ailleurs :

$$\sin B = \frac{2T}{ac}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\lambda^4},$$

$$\cos 2\omega = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{2\lambda^4}, \quad \sin 2\omega = \frac{4 (a^4 + b^4 + c^4) T}{2\lambda^4} (*).$$

(*) *Loc. cit.*, p. 12.

Par conséquent,

$$\sin(B - 2\omega) = \frac{T}{ac\lambda^4}\left[a^4 + b^4 + c^4 - (a^2 + c^2 + b^2)(a^2 + c^2 - b^2)\right] = \frac{2T}{ac\lambda^4}(b^4 - a^2c^2);$$

puis

$$B_1B'_1 = \frac{4RT}{ac\lambda^4}(b^4 - a^2c^2);$$

ou, plus simplement,

$$B_1B'_1 = \frac{b}{\lambda^4}(b - a^2c^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Une permutation tournante donne ensuite :

$$C_1C'_1 = \frac{c}{\lambda^4}(c^4 - b^2a^2), \quad A_1A'_1 = \frac{a}{\lambda^4}(a^4 - b^2c^2). \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

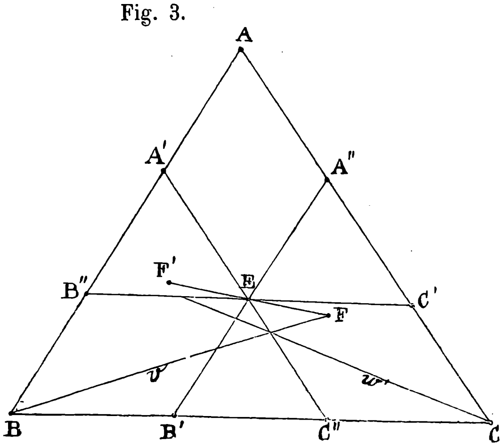
22. *Remarques.* — I. Si, dans la formule (51), on suppose $b^2 \leqq ac$, *les cordes* AB'_1, CB_1 *ont un point commun,* ou *se croisent dans le cercle.*

II. *Si* $a = b = c$, auquel cas les foyers F, F′ coïncident avec le centre O, *la figure* AB'_1B_1C ... *se réduit à un hexagone régulier.*

23. *Construction du centre.* Soit (fig. 3) E le milieu de FF′. Soient α, β, γ les distances de E aux trois côtés. On a

$$2\alpha = (v + w')\sin\omega = \frac{b^2 + c^2}{\lambda^2} a \sin\omega. \quad (53)$$

Fig. 3.



Donc

$$\frac{\alpha}{(b^2 + c^2)a} = \frac{\beta}{(c^2 + a^2)b} = \frac{\gamma}{(a^2 + b^2)c}. \quad (54)$$

Soient h, k, l les hauteurs du triangle ABC :

$$h = \frac{2T}{a}, \quad k = \frac{2T}{b}, \quad l = \frac{2T}{c}.$$

Les proportions précédentes deviennent

$$\frac{\alpha}{\frac{k}{l}+\frac{l}{k}}=\frac{\beta}{\frac{l}{h}+\frac{h}{l}}=\frac{\gamma}{\frac{h}{k}+\frac{k}{h}}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (55)$$

Chacun de ces rapports égale

$$\frac{2T}{\sum a\left(\frac{k}{l}+\frac{l}{k}\right)}=\frac{1}{\sum \frac{1}{h}\left(\frac{k}{l}+\frac{l}{k}\right)}.$$

Par conséquent,

$$2\alpha=\frac{k^2+l^2}{h^2+k^2+l^2},$$

$$h-2\alpha=\frac{h^3}{h^2+k^2+l^2};$$

puis

$$\frac{2\alpha}{h-2\alpha}=\frac{k^2+l^2}{h^2}.$$

Cette proportion détermine une parallèle au côté a, tangente à l'ellipse. De même,

$$\frac{2\beta}{k-2\beta}=\frac{l^2+h^2}{k^2}, \quad \frac{2\gamma}{l-2\gamma}=\frac{h^2+k^2}{l^2}.$$

On construit donc, assez simplement, trois parallélogrammes circonscrits à l'*ellipse de Brocard.*

24. *Remarque.* Si B″C′, B′A″, C″A′ sont les parallèles aux côtés, passant par le centre E, il existe, entre les segments AA′, BB′, CC′, AA″, BB″, CC″, la relation d'*involution :*

$$AA' \times BB' \times CC' = AA'' \times BB'' \times CC'' \text{ (*)}.$$

(*) Cette relation subsiste pour tout point E, *intérieur* à un triangle ABC.

Explication de la figure 4.

ABC, triangle inscrit au cercle O.

AA', BB', CC', diamètres.

Les cordes BA', CA' rencontrent, en α', α, le diamètre perpendiculaire à BC.

Les cordes CB', AB' rencontrent, en β', β, le diamètre perpendiculaire à CA.

Les cordes AC', BC' rencontrent, en γ', γ, le diamètre perpendiculaire à AB.

Les arcs BFC, CFA, AFB, décrits des points α, β, γ, comme centres, se coupent en F.

Les arcs BF'C, CF'A, AF'B, décrits des points α', β', γ', comme centres, se coupent en F'.

Les points F, F', foyers de l'ellipse de Brocard, sont également éloignés du point O (*).

Soient F'_a, F'_b, F'_c les points symétriques de F', relativement à BC, CA, AB : les droites FF'_a, FF'_b, FF'_c sont trois rayons d'une circonférence ayant son centre en F.

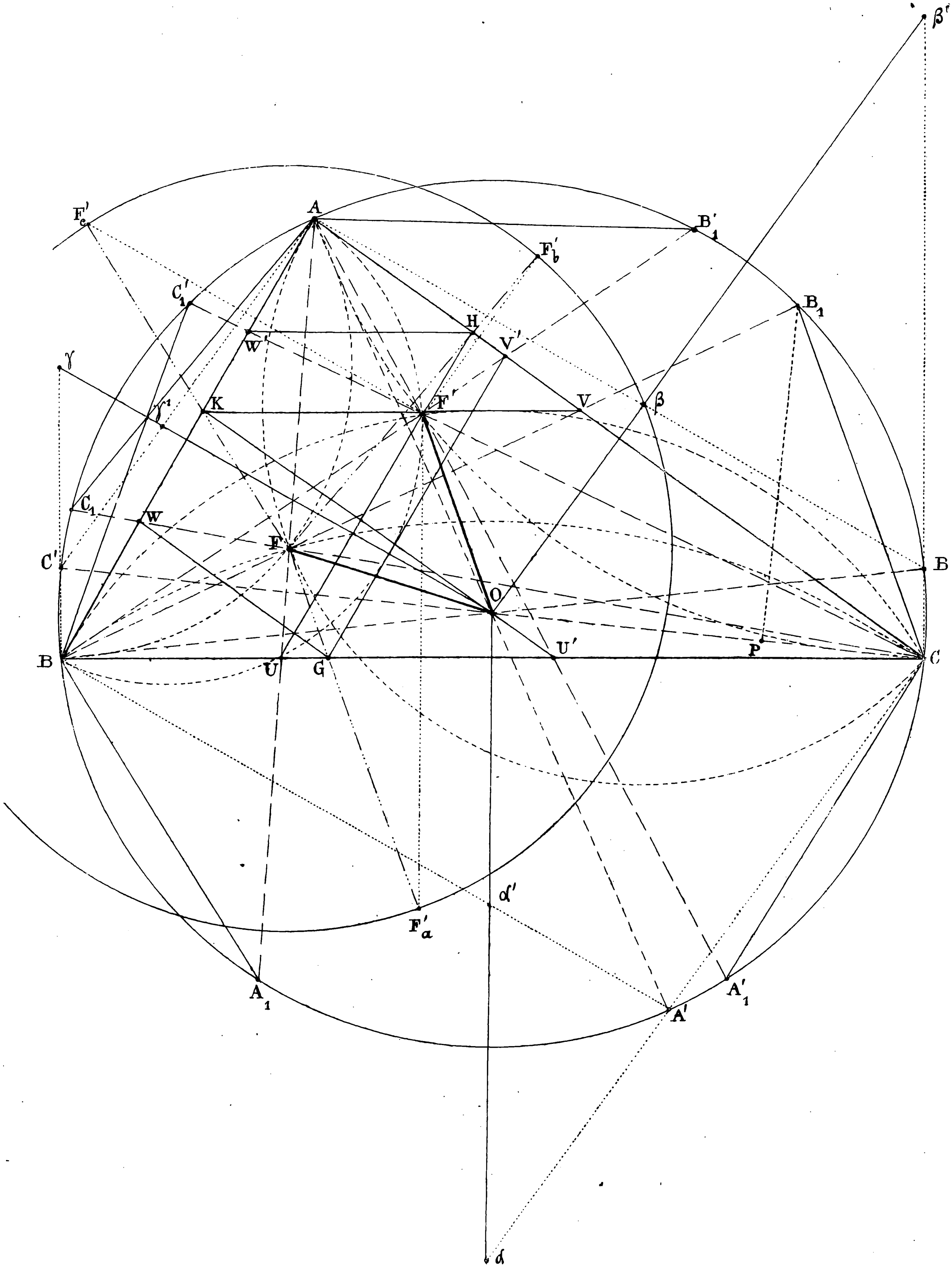
Ces rayons coupent en G, H, K les côtés BC, CA, AB.

On trace les *six* droites AF, AF', BF, BF', CF, CF'. Soient U, U', V, V', W, W' leurs points d'intersection avec les côtés du triangle. On prolonge ces mêmes droites jusqu'à leurs rencontres, en A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1, C'_1, avec la circonférence circonscrite : les cordes AB_1, BC'_1, BA_1, CA'_1, CB_1, AB'_1 sont égales à FF'_a.

On trace, enfin, GW, KU', HU, GV', KV, HW' : ces six droites sont, deux à deux, parallèles aux côtés du triangle ABC.

(*) *Quelques formules relatives . . . ,* pp. 11, 16.

Fig. 4.


A
B
C
O
F
F'
H
K
V
V'
W
W'
U
U'
G
P
A_1
A'_1
A'
B_1
B'_1
B'
C_1
C'_1
C'
F'_a
F'_b
F'_c
α
α'
β
β'
γ
γ'

ERRATA DE LA PREMIÈRE NOTE.

Page 11, ligne dernière. *Au lieu de :* $B\Omega C$, $C\Omega A$, ..., *lisez :* $CB\Omega$, $AC\Omega$, $BA\Omega$, $BC\Omega'$, $CA\Omega'$, $AB\Omega'$.

Page 15, ligne 10. *Au lieu de :* $C\Omega - w$, *lisez :* $C\Omega = w$.

Page 15. *Après les équations* (34), *ajoutez :*

On satisfait à ces proportions en prenant :

$$u = \frac{b^2c}{\theta^2}, \qquad v = \frac{c^2a}{\theta^2}, \qquad w = \frac{a^2b}{\theta^2};$$

θ étant une inconnue auxiliaire.

Mais il est visible que, dans le triangle $B\Omega C$:

$$a^2 = v^2 + w^2 + 2vw\cos C \ (^*),$$

ou

$$a^2\theta^4 = c^4a^2 + a^4b^2 + 2a^3bc^2 \cdot \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab},$$

ou

$$\theta^4 = c^4 + a^2b^2 + c^2(a^2 + b^2 - c^2) = \lambda^4.$$

Ainsi :

$$u = \frac{b^2c}{\lambda^2}, \qquad v = \frac{c^2a}{\lambda^2}, \qquad w = \frac{a^2b}{\lambda^2}. \qquad (35)$$

Page 15, avant-dernière ligne. *Au lieu de :* trilinéaires, *lisez :* tripolaires.

Page 28, ligne 17. *Au lieu de :* $\frac{b^2a}{\lambda^2}\cos\omega$, *lisez :* $\frac{b^2a}{\lambda^2}$, $\cos\omega$.

Spa, août 1890.

(*) A cause de : $B\Omega C = 2^d - C$.