NOUVELLES NOTES

D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE;

PAR

EUGÈNE CATALAN, (*)

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté à la Classe des Sciences, dans la séance du 2 février 1889.)

(*) Les *Notes d'Algèbre et d'Analyse* font partie des Mémoires *in-quarto* (1877).

NOUVELLES NOTES

D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE.

I

SUR LA FORMULE DU BINÔME.

1. Lemme I. *Soit* z *une fonction de la variable* x, *telle que* $\lim\left(\frac{z}{x}\right) = 1$, *pour* x = 0. *Si une fonction* f(x) *est développée sous les deux formes :*

$$A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n + \cdots,$$

$$B_0 + B_1 x + \cdots + B_{n-1} x^{n-1} + x^{n-1}(B_n z + B_{n+1} z^2 + \cdots);$$

on a :

$$B_0 = A_0, \quad B_1 = A_1, \ldots\ldots, B_{n-1} = A_{n-1};$$

et, en outre,

$$B_n = A_n.$$

La première partie devient évidente au moyen du raisonnement connu. Quant à la seconde, comme, après suppression du facteur x^n, on trouve

$$A_n + A_{n+1} x + \cdots = B_n \frac{z}{x} + B_{n+1} \frac{z^2}{x} + \cdots;$$

il résulte, de cette égalité,

$$A_n = B_n \lim \frac{z}{x} = B_n.$$

2. Remarque. Si, au lieu du second développement, on avait

$$f(x) = B_0 + B_1x + \cdots + B_{n-1}x^{n-1} + B_n z^n + B_{n+1}z^{n+1} + \cdots,$$

les conclusions précédentes subsisteraient.

3. Lemme II. *Les séries étant supposées convergentes, on a*

$$1 + \frac{q}{1}x + \frac{q(q-1)}{1.2}x^2 + \cdots = 1 + \frac{q}{1}\frac{x}{1+x} + \frac{q(q+1)}{1.2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots \quad . \quad (1)$$

En effet, le premier membre est le développement de $(1+x)^q$; et le second, celui de $\left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^{-q} = (1+x)^q$.

4. Remarques. I. Si q est un nombre *entier*, le premier membre se réduit au *polynôme entier* $(1+x)^q$. Au moyen de l'égalité (1), *ce polynôme entier est développé en série convergente.*

II. En particulier, *toute puissance, entière et positive, d'un nombre quelconque, est développable en série convergente.*

Par exemple,

$$2^3 = 8 = 1 + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 15\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 21\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots$$

III. Si, dans la relation (1), on remplace x par $x-1$, elle se transforme en

$$x^q = 1 + \frac{q}{1}\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{q(q+1)}{1.2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{q(q+1)(q+2)}{1.2.3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \cdots \quad . \quad (2)\,(^*)$$

IV. Il résulte, de l'égalité (2), que *tout polynôme entier est développable en série convergente* (**).

(*) La série est convergente quand x surpasse $\frac{1}{2}$.

(**) Cette propriété comprend celle qui est indiquée dans la Remarque II.
Par exemple,

$$1 + x + x^2 + x^3 = 4 + 6\left(\frac{x-1}{x}\right) + 10\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + 15\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \cdots;$$

et, plus généralement,

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = n + C_{n,2}\left(\frac{x-1}{x}\right) + C_{n+1,3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \cdots$$

5. Théorème I. n *étant un nombre entier, on a, identiquement,*

$$\left.\begin{aligned}&(1+x)^{n-1}+C_{q,1}x(1+x)^{n-2}+C_{q+1,2}x^2(1+x)^{n-3}+\cdots+C_{q+n-2,n-1}x^{n-1}\\&=1+C_{q+n-1,1}x+C_{q+n-1,2}x^2+\cdots+C_{q+n-1,q}x^{n-1}.\end{aligned}\right\}\quad(A)$$

Multiplions, par $(1+x)^{n-1}$, les deux membres de l'égalité (1). En supposant $z=\frac{x}{1+x}$, nous aurons

$$\begin{aligned}(1+x)^{q+n-1}&=(1+x)^{n-1}+C_{q,1}x(1+x)^{n-2}+\cdots+C_{q+n-2,q-1}x^{n-1}\\&+[B_n z^n+B_{n+1}z^{n+1}+\cdots](1+x)^{n-1}.\end{aligned}$$

La première ligne du second membre est réductible à la forme

$$B_0+B_1x+\cdots+B_{n-1}x^{n-1}.$$

Donc, d'après le Lemme I, elle égale, *identiquement*, la somme des n premiers termes du premier membre, développé suivant les puissances de x. C. Q. F. D.

6. Remarque. Si l'on fait $q+n-1=p$, la relation (A) devient

$$\begin{aligned}&(1+x)^{p-q}+C_{q,1}x(1+x)^{p-q-1}+C_{q+1,2}x^2(1+x)^{p-q-2}+\cdots+C_{p-1,q-1}x^{p-q}\\&=1+C_{p,1}x+C_{p,2}x^2+\cdots+C_{p,q}x^{p-q};\end{aligned}$$

ou, par le changement de $p-q$ en q:

$$\left.\begin{aligned}&(1+x)^{q}+C_{p-q,1}x(1+x)^{q-1}+C_{p-q+1,2}x^2(1+x)^{q-2}+\cdots+C_{p-1,q}x^{q}\\&=1+C_{p,1}x+C_{p,2}x^2+\cdots+C_{p,q}x^{q}.\end{aligned}\right\}\quad(B)$$

7. *Relations combinatoires.* 1° Faisant $x=1$, on a

$$2^q+2^{q-1}C_{p-q,1}+2^{q-2}C_{p-q+1,2}+\cdots+C_{p-1,q}=1+C_{p,1}+C_{p,2}+\cdots+C_{p,q}\quad(3)$$

2° De même, pour $x=-1$:

$$1-C_{p,1}+C_{p,2}-\cdots+(-1)^qC_{p,q}=(-1)^qC_{p-1,q}.\quad(4)\,(*)$$

(*) Formule de M. Genocchi. Nous y reviendrons.

3° Si l'on fait $x = +\infty$, l'égalité (B) se réduit à

$$1 + C_{p-q,1} + C_{p-q+1,2} + \cdots + C_{p-1,q} = C_{p,q};$$

ou, sous une forme un peu plus commode :

$$C_{m,0} + C_{m+1,1} + C_{m+2,2} + \cdots + C_{m+q,q} = C_{m+q+1,q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)\,(^*)$$

4° Enfin, $x = -\frac{1}{2}$ donne cette relation simple :

$$1 - C_{p-q,1} + C_{p-q+1,2} - \cdots + (-1)^q C_{p-1,q} = 2^q - C_{p,1}.2^{q-1} + C_{p,2}.2^{q-2} - \cdots + (-1)^q C_{p,q}.$$

5° Si l'on identifie les deux membres de (B), on trouve

$$C_{q,n} + C_{p-q,1} \times C_{q-1,n-1} + C_{p-q+1,2} \times C_{q-2,n-2} + \cdots + C_{p-q+n-1,n} = C_{p,n};$$

formule qui, probablement, n'est pas nouvelle. On peut l'écrire ainsi :

$$C_{q,n} + C_{q'+1-n,1} \times C_{q-1,n-1} + C_{q'+2-n,2} \times C_{q-2,n-2} + \cdots + C'_{q,n} = C_{q+q'+1-n,n} \quad . \quad . \quad (C)$$

8. *Application au triangle arithmétique.*

1	1											
1	2	1										
1	3	3	1									
1	4	6	4	1								
1	5	10	10	5	1							
1	6	15	20	15	6	1						
1	7	21	35	35	21	7	1					
1	8	28	56	70	56	28	8	1				
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

(*) Propriété très connue, qui résulte du *Triangle arithmétique*.

Prenons, dans le triangle, deux *diagonales* commençant par 1, et composées de $n + 1$ termes. Par exemple, si $q = 7$, $q' = 5$, $n = 3$:

$$1, 3, 6, 10; \quad 1, 5, 15, 35;$$

puis *renversons* celle-ci. Faisant alors la somme des produits dont les facteurs se correspondent, nous obtenons

$$1 \times 35 + 3 \times 15 + 6 \times 5 + 10 \times 1 = 120.$$

Conformément à la relation (C), le nombre 120 est le *quatrième* terme de la *dixième* ligne; et $10 = 7 + 5 + 1 - 3$ (*).

9. THÉORÈME III. *Si* $\alpha + \beta = 1$, *et que* $\mathrm{p} + \mathrm{q} = \mathrm{m}$, *on a*

$$\alpha^p + C_{m,1}\alpha^{p-1}\beta + \cdots + C_{m,p}\beta^p = 1 + C_{q,1}\beta + C_{q+1,2}\beta^2 + \cdots + C_{m-1,q-1}\beta^p. \quad \text{(D)}$$

Pour démontrer cette identité remarquable, à laquelle Poisson est parvenu par la théorie des probabilités (**), il suffit de supposer, dans (A) :

$$x = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad 1 + x = \frac{1}{\alpha}.$$

10. REMARQUES. I. A l'endroit cité, Poisson emploie la transformation donnée par son théorème, afin de réduire, en intégrale définie, la somme des $q + 1$ premiers termes du développement de $(\alpha + \beta)^m$. En 1867, nous avons fait voir (***) qu'il est très facile d'opérer, directement, cette réduction.

II. Le Théorème II peut être énoncé ainsi :

La somme des $\mathrm{p} + 1$ *premiers termes du développement de* $(1 - \beta)^{-\mathrm{q}}$, *multipliée par* α^{q}, *égale la somme des* $\mathrm{p} + 1$ *premiers termes du développement de* $(\alpha + \beta)^{\mathrm{m}}$.

(*) Dans le petit Mémoire intitulé : *Théorèmes et Problèmes de Probabilités,* nous avons démontré des propriétés analogues à celle-ci.

(**) *Recherches sur la probabilité des jugements,* pp. 189, 190.

(***) *Bulletin de l'Académie.*

III. A cause de $\alpha + \beta = 1$, on a

$$(\alpha + \beta)^m = (1 - \beta)^{-q} \alpha^q.$$

Soient :

$$(\alpha + \beta)^m = S_{p+1} + R_{p+1}, \qquad (1 - \beta)^{-q} = S'_{p+1} + R'_{p+1}.$$

Alors, en vertu de la dernière Remarque,

$$R'_{p+1} = \alpha^{-q} R_{p+1},$$

ou

$$R'_{p+1} = (1 - \beta)^{-q} [(\alpha + \beta)^m - S_{q+1}].$$

Donc : *Dans le développement de* $(1 - \beta)^{-q}$, *le reste, correspondant à l'ensemble des* p + 1 *premiers termes, est le produit de la fonction proposée, par la quantité*

$$(\alpha + \beta)^m - S_{p+1}.$$

IV. Si l'exposant m est un nombre *entier,* cette proposition s'accorde avec celle que nous avons établie dans une précédente communication (*); mais on peut la présenter sous une forme un peu plus simple.

11. Soit, en changeant de notation,

$$(1 - x)^{-p} = S_n + R_n,$$

ou

$$(1 - x)^p R_n = 1 - (1 - x)^p \left[1 + \frac{p}{1} x + \frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots + g x^{n-1}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

D'après le *Problème des partis* (**), le second membre égale

$$x^n \left[1 + \frac{n}{1}(1 - x) + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}(1 - x)^2 + \cdots + h(1 - x)^{p-1}\right]$$

(*) *Bulletin de l'Académie,* août 1888.

(**) *Mélanges mathématiques,* t. I, p. 67.

Ainsi

$$R_n = (1-x)^{-p} x^n \left[1 + \frac{n}{1}(1-x) + \frac{n(n+1)}{1.2}(1-x)^2 + \cdots + h(1-x)^{p-1}\right]. \quad . \quad (7)$$

Autrement dit :

Dans le développement de $(1-x)^{-p}$, *le reste* R_n *est le produit, par un polynôme connu, de la fonction proposée* (*).

C'est la propriété rappelée ci-dessus. Elle exige que n et p soient des *nombres entiers.*

II

RELATIONS ENTRE DES INTÉGRALES DÉFINIES.

1. *Formule générale.* Supposons, pour fixer les idées, que u varie de 0 à 1, x étant une *constante.* Considérons l'intégrale

$$X = \int_0^1 d[u^q f(u+x)],$$

l'exposant q étant *positif,* et $f(u+x)$ restant finie et continue entre les limites de l'intégration. Il est clair que

$$X = f(1+x).$$

Mais, d'un autre côté,

$$X = q\int_0^1 u^{q-1} f(u+x)\,du + \int_0^1 u^q f'(u+x)\,du.$$

Donc

$$f(1+x) = q\int_0^1 u^{q-1} f(u+x)\,du + \int_0^1 u^q f'(u+x)\,du \;(^{**}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

(*) D'après l'égalité (7), ce polynôme est divisible par x^n; ce qui ne résulterait pas de la formule (6). On voit pourquoi nous avons fait usage de la transformation citée dans la note précédente.

(**) Ce procédé est l'*intégration par parties,* présentée d'une manière particulière.

On a ainsi une relation simple entre des intégrales qui peuvent avoir des formes très différentes, du moins en apparence.

Si, par exemple,

$$f(u+x)=\mathcal{L}(u+x):$$

$$\mathcal{L}(1+x)=q\int_0^1 u^{q-1}\mathcal{L}(u+x)du+\int_0^1 \frac{u^q}{u+x}du \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

2. *Application.* Soit $f(u+x)=(u+x)^{-m}$. L'égalité (A) devient

$$(1+x)^{-m}=q\int_0^1 \frac{u^{q-1}du}{(u+x)^m}-m\int_0^1 \frac{u^q du}{(u+x)^{m+1}}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

ou, si l'on fait $q=m-p$:

$$(1+x)^{-m}=(m-p)\int_0^1 \frac{u^{m-p-1}du}{(u+x)^m}-m\int_0^1 \frac{u^{m-p}du}{(u+x)^{m+1}}; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

ou encore, par une transformation évidente :

$$(1+x)^{-m}=(m-p)x\int_0^1 \frac{u^{m-p-1}du}{(u+x)^{m+1}}-p\int_0^1 \frac{u^{m-p}du}{(u+x)^{m+1}} \quad . \; . \; . \; . \quad (B)\,(*)$$

3. *Remarques.* I. Dans chacune de ces trois égalités, le premier membre est indépendant de q (ou de p). Donc, si l'on développe convenablement le second membre, ce paramètre doit disparaître.

Soit, par exemple, $m=-2$. La formule (2) se réduit à

$$(1+x)^2=q\int_0^1 u^{q-1}(u+x)^2du+2\int_0^1 u^q(u+x)du.$$

Or, la valeur du second membre est

$$q\left[\frac{x^2}{q}+2\frac{x}{q+1}+\frac{1}{q+2}\right]+2\left[\frac{x}{q+1}+\frac{1}{q+2}\right];$$

et cette quantité égale x^2+2x+1.

(*) Les identités (2), (3) et (B) tiennent lieu de celles que nous avons données dans le *Bulletin de l'Académie* (avril 1867) et dans les *Mélanges mathématiques* (t. I, p. 298). Celles-ci renferment des fautes typographiques.

II. Si $q = 1$, la même égalité (2) devient

$$(1+x)^{-m} = \int_0^1 \frac{du}{(u+x)^m} - m\int_0^1 \frac{udu}{(u+x)^{m+1}}.$$

La première intégrale est

$$-\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{(u+x)^{m-1}}\right]_0^1 = -\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{(1+x)^{m-1}} - \frac{1}{x^{m-1}}\right].$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 \frac{udu}{(u+x)^{m+1}} = \frac{(1+x)^m - (m+x)x^{m-1}}{m(m-1)x^{m-1}(1+x)^m}; \quad \ldots\ldots \quad (4)\,(*)$$

et, si $m = 2$:

$$\int_0^1 \frac{udu}{(u+x)^3} = \frac{1}{2x(1+x)^2}.$$

III. Lorsque $p = 0$, l'égalité (B) donne, plus généralement,

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}du}{(u+x)^{m+1}} = \frac{1}{mx(1+x)^m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)\,(**)$$

4. *Une sommation.* Posons, pour abréger,

$$G_p = \int_0^1 \frac{u^{m-p}du}{(u+x)^{m+1}}.$$

(*) Cette relation est en défaut pour $m = 1$, à cause de $\int_0^1 \frac{du}{u+x} = \mathcal{L}\frac{1+x}{x}$.

(**) Dans l'*errata* de ses *Tables* (première édition), M. *Bierens de Haan* fait connaître la formule

$$\int_0^1 \frac{x^{a-2}dx}{(1+px)^a} = \frac{(1+p)^{1-a}}{a-1},$$

due à Legendre. Faisant $x = u$, $a = m+1$, $p = \frac{1}{x}$, on retrouve l'égalité (5).

L'identité (B) devient

$$(1+x)^{-m} = (m-p)x\mathrm{G}_{p+1} - p\mathrm{G}_p;$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\mathrm{C}_{m,p}(1+x)^{-m}x^p = (p+1)\,\mathrm{C}_{m,p+1}\mathrm{G}_{p+1}x^{p+1} - p\mathrm{C}_{m,p}\mathrm{G}_p x^p.$$

Changeant p en $p-1$, $p-2$, ... 1, 0, et ajoutant, on a donc

$$\frac{1+\mathrm{C}_{m,1}x+\mathrm{C}_{m,2}x^2+\cdots+\mathrm{C}_{m,p}x^p}{(1+x)^m} = (p+1)\,\mathrm{C}_{m,p+1}x^{p+1}\int_0^1 \frac{u^{m-p-1}\,du}{(u+x)^{m+1}} \quad . \quad . \quad (\mathrm{C})$$

Ainsi, *la somme des* p + 1 *premiers termes du développement de* $(1+\mathrm{x})^m$ *est transformée en intégrale définie* (*).

5. *Cas particulier.* Si l'on suppose $x = 1$, $m = 2p+1$, le premier membre se réduit à $\frac{1}{2}$ (**). De plus,

$$(p+1)\,\mathrm{C}_{2p+1,\,p+1} = \frac{(2p+1)\ldots(p+1)}{1\,.\,2\ \ldots\ p} = \frac{\Gamma(2p+2)}{[\Gamma(p+1)]^2}.$$

Donc, par le changement de $p+1$ en p :

$$\int_0^1 \frac{u^{p-1}\,du}{(u+1)^{2p}} = \frac{1}{2}\,\frac{[\Gamma(p)]^2}{\Gamma(2p)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

6. *Remarque.* La formule (6), trouvée en supposant p *entier,* subsiste pour toutes les valeurs positives de ce paramètre. En effet, d'après Legendre,

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(x+1)^{2p}} = \frac{[\Gamma(p)]^2}{\Gamma(2p)}\,(^{***}).$$

(*) La formule (C) ne diffère pas, au fond, de celle qui a été donnée par Poisson. (*Bulletin*, avril 1867.)

(**) Dans le développement de $(1+1)^{2p+1} = 2^{2p+1}$, le nombre des termes est *pair*. Donc la *première moitié* de ce développement égale 2^{2p}.

(***) *Bierens de Haan*, t. XVIII.

Mais, si l'on change u en $\frac{1}{x}$, on trouve

$$\int_0^1 \frac{u^{p-1}\,du}{(u+1)^{2p}} = \int_1^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(x+1)^{2p}} = \int_1^\infty \frac{u^{p-1}\,du}{(u+1)^{2p}},$$

ou

$$\frac{[\Gamma(p)]^2}{\Gamma(2p)} = 2\int_0^1 \frac{u^{p-1}\,du}{(u+1)^{2p}}.$$

7. *Autres intégrales définies.* De la formule

$$\mathcal{L}(1+x) = q\int_0^1 u^{q-1}\,\mathcal{L}(u+x)\,du + \int_0^1 \frac{u^q\,du}{u+x}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

on déduit facilement, si $q = 1$:

$$\int_0^1 \mathcal{L}(u+x)\,du = (1+x)\mathcal{L}(1+x) - x\mathcal{L}x - 1;$$

puis

$$\int_0^1 \mathcal{L}[(u+x)(u+x+1)\ldots(u+x+n-1)]\,du = (n+x)\mathcal{L}(n+x) - x\mathcal{L}x - n,$$

ou

$$\int_0^1 \mathcal{L}\frac{\Gamma(u+x+n)}{\Gamma(u+x)}\,du = \mathcal{L}\frac{(n+x)^{n+x}}{e^n x^x}.$$

Cette démonstration suppose que n est un *nombre entier*. Mais, généralement,

$$\int_0^1 \mathcal{L}\frac{\Gamma(u+x+\alpha)}{\Gamma(u+x)}\,du = \mathcal{L}\frac{(x+\alpha)^{x+\alpha}}{e^\alpha x^x} \quad \ldots \ldots \quad (D)$$

En effet, si l'on prend les dérivées des deux membres, par rapport à α, on trouve

$$\int_0^1 \frac{\frac{d\,.\,\Gamma(u+x+\alpha)}{d\alpha}}{\Gamma(u+x+\alpha)}\,du = \mathcal{L}(x+\alpha);$$

ou, parce que le numérateur est la dérivée du dénominateur :

$$\mathcal{L}\Gamma(1+x+\alpha) - \mathcal{L}\Gamma(x+\alpha) = \mathcal{L}(x+\alpha),$$

résultat évident.

8. *Remarque.* La formule (D), que je ne trouve pas dans les *Tables* de M. Bierens de Haan, semble assez importante. On en conclut, par un changement de notation :

$$\int_0^1 \mathcal{L}\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}\,dx = y(\mathcal{L}y - 1); \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E) (*)}$$

$$\int_0^1 \mathcal{L}\frac{\Gamma(x+e)}{\Gamma(x)}\,dx = 0;$$

etc.

9. *Seconde formule générale.* Dans la relation

$$(1+x)^{-m} = q\int_0^1 \frac{u^{q-1}\,du}{(u+x)^m} - m\int_0^1 \frac{u^q\,du}{(u+x)^{m+1}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

prenons les dérivées des deux membres, relativement à q. Nous aurons

$$0 = \int_0^1 \frac{u^{q-1}\,du}{(u+x)^m} + q\int_0^1 \frac{u^{q-1}\,\mathcal{L}u\,du}{(u+x)^m} - m\int_0^1 \frac{u^q\,\mathcal{L}u\,du}{(u+x)^{m+1}};$$

ou, par le changement de q en $m-p$,

$$\int_0^1 \frac{u^{m-p-1}\,du}{(u+x)^m} = m\int_0^1 \frac{u^{m-p}\,\mathcal{L}u\,du}{(u+x)^{m+1}} - (m-p)\int_0^1 \frac{u^{m-p-1}\,\mathcal{L}u\,du}{(u+x)^m} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

On a :

$$\frac{mu^{m-p}}{(u+x)^{m+1}} - \frac{(m-p)u^{m-p-1}}{(u+x)^m} = \frac{1}{(u+x)^{m+1}}[pu^{m-p} - (m-p)xu^{m-p-1}].$$

Donc, si nous posons :

$$\mathrm{H}_p = \int_0^1 \frac{u^{m-p-1}\,du}{(u+x)^m}, \qquad \mathrm{K}_p = \int_0^1 \frac{u^{m-p}\,\mathcal{L}u\,du}{(u+x)^{m+1}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

(*) Nous reviendrons sur celle-ci. En passant, notons ces deux autres formules, dont la vérification est facile :

$$\int_a^b \mathcal{L}x\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\mathcal{L}(ab)\mathcal{L}\frac{b}{a}, \qquad \int_a^{\frac{1}{a}} \mathcal{L}x\frac{dx}{x} = 0, \qquad (a>0).$$

l'égalité (7) deviendra

$$H_p = pK_p - (m-p)xK_{p+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(F)}$$

Celle-ci est, sous forme abrégée, notre *seconde formule générale.*

10. *Cas particulier.* Soient $m = 1$, $p = 0$. La relation (7) donne

$$\int_0^1 \frac{u\mathcal{L}u\,du}{(u+x)^2} = \int_0^1 \frac{(1+\mathcal{L}u)\,du}{u+x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Pour vérifier cette égalité, dont le premier membre est *fini,* écrivons-le ainsi :

$$\int_0^1 \frac{\mathcal{L}u\,du}{u+x} - x\int_0^1 \frac{\mathcal{L}u\,du}{(u+x)^2}.$$

Soit n un nombre entier, supérieur à $\frac{1}{u+x}$ (*). Nous aurons

$$-\int_0^1 \frac{\mathcal{L}u\,du}{u+x} < -n\int_0^1 \mathcal{L}u\,du,$$

ou

$$-\int_0^1 \frac{\mathcal{L}u\,du}{u+x} < n \text{ (**)}.$$

En conséquence, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathcal{L}u\,du}{u+x}$ est *finie,* bien que $\mathcal{L}u = -\infty$ pour $u = 0$.

Cela posé, la formule (9) se réduit à

$$-x\int_0^1 \frac{\mathcal{L}u\,du}{(u+x)^2} = \int_0^1 \frac{du}{u+x},$$

ou à

$$\int_0^1 \left[\frac{x\mathcal{L}u}{(u+x)^2} + \frac{1}{u+x}\right]du = 0.$$

(*) On suppose $x > 0$.

(**) On sait que $\int_0^1 \mathcal{L}u\,du = -1$.

La quantité entre parenthèses est la dérivée de $\frac{u\mathcal{L}u}{u+x}$. Donc enfin

$$\left[\frac{u\mathcal{L}u}{u+x}\right]_0^1 = 0;$$

ce qui est exact.

En outre :

$$\int_0^1 \frac{\mathcal{L}u\,du}{(u+x)^2} = -\frac{1}{x}\,\mathcal{L}\frac{1+x}{x}, \qquad \int_0^1 \frac{\mathcal{L}u\,du}{(u+1)^2} = -\mathcal{L}\,.\,2\,. \quad . \quad . \quad . \quad (10)\ (*)$$

11. *Somme d'une série numérique.* Si, dans la formule connue :

$$\int_0^1 \frac{\mathcal{L}x}{1+x}dx = -\frac{\pi^2}{12}\,(**),$$

on fait $x = t - 1$, elle devient

$$\int_1^2 \frac{\mathcal{L}(1-t)}{t}dt = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Or,

$$\mathcal{L}(t-1) = \mathcal{L}t + \mathcal{L}\left(1 - \frac{1}{t}\right),$$

ou

$$\mathcal{L}(t-1) = \mathcal{L}t - \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\frac{1}{t^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{t^3} + \cdots\right].$$

Donc

$$-\frac{\pi^2}{12} = \int_1^2 \frac{\mathcal{L}t}{t}dt - \int_1^2 \left[\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{t^3} + \frac{1}{3}\frac{1}{t^4} + \cdots\right]dt.$$

La première intégrale a pour valeur $\frac{1}{2}(\mathcal{L}2)^2$ (***). Ainsi

$$-\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}2)^2 + \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{t^2} + \frac{1}{3^2}\frac{1}{t^3} + \cdots\right]_1^2.$$

(*) La première édition des *Tables* donne, au lieu de cette dernière valeur, $\frac{1}{2}\,\mathcal{L}\,\frac{1}{2}$. La correction a été faite dans l'*Errata*.

(**) *Bierens de Haan*, p. 152.

(***) Voir la note de l'article 8.

Lorsque $t = 1$, la série se rédu' ;à

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Donc enfin

$$1 + \frac{1}{2^2}\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2}\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5^2}\frac{1}{2^4} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} - (\mathcal{L}2)^2. \quad \ldots \quad (11)\ (^*)$$

12. *Une sommation.* De l'égalité

$$H_p = p\,K_p - (m - p)x\,K_{p+1}, \quad \ldots \quad (F)$$

on tire, par la transformation déjà employée (4) :

$$C_{m,p}\,H_p\,x^p = p\,C_{m,p}\,K_p\,x^p - (p+1)\,C_{m,p+1}\,K_{p+1}\,x^{p+1},$$

$$C_{m,p-1}\,H_{p-1}\,x^{p-1} = (p-1)\,C_{m,p-1}\,K_{p-1}\,x^{p-1} - p\,C_{m,p}\,K_p\,x^p,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_0 = \qquad\qquad - C_{m,1}\,K_1\,x;$$

puis

$$H_0 + C_{m,1}H_1x + \cdots + C_{m,p}H_px^p = -(p+1)\,C_{m,p+1}K_{p+1}x^{p+1},$$

ou

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1} + C_{m,1}u^{m-2}x + \cdots + C_{m,p}u^{m-p-1}x^p}{(u+x)^m}du = -(p+1)\,C_{m,p+1}\,x^{p+1}\int_0^1 \frac{u^{m-p-1}\mathcal{L}u}{(u+x)^{m+1}}du, \quad (G)$$

formule curieuse.

13. *Remarques* I. On peut établir, entre les relations (G) et

$$\frac{1 + C_{m,1}x + C_{m,2}x^2 + \cdots + C_{m,p}x^p}{(1+x)^m} = (p+1)\,C_{m,p+1}\,x^{p+1}\int_0^1 \frac{u^{m-p-1}du}{(u+x)^{m+1}}, \quad \ldots \quad (C)$$

un rapprochement *mnémotechnique* assez singulier.

Si, dans le premier membre de (G), on remplace u par 1, et que, dans le second membre, on remplace $\mathcal{L}u$ par (-1) (**), on trouve (C).

(*) Le second membre égale, à fort peu près, 1,164 481.

(**) *Théoriquement,* ces deux substitutions n'ont pas de sens.

II. D'après la théorie de la décomposition des fractions rationnelles, le premier membre de (G) a une valeur finie (*). Donc l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{u^{m-p-1} \mathfrak{L} u du}{(u+x)^{m+1}}$$

est également *finie;* ce qui n'est pas évident *a priori* (**).

III. Si $p = 0$, (G) se réduit à

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1} du}{(u+x)^m} = -mx \int_0^1 \frac{u^{m-1} \mathfrak{L} u}{(u+x)^{m+1}} du \qquad (12)$$

IV. De même, si $p = m - 1$:

$$\int_0^1 \left[1 - \frac{x^m}{(u+x)^m}\right] \frac{du}{u} = -mx^m \int_0^1 \frac{\mathfrak{L} u}{(u+x)^{m+1}} du \qquad (13)\ (^{***})$$

14. *Une intégrale double.* Par le changement de x en $\frac{x}{\alpha}$, la relation (C) devient

$$\alpha^m + C_{m,1}\alpha^{m-1}x + \cdots + C_{m,p}\alpha^{m-p}x^p = (p+1)C_{m,p+1}x^{p+1}\alpha^{m-p}(\alpha+x)^m \int_0^1 \frac{u^{m-p-1} du}{(x+\alpha u)^{m+1}}.$$

(*) On suppose, bien entendu, $p \leqq m - 1$.

(**) Voir ci-dessus (10).

(***) Suivant les *Tables*, le seul cas particulier où la dernière intégrale était connue, est celui de $m = 0$, $x = 1$. Le Mémoire de Plana (*Académie de Turin*, 1818), cité par M. Bierens de Haan, a des parties excellentes; mais il en est qui sont absolument *inadmissibles;* par exemple celle-ci :

« $\int \frac{dx \cos ax}{x^2} = -\frac{\pi}{2} a + \infty$,

» $\int \frac{dx \cos ax}{x^4} = \frac{\pi}{2} \frac{a^3}{1.2.3} + \infty^3 - \infty$,

» $\int \frac{dx \cos ax}{x^6} = -\frac{\pi}{2} \frac{a^5}{1.2.3.4.5} + \infty^5 - \infty^3 + \infty$,

. . . .

» Or, en substituant ces valeurs dans celle de $\int \frac{dx \cos ax}{x^2 - n^2}$, *il est évident que toutes les* » *quantités affectées du signe* ∞ *se détruisent mutuellement* » !

Le premier membre de (G) est donc

$$(p+1).C_{m,\,p+1}\,x^{p+1}\int_0^1 \alpha^{m-p-1}\,d\alpha\int_0^1 \frac{u^{m-p-1}\,du}{(x+\alpha u)^{m+1}}.$$

En égalant cette expression au second membre, on trouve

$$\int_0^1 \alpha^{m-p-1}\,d\alpha\int \frac{u^{m-p-1}\,du}{(x+\alpha u)^{m+1}} = -\int_0^1 \frac{u^{m-p-1}\,\mathcal{L}u}{(u+x)^{m+1}}\,du;$$

ou, par un changement de notation :

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(\alpha\beta)^q\,d\alpha\,d\beta}{(x+\alpha\beta)^{m+1}} = -\int_0^1 \frac{\alpha^q\,\mathcal{L}\alpha}{(\alpha+x)^{m+1}}\,d\alpha. \qquad (q \geqq 0). \quad . \quad . \quad . \quad . \ (14)$$

15. *Identité de deux séries.* Considérons le cas particulier où $x=1$. Chacune des fractions sera développable en série convergente; et nous aurons, au lieu de la dernière égalité :

$$\int_0^1\int_0^1 (\alpha\beta)^q\,d\alpha\,d\beta\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\,C_{m+k,\,m}\,(\alpha\beta)^k = -\int_0^1 \alpha^q\,\mathcal{L}\alpha\,.\,d\alpha\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\,C_{m+k,\,m}\,\alpha^k;$$

ou

$$\int_0^1 \alpha^{q+k}\,d\alpha\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\,C_{m+k,\,m}\int_0^1 \beta^{q+k}\,d\beta = -\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\,C_{m+k,\,m+1}\int_0^1 \alpha^{q+k}\,\mathcal{L}\alpha\,.\,d\alpha. \quad . \ (15)$$

Le premier membre est, évidemment, la somme de la série

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\,C_{m+k,\,m}\,\frac{1}{(q+k+1)^2}.$$

Quant au second membre, l'intégration par parties donne

$$\int_0^1 \alpha^{q+k}\,\mathcal{L}\alpha\,.\,d\alpha = \left[\frac{\alpha^{q+k+1}\,\mathcal{L}\alpha}{q+k+1}\right]_0^1 - \frac{1}{q+k+1}\int_0^1 \alpha^{q+k}\,d\alpha;$$

ou bien, parce que le terme intégré s'annule aux deux limites :

$$\int_0^1 \alpha^{q+k}\,\mathcal{L}\alpha\,.\,d\alpha = -\frac{1}{(q+k+1)^2}.$$

L'égalité (15) est donc *identique*. Autrement dit :

$$-\int_0^1 \frac{\alpha^q \mathcal{L}\alpha}{(1+\alpha)^{m+1}} d\alpha = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k C_{m+k,\,m} \frac{1}{(q+1+k)^2} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(\alpha\beta)^q \, d\alpha d\beta}{(1+\alpha\beta)^{m+1}} = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k C_{m+k,\,m} \frac{1}{(q+1+k)^2} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

16. *Cas particulier remarquable.* Soient $m = 0$, $q = \frac{1}{2}$. La valeur commune des seconds membres est

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{4}{(2k+3)^2} = 4\left[\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \cdots\right];$$

ou, si l'on fait

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots = G : \text{(*)}$$

$$4(1 - G).$$

Ainsi :

$$-\int_0^1 \frac{\sqrt{\alpha}\,\mathcal{L}\alpha}{1+\alpha} d\alpha = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\sqrt{\alpha\beta}\, d\alpha d\beta}{1+\alpha\beta} = 4(1 - G).$$

Pour simplifier, changeons α en α^2, β en β^2; nous aurons,

$$-\int_0^1 \frac{\alpha^2 \mathcal{L}\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\alpha^2\beta^2 d\alpha d\beta}{1+\alpha^2\beta^2} = 1 - G;$$

ou, finalement :

$$-\int_0^1 \frac{\mathcal{L}\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha = \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\alpha d\beta}{1+\alpha^2\beta^2} = G \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18) \text{ (**)}$$

(*) *Recherches sur la constante* G. . . . . . , p. 1.

(**) La formule

$$G = -\int_0^1 \frac{\mathcal{L}\alpha}{1+x^2} dx$$

est connue; l'autre, peut-être nouvelle, est facile à vérifier. En effet,

$$\int_0^1 \frac{d\beta}{1+\alpha^2\beta^2} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arc\,tg} \alpha; \text{ etc.}$$

III

SUR LES INTÉGRALES EULÉRIENNES.

1. *Transformation d'une formule.* Reprenons l'égalité

$$\int_0^1 \mathcal{L}\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}dx = y(\mathcal{L}y - 1), \quad \ldots \ldots \quad (A)$$

démontrée ci-dessus, page 8.

On sait que la fonction $\mathcal{L}\Gamma(x)$ peut être écrite de ces deux manières :

$$\mathcal{L}\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[x - 1 - \frac{1 - e^{-(x-1)\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}\right] e^{-\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha}, \quad \ldots \ldots \quad (1)\ (^*)$$

$$\mathcal{L}\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathcal{L}x - x + \frac{1}{2}\mathcal{L}(2\pi) + \varpi(x), \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

en supposant

$$\varpi(x) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha}\right]\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}d\alpha \quad \ldots \ldots \quad (3)\ (^{**})$$

Par la première expression :

$$\mathcal{L}\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} = \int_0^\infty \left[y + e^{-(x-1)\alpha}\frac{e^{-\alpha y} - 1}{1 - e^{-\alpha}}\right] e^{-\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha},$$

$$\int_0^1 \mathcal{L}\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}dx = \int_0^\infty e^{-\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha}\left[y + \frac{e^{-\alpha y} - 1}{1 - e^{-\alpha}}\int_0^1 e^{-(x-1)\alpha}dx\right] \quad \ldots \quad (4)$$

Par la seconde :

$$\mathcal{L}\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} = \left(x + y - \frac{1}{2}\right)\mathcal{L}(x+y) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathcal{L}x - y + \int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha}\right]e^{-\alpha x}\frac{e^{-\alpha y} - 1}{\alpha}d\alpha;$$

(*) *Recherches sur la constante* G, p. 21.
(**) *Ibid.* $\varpi(x)$ est la *fonction de Binet*.

puis

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 \mathfrak{L}\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}dx = \int_0^1\left(x+y-\frac{1}{2}\right)\mathfrak{L}(x+y)dx - \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathfrak{L}\,x dx - y \\ + \int_0^1 dx \int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha-1}-\frac{1}{\alpha}\right]e^{-\alpha x}\frac{e^{-\alpha y}-1}{\alpha}dx.\end{aligned}\right\} \quad . \quad (5)$$

Il s'agit, maintenant, de simplifier les égalités (4), (5) (*).

2. *Suite*. On a

$$\int_0^1 e^{(x-1)\alpha}dx = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha};$$

donc, la formule (4) devient

$$\int_0^1 \mathfrak{L}\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}dx = \int_0^\infty \left[ye^{-\alpha} + \frac{e^{-\alpha y}-1}{\alpha}\right]\frac{d\alpha}{\alpha}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

et la formule (A) :

$$\int_0^\infty \left[ye^{-\alpha} + \frac{e^{-\alpha y}-1}{\alpha}\right]\frac{d\alpha}{\alpha} = y(\mathfrak{L}y - 1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)\,(^{**})$$

Revenons à l'égalité (5).
On a

$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathfrak{L}\,x dx = \frac{1}{2}\left[(x^2-x)\mathfrak{L}\,x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1(x-1)dx = \frac{1}{4}.$$

(*) Le premier membre de chacune égale $y(\mathfrak{L}y - 1)$.

(**) Pour vérifier celle-ci, qui devient identique lorsque $y = 0$, il suffit de prendre les dérivées des deux membres. On trouve, en effet,

$$\int_0^\infty [e^{-\alpha} - e^{-\alpha y}]\frac{d\alpha}{\alpha} = \mathfrak{L}y;$$

relation évidente et connue.

De même,

$$\int_0^1 \left(x+y-\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}(x+y)dx = \left[\left(\frac{1}{2}x^2+yx-\frac{1}{2}x\right)\mathcal{L}(x+y)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x+2y-1)x\,dx}{x+y}$$

$$= y\,\mathcal{L}(1+y) - \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx - \frac{1}{2}(y-1)\int_0^1 \frac{x\,dx}{x+y}$$

$$= y\,\mathcal{L}(1+y) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)y\,\mathcal{L}\frac{1+y}{y}$$

$$= y\,\mathcal{L}(1+y) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(y-1)y\,\mathcal{L}\frac{1+y}{y}.$$

Dans l'égalité (5), la première ligne du second membre se change donc en

$$y\,\mathcal{L}(1+y) - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}(y-1)y\,\mathcal{L}\frac{1+y}{y} = \frac{1}{2}y\left[(y+1)\mathcal{L}(y+1) - (y-1)\mathcal{L}y - 3\right].$$

Quant à la seconde ligne, elle se réduit à

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha-1} - \frac{1}{\alpha}\right]\frac{(1-e^{\;\alpha})(e^{-\alpha y}-1)}{\alpha^2}d\alpha.$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 \mathcal{L}\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}dx &= \frac{1}{2}y\left[(y+1)\mathcal{L}(y+1) - (y-1)\mathcal{L}y - 3\right]\\ &+\int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha-1} - \frac{1}{\alpha}\right]\frac{(1-e^{-\alpha})(e^{-\alpha y}-1)}{\alpha^2}d\alpha;\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

puis, d'après la relation (A),

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\frac{e^\alpha+1}{e\;\;-1} - \frac{1}{\alpha}\right]\frac{(1-e^{-\alpha})(e^{-\alpha y}-1)}{\alpha^2}d\alpha = \frac{1}{2}y\left[(y+1)\mathcal{L}\frac{y}{y+1} + 1\right]: \; . \; . \quad (C)$$

et, si $y=1$:

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha-1} - \frac{1}{\alpha}\right]\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^2 d\alpha = \mathcal{L}.2 - \frac{1}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

3. *Autre cas particulier.* Lorsque $y = +\infty$, le premier membre de (C) devient

$$-\int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha}\right]\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha^2}d\alpha = -\int_0^\infty \left[\frac{1}{2}(e^\alpha + 1) - \frac{1}{\alpha}(e^\alpha - 1)\right]\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2}d\alpha.$$

Dans le second, la quantité entre parenthèses égale

$$1 + (y + 1)\mathcal{L}\left(1 - \frac{1}{y + 1}\right) = -\left[\frac{1}{2}\frac{1}{y + 1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(y + 1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(y + 1)^3} + \cdots\right];$$

ainsi, le second membre tend vers $-\frac{1}{4}$. En conséquence,

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2}(e^\alpha + 1) - \frac{1}{\alpha}(e^\alpha - 1)\right]\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2}d\alpha = \frac{1}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

4. *Vérifications.* Celle de la dernière formule est facile. En effet, le binôme contenu sous le signe $\int$ a pour développement :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha^2}{1.2.3} + 2\frac{\alpha^3}{1.2.3.4} + 3\frac{\alpha^4}{1.2.3.4.5} + \cdots\right],$$

ou

$$\frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{n + 1}{\Gamma(n + 4)}\alpha^{n+2}.$$

L'égalité (9) est donc la même chose que

$$\sum_0^\infty \frac{n + 1}{\Gamma(n + 4)}\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^n d\alpha = \frac{1}{2},$$

ou

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(n + 2)}{\Gamma(n + 4)} = \frac{1}{2},$$

ou enfin

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots = \frac{1}{2};$$

etc.

Pour vérifier la formule (8), nous commencerons par l'écrire ainsi:

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2}(e^\alpha + 1) - \frac{1}{\alpha}(e^\alpha - 1)\right] \frac{e^\alpha - 1}{\alpha^2} e^{-2\alpha} d\alpha = \mathcal{L} 2 - \frac{1}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (8^{bis})$$

D'après le calcul précédent, la valeur du premier membre est

$$\frac{1}{2} \sum_0^\infty \frac{n+1}{\Gamma(n+4)} \int_0^\infty (e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}) \alpha^n d\alpha,$$

ou

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sum_0^\infty \frac{n+1}{\Gamma(n+4)} \int_0^\infty e^{-2\alpha} \alpha^n d\alpha \ (*).$$

Donc l'égalité (8^{bis}) se réduit à

$$\sum_0^\infty \frac{n+1}{\Gamma(n+4)} \int_0^\infty e^{-2\alpha} \alpha^n d\alpha = \frac{5}{2} - 2\mathcal{L} 2.$$

Le premier membre de celle-ci égale

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(n+2)(n+3)} \frac{1}{2^{n+1}},$$

ou

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(n+2)2^{n+1}} - \sum_0^\infty \frac{1}{(n+3)2^{n+1}};$$

ou encore, par une réduction visible:

$$\frac{1}{2.2} - \left[\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.8} + \frac{1}{5.16} + \cdots\right].$$

D'un autre côté,

$$\frac{3}{2} - 2\mathcal{L} 2 = \frac{5}{2} + 2\mathcal{L}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} - 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \cdots\right].$$

(*) On vient de voir que

$$\sum_0^\infty \frac{n+1}{\Gamma(n+4)} \int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha^n d\alpha = \frac{1}{2}.$$

Donc enfin :

$$\frac{1}{2.2}-\left[\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.8}+\frac{1}{5.16}+\cdots\right]=\frac{3}{2}-1-\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.8}+\cdots\right];$$

ce qui est exact.

5. *Remarques.* I. La formule (C), très générale (*), présente une circonstance assez curieuse. Le binôme $e^{-\alpha y}-1$ équivaut à la série, *toujours convergente,*

$$-\alpha y+\frac{\alpha^2 y^2}{1.2}-\frac{\alpha^3 y^3}{1.2.3}+\cdots$$

Ainsi, à première vue, *il semble* que le premier membre de (C) est développable suivant les puissances, entières et positives, de y. Mais la fonction $\mathcal{L}\left(\frac{y}{y+1}\right)$, ou $\mathcal{L}y-\mathcal{L}(y+1)$, ne l'est pas.

Pour se rendre compte de cette contradiction apparente, il suffit de considérer l'intégrale

$$-\int_0^\infty\left[\frac{1}{2}\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha-1}-\frac{1}{\alpha}\right]\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}d\alpha,$$

coefficient de y, dans le développement *supposé.* Par un calcul semblable aux précédents, on reconnaît que cette intégrale est *infinie.*

II. Si, pour abréger, on fait

$$A=\frac{1}{2}(e^\alpha+1)-\frac{1}{\alpha}(e^\alpha-1), \quad \ldots \quad (10)$$

on a, par les relations (9) et (8^{bis}) :

$$\int_0^\infty A\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2}d\alpha=\frac{1}{4}, \qquad \int_0^\infty A\frac{e^{-\alpha}-e^{-\alpha 2}}{\alpha^2}d\alpha=\mathcal{L}2-\frac{1}{2}; \quad \ldots \quad (11)$$

(*) A cause du *paramètre* y.

puis

$$\int_0^\infty A\,\frac{e^{-2\alpha}}{\alpha^2}\,d\alpha = \frac{3}{4}, \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$\int_0^\infty A\,\frac{e^{-\alpha}+e^{-2\alpha}}{\alpha^2}\,d\alpha = 1 - l\,.\,2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Et comme

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty A\,\frac{e^{\frac{1}{2}\alpha}}{(e^\alpha - 1)\alpha}\,d\alpha = \frac{1}{2}(1 - l\,.\,2)\ (^*),$$

on a encore, à cause de la formule (13) :

$$\int_0^\infty \frac{A}{e^\alpha - 1}\left[2\alpha e^{-\frac{1}{2}\alpha} - (e^\alpha - 1)(e^{-\alpha} + e^{-2\alpha})\right]\frac{d\alpha}{\alpha^2} = 0,$$

ou

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\,\frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha}\right]\left[2\alpha - e^{\frac{1}{2}\alpha} + e^{-\frac{3}{2}\alpha}\right]e^{-\frac{1}{2}\alpha}\,\frac{d\alpha}{\alpha^2} = 0 \quad\ldots\ldots \quad (14)$$

III. La combinaison des formules précédentes, avec celles du même genre, rapportées, soit dans les *Tables* (**) de M. Bierens de Haan, soit

(*) *Recherches sur la constante* G, p. 16.

(**) La *Table* 126 (première édition) donne, d'après *Meyer*, cette formule :

$$\int_0^\infty \left[\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} - \frac{e^{-2x}}{x^2}\right] = 1 - l\,.\,2.$$

Il est aisé de voir qu'elle est fausse. En effet, à cause de

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\,dx = l\,2,$$

il en résulte

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2x}}{x^2}\,dx = 2\,l\,2 - 1.$$

Le premier membre surpasse $\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{x^2}\,dx$; et, à plus forte raison, il surpasse $\frac{1}{e^2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Or, cette intégrale est infinie.

Les pages 121 à 126, de la *Théorie des intégrales définies*, contiennent bon nombre de formules *absurdes ;* et ce ne sont pas les seules.

dans les *Recherches sur la constante* G, conduirait à la connaissance de nouvelles intégrales définies, plus ou moins intéressantes. Mais ce sont là de simples *exercices,* auxquels nous croyons ne pas devoir nous arrêter.

6. *Une expression de* $\varpi(\mathrm{x})$. Reprenons la formule

$$\varpi'(x) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha}\right]\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\,d\alpha. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

On sait que la quantité entre parenthèses égale $2\alpha \sum_0^\infty \frac{1}{4n^2\pi^2 + \alpha^2}$ (*). Ainsi

$$\varpi(x) = 2\int_0^\infty e^{-\alpha x} d\alpha \sum_1^\infty \frac{1}{4n^2\pi^2 + \alpha^2},$$

ou

$$\varpi(x) = 2\sum_1^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}\,d\alpha}{4n^2\pi^2 + \alpha^2}.$$

Soit

$$\alpha = 2n\pi \operatorname{tg}\theta;$$

d'où

$$d\alpha = 2n\pi \frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

L'intégrale devient

$$\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2n\pi x \operatorname{tg}\theta}\,d\theta.$$

Par suite

$$\varpi(x) = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2n\pi x \operatorname{tg}\theta}\,d\theta,$$

ou

$$\varpi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sum_1^\infty \frac{e^{-2n\pi x \operatorname{tg}\theta}}{n}.$$

(*) *Mélanges mathématiques,* t. I, p. 223.

La somme de la série est $-\mathcal{L}\left(1 - e^{-2\pi x 4\theta}\right)$. Donc enfin, au lieu de la formule (3) :

$$\varpi(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, \mathcal{L}\left(1 - e^{-2\pi x \operatorname{tg}\theta}\right). \quad \text{(15) (*)}$$

7. *Suite.* Faisons

$$e^{-2\pi \operatorname{tg}\theta} = q. \quad (16)$$

Il résulte, de cette transformation,

$$d\theta = -\frac{2\pi}{4\pi^2 + (\mathcal{L} q)^2}\frac{dq}{q};$$

puis

$$\varpi(x) = -2\int_0^1 \frac{\mathcal{L}(1 - q^x)}{4\pi^2 + (\mathcal{L} q)^2}\frac{dq}{q} \quad (17)$$

8. *Une sommation.* Soit S la somme de la série *convergente*

$$\varpi(x) - \varpi(2x) + \varpi(3x) - \cdots$$

Il est clair que si l'on pose

$$\mathrm{P} = \frac{1-q}{1-q^2}\frac{1-q^3}{1-q^4}\frac{1-q^5}{1-q^6}\cdots, \quad (18)$$

on aura

$$\mathrm{S} = -2\int_0^1 \frac{\mathcal{L}.\mathrm{P}}{4\pi^2 + (\mathcal{L} q)^2}\frac{dq}{q}.$$

Or (**),

$$\mathrm{P} = \left(\frac{\pi}{\varpi}\right)^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{8}}.$$

Donc

$$\varpi(1) - \varpi(2) + \varpi(3) - \cdots = -2\int_0^1 \frac{\mathcal{L}\left[\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{8}}\right]}{4\pi^2 + (\mathcal{L} q)^2}\frac{dq}{q} \quad \text{(E)}$$

(*) Celle-ci ne diffère, qu'en apparence, de la formule donnée par *Schaar*.
(**) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 1 (quotient de α par α').

Nous avons ainsi une *relation entre les intégrales eulériennes et les intégrales elliptiques* (*).

9. *Remarques*. I. L'égalité (E) peut être écrite sous une forme plus simple.

On sait que (**)

$$P = \frac{1}{1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots}.$$

Donc, si l'on remonte à la formule (15), on a

$$\varpi(1) - \varpi(2) + \varpi(3) - \cdots = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, \mathcal{L}\left[1 + e^{-2\pi \operatorname{tg}\theta} + e^{-6\pi \operatorname{tg}\theta} + e^{-12\pi \operatorname{tg}\theta} + \cdots\right];$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varpi(1) - \varpi(2) + \varpi(3) - \varpi(4) + \cdots = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}\, \mathcal{L}\left[1 + e^{-2\pi t} + e^{-6\pi t} + e^{-12\pi t} + \cdots\right]. \quad \text{(F)}$$

II. Au moyen de la formule de *définition* :

$$\varpi(x) = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2}\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}-1} - \frac{1}{\alpha}\right]\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\, d\alpha, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

on peut établir, très simplement, la *divergence* de la série

$$\varpi(1) + \varpi(2) + \varpi(3) + \cdots \; (^{***}).$$

En effet, soit, s'il est possible, $\sum$ la *somme* de cette série, dont tous les termes sont positifs (IV).

(*) On en trouverait une infinité d'autres en attribuant au paramètre x, dans la formule (17), des valeurs convenables.

(**) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 2.

(***) Propriété connue, à ce qu'il me semble.

(IV) A cause de

$$\frac{1}{2}\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}-1} > \frac{1}{\alpha};$$

inégalité presque évidente.

Nous aurions

$$\Sigma = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha}\right] \frac{e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + e^{-3\alpha} + \cdots}{\alpha} d\alpha;$$

ou

$$\Sigma = \int_0^\infty \left[-\frac{e^\alpha - 1}{\alpha} + \frac{1}{2}(e^\alpha + 1)\right] \frac{d\alpha}{\alpha(e^\alpha - 1)^2}.$$

La quantité entre parenthèses surpasse $\frac{\alpha^2}{12}$; donc

$$\Sigma > \frac{1}{12}\int_0^\infty \frac{\alpha d\alpha}{(e^\alpha - 1)^2};$$

et cette intégrale est infinie.

10. *Autre expression de* S. L'égalité connue

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \mathfrak{L}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \quad (^*)$$

donne, par le développement du logarithme,

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{6x^6} + \cdots\right] \quad \ldots \quad (19)\,(^{**})$$

Donc, si l'on fait, pour abréger :

$$\left.\begin{array}{l} S_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \cdots, \\ S_4 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots, \\ S_5 + \frac{1}{1} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

(*) *Recherches sur la constante* G, p. 19.
(**) On suppose $x \geqq 1$.

on aura

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}S_3 - \frac{1}{4}S_4 + \frac{1}{5}S_5 - \frac{1}{6}S_6 + \cdots\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

En général,

$$\frac{1}{n^{k+1}} = \frac{1}{\Gamma(k+1)}\int_0^\infty e^{-n\alpha}\alpha^k\,d\alpha.$$

Conséquemment :

$$S_3 = \frac{1}{1\,.\,2}\int_0^\infty (e^{-\alpha} + e^{-3\alpha} + e^{-5\alpha} + \cdots)\alpha^2 d\alpha = \frac{1}{1\,.\,2}\int_0^\infty \frac{e^\alpha}{e^{2\alpha}-1}\,\alpha^2 d\alpha,$$

$$S_4 = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\int_0^\infty (e^{-\alpha} + e^{-3\alpha} + e^{-5\alpha} + \cdots)\alpha^3 d\alpha = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\int_0^\infty \frac{e^\alpha}{e^{2\alpha}-1}\,\alpha^3 d\alpha,$$

. . . .;

puis, au lieu de la formule (21) :

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^\alpha d\alpha}{e^{2\alpha}-1}\left[\frac{\alpha^2}{1\,.\,2\,.\,3} - \frac{\alpha^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{\alpha^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \cdots\right].$$

La série, *toujours convergente,* a pour somme $\frac{e^{-\alpha} - 1 + \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2}{\alpha}$. Par conséquent,

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\alpha}-1}\left[\frac{1-e^\alpha}{\alpha} + \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right)e^\alpha\right] \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

11. *Suite.* On peut décomposer cette intégrale en trois autres, dont la première est plus simple (du moins en apparence), et dont les deux autres sont connues.

A cet effet, j'observe que l'on a, *identiquement,*

$$\frac{1-e^\alpha}{\alpha} + \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right)e^\alpha = e^\alpha - 1 + \frac{1+\alpha-e^\alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}\alpha e^\alpha.$$

Donc

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^\alpha+1} - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{e^\alpha \alpha d\alpha}{e^{2\alpha}-1} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^\alpha-1-\alpha}{\alpha}\,\frac{d\alpha}{e^{2\alpha}-1},$$

ou

$$S = \frac{1}{2}\mathcal{L}2 - \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^\alpha-1-\alpha}{\alpha}\,\frac{d\alpha}{e^{2\alpha}-1} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

12. *Développement d'une intégrale.* Il est visible que

$$\int_0^\infty \frac{e^\alpha - 1 - \alpha}{\alpha} \frac{d\alpha}{e^{2\alpha} - 1} = \sum_1^\infty \int_0^\infty \frac{e^\alpha - 1 - \alpha}{\alpha} e^{-2n\alpha} d\alpha.$$

Or,

$$\int_0^\infty \frac{e^\alpha - 1 - \alpha}{\alpha} e^{-2n\alpha} d\alpha = \int_0^\infty \frac{e^{-(2n-1)\alpha} - e^{-2n\alpha}}{\alpha} d\alpha - \int_0^\infty e^{-2n\alpha} d\alpha;$$

ou, par des formules connues :

$$\int_0^\infty \frac{e^\alpha - 1 - \alpha}{\alpha} e^{-2n\alpha} d\alpha = \mathcal{L}\frac{2n}{2n-1} - \frac{1}{2n};$$

puis

$$\int_0^\infty \frac{e^\alpha - 1 - \alpha}{\alpha} \frac{d\alpha}{e^{2\alpha} - 1} = -\sum_1^\infty \left[\mathcal{L}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

13. *Remarques.* I. D'après les formules (23) et (24), on a

$$\varpi(1) - \varpi(2) + \varpi(3) - \cdots = \frac{1}{2}\mathcal{L}2 - \frac{\pi^2}{3^2} + \frac{1}{2}\sum_1^\infty \left[\mathcal{L}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (G)$$

II. La série contenue dans le second membre est beaucoup plus simple que celle de Gudermann, qui donne le développement de $\varpi(x)$ (*).

III. Par la formule (78) du Mémoire cité,

$$\varpi(1) - \varpi(2) + \varpi(3) - \cdots = \sum_1^\infty \left[\left(i + \frac{1}{2}\right)\mathcal{L}\frac{i+1}{i} - 1\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

i étant *impair*. Si l'on fait $i = m - 1$, et que l'on compare cette expression à la précédente, on trouve aisément

$$\frac{\pi^2}{16} - \mathcal{L}2 = \sum_1^\infty \left[4n\mathcal{L}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{4n+1}{2n}\right] (^{**}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

(*) *Recherches sur la constante* G, p. 23.

(**) Il est facile, encore, de transformer le second membre en intégrale définie. Mais le résultat est beaucoup plus compliqué que

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^\alpha \alpha d\alpha}{e^{2\alpha} - 1} - \int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^\alpha + 1} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\alpha e^\alpha - 2(e^\alpha - 1)\right] \frac{d\alpha}{e^{2\alpha} - 1}.$$

Pour cette raison, nous ne le rapportons pas.

14. *Une expression de la constante* G. A cause de

$$G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots (*);$$

on a

$$G = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots - 2\left[\frac{1}{3^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots\right].$$

La somme de la première série est

$$\frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} (**);$$

la somme de la seconde est

$$\int_0^\infty \frac{e^{-3x}\,x\,dx}{1 - e^{-4x}} = \int_0^\infty \frac{e^x\,x\,dx}{e^{4x} - 1}.$$

Conséquemment,

$$G = \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} - 2\int_0^\infty \frac{e^x x\,dx}{e^{4x} - 1};$$

ou, par le changement de x en $4x$, dans la première intégrale :

$$G = 2\int_0^\infty \frac{6 - e^x}{e^{4x} - 1}\,x\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Telle est l'*expression* cherchée. Il est clair qu'en la combinant, soit avec celle que nous avons indiquée ci-dessus (p. 20), soit avec celles que l'on trouve dans le Mémoire cité, on en pourrait déduire une foule d'autres.

15. *Autres séries.* Nous ne quitterons pas ce sujet sans indiquer les sommations de deux séries remarquables, qui peuvent servir de *types* (***).

Ce sont

$$S = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \quad . \; . \quad (28)$$

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{7}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots \quad . \; . \quad (29)$$

(*) *Recherches*. . . . . (Avant-propos.)

(**) *Traité élémentaire des séries.*

(***) Nous les avons considérées autrefois, dans le *Mémoire sur la transformation des séries*, pp. 36, 37.

Elles sont convergentes. En effet, à cause de

$$\mathcal{L}2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

le terme général de la première est compris dans la formule

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{\mathcal{L}.2 \pm \varepsilon_n}{n}.$$

D'ailleurs ε_n est, ou valeur absolue, moindre que $\frac{1}{n}$; etc. De même pour la seconde série.

Cela posé, en vertu d'une proposition connue (*), on peut grouper, ainsi qu'il suit, les termes de S :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots\right)$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \cdots\right) + \cdots$$

Donc

$$S = \mathcal{L}.2 - \frac{1}{2}(\mathcal{L}.2 - 1) + \frac{1}{3}\left(\mathcal{L}.2 - 1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\mathcal{L}.2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots;$$

ou

$$S = (\mathcal{L}.2)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots, \quad \ldots \quad (30)$$

Et comme, d'après l'égalité (28),

$$S = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots, \ (^{**})$$

il s'ensuit que

$$S = \frac{1}{2}(\mathcal{L}.2)^2 + \frac{\pi^2}{12} \quad \ldots \quad (31)$$

(*) *Sur un tableau numérique*, etc.

(**) On ne doit pas oublier que

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

On trouve, de la même manière,

$$S_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \cdots,$$

$$= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{3}.1 - \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{7}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \cdots;$$

puis, par la combinaison avec l'égalité (29),

$$S_1 = \frac{3\pi^2}{32} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

16. *Suite.* Il est facile de réduire, en intégrales définies, S et S_1.

1° $$S = \int_0^1 dx\left[1 - \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{3}(1 - x + x^2) - \frac{1}{4}(1 - x + x^2 + x^3) + \cdots\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[1 + x - \frac{1}{2}(1 - x^2) + \frac{1}{3}(1 + x^3) - \frac{1}{4}(1 - x^4) + \cdots\right].$$

La série entre parenthèses égale $\mathfrak{L}.2 - \mathfrak{L}(1 - x)$. Donc

$$S = (\mathfrak{L}.2)^2 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\mathfrak{L}(1-x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

2° $$S_1 = \int_0^1 dx\left[1 - \frac{1}{3}(1 - x^2) + \frac{1}{5}(1 - x^2 + x^4) - \frac{1}{7}(1 - x^2 + x^4 - x^6) + \cdots\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\left[\frac{\pi}{4} + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 + \frac{1}{7}x^8 + \cdots\right];$$

ou

$$S_1 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}\mathfrak{L}.\frac{1+x}{1-x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

17. *Intégrales définies.* La comparaison des valeurs (33), (34), avec les précédentes, donne ces résultats simples :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\mathfrak{L}(1-x) = \frac{1}{2}(\mathfrak{L}2)^2 - \frac{\pi^2}{12}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}\mathfrak{L}\frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi^2}{96}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

puis celui-ci :

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}\mathfrak{L}\frac{(1+x)^5}{(1-x)^3} = \left[\frac{1}{2}\mathfrak{L}.2\right]^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

IV

SUR UNE FORMULE DE POISSON.

1. *Intégrales définies.* On a déjà vu (*) que cette formule ne diffère pas de celle-ci :

$$\frac{1 + C_{m,1}x + C_{m,2}x^2 + \cdots + C_{m,p}x^p}{(1+x)^m} = (p+1)\,C_{m,\,p+1}\,x^{p+1}\int_0^1 \frac{u^{m-p-1}du}{(u+x)^{m+1}} \quad . \quad . \quad (A)$$

Il en résulte les valeurs, *sous forme finie,* des intégrales

$$\int_0^1 \frac{u^{m-p-1}du}{(u+x)^{m+1}},\quad \int_0^1 \frac{u^{m-p-1}du}{(u+1)^{m+1}},\ldots$$

2. *Cas particuliers.* Si $p = 0$:

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}du}{(u+x)^{m+1}} = \frac{1}{mx\,(1+x)^m}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}du}{(u+1)^{m+1}} = \frac{1}{m.2^m}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

3. *Remarques.* I. Si, dans la relation (1), on change x en $\frac{1}{\lambda}$, elle devient

$$\int_0^1 \frac{u^{m+1}du}{(1+\lambda u)^{m+1}} = \frac{1}{m\,(1+\lambda)^m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Cette formule est due à Legendre (**).

II. De la formule (1), on déduit facilement, au moyen des dérivées relatives à x, les valeurs des intégrales

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}du}{(u+x)^{m+2}},\quad \int_0^1 \frac{u^{m-1}du}{(u+x)^{m+3}},\ldots$$

(*) *Note* I.

(**) *Exercices mathématiques.* La première édition des *Tables* de M. Bierens de Haan la rapporte inexactement. La correction, déjà indiquée à l'*errata,* est faite dans la seconde édition, T. III, form. 8.

On trouve ainsi, en particulier (*) :

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}du}{(u+1)^{m+2}} = \frac{m+2}{m(m+1)2^{m+1}},$$

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}du}{(u+1)^{m+3}} = \frac{m^2+5m+8}{m(m+1)(m+2)2^{m+2}},$$

etc.

V

SUR LA FONCTION $y = \frac{1}{x(1+x)^p}$.

1. Cette fonction, rencontrée dans la Note IV, jouit de propriétés qui rappellent, jusqu'à un certain point, celles des célèbres polynômes X_n, de Legendre (**).

2. *Première propriété.* Par la formule (1) (***) :

$$y = p\int_0^1 \frac{\theta^{p-1}d\theta}{(x+\theta)^{p+1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

3. *Deuxième propriété.*

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n p(p+1)\ldots(p+n)\int_0^1 \frac{\theta^{p-1}d\theta}{(x+\theta)^{n+p+1}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

En effet, dans l'égalité (1), les dérivées successives du second membre sont :

$$-p(p+1)\int_0^1 \frac{\theta^{p-1}d\theta}{(x+\theta)^{p+2}}, \quad +p(p+1)(p+2)\int_0^1 \frac{\theta^{p-1}d\theta}{(x+\theta)^{p+3}}, \ldots$$

(*) Par l'application de la formule de Leibniz.

(**) Nos *Recherches sur les fonctions* X_n, publiées dans les *Mémoires de l'Académie de Belgique,* forment, actuellement, un volume *in-quarto,* d'environ 250 pages.

(***) *Note* IV.

4. *Troisième propriété. En général,*

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n y\,\Gamma(n+1)\left[1 + C_{p,1}\left(\frac{x}{1+x}\right) + C_{p+1,2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots + C_{p+n-1,n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n\right]. \quad (3)$$

Soient

$$u = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{1}{(1+x)^p};$$

et, par conséquent :

$$u' = -\frac{1}{x^2}, \quad u'' = 1.2\,\frac{1}{x^3}, \quad \ldots \quad u^{(n)} = (-1)^n\,1.2\ldots n\,\frac{1}{x^{n+1}};$$

$$v' = -\frac{p}{(1+x)^{p+1}}, \quad v'' = \frac{p(p+1)}{(1+x)^{p+2}}, \quad \ldots \quad v^{(n)} = (-1)^n \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{(1+n)^{p+n}}.$$

La formule de Leibniz est

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u^{(n)}v + C_{n,1}u^{(n-1)}v' + C_{n,2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + C_{n,1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.$$

Donc

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n\left[\frac{1.2\ldots n}{x^{n+1}(1+x)^p} + C_{n,1}\frac{1.2\ldots\overline{n-1}\,p}{x^n(1+x)^{p+1}} + C_{n,2}\frac{1.2\ldots\overline{n-2}\,p(p+1)}{x^{n-1}(1+x)^{p+2}} + \cdots + \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{x(1+x)^{p+n}}\right],$$

ou

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}(1+x)^p}\left[1 + C_{p,1}\left(\frac{x}{1+x}\right) + C_{p+1,2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots + C_{p+n-1,n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n\right],$$

etc.

5. *Remarques.* I. Le polynôme entre parenthèses, dans la formule (3), est la *somme* des $n+1$ premiers termes du développement de $\left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^{-p}$. En le désignant par P_{n+1}, on a donc

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n y\,\Gamma(n+1)\,P_{n+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

II. On a aussi

$$(1+x)^n P_{n+1} = (1+x)^n + C_{p,1}x(1+x)^{n-1} + C_{p+1,2}x^2(1+x)^{n-2} + \cdots + C_{n+p,n}x^n.$$

Dans la relation générale (B) (*), changeons q en n, et $p - q$ en p. Elle devient

$$(1+x)^n + C_{p,1}x(1+x)^{n-1} + \cdots + C_{p+n-1}x^n = 1 + C_{n+p,1}x + C_{n+p,2}x^2 + \cdots + C_{n+p,4}x^n.$$

L'égalité (4) peut, en conséquence, être écrite ainsi :

$$x^{n+1}\frac{d^ny}{dx^n} = (-1^n)\frac{\Gamma(n+1)}{(1+x)^{p+n}}Q_{n+1}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Q_{n+1} représentant la somme des $n+1$ premiers termes du développement de $(1+x)^{n+p}$.

III. Dans ces dernières formules, p est un *nombre quelconque*.

6. *Quatrième propriété. Si l'on fait*

$$x^p\frac{d^{p+1}y}{dx^{p-1}} = f(x), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

on a

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^{p-1}\Gamma(p). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

D'après la formule (5),

$$f(x) = (-1)^{p-1}\frac{\Gamma(p)}{(1+x)^{2p-1}}[1 + C_{2p-1,1}x + C_{2p-1,2}x^2 + \cdots + C_{2p-1,p-1}x^{p-1}].$$

Donc

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^{p-1}\frac{\Gamma(p)}{(1+x)^{2p-1}}[x^{2p-1} + C_{2p-1,1}x^{2p-2} + \cdots + C_{2p-1,p}x^p].$$

Le premier polynôme est ce qu'on peut appeler la *première moitié* du développement de $(1+x)^{2p-1}$; l'autre en est la *seconde moitié,* etc.

7. *Cinquième propriété. Si l'on prend les dérivées successives de* $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, *on a*

$$f^{(m)}(x) + f^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

(*) *Note* I.

8. *Remarques.* I. Pour simplifier la relation (7), posons

$$f(x) = (-1)^{p-1}\,\Gamma(p)\,\varphi(x).$$

Alors

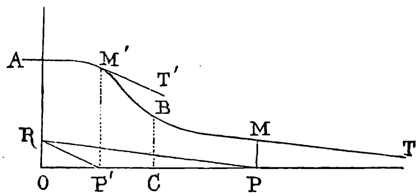
$$\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

A cause de

$$\log x + \log\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

la fonction $\varphi(x)$ jouit d'une propriété qui est *presque* celle des logarithmes.

On peut la rendre plus sensible au moyen de la considération géométrique suivante :



Soit AM′BM la courbe représentée par $z = \varphi(x)$; le point B répondant à $x = \mathrm{OC} = 1$.

Si l'on prend OP, OP′, *de manière que* $\mathrm{OP}.\mathrm{OP}' = \overline{\mathrm{OP}}^2 = 1$, *la somme des ordonnées correspondantes,* PM, P′M′, *sera égale à* OC.

II. Soit $\mathrm{OP}' = \frac{1}{x} = x_1$. On tire, de l'équation (9),

$$\varphi'(x) - \frac{1}{x^2}\varphi'(x_1) = 0,$$

ou

$$x\varphi'(x) = x_1\varphi'(x_1).$$

Par le point P, menons PR parallèle à la tangente MT. Nous aurons $\mathrm{OR} = -x\varphi'(x)$.

Donc, d'après la dernière égalité : *les parallèles aux tangentes* MT, M′T′, *menées par les points* P, P′, *rencontrent, en un même point* R, *l'axe des ordonnées.*

III. On ne doit pas oublier que $\varphi(x)$ *est le rapport entre la première moitié du développement de* $(1 + x)^{2p-1}$ *et cette puissance.*

9. *Application.* Soit $p = 2$, auquel cas l'équation de la courbe est

$$z = \frac{1 + 3x}{(1 + x)^3}.$$

Faisant

$$x = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3, \cdots + \infty,$$

on trouve

$$z = 1,\ \frac{20}{27},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{27},\ \frac{5}{32}, \ldots 0.$$

La somme $\frac{20}{27} + \frac{7}{27} = 1$; ce qui devait être.

En outre,

$$\varphi'(x) = -\frac{6x}{(1 + x)^4};$$

puis

$$\frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{27} = 2\varphi'(2).$$

10. *Sixième propriété.* x *étant compris entre* 0 *et* 1 (exclusivement), *on a, en série convergente :*

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{1}{x^{n+1}} = \sum_0^\infty (-1)^q C_{n+q,n} . C_{n+p-q,p-1} x^q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10)$$

La formule du binôme donne

$$(1 + x)^{-p} = 1 + \sum_{q=1}^{q=\infty} (-1)^q C_{p+q-1,q}\, x^q$$

Donc

$$y = \frac{1}{x} + \sum_1^\infty (-1)^q C_{p+q-1,q}\, x^q;$$

puis

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}} + \sum_{q=1+n}^{q=\infty} (-1)^q C_{p+q-1,q} . (q-1) . (q-2) \ldots (q-n)\, x^{q-1-n}.$$

parce que les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$ sont nulles.

Changeant q en $1+n+q$, nous trouvons, au lieu de cette formule,

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(-1)\frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}}+\sum_0^\infty(-1)^{1+n+q}C_q x^q,$$

en posant

$$C_q=C_{p+n+q,\,p-1}\,.\,(n+q)(n-1+q)\ldots(1+q).$$

Il est clair que

$$C_q=\Gamma(n+1)\,C_{p+n+q,\,p-1}\,.\,C_{n+q,\,n}.$$

Par conséquent,

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(-1)^n\,\Gamma(n+1)\left\{\frac{1}{x^{n+1}}+\sum_0^\infty(-1)^{1+q}\,C_{p+n+q,\,p-1}\,.\,C_{n+q,\,n}\,x^q\right\},$$

etc.

11. *Cas particulier*. Si $n=p-1$,

$$\frac{(-1)^p}{\Gamma(p)}\,\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}+\frac{1}{x^p}=\sum_0^\infty(-1)^q\,C_{p+q-1,\,p-1}\,.\,C_{2p+q-1,\,p-1}\,x^q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

12. *Remarque*. Dans la formule (10), p est un *nombre arbitraire*. La formule (7) *semble* donc subsister pour des dérivées à *indices fractionnaires, incommensurables*, etc. (*).

13. *Une série récurrente*. La combinaison des égalités (4), (10), donne facilement

$$(1+x)^{p+n}-Q^{n+1}=x^{n+1}(1+x)^{p+1}\sum_0^\infty(-1)^q\,C_{n+q,\,n}\,.\,C_{n+p+q,\,p-1}\,x^q.$$

Et comme Q_{n+1} est la somme des $n+1$ premiers termes du développement de $(1+x)^{p+n}$ (5, II), il vient, par la suppression d'un facteur commun :

$$\frac{C_{n+p,\,p-1}+C_{n+p,\,p-2}\,x+\cdots+x^{p-1}}{(1+x)^{p+n}}=\sum_0^\infty(-1)^q\,C_{n+q,\,n}\,.\,C_{n+p+q,\,p-1}\,x^q\,. \quad . \quad . \quad (12)$$

(*) La théorie des *différentielles à indices quelconques* a été inventée, en grande partie, par Joseph Liouville, mon illustre maître. Faute de temps, je dois me contenter de signaler ce rapprochement.

Ainsi, la *série récurrente,* développement de la fraction, est

$$C_{n+p,\,p-1} - C_{n+1,\,n}\,.\,C_{n+p+1,\,p-1}\,x + C_{n+q,\,n}\,.\,C_{n+p+2,\,p-1}\,x^2 - \cdots$$

14. *Remarques.* I. Cette fraction est *irréductible;* car, lorsque $x = 1$, le numérateur devient

$$C_{n+p,\,p-1} - C_{n+p,\,p-2} + C_{n+p,\,p-3} - \cdots \pm 1 = C_{n+p-1,\,p-1}\ (^*).$$

II. Si, après avoir chassé le dénominateur $(1 + x)^{p+n}$, on identifie, on obtiendra des relations entre les *nombres combinatoires.* Comme elles ne nous semblent ni nouvelles, ni intéressantes, nous ne les indiquerons pas.

15. *Une vérification.* Dans l'égalité.

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n+1)}\frac{d^ny}{dx^n} + \frac{1}{x^{n+1}} = \sum_0^\infty (-1)^q\, C_{n+q,\,n}\,.\,C_{n+p+q,\,p-1}\,x^q, \quad . \ . \ . \ . \quad (10)$$

remplaçons $\frac{d^ny}{dx^n}$ par sa valeur (2). Nous trouvons, au lieu du premier membre,

$$-\frac{p(p+1)\cdots(p+n)}{\Gamma(n+1)}\int_0^1 \frac{\theta^{p-1}d\theta}{(x+\theta)^{n+p+1}} + \frac{1}{x^{n+1}} = \mathrm{X}.$$

x étant compris entre 0 et 1 (5), l'intégrale ne peut être développée, ni suivant les puissances positives ni suivant les puissances négatives de cette variable. Néanmoins, il est facile de prouver que X est la somme de la série formant le second membre de l'égalité (10).

Soit $\theta = \alpha x$. Nous aurons

$$\mathrm{X} = -\frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p)\,\Gamma(n+1)}\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\alpha^{p-1}d\alpha}{(1+\alpha)^{n+p+1}} + \frac{1}{x^{n+1}},$$

ou

$$\mathrm{X} = \frac{1}{x^{n+1}}\left\{1 - \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p)\,\Gamma(n+1)}\int_0^1 \frac{\alpha^{p-1}d\alpha}{(1+\alpha)^{n+p+1}} - \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p)\,\Gamma(n+1)}\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\alpha^{p-1}d\alpha}{(1+\alpha)^{n+p+1}}\right\}.$$

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. I, p. 122.

Dans la seconde intégrale, changeons α en $\frac{1}{\beta}$ (*). Elle devient

$$\int_0^1 \frac{\beta^n d\beta}{(1+\beta)^{n+p+1}} = \int_x^1 \frac{\alpha^n d\alpha}{(1+\alpha)^{n+p+1}} = \int_0^1 \frac{\alpha^n d\alpha}{(1+\alpha)^{n+p+1}} - \int_0^x \frac{\alpha^n d\alpha}{(1+\alpha)^{n+p+1}}.$$

En général,

$$\int_0^1 \frac{\alpha^{f-1} + \alpha^{g-1}}{(1+\alpha)^{f+g}} d\alpha = \frac{\Gamma(f)\,\Gamma(g)}{\Gamma(f+g)} \text{ (**)}.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{\alpha^{p-1} d\alpha}{(1+\alpha)^{n+p+1}} + \int_0^1 \frac{\alpha^n d\alpha}{(1+\alpha)^{n+p+1}} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(p+n+1)};$$

puis

$$X = \frac{1}{x^{n+1}} \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p)\,\Gamma(n+1)} \int_0^x \frac{\alpha^n d\alpha}{(1+\alpha)^{n+p+1}};$$

et, au lieu de l'égalité (10),

$$\frac{1}{x^{n+1}} \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p)\,\Gamma(n+1)} \int_0^x \frac{\alpha^n d\alpha}{(1+\alpha)^{n+p+1}} = \sum_0^\infty (-1)^q C_{n+q,n} \, . \, C_{n+p+q,p-1} x^q \quad . \quad . \quad (11)$$

16. *Suite.* On a

$$C_{n+q,n}\ C_{n+p+q,p-1} = \frac{\Gamma(n+q+1)\,\Gamma(n+p+q+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(p)\,\Gamma(n+q+2)} = \frac{1}{n+q+1} \frac{\Gamma(n+p+q+1)}{\Gamma(p)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(q+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+q+1)} \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(p)\,\Gamma(n+1)} C_{n+p+q,q}.$$

Par la suppression d'un facteur, la relation (11) se réduit à

$$\int_0^x \frac{\alpha^n d\alpha}{(1+\alpha)^{n+p+1}} = \sum_0^\infty (-1)^q C_{n+p+q,q} \frac{x^{n+1+q}}{n+q+1};$$

et celle-ci est identique.

(*) Artifice connu.

(**) Voir, par exemple, la *Table* 4, de M. Bierens de Haan.

17. *Septième propriété. L'équation*

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

a une seule racine réelle, si n *est impair; elle n'en a aucune, si* n *est pair.*

Nous avons trouvé (5), comme valeur du premier membre,

$$(-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}(1+x)^{n+p}} Q_{n+1},$$

en supposant

$$Q_{n+1} = 1 + C_{n+p,1}x + C_{n+p,2}x^2 + \cdots + C_{n+p,n}x^n.$$

Or, d'après un théorème de Sylvester (*), *l'équation* $Q_{n+1} = 0$ *n'a pas plus d'une racine réelle.*

VI

GÉNÉRALISATION D'UNE FORMULE DE M. GENOCCHI (**).

1. Cette formule, retrouvée par M. *Janni* (***), est

$$1 - C_{m,1} + C_{m,2} - \cdots + (-1)^p C_{m,p} = (-1)^p C_{m-1,p}. \quad\quad (1)$$

On peut, ainsi qu'il suit, en conclure une autre, beaucoup plus générale.

D'abord, le changement de p en q donne

$$1 - C_{m,1} + C_{m,2} - \cdots + (-1)^p C_{m,p} + (-1)^{p+1} C_{m,p+1} + \cdots + (-1)^q C_{m,q} = (-1)^q C_{m-1,q};$$

et, par soustraction,

$$C_{m,p+1} - C_{m,p+2} + \cdots + (-1)^{q-p+1} C_{m,q} = (-1)^{q\ p+1} C_{m-1,q} + C_{m-1,p},$$

résultat que l'on peut écrire ainsi :

$$C_{f,g} - C_{f,g+1} + \cdots + (-1)^{h-g} C_{f,h} = (-1)^{h-g} C_{f,h} + C_{f-1,g-1}. \quad\quad (2)$$

(*) *Nouvelles Annales,* 1866, p. 521.

(**) Depuis que ceci est écrit, mon illustre ami a succombé à la maladie et aux infirmités dont il était affligé depuis longtemps. Sa mort est une grande perte pour la Science.

(***) Nous l'avons déjà citée (*Note* I, 7).

2. Soit, maintenant, à évaluer la quantité

$$A = a\,C_{m,p} - (a+\delta)\,C_{m,p+1} + (a+2\delta)\,C_{m,p+2} - \cdots + (-1)^q (a+q\delta)\,C_{m,p+q}. \qquad (3)$$

Considérons la quantité auxiliaire

$$B = a\,C_{m,p+1} - (a+\delta)\,C_{m,p+2} + (a+2\delta)\,C_{m,p+3} - \cdots + (-1)^q (a+q\delta)\,C_{m,p+q+1}.$$

Par la formule connue :

$$C_{m,p} + C_{m,p+1} = C_{m+1,p+1},$$

nous aurons

$$A + B = a\,C_{m+1,p+1} - (a+\delta)\,C_{m+1,p+2} + \cdots + (-1)^q (a+q\delta)\,C_{m+1,p+q+1}. \quad . \quad (4)\ (*)$$

Mais il est visible que l'on a, aussi :

$$\left.\begin{aligned} A + B = a\,C_{m,p} &+ (-1)^q (a+q\delta)\,C_{m,p+q+1} \\ &- \delta\left[C_{m,p+1} - C_{m,p+2} + \cdots + (-1)^{q-1} C_{m,p+q}\right. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)\ (**).$$

Faisant, dans la formule (2) :

$$f = m, \quad g = p+1, \quad h = p+q,$$

on obtient, comme valeur de la somme entre parenthèses :

$$(-1)^q C_{m-1,p+q} + C_{m-1,p}.$$

Conséquemment,

$$A + B = a\,C_{m,p} + (-1)^q (a+q\delta)\,C_{m,p+q+1} + \delta\left[(-1)^q C_{m-1,p+q} - C_{m-1,p}\right];$$

ou, par la remarque ci-dessus,

$$A = a\,C_{m-1,p-1} + (-1)^q (a+q\delta)\,C_{m-1,p+q} + \delta\left[(-1)^q C_{m-2,p+q-1} - C_{m-2,p-1}\right];\ (***)$$

ou enfin

$$\left.\begin{aligned} &a\,C_{m,p} - (a+\delta)\,C_{m,p+1} + (a+2\delta)\,C_{m,p+2} - \cdots + (-1)^q (a+q\delta)\,C_{m,p+q} \\ &= a\,C_{m-1,p-1} + (-1)^q (a+q\delta)\,C_{m-1,p+q} + \delta\left[(-1)^q C_{m-2,p+q-1} - C_{m-2,p-1}.\right. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Telle est la formule annoncée. Elle reproduit celle de M. Genocchi, quand on y fait $a = 1$, $p = 1$, $\delta = 0$.

(*) Ainsi, la somme $A + B$ se déduit, de A, par le changement de m en $m + 1$, et de p en $p + 1$.

(**) Cet *artifice,* absolument élémentaire, est fondé sur la définition des progressions par différence. Nous pensons qu'il est souvent applicable.

(***) Ceci suppose $p > 0$.

3. *Remarque.* a et δ étant arbitraires, l'égalité (A) se partage en deux; savoir (*) :

$$C_{m,p+1} - C_{m,p+2} + C_{m,p+3} - \cdots + (-1)^q C_{m,p+q+1} = C_{m-1,p} + (-1)^q C_{m-1,p+q+1}, \tag{B}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_{m,p+2} - 2C_{m,p+3} + 3C_{m,p+4} - \cdots + (-1)^q q C_{m,p+q+1} \\ = (-1)^{q-1} q\, C_{m-1,p+q+1} + (-1)^{q-1} C_{m-2,p+q} + C_{m-2,p}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \tag{C}$$

L'égalité (B) est une conséquence immédiate de la formule de Genocchi (1); l'autre résulte, assez simplement, de la relation générale

$$\left.\begin{array}{l} (1+x)^q + C_{p-q,1}x(1+x)^{q-1} + C_{p-q+1,2}x^2(1+x)^{q-2} + \cdots + C_{p-1,q}x^q \\ = 1 + C_{p,1}x + C_{p,2}x^2 + \cdots + C_{p,q}x^q, \end{array}\right\} \quad \ldots \tag{6}$$

démontrée dans la *Note* I.

Pour le faire voir, j'observe d'abord que, si l'on prend les dérivées des deux membres, et qu'on fasse, dans ces dérivées, $x = -1$, on a

$$[C_{p-2,q-1}(1+x)x^{q-1}]'_{x=-1} + q(-1)^{q-1}C_{p-1,q} = C_{p,1} - 2C_{p,2} + 3C_{p,3} + \cdots + q(-1)^{q-1}C_{p,q}.$$

Le premier membre égale

$$(-1)^{q-1}[C_{p-2,q-1} + q\,C_{p-1,q}] = (-1)^{q-1}p\,C_{p-2,q-1}.$$

Nous avons donc cette relation fort simple :

$$C_{p,1} - 2C_{p,2} + 3C_{p,3} - \cdots + q(-1)^{q-1}C_{p,q} = (-1)^{q-1}p\,C_{p-2,q-1} \quad \ldots \tag{D}$$

On en peut conclure des propositions (connues) relatives à la *Théorie des différences*.

4. *Suite.* Soient pour abréger :

$$(1+x)^q + C_{p-q,1}x(1+x)^{q-1} + C_{p-q+1,2}x^2(1+x)^{q-2} + \cdots + C_{p-2,q-1}x^{q-1}(1+x) + C_{p-1,q}x^q = Q, \tag{7}$$

$$(1+x)^{q'} + C_{p-q',1}x(1+x)^{q'-1} + C_{p-q'+1,2}x^2(1+x)^{q'-2} + \cdots + C_{p-2,q'-1}x^{q'-1}(1+x) + C_{p-1,q'}x^{q'} = Q'; \tag{8}$$

et, par conséquent (6) :

$$C_{p,q+1}x^{q+1} + C_{p,q+2}x^{q+2} + \cdots + C_{p,q'}x^{q'} = Q' - Q,$$

ou

$$C_{p,q+1} + C_{p,q+2}x + C_{p,q+3}x^2 + \cdots + C_{p,q'}x^{q'-q-1} = \frac{Q'-Q}{x^{q+1}} \quad \ldots \tag{9}$$

(*) Par le changement de p en $p+1$.

Pour $x = -1$, la dérivée du premier membre se réduit à

$$C_{p,q+2} - 2C_{p,q+3} + \cdots + (q' - q - 1)^q (-1)^{q'-q} C_{p,q'}.$$

La dérivée du second membre est

$$\frac{x^{q+1}\left(\frac{dQ'}{dx} - \frac{dQ}{dx}\right) - (q+1)x^q(Q' - Q)}{x^{2q+2}}.$$

Lorsque $x = -1$, on a

$$Q = (-1)^q C_{p-1,q}, \quad Q' = (-1)^{q'} C_{p-1,q'};$$

et, d'après le calcul précédent :

$$\frac{dQ}{dx} = (-1)^{q-1} p\, C_{p-2,q-1}, \quad \frac{dQ'}{dx} = (-1)^{q'-1} p\, C_{p-2,q'-1}.$$

La valeur de la fraction ci-dessus, répondant à $x = 1$, est donc

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^{q-1}p\left[(-1)^{q'-1}C_{p-2,q'-1} - (-1)^{q-1}C_{p-2,q-1}\right] + (q+1)(-1)^q\left[(-1)^{q'}C_{p-1,q'} - (-1)^q C_{p-1,q}\right]\\ &= C_{p,q+2} - 2C_{p,q+3} + \cdots + (q' - q - 1)(-1)^{q'-q} C_{p,p'}\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

5. *Suite.* Afin de comparer les égalités (C) et (10), je change, dans la seconde, p en m, q en p, q' en $p + q + 1$. Elle se transforme en

$$\left.\begin{aligned}&C_{m,p+2} - 2C_{m,p+3} + \cdots + q(-1)^{q-1} C_{m,p+q+1}\\ &= m\left[(-1)^{q-1} C_{m-2,p+q} - C_{m-2,p-1}\right] + (p+1)\left[(-1)^q (C_{m-1,p+q+1} + C_{m-1,p}\right]\end{aligned}\right\} \quad (E)$$

La comparaison avec (C) donne

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^{q-1} q\, C_{m-1,p+q+1} + (-1)^{q-1} C_{m-2,p+q} + C_{m-2,p}\\ &= m\left[(-1)^{q-1} C_{m-2,p+q} - C_{m-2,p-1}\right] + (p+1)\left[(-1)^q C_{m-1,p+q+1} + C_{m-1,p}\right]\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Cette égalité compliquée se partage en deux, à cause de l'indépendance entre p et q.

Ainsi :

$$(p+q+1)\,C_{m-1,\,p+q+1} = (m-1)\,C_{m-2,\,p+q}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$C_{m-2,\,p} = (p+1)\,C_{m-1,\,p} - m\,C_{m-2,\,p-1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

La première est évidente et la seconde se vérifie très facilement.

6. *Remarques.* I. Le changement de m en $m+1$ donne

$$(p+1)\,C_{m,\,p} = C_{m-1,\,p} + (m+1)\,C_{m-1,\,p-1}. \qquad (F)$$

De là résulte une construction, peut-être nouvelle, du *triangle arithmétique* (*).

II. La relation (F) équivaut à celle-ci :

$$1 = (p+1)\frac{m}{m-p} - (m+1)\frac{p}{m-p},$$

applicable à l'Analyse indéterminée.

III. Dans (F), le second membre est divisible par $p+1$.

7. *Cas particulier de la formule* (A). Prenons $a=1$, $\delta=2$, $p=\frac{m+1}{2}$ (**), $q=\frac{m-3}{2}$; d'où $p+q=m-1$.

La relation

$$\left.\begin{aligned} &aC_{m,p} - (a+\delta)\,C_{m,p+1} + (a+2\delta)\,C_{m,p+2} - \cdots + (-1)^q\,(a+q\delta)\,C_{m,p+q} \\ &= aC_{m-1,p-1} + (-1)^q\,(a+q\delta)\,C_{m-1,p+q} + \delta\left[(-1)^q\,C_{m-2,\,p+q} - C_{m-2,\,p-1}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

devient

$$C_{m,\frac{m+1}{2}} - 3C_{m,\frac{m+3}{2}} + \cdot \quad + (-1)^{\frac{m-3}{1}}\,(m-2)\,C_{m,\,m-1}$$

$$= C_{m-1,\,\frac{m-1}{2}} + (-1)^{\frac{m-3}{2}}(m-2) + 2\left[(-1)^{\frac{m-3}{2}} - C_{m-2,\,\frac{m-1}{2}}\right].$$

(*) Elle est moins simple que le procédé *classique*, basé sur la formule

$$C_{m,\,p} = C_{m-1,\,p} + C_{m-1,\,p-1}.$$

(**) Donc m est *impair*.

Le second membre est la même chose que

$$C_{m-1,\frac{m-1}{2}} - 2C_{m-2,\frac{m-1}{2}} + m(-1)^{\frac{m-3}{2}}.$$

Mais, par la théorie des combinaisons :

$$C_{m-1,\frac{m-1}{2}} = 2C_{m-2,\frac{m-1}{2}}.$$

Ainsi, le trinôme se réduit à

$$m(-1)^{\frac{m-3}{2}} = -m(-1)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Conséquemment,

$$C_{m,\frac{m+1}{2}} - 3C_{m,\frac{m+3}{2}} + 5C_{m,\frac{m+5}{2}} - \cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} m = 0 \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Par exemple,

$$C_{9,5} - 3C_{9,6} + 5C_{9,7} - 7C_{9,8} + 9 = 0,$$

ou

$$126 - 3.84 + 5.36 - 7.9 + 9 = 0;$$

ce qui est exact.

8. *Autre cas particulier*. Soient : $a = 1$, $\delta = 1$, $p = q = \frac{m-1}{2}$. On trouve, de la même manière,

$$\left.\begin{aligned} &C_{m,\frac{m-1}{2}} - 2C_{m,\frac{m+1}{2}} + 3C_{m,\frac{m+3}{2}} - \cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m+1}{2} C_{m,m-1} \\ &= C_{m-2,\frac{m-3}{2}} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m+1}{2}. \qquad (m \overline{>} 3). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

Par exemple,

$$C_{9,4} - 2C_{9,5} + 3C_{9,6} - 4C_{9,7} + 5C_{9,8} = C_{7,2} + 6,$$

ou

$$126 - 2.126 + 3.84 - 4.36 + 5.9 = 27,$$

comme on peut le vérifier (*).

(*) Nous pourrions augmenter indéfiniment le nombre de ces cas particuliers. Mais, suivant le précepte de Boileau, *on doit savoir se borner*.

VII

QUELQUES SOMMATIONS DE SINUS OU DE COSINUS.

1. PROBLÈME I. *Évaluer*

$$A_n = \sin a\varphi - \sin(a + 2\delta)\varphi + \sin(a + 4\delta)\varphi - \cdots + (-1)^{n-1}\sin(a + \overline{2n-2}\delta)\varphi.$$

Par un calcul bien connu, on trouve

$$A_n = \frac{\sin(a-\delta)\varphi + (-1)^{n-1}\sin(a + \overline{2n-1}\delta)\varphi}{2\cos\delta\varphi}; \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

puis, comme cas particulier,

$$\sin\varphi - \sin 3\varphi + \sin 5\varphi - \cdots + (-1)^{n-1}\sin(2n-1)\varphi = (-1)^{n-1}\frac{\sin 2n\varphi}{2\cos\varphi} \quad (2)$$

2. PROBLÈME II. *Évaluer*

$$B_n = a\cos a\varphi - (a + 2\delta)\cos(a + 2\delta) + \cdots + (-1)^{n-1}(a + \overline{2n-2}\delta)\cos(a + \overline{2n-2}\delta)\varphi \quad (3)$$

Il est clair que B_n est la dérivée, relative à φ, de A_n.

Or,

$$2A_n = \frac{\sin(a-\delta)\varphi}{\cos\delta\varphi} + (-1)^{n-1}\frac{\sin(a + \overline{2n-1}\delta)\varphi}{\cos\delta\varphi} = F(o) + (-1)^{n-1}F(n), \quad (4)$$

en posant

$$F(n) = \frac{\sin(a + \overline{2n-1}\delta)\varphi}{\cos\delta\varphi} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

On déduit, de cette expression,

$$\frac{dF(n)}{d\varphi} = \frac{(a + \overline{2n-1}\delta)\cos\delta\varphi\cos(a + \overline{2n-1}\delta)\varphi + \delta\sin(a + \overline{2n-1}\delta)\varphi\sin\delta\varphi}{\cos^2\delta\varphi};$$

puis

$$\frac{dF(n)}{d\varphi} = \frac{(a + \overline{2n - 2}\delta)\cos(a + 2n\delta)\varphi + (a + 2n\delta)\cos(a + \overline{2n - 2}\delta)\varphi}{2\cos^2\delta\varphi}, \quad \ldots \quad (6)$$

et

$$\frac{dF(o)}{d\varphi} = \frac{a\cos(a - 2\delta)\varphi + (a - 2\delta)\cos a\varphi}{2\cos^2\delta\varphi} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Conséquemment,

$$B_n = \frac{1}{2}\left[\frac{dF(o)}{d\varphi} + (-1)^{n-1}\frac{dF(n)}{d\varphi}\right] \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

3. *Suite.* Pour avoir des résultats simples, prenons $a = \delta = 1$. Alors :

$$\frac{dF(n)}{d\varphi} = \frac{(2n - 1)\cos(2n + 1)\varphi + (2n + 1)\cos(2n - 1)\varphi}{2\cos^2\varphi} \quad \ldots \quad (9)$$

$$\frac{dF(o)}{d\varphi} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

$$B_n = + (-1)^{n-1}\frac{(2n - 1)\cos(2n + 1)\varphi + (2n + 1)\cos(2n - 1)\varphi}{4\cos^2\varphi} \quad \ldots \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} &\cos\varphi - 3\cos 3\varphi + 5\cos 5\varphi - \cdots + (-1)^{n-1}(2n - 1)\cos(2n - 1)\varphi \\ &= (-1)^{n-1}\frac{(2n - 1)\cos(2n + 1)\varphi + (2n + 1)\cos(2n - 1)\varphi}{4\cos^2\varphi}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

4. *Remarques.* I.

Cette formule (12) résulte, immédiatement, de la formule (3).

II. La comparaison des deux nous donne ce résultat, assez remarquable :

$$\int_0^\varphi \frac{(2n - 1)\cos(2n + 1)\varphi + (2n + 1)\cos(2n - 1)\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = 2\,\frac{\sin 2n\varphi}{\cos\varphi} \quad \ldots \quad (13)$$

III. On a, plus généralement,

$$\int_0^\varphi \frac{(\lambda - 1)\cos(\lambda + 1)\varphi + (\lambda + 1)\cos(\lambda - 1)\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = 2\,\frac{\sin\lambda\varphi}{\cos\varphi}, \quad \ldots \quad (14)$$

λ étant un paramètre quelconque.

5. *Problème* III. *Évaluer*

$$C_n = \cos\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)\varphi \quad . \quad . \quad (15)$$

De l'égalité

$$\sin\varphi - \sin 3\varphi + \sin 5\varphi - \cdots + (-1)^{n-1}\sin(2n-1)\varphi = (-1)^{n-1}\frac{\sin 2n\varphi}{2\cos\varphi}, \quad . \quad . \quad (2)$$

on déduit

$$C_n = \frac{1}{2}(-1)^{n-1}\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2n\varphi}{\cos\varphi}d\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Il faudrait donc, pour résoudre le problème, savoir intégrer $\frac{\sin 2n\varphi}{\cos\varphi}d\varphi$.

Cette question *auxiliaire* semble plus compliquée que la question principale (*). Mais, par une sorte de *compensation* qui se présente assez souvent, les formules (15) et (16) résolvent ce problème inverse :

Exprimer $\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2n\varphi}{\cos\varphi}d\varphi$, *en fonction des cosinus des multiples impairs de* φ.

6. *Remarque.* On sait que la série convergente

$$\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi - \cdots$$

a pour somme $\frac{\pi}{4}$ (**).

7. *Problème* IV. *Évaluer*

$$D_n = 1 + \cos\varphi.\cos\varphi + \cos^2\varphi.\cos 2\varphi + \cdots + \cos^{n-1}\varphi\cos\overline{n-1}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

(*) Soit, par exemple, $n = 3$. Nous aurons

$$C_3 = \frac{1}{2}\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}(32\sin^3\varphi - 32\sin^5\varphi + 6\sin\varphi)\varphi \;;$$

et $\sin^5\varphi d\varphi$ n'est pas immédiatement intégrable.

(**) *Traité élémentaire des séries*, p. 106.

Il est clair que D_n est la partie réelle de

$$1 + \cos\varphi . e^{\varphi\sqrt{-1}} + \cos^2\varphi . e^{\varphi\sqrt{-1}} + \cdots + \cos^{n-1}\varphi e^{(n-1)\varphi\sqrt{-1}},$$

ou de

$$\frac{1 - \cos^n\varphi . e^{n\varphi\sqrt{-1}}}{1 - \cos\varphi . e^{\varphi\sqrt{-1}}} = \frac{\left(1 - \cos^n\varphi . e^{n\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \cos\varphi . e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)}{\sin^2\varphi}.$$

Par conséquent,

$$D_n = \frac{1 - \cos^2\varphi - \cos^n\varphi \cos n\varphi + \cos^{n+1}\varphi \cos(n-1)\varphi}{\sin^2\varphi},$$

ou enfin

$$D_n = 1 + \frac{\cos^n\varphi \sin \overline{n-1}\varphi}{\sin\varphi}.$$

8. *Remarques.* I. Si l'arc φ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (exclusivement), et que l'on fasse croître n, on a

$$\lim D_n = 0;$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\cos 2\varphi + \cos\varphi \cos 3\varphi + \cos^2\varphi \cos 4\varphi + \cdots + \cos^{n-1}\varphi \cos(n+1)\varphi + \cdots = -1. \quad (19)\ (*)$$

II. L'égalité (18) donne, plus généralement :

$$\cos\varphi . \cos\varphi + \cos^2\varphi \cos 2\varphi + \cdots + \cos^n\varphi \cos n\varphi = \frac{\cos^{n+1}\varphi \sin n\varphi}{\sin\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

9. ***Problème* V. *Évaluer***

$$E_n = \sin 2\varphi + 2\cos\varphi \sin 3\varphi + 3\cos^2\varphi \sin 4\varphi + \cdots + n\cos^{n-1}\varphi \sin(n+1)\varphi. \quad . \quad (21)$$

A cause de

$$\sin(n+1)\varphi = \sin n\varphi \cos\varphi + \cos n\varphi \sin\varphi,$$

le dernier terme se décompose en

$$n\cos^n\varphi \sin n\varphi + n\cos^{n-1}\varphi \sin\varphi \cos n\varphi.$$

(*) Formule connue. (*Traité élémentaire des séries*, p. 77.)

Il égale donc, au signe près, la dérivée de

$$\cos^n\varphi \cos n\varphi.$$

En conséquence,

$$E_n = -\left(\frac{\cos^{n+1}\varphi \sin n\varphi}{\sin\varphi}\right)'.$$

La dérivée de la fraction est

$$\frac{\cos^n\varphi}{\sin^2\varphi}\left[n\sin\varphi\cos\varphi\cos n\varphi - (n+1)\sin^2\varphi\sin n\varphi - \cos^2\varphi\sin n\varphi\right],$$

ou

$$\frac{\cos^n\varphi}{\sin^2\varphi}\left[n\sin\varphi\cos(n+1)\varphi - \sin n\varphi\right].$$

Finalement :

$$E_n = \frac{\cos^n\varphi}{\sin^2\varphi}\left[\sin n\varphi - n\sin\varphi\cos(n+1)\varphi\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

10. *Remarque.* Si n croît indéfiniment, E_n tend vers zéro. Ainsi

$$\sin^2\varphi + 2\cos\varphi\sin 3\varphi + \cdots + n\cos^{n-1}\varphi\sin(n+1)\varphi + \cdots = 0. \quad . \; . \quad (23)\,(*)$$

VIII

SUR LES PRODUITS INDÉFINIS.

1. Cette question a été traitée par divers Géomètres; mais les démonstrations du théorème principal, qu'ils ont employées, nous semblent peu satisfaisantes.

1° Dans son *Calcul différentiel* (**). M. Bertrand commence ainsi :

« Un produit composé d'un nombre infini de facteurs ne peut évidem-

(*) Cette formule subsiste pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

(**) Page 409.

» ment être convergent que si les facteurs tendent vers l'unité lorsque leur
» rang augmente indéfiniment ».

Ainsi, q désignant une fraction proprement dite, *le produit*

$$q \cdot q^2 \cdot q^3 \dots q^n \dots$$

n'est pas convergent! Qu'est-il donc (*) ?

Cela fait, M. Bertrand admet l'égalité

$$\mathcal{L}(1+k) = k - \frac{\varepsilon}{2}k^2,$$

« k étant un nombre très petit, *positif* ou *négatif* », et « ε étant moindre que
« l'unité, mais en différant infiniment peu lorsque k est infiniment petit ».

Si l'on y change k en $-k$, elle devient

$$\mathcal{L}(1-k) = -k - \frac{\varepsilon}{2}k^2,$$

ou

$$-\mathcal{L}(1-k) = k + \frac{\varepsilon}{2}k^2 < k + \frac{1}{2}k^2.$$

Or, comme l'a fait observer M. de Longchamps, cette inégalité est en opposition avec la formule *classique :*

$$-\mathcal{L}(1-k) = k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k^3 + \cdots,$$

d'où résulte

$$-\mathcal{L}(1-k) > k + \frac{1}{2}k^2.$$

2° M. Camille Jordan (**) admet que le facteur $u_n = a_n + b_n\sqrt{-1}$. En conséquence, il le met sous la forme $\rho_n(\cos\alpha_n + \sqrt{-1}\sin\alpha_n)$. C'est fort bien. Mais, si $b_n = 0$, la transformation employée donne $\rho_n = a_n$, $\alpha_n = 0$: on revient au point de départ !

(*) A la p. 410, le savant Professeur dit, textuellement : « le produit P.... s'approche
» indéfiniment de zéro, et ne doit pas être considéré comme convergent » !

(**) *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, t. I, p. 121.

3° La démonstration donnée par M. de Longchamps (*) est, peut-être, difficile à suivre.

II. Soient :

$$1 > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n > \cdots > 0. \qquad (\lim \alpha_n = 0)$$

Considérons le produit

$$P_n = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_n). \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

et la somme

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

LEMME I. *Si la somme* S_n *est divergente, le produit* P_n *est divergent.*

En effet, P_n surpasse S_n.

LEMME II. *Si la somme* S_n *est convergente, le produit* P_n *est convergent.*

On a

$$\mathcal{L}P_n = \mathcal{L}(1 + \alpha_1) + \mathcal{L}(1 + \alpha_2) + \cdots + \mathcal{L}(1 + \alpha_n).$$

Tous ces logarithmes sont *positifs*. Donc, à cause de la formule

$$\mathcal{L}(1 + x) < x, \text{ (**)}$$

leur somme est moindre que S_n.

Autrement dit, P_n, *supérieur à l'unité* (***), *tend vers une limite.*

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME I. *Le produit* P_n *est convergent ou divergent, selon que la somme* S_n *est convergente ou divergente.*

(*) *Journal de Mathématiques,* janvier 1889.

(**) Cette inégalité, dans laquelle x est *positif,* équivaut à celle-ci :

$$1 + x < e^x.$$

Or,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots;$$

etc.

(***) Évident *a priori.*

3. Soient, maintenant :

$$1 > \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n > \cdots > 0, \qquad (\lim \beta_n = 0). \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

et

$$Q_n = (1 - \beta_1)(1 - \beta_2) \ldots (1 - \beta_n). \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Posons

$$1 - \beta_n = \frac{1}{1 + \alpha_n}, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

puis

$$Q_n = \frac{1}{P_n} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Ainsi,

Lemme III. 1° *Si* P_n *est divergent,* Q_n *tend vers zéro.*

2° *Si* P_n *est convergent,* Q_n *tend vers une limite différente de zéro.*

4. On tire, de l'équation (5),

$$\alpha_n = \frac{\beta_n}{1 - \beta_n} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Donc

$$S_n = \frac{\beta_1}{1 - \beta_1} + \frac{\beta_2}{1 - \beta_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{1 - \beta_n}. \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

En conséquence, d'après le Théorème I :

Théorème II. *Le produit* Q_n *tend vers zéro ou vers une limite différente de zéro, selon que la somme* S_n *est divergente ou convergente.*

5. Soit encore

$$\sum_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

L'énoncé habituel est celui-ci :

Le produit Q_n *tend vers zéro ou vers une limite différente de zéro, selon que la somme* $\sum_n$ *est divergente ou convergente* (*).

(*) Voir, par exemple, la Note de M. de Longchamps.

Mais il est facile de prouver qu'il équivaut au précédent. A cet effet, nous établirons la proposition suivante, que nous croyons nouvelle :

Théorème III. *Les sommes*

$$S_n = \frac{\beta_1}{1-\beta_1} + \frac{\beta_2}{1-\beta_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{1-\beta_n}, \quad \ldots \quad (8)$$

$$\Sigma_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n \quad \ldots \quad (9)$$

sont, simultanément, convergentes ou divergentes.

1° A cause de $\frac{\beta_n}{1-\beta_n} > \beta_n$, *si la somme* Σ_n *est divergente, la somme* S_n *l'est aussi.*

2° Supposons que la somme Σ_n soit *convergente.* Nous avons

$$S_n - \Sigma_n = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}\beta_1 + \frac{\beta_2}{1-\beta_2}\beta_2 + \cdots + \frac{\beta_n}{1-\beta_n} \quad \ldots \quad (10)$$

Les termes du second membre sont, respectivement, moindres que ceux de Σ_n, s'ils satisfont à la condition

$$\frac{\beta_n}{1-\beta_n} < 1,$$

ou

$$\beta_n < \frac{1}{2}. \quad \ldots \quad (11)$$

D'après les hypothèses précédentes (3), *la fraction* β_n *a pour limite zéro.* Donc, à partir d'une certaine valeur de n, *l'inégalité* (11) *sera constamment vérifiée.* En conséquence : *si la somme* Σ_n *est convergente, les sommes* $S_n - \Sigma_n$ et S_n *le sont également.* C'est ce qu'il fallait démontrer.

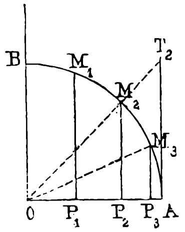
6. Dans les sommes (9), (8), faisons $\beta_n = \sin^2\theta_n$. Nous aurons

$$\Sigma_n = \sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \cdots + \sin^2\theta_n, \quad \ldots \quad (12)$$

$$S_n = \mathrm{tg}^2\theta_1 + \mathrm{tg}^2\theta_2 + \cdots + \mathrm{tg}^2\theta_n, \quad \ldots \quad (13)$$

$$\frac{\pi}{2} > \theta_1 > \theta_2 > \cdots > \theta_n > \cdots > 0. \quad (\lim.\,\theta_n = 0).$$

Le Théorème III peut donc être énoncé ainsi :



Si l'on considère, sur le quadrans AB, *une suite indéfinie d'arcs :* AM_1, AM_2, AM_3, ... *tels, que les carrés de leurs sinus forment une série convergente, il en sera de même pour les carrés de leurs tangentes* (*).

7. Soit, par exemple, $\sin\theta_n = \frac{1}{n+1}$, auquel cas :

$$\sin^2\theta_1 = \frac{1}{4}, \quad \sin^2\theta_2 = \frac{1}{9}, \quad \sin^2\theta_3 = \frac{1}{16},$$

$$\operatorname{tg}^2\theta_1 = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg}^2\theta_2 = \frac{1}{8}, \quad \operatorname{tg}^2\theta_3 = \frac{1}{15}, \ldots \operatorname{tg}^2\theta_n = \frac{1}{n(n+2)}.$$

La somme $\sum_n$ a pour limite $\frac{\pi^2}{6} - 1$. Quant à la somme S_n, en l'écrivant ainsi :

$$\frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right].$$

on voit qu'elle a pour limite :

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

8. *Remarques.* I. k étant un nombre *entier, constant,* soit, plus généralement,

$$u_n = \frac{1}{n(n+k)}.$$

Il est visible (et connu) que

$$\lim . S_n = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right). \text{ (**)}$$

(*) La première tangente est aussi grande qu'on le veut, mais n'est pas infinie.

(**) Toutes les limites, données par cette formule, sont *commensurables,* tandis que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

II. Dans la série

$$\frac{1}{k}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{1+k}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+k}+\cdots+\frac{1}{1+k}-\frac{1}{1+2k}+\cdots\right]$$

on peut *supprimer* les termes égaux et de signes contraires, parce que leur *distance* est constante.

Si cette distance croît indéfiniment, la *réduction* des termes semblables conduit, souvent, à des résultats absurdes (*).

IX

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos qx dx$.

1. Cette intégrale, considérée d'abord par Cauchy et Poisson, l'a été, d'une manière toute particulière, par Alfred Serret, dans une Note insérée au *Journal de Liouville* (**). En 1840, à propos d'une autre intégrale (***), et en supposant les arguments p, q convenablement choisis, j'avais donné une formule, que Serret a généralisée ainsi :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos qx dx = \frac{\pi}{2^{p+1}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-q}{2}+1\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (\text{A}) \; (^{\text{IV}})$$

Malheureusement, cette égalité est fausse, si $\frac{p-q}{2}+1$ est nul ou négatif. Et cependant, l'Auteur commençait par cette sorte de déclaration : « p *et* q *sont des quantités quelconques* » !

En adoptant un mode de démonstration analogue à celui que l'on trouve dans ma Note de 1840, je vais remplacer la formule (A) par une autre,

(*) *Nouvelles Annales*, 1874, p. 60.

(**) T. VIII, p. 1.

(***) *Journal de Liouville*, t. V, p. 113.

(IV) Nous mettons p, q, au lieu de m, n.

soumise à cette seule restriction : p *et* q *sont des nombres entiers, différents de zéro.*

2. Soit

$$A_{p,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos qx dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

L'intégration par parties donne

$$A_{p,q} = \frac{1}{q}\Big[\cos^p x \sin qx\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{p}{q}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1} x \sin qx \sin x dx.$$

Le terme intégré s'annule aux deux limites. De plus,

$$\sin qx \sin x = \cos(q-1)x - \cos qx \cos x.$$

Donc

$$A_{p,q} = \frac{p}{q}[A_{p-1,q-1} - A_{p,q}],$$

ou

$$A_{p,q} = \frac{p}{p+q} A_{p-1,q-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

3. Cette formule de réduction donne

$$A_{p,q} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{(p+q)(p+q-2)\dots(p+q-2k+2)} A_{p-k,q-k}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

k étant un nombre entier, égal ou inférieur à p et à q.

Il y a, maintenant, trois hypothèses à faire.

1° Si $p = q$, on peut prendre $k = p$. De là résulte

$$A_{p,p} = \frac{p(p-1)\dots 3.2.1}{2p(2p-2)\dots 6.4.2} A_{0,0}.$$

Et comme $A_{0,0} = \frac{\pi}{2}$, on a

$$A_{p,p} = \frac{\pi}{2^{p+1}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2° Si l'on a $p < q$, on peut faire $k = p$; ce qui donne

$$A_{p,q} = \frac{p(p-1)\ldots 3.2.1}{(p+q)(p+q-2)\ldots(q-p+2)} A_{o,q-p}.$$

Mais

$$A_{o,q-p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(q-p)x\,dx = \frac{1}{q-p}\sin(q-p)\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi

$$A_{p,q} = \frac{1.2.3\ldots p}{(q-p)(q-p+2)\ldots(q+p)} \sin(q-p)\frac{\pi}{2}. \text{ (*)} \qquad (p < q). \quad . \quad . \quad (4)$$

4. *Remarque.* Si $q - p$ est *pair*, le sinus est nul; donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos(p+2n)x\,dx = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5) \text{ (**)}$$

Dans le cas contraire,

$$\sin(q-p)\frac{\pi}{2} = \pm 1;$$

et

$$A_{p,q} = \pm \frac{1.2.3\ldots p}{(p-p)(q-p+2)\ldots(q+p)}. \qquad (p < q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

5. Supposons $p > q$. Prenant $k = q$, on trouve, au moyen de l'égalité (2) :

$$A_{p,q} = \frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{(p+q)(p+q-2)\ldots(p-q+2)} A_{p-q,o} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

D'ailleurs,

$$A_{p-q,o} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q} x\,dx.$$

(*) Cette formule doit remplacer la formule (A), quand celle-ci n'est pas applicable.
(**) Résultat trouvé par Poisson.

On sait que cette intégrale a des valeurs de formes différentes, selon que $p-q$ est *pair* ou *impair*. Savoir :

$$(p-q)\ pair, \qquad A_{p-q,0}=\frac{1.3.5\ldots(p-q-1)}{2.4.6\ldots(p-q)}\frac{\pi}{2};$$

$$(p-q)\ impair, \qquad A_{p-q,0}=\frac{2.4.6\ldots(p-q-1)}{3.5.7\ldots(p-q)}\ (^*).$$

Conséquemment, dans le premier cas,

$$A_{p,q}=\frac{1.3.5\ldots(p-q-1)\times(p-q+1)(p-q+2)\ldots(p-1)p}{2.4.6\ldots(p+q-2)(p+q)}\frac{\pi}{2}; \quad . \quad . \quad (8)$$

et, dans le second :

$$A_{p,q}=\frac{2.4.6\ldots(p-q-1)\times(p-q+1)(p-q+2)\ldots(p-1)p}{3.5.7\ldots(p+q-2)(p+q)} \quad . \quad . \quad (9)$$

X

COMPARAISON ENTRE DEUX FONCTIONS CIRCULAIRES (**).

1. Si l'on part de l'identité

$$\sin x=\sin x,$$

on obtient, en multipliant, une fois, deux fois, ... par $2\cos x$:

$$\begin{aligned}
(2\cos x)\ \sin x &= \sin 2x,\\
(2\cos x)^2 \sin x &= \sin x+\sin 3x,\\
(2\cos x)^3 \sin x &= 2\sin 2x+\sin 4x,\\
(2\cos x)^4 \sin x &= 2\sin x+3\sin 3x+\sin 5x.
\end{aligned}$$

(*) Généralement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-q}x dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{p-q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p-q}{2}+1\right)}.$$

Ainsi, les formules (8), (9) peuvent être remplacées par une formule *unique*. Mais, pour les applications, l'emploi des expressions (8), (9) nous paraît préférable à celui de cette autre formule. Au moyen du théorème de Legendre, on reconnaît qu'elle s'accorde avec celle de Serret.

(**) Elle nous servira plus tard.

Donc, si μ est *pair*,

$$(2\cos x)^{\mu-1}\sin x = A_1 \sin x + A_3 \sin 3x + A_5 \sin 5x + \cdots + \sin \mu x; \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

et, si μ est *impair :*

$$(2\cos x)^{\mu-1}\sin x = A_2 \sin 2x + A_4 \sin 4x + A_6 \sin 6x + \cdots + \sin \mu x \quad . \quad . \quad (2)\ (^*)$$

2. *Détermination des coefficients.* En considérant le premier cas, soit

$$(2\cos x)^{\mu-1}\sin x = \sum_{i=1}^{i=\mu} A_i \sin ix. \qquad (i\ \textit{impair}) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

La méthode de Fourier donne

$$A_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (2\cos x)^{\mu-1}\sin x \, . \, 2\sin ix dx,$$

ou

$$A_i = \frac{2^{\mu-1}}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \cos^{\mu-1}x \cos(i-1)x dx - \int_0^{\pi} \cos^{\mu-1}x \cos(i+1)x dx\right] \quad . \quad . \quad (4)$$

En général,

$$\int_0^{\pi} \cos^p x \cos qx dx = \frac{\pi}{2^p} C_{p,\frac{p-q}{2}}\ (^{**}).$$

La première intégrale, dans la formule (4), égale donc

$$\frac{\pi}{2^{\mu-1}} C_{\mu-1,\frac{\mu-i}{2}};$$

et la seconde,

$$\frac{\pi}{2^{\mu-1}} C_{\mu-1,\frac{\mu-i-2}{2}}.$$

En conséquence,

$$A_i = C_{\mu-1,\frac{\mu-i}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-i-2}{2}}; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5)\ (^{***})$$

puis

$$(2\cos x)^{\mu-1}\sin x = \sum_{i=1}^{i=\mu}\left[C_{\mu-1,\frac{\mu-i}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-i-2}{2}}\right]\sin ix \qquad (\mu\ \textit{impair}) \quad . \ . \ . \quad (A)$$

(*) On arrive plus rapidement à ces relations, en partant de celle qui donne $\cos^\mu x$, au moyen des cosinus des multiples de x.

(**) *Recherches sur les fonctions* X_n, deuxième Mémoire, p. 22. La démonstration suppose $p \overline{\gt} q$; ce qui a lieu dans le cas actuel.

(***) Cette formule est en défaut pour $i = \mu$; mais on a vu que $A_\mu = 1$.

3. *Remarque.* Lorsque μ et p sont *pairs,* un calcul, semblable au précédent, donne

$$(2\cos x)^{\mu-1}\sin x = \sum_{p=2}^{p=\mu}\left[C_{\mu-1,\frac{\mu-p}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-p-2}{2}}\right]\sin px. \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

4. *Propriété numérique.* Dans (A), multiplions par dx les deux membres, et intégrons entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Nous trouvons

$$\frac{2^{\mu-1}}{\mu} = \sum_{i=1}^{i=\mu}\frac{1}{i}\left[C_{\mu-1,\frac{\mu-i}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-i-1}{2}}\right];$$

ou plutôt, en développant, et en transposant le terme $\frac{1}{\mu}$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2^{\mu-1}-1}{\mu} &= \left[C_{\mu-1,\frac{\mu-1}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-3}{2}}\right] + \frac{1}{3}\left[C_{\mu-1,\frac{\mu-3}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-5}{2}}\right]\\ &+ \frac{1}{5}\left[C_{\mu-1,\frac{\mu-5}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-7}{2}}\right] + \cdots\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (C)$$

Si μ est *premier,* la fraction $\frac{2^{\mu-1}-1}{\mu}$ est réductible à un nombre entier, d'après le théorème de Fermat. Il est facile de reconnaître que *chacune des parties du second membre est* également un *nombre entier.*

En effet, soit

$$N = \frac{1}{n}\left[C_{\mu-1,\frac{\mu-n}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-n-2}{2}}\right],$$

n étant *impair.* Posons $n = \mu - 2k$. Alors

$$N = \frac{1}{\mu-2k}\left[C_{\mu-1,k} - C_{\mu-1,k-1}\right];$$

ou, par un calcul évident,

$$N = \frac{1.2.3\ldots\overline{\mu-1}}{1.2\ldots k\times 1.2\ldots\overline{\mu-k}}.$$

Donc, d'après un théorème connu (*), N est *entier* (**).

(*) *Mélanges mathématiques,* t. II, p. 301, VI.

(**) Ce nombre entier égale $\frac{1}{\mu}C_{\mu,k}$. Par conséquent, l'identité (C) ne diffère pas de celle-ci, laquelle est *évidente :*

$$2^{\mu-1}-1 = C_{\mu,1} + C_{\mu,2} + \cdots + C_{\mu,\frac{\mu-1}{2}}.$$

Néanmoins, nous avons cru devoir rapporter cette égalité (C).

5. *Remarques.* I. En général, si n et μ sont *de même parité :*

$$C_{\mu-1,\frac{\mu-n}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-n-2}{2}} = \frac{n}{\mu} C_{\mu,\frac{\mu-n}{2}} \quad \dots\dots\dots \quad (D)\,(*)$$

II. *Si* n *et* μ *sont premiers entre eux* (**), *le premier membre de* (D) *est divisible par* n (***).

III. L'égalité (A) prend la forme simple :

$$\mu(2\cos x)^{\mu-1}\sin x = \sum_{i=1}^{i=\mu} i\,C_{\mu,\frac{\mu-i}{2}} \sin ix. \qquad (\mu \textit{ impair}, \text{ i } \textit{impair}). \quad \dots \quad (E)$$

6. *Application.* Soit $\mu = 7$. On doit avoir :

$$7(2\cos x)^6 \sin x = C_{7,3}\sin x + 3C_{7,2}\sin 3x + 5C_{7,1}\sin 5x + 7\sin 7x;$$

ou, après la suppression du facteur 7 :

$$(2\cos x)^6 \sin x = 5\sin x + 9\sin 3x + 5\sin 5x + \sin 7x.$$

Or (IV) :

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$
$$\sin 5x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x,$$
$$\sin 7x = 7\sin x - 56\sin^3 x + 112\sin^5 x - 64\sin^7 x.$$

L'égalité précédente devient donc

$$(2\cos x)^6 = 5 + 9(3 - 4\sin^2 x) + 5(5 - 20\sin^2 x + 16\sin^4 x) + (7 - 56\sin^2 x + 112\sin^4 x - 64\sin^6 x)$$
$$= 64 - 192\sin^2 x + 192\sin^4 x - 64\sin^6 x;$$

puis

$$\cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x = (1 - \sin^2 x)^3;$$

etc.

(*) Par exemple :

$$C_{8,2} - C_{8,1} = \frac{5}{9} C_{10;2}; \quad C_{9,3} - C_{9,2} = \frac{4}{10} C_{10,3};$$

etc.

(**) Par conséquent *impairs ;* ces nombres étant *de même parité.*

(***) Voir la démonstration précédente.

(IV) N. C. M., t. VI, p. 103.

XI

SUR UNE QUESTION DE PROBABILITÉS (*).

PROBLÈME. *Pierre et Paul jouent l'un contre l'autre, avec des probabilités égales. Avant d'entrer au jeu, ils possèdent, chacun* n *francs. A chaque coup, le perdant donne* 1f *au gagnant. La partie finit dès que l'un des joueurs est ruiné. Quelle est la probabilité qu'elle finira au* $\mu^{\text{ième}}$ *coup* (**)?

Ce problème, célèbre et difficile, a été traité par divers Géomètres, parmi lesquels nous citerons, seulement, Laplace, M. *Rouché* et M. *Delannoy*.

1. *Solution de Laplace* (***). Elle est fondée sur les *fonctions génératrices*, et sur des développements en séries, absolument inadmissibles.

2. *Première solution de M. Rouché* (IV). L'Auteur trouve une formule que l'on peut écrire ainsi :

$$P = \frac{1}{n}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}(-1)^{\lambda}\cos^{\mu-1}\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n}\sin\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{A}) \; (\text{v})$$

3. *Deuxième solution de M. Rouché*. A la formule (A), l'Auteur substitue celle-ci :

$$P = \frac{n}{2^{\mu-1}}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\frac{\mu-n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}+1\right)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{B}) \; (\text{vi})$$

(*) Un extrait de cette Note a été communiqué à la Société Mathématique de France (séance du 17 juillet 1889).

(**) C'est-à-dire, *quelle est la probabilité qu'après ce coup, dont le rang est* μ, *l'un des joueurs sera ruiné ?*

(***) *Théorie analytique des Probabilités*, 1812, pp. 225 et suivantes.

(IV) *Comptes rendus*, 23 janvier 1888, p. 256.

(V) Nous avons remplacé k par $\lambda+1$, et nous avons fait usage d'une correction indiquée par M. Rouché, à la page 338 des C. R.

(VI) *Comptes rendus*, 30 janvier 1888, p. 340. Au lieu de $\frac{1+(-1)^{\mu-n}}{2^{\mu}}$, nous écrivons $\frac{1}{2^{\mu-1}}$, parce que n et μ sont *de même parité*.

4. *Troisième solution de M. Rouché.* Elle est exposée, avec force éloges, dans le *Calcul des Probabilités,* de M. Joseph Bertrand (*)

L'expression de la probabilité est, cette fois,

$$P = \frac{B_k}{2^{\mu-1}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

B_k désignant

$$(-1)^k \begin{vmatrix} A_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ A_2 & A_1 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 & \dots & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ A_k & A_{k-1} & A_{k-2} & \dots & \dots & A_1 \end{vmatrix}$$

En outre, A_i *est le coefficient de* x^{n-2i} *dans*

$$V_n(x) = x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} + \cdots \text{ (**)}.$$

On voit que si la formule (C) est exacte, elle est *illusoire,* à cause de la complication du déterminant B_k.

5. *Solution de M. Delannoy.* Dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (***), M. Delannoy, croyant inexacte la formule (B) (IV), a proposé celle-ci :

$$P = \frac{n}{2^{\mu-1}} \left[\frac{1}{p} C_{\mu-1,q} - \frac{3}{p+n} C_{\mu-1,q-n} + \cdots + (-1)^{\lambda} \frac{2\lambda+1}{p+\lambda n} C_{\mu-1,q-\lambda n} \right] \quad . \quad . \quad (D) \text{ (V)}$$

6. Il ne nous a pas été possible de saisir les considérations auxquelles

(*) Pages 136 et suivantes.

(**) Le développement du polynôme V_n est connu (SERRET, *Algèbre supérieure,* t. I, p. 238, 1866).

(***) T. XVI, p. 127.

(IV) On verra, tout à l'heure, qu'il ne se trompait pas.

(V) L'Auteur suppose

$$p + q = \mu, \quad p - q = n.$$

a eu recours M. Delannoy : elles sont relatives à la marche de la *tour*, sur un échiquier hexagonal. Quoi qu'il en soit, cette formule (D), que l'on peut simplifier, *concorde* avec la formule (A) (*).

7. *Réduction de la formule* (D). A cause de

$$p = \frac{\mu + n}{2},\ q = \frac{\mu - n}{2},$$

le terme général devient

$$(-1)^\lambda \frac{2\lambda + 1}{\left[\frac{\mu + (2\lambda + 1)n}{2}\right]} C_{\mu-1,\ \frac{\mu - (2\lambda+1)n}{2}};$$

puis, si l'on fait

$$\frac{\mu + (2\lambda + 1)n}{2} = x:$$

$$(-1)^\lambda \frac{2\lambda + 1}{x} C_{\mu-1, \mu-x}.$$

Mais, par la théorie des combinaisons,

$$\frac{1}{x} C_{\mu-1, \mu-x} = \frac{1}{\mu} C_{\mu, \mu-x}.$$

Ainsi

$$(-1)^\lambda \frac{2\lambda + 1}{x} C_{\mu-1, \mu-x} = (-1)^\lambda \frac{2\lambda + 1}{\mu} C_{\mu,\ \frac{\mu-(2\lambda+1)n}{2}}.$$

La formule (D) prend donc cette forme simple :

$$P = \frac{n}{2^{\mu-1}\mu} \sum_{\lambda=0} (-1)^\lambda (2\lambda + 1) C_{\mu,\ \frac{\mu-(2\lambda+1)n}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E) (**)}$$

(*) Le *Bulletin* (t. XVI, p. 149), contient des *observations* de M. R., *en réponse à une Note de* M. D. Ces *observations* se réduisent à *douze lignes*, fort sèches, dans lesquelles l'Auteur attribue, à une *faute de calcul*, la formule (B). Il eût mieux fait, croyons-nous, d'indiquer comment elle doit être rectifiée. D'ailleurs, il est assez extraordinaire qu'une simple faute de calcul, dans une *division finale*, ait transformé un polynôme en monôme.

(**) La limite supérieure des valeurs de λ est donnée par la condition

$$\lambda \overline{\overline{<}} \frac{\mu - n}{2n}.$$

8. *Application.* Soient $n = 3$, $\mu = 13$; d'où $\lambda = 0$, $\lambda = 1$; puis

$$P = \frac{3}{2^{12}.13}\left[C_{13,5} - 3C_{13,2}\right] = \frac{3}{2^{12}.13}\left[1287 - 3.78\right] = \frac{3}{2^{12}}81 = \frac{243}{4096}.$$

9. *Comparaison avec* (A). D'après cette formule (A) :

$$P = \frac{1}{3}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=2}(-1)^{\lambda}\cos^{12}\frac{(2\lambda+1)\pi}{6}\sin\frac{(2\lambda+1)\pi}{6} = \frac{2}{3}\cos^{12}\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}.$$

On a :

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}.$$

Donc

$$P = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^6\frac{1}{2} = \frac{3^5}{4^6} = \frac{243}{4096}\,(^*).$$

D'autres vérifications réussissent également. Il y a donc lieu de croire que les formules (A), (E) sont *exactes*. De là résulte l'identité *hypothétique :*

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}(-1)^{\lambda}\cos^{\mu-1}\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n}\sin\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n} = \frac{n^2}{2^{\mu-1}\mu}\sum_{\lambda=0}(-1)^{\lambda}(2\lambda+1)C_{\mu,\frac{\mu-(2\lambda+1)n}{2}}. \quad \text{(F)}\,(^{**})$$

10. *Réduction du premier membre.* Soit

$$S = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}(-1)^{\lambda}\cos^{\mu-1}\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n}\sin\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(*) La formule (B) donne, au lieu de ce résultat,

$$P = \frac{3}{2^{12}}\frac{\Gamma(13)}{\Gamma(6)\Gamma(9)} = \frac{3}{2^{12}}\frac{12.11.10.9}{1.2.3.4.5}.$$

Ainsi que l'a remarqué M. Delannoy, cette valeur de P est le *premier terme* de (D) : M. Rouché a négligé tout le reste !

(**) Cette *identité* (F), que nous allons vérifier, est, sans contredit, l'une des plus curieuses que l'on connaisse. Peut-être pourra-t-on en tirer de nouvelles propriétés des *racines de l'unité*.

Posons, pour abréger,

$$\frac{\pi}{2n} = \alpha, \qquad A_i = \frac{i}{\mu} C_{\mu, \frac{\mu-i}{2}} = C_{\mu-1, \frac{\mu-i}{2}} - C_{\mu-1, \frac{\mu-i-2}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)\ (*)$$

La valeur de S, développée, est

$$\cos^{\mu-1}\alpha \sin\alpha - \cos^{\mu-1} 3\alpha \sin 3\alpha + \cos^{\mu-1} 5\alpha \sin 5\alpha - \cdots + (-1)^{n-1} \cos^{\mu-1}(2n-1)\alpha \sin(2n-1)\alpha.$$

D'après la formule (E) de la Note X :

$$\cos^{\mu-1}\alpha \sin\alpha = \frac{1}{2^{\mu-1}} \sum_{i=1}^{i=\mu} A_i \sin i\alpha,$$

$$-\cos^{\mu-1} 3\alpha \sin 3\alpha = -\frac{1}{2^{\mu-1}} \sum_{i=1}^{i=\mu} A_i \sin 3i\alpha,$$

$$\cos^{\mu-1} 5\alpha \sin 5\alpha = \frac{1}{2^{\mu-1}} \sum_{i=1}^{i=\mu} A_i \sin 5i\alpha,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(-1)^{n-1} \cos^{\mu-1}(2n-1)\alpha \sin(2n-1)\alpha = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{\mu-1}} \sum_{i=1}^{i=\mu} A_i \sin(2n-1)i\alpha.$$

Donc, au lieu de l'égalité (1) :

$$S = \frac{1}{2^{\mu-1}} \sum_{i=1}^{i=\mu} A_i [\sin i\alpha - \sin 3i\alpha + \sin 5i\alpha - \cdots + (-1)^{n-1} \sin(2n-1)i\alpha]. \quad . \quad (3)\ (**)$$

En général,

$$\sin i\alpha - \sin 3i\alpha + \sin 5i\alpha - \cdots + (-1)^{n-1} \sin(2n-1)i\alpha = (-1)^{n-1} \frac{\sin 2ni\alpha}{2\cos i\alpha}\ (***).$$

Donc, à cause de $\alpha = \frac{\pi}{2n}$, le second membre égale

$$(-1)^{n-1} \frac{\sin i\pi}{2\cos \dfrac{i\pi}{2n}} = 0.$$

(*) *Note* X, formules (D), (E).

(**) Ce petit calcul peut encore être abrégé; mais en perdant, peut-être, sous le rapport de la clarté.

(***) *Note* VII, formule (2).

Mais *il y a exception* quand $i = ni'$, i' étant *impair*. En effet, les deux termes de la fraction s'annulent. La règle de L'Hospital donne, comme *vraie valeur*,

$$-n\frac{\cos i\pi}{\sin\frac{i\pi}{2n}} = \frac{n}{\sin\frac{i'\pi}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Conséquemment,

$$S = \frac{n}{2^{\mu-1}}(-1)^{n-1}[A_n - A_{3n} + A_{5n} - \cdots] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Nous avons supposé

$$A_i = \frac{i}{\mu}C_{\mu,\frac{\mu-i}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Donc

$$A_n = \frac{n}{\mu}C_{\mu,\frac{\mu-n}{2}}, \quad A_{3n} = \frac{3n}{\mu}C_{\mu,\frac{\mu-3n}{2}}, \quad A_{5n} = \frac{5n}{\mu}C_{\mu,\frac{\mu-5n}{2}}, \ldots;$$

puis

$$S = \frac{n^2}{2^{\mu-1}\mu}\left[C_{\mu,\frac{\mu-n}{2}} - 3C_{\mu,\frac{\mu-3n}{2}} + 5C_{\mu,\frac{\mu-5n}{2}} - \cdots\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

L'égalité (F) se réduit à

$$C_{\mu,\frac{\mu-n}{2}} - 3C_{\mu,\frac{\mu-3n}{2}} + 5C_{\mu,\frac{\mu-5n}{2}} - \cdots = \sum_{\lambda=0}(2\lambda+1)C_{\mu,\frac{\mu-(2\lambda+1)n}{2}};$$

ce qui est une *pure identité*.

11. *Valeur de* P. Par la formule (E) :

$$P = \frac{n}{2^{\mu-1}\mu}\left[C_{\mu,\frac{\mu-n}{2}} - 3C_{\mu,\frac{\mu-3n}{2}} + 5C_{\mu,\frac{\mu-5n}{2}} - \cdots\right] \quad \ldots \ldots \quad (G)$$

Cette expression, tranformée de celle qui a été donnée par M. Delannoy, peut encore être réduite.

En effet, d'après les deux formes de A_i (2) :

$$C_{\mu,\frac{\mu-n}{2}} = \frac{\mu}{n}\left[C_{\mu-1,\frac{\mu-n}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-n-2}{2}}\right], \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

$$3C_{\mu,\frac{\mu-3n}{2}} = \frac{\mu}{n}\left[C_{\mu-1,\frac{\mu-3n}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-3n-2}{2}}\right],$$

$$5C_{\mu,\frac{\mu-5n}{2}} = \frac{\mu}{n}\left[C_{\mu-1,\frac{\mu-5n}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-5n-2}{2}}\right],$$

Donc,

$$\left.\begin{aligned}P = {} & \frac{1}{2^{\mu-1}}\left\{C_{\mu-1,\frac{\mu-n}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-3n}{2}} + C_{\mu-1,\frac{\mu-5n}{2}} - \cdots\right\}\\ & - \frac{1}{2^{\mu-1}}\left\{C_{\mu-1,\frac{\mu-n-2}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-3n-2}{2}} + C_{\mu-1,\frac{\mu-5n-2}{2}} - \cdots\right\}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(H)}$$

12. *Cas particulier remarquable.* Dans (F), supposons $n = 3$. Le premier membre se réduit à

$$\cos^{\mu-1}\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6} + \cos^{\mu-1}\frac{5\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{6} = \cos^{\mu-1}\frac{\pi}{6} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{\mu-1}{2}};$$

de sorte que

$$\sum_{\lambda=0}(-1)^{\lambda}(2\lambda+1)C_{\mu,\frac{\mu-3(2\lambda+1)}{2}} = 3^{\frac{\mu-3}{2}}\mu. \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Mais, par la relation (7),

$$C_{\mu,\frac{\mu-3(2\lambda+1)}{2}} = \frac{\mu}{3(2\lambda+1)}\left[C_{\mu-1,\frac{\mu-3(2\lambda+1)}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-3(2\lambda+1)-2}{2}}\right].$$

Donc l'égalité (8) devient

$$\sum_{\lambda=0}(-1)^{\lambda}\left[C_{\mu-1,\frac{\mu-3(\lambda+1)}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-3(\lambda+1)-2}{2}}\right] = 3^{\frac{\mu-3}{2}},$$

ou

$$\left(C_{\mu-1,\frac{\mu-3}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-5}{2}}\right) - \left(C_{\mu-1,\frac{\mu-9}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-11}{2}}\right) + \left(C_{\mu-1,\frac{\mu-15}{2}} - C_{\mu-1,\frac{\mu-17}{2}}\right) - \cdots = 3^{\frac{\mu-3}{2}}. \quad \text{(K)}$$

Ainsi, *la somme algébrique de certains termes appartenant à une même ligne du triangle arithmétique est toujours une puissance de* 3; ou, sous une forme plus explicite :

k *étant un nombre entier, le coefficient de* x^k, *dans le développement de*

$$\frac{(1+x)^{2k+2}(1-x)}{1+x^3},$$

est 3^k.

Ce résultat s'accorde avec celui que l'on trouve à la page 135 du *Calcul des probabilités*, de M. Bertrand. Mais, dans l'énoncé du problème, le savant

Géomètre suppose que la partie se termine *au coup de rang* μ, et, dans la solution, que la partie se termine *au coup de rang* $2\mu+1$.

13. *Une intégrale définie.* Si, au moyen de la formule de Poisson, on transforme en intégrale définie chacun des termes composant le premier membre de (K), on arrive, assez facilement, à cette autre intégrale définie, peut-être nouvelle :

$$\int^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\mu-1}\varphi \sin\varphi \sin 6k\varphi}{\cos 3\varphi}\, d\varphi = (-1)^{k-1}\pi\, \frac{3^{\frac{\mu-3}{2}}}{2^{\mu}} \quad \ldots\ldots \quad (4)\,(*)$$

XII

SUR L'ÉQUATION $x^p - 1 = 0$.

1. *Préliminaires.* Soit p un nombre premier, de la forme $4\mu+1$. D'après les formules (S), (T) de mon *Mémoire sur certaines décompositions en carrés,* la résolution de l'équation

$$\frac{x^{2p}-1}{x^2-1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

est ramenée, soit à celle du système

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}^2x^2 - \mathrm{N}^2 + p(\mathrm{P}^2x^2 - \mathrm{Q}^2)x^2 + 2x\sqrt{p}(\mathrm{MP}x^2 - \mathrm{NQ}) = 0,\\ \mathrm{M}^2x^2 - \mathrm{N}^2 + p(\mathrm{P}^2x^2 - \mathrm{Q}^2)x^2 - 2x\sqrt{p}(\mathrm{MP}x^2 - \mathrm{NQ}) = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

soit à celle du système

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}^2x^2 - \mathrm{N}^2 - p(\mathrm{P}^2x^2 - \mathrm{Q}^2)x^2 + 2x^2\sqrt{p}(\mathrm{MQ} - \mathrm{NP}) = 0,\\ \mathrm{M}^2x^2 - \mathrm{N}^2 - p(\mathrm{P}^2x^2 - \mathrm{Q}^2)x^2 - 2x^2\sqrt{p}(\mathrm{MQ} - \mathrm{NP}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)\,(**)$$

(*) Dans cette formule, μ est un nombre impair, égal ou supérieur à 3. Quant au nombre entier k, il est le plus grand qui satisfasse aux conditions :

$$6k = \mu+3, \quad ou \quad 6k = \mu+1, \quad ou \quad 6k = \mu-1, \quad ou \quad 6k = \mu-3.$$

(**) On suppose

$$\mathrm{Y} = \mathrm{M}x + \mathrm{N}, \quad \mathrm{Z} = (\mathrm{P}x + \mathrm{Q})x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Y, Z étant les polynômes de Gauss, et M, N, P, Q, des fonctions *paires*. (*Mém. sur certaines décompositions*...., p. 50.)

2. *Réduites.* Soient, pour abréger, A, B, C, D les premiers membres des équations (2), (3), et α, β des facteurs numériques. On a

$$\frac{x^{2p}-1}{x^2-1} = \alpha \mathrm{AB} = \beta \mathrm{CD}. \qquad (5)$$

Donc *les équations*

$$\mathrm{A}=0, \qquad \mathrm{C}=0$$

ont des racines communes, appartenant à l'équation

$$\mathrm{A}-\mathrm{C}=0. \qquad (6)\,(*)$$

Or,

$$\begin{aligned}\mathrm{A}-\mathrm{C} &= 2p(\mathrm{P}^2x^2-\mathrm{Q}^2)x^2 + 2\sqrt{p}(\mathrm{MP}x^2-\mathrm{NQ})x^2 - 2\sqrt{p}(\mathrm{MQ}-\mathrm{NP})x^2 \\ &= 2x\sqrt{p}(\mathrm{P}x-\mathrm{Q})\left[\sqrt{p}(\mathrm{P}x+\mathrm{Q})x+\mathrm{M}x+\mathrm{N}\right].\end{aligned}$$

En négligeant le facteur $x(\mathrm{P}x - \mathrm{Q})$, nous avons ainsi, au lieu de l'équation (6) :

$$\sqrt{p}(\mathrm{P}x+\mathrm{Q})x+\mathrm{M}x+\mathrm{N}=0 \qquad (7)$$

Telle est l'une des *réduites* de la proposée. Les trois autres, qui s'en déduisent immédiatement, sont

$$\sqrt{p}(\mathrm{P}x-\mathrm{Q})x-\mathrm{M}x+\mathrm{N}=0, \qquad (8)$$

$$-\sqrt{p}(\mathrm{P}x+\mathrm{Q})x+\mathrm{M}x+\mathrm{N}=0, \qquad (9)$$

$$-\sqrt{p}(\mathrm{P}x-\mathrm{Q})x-\mathrm{M}x+\mathrm{N}=0. \qquad (10)$$

3. *Remarques.* I. Chacune de ces réduites est du degré de N, savoir : $\frac{p-1}{2}$ (**). Donc, à cause de $\mathrm{N} = 2$ pour $x = 0$ (***), nous avons cette identité :

$$16(x^{2p-2}+x_1^{2p-4}+\cdots+x^2+1) = [(\mathrm{M}x+\mathrm{N})^2-p(\mathrm{P}x+\mathrm{Q})^2x^2]\,[(\mathrm{M}x-\mathrm{N})^2-p(\mathrm{P}x-\mathrm{Q})^2x^2].$$

(*) Si les polynômes A, C étaient premiers entre eux, A *diviserait* D; et cette conclusion ne diffère, de la première, que par un *changement de lettres.*

(**) Legendre, *Théorie des Nombres*, t. I, p. 195.

(***) *Loc. cit.*

II. On peut la mettre sous une forme plus simple.

Soient

$$Y = Mx + N = \varphi(x), \qquad \frac{Z}{x} = Px + \varphi = \psi(x).$$

Alors

$$-Mx + N = \varphi(-x). \qquad -Px + \varphi = \psi(-x).$$

Donc

$$16(x^{2p-2} + x^{2p-4} + \cdots + x^2 + 1) = [\varphi^2(x) - px^2\psi^2(x)]\,[\varphi^2(-x) - px^2\psi^2(-x)]\,. \quad . \quad \text{(A)}$$

III. Les diverses parties du second membre sont divisibles par p, excepté $[\varphi(x)\varphi(-x)]^2$. Si l'on suppose $x = 1$, le premier membre devient $16p$. Conséquemment : *des deux quantités* $\varphi(1)$, $\varphi(-1)$, *une, au moins, est divisible par* p (*).

IV. Le facteur $\varphi^2(x) - px^2\psi^2(x)$ est, d'après le théorème de Gauss, égal à

$$4(x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1).$$

Par conséquent, le second facteur égale

$$4(x^{p-1} - x^{p-2} + \cdots - x + 1),$$

et la relation (A) se réduit à celle-ci :

$$x^{2p-2} + x^{2p-4} + \cdots + x^2 + 1 = (x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1)(x^{p-1} - x^{p-2} + \cdots - x + 1), \quad \text{(B)}$$

laquelle est connue et presque évidente (**).

4. *Application*. Si $p = 13$, on a

$$\varphi(x) = 2x^6 + x^5 + 4x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 2,$$
$$\psi(x) = x^4 + x^2 + 1 \text{ (***)};$$

(*) Voir, sur ce sujet, le Mémoire cité (p. 54).

(**) Nous y reviendrons.

(***) LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, t. II, p. 195.

donc

$$\varphi(-x) = 2x^6 - x^5 + 4x^4 + x^3 + 4x^2 - x + 2,$$
$$\psi(-x) = x^4 + x^2 + 1;$$

puis, au lieu de (A) :

$$16(x^{24} + x^{22} + x^{20} + x^{18} + x^{16} + x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1)$$
$$= [(2x^6 + x^5 + 4x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 2)^2 - 13x^2(x^4 + x^2 + 1)^2]$$
$$\times [(2x^6 - x^5 + 4x^4 + x^3 + 4x^2 - x + 2)^2 - 13x^2(x^4 + x^2 + 1)^2].$$

Effectivement, le premier facteur égale

$$4x^{12} + x^{10} + 16x^8 + x^6 + \cdots + 4x^{11} + 16x^{10} - 4x^9 + 16x^8 + 4x^7 + \cdots$$
$$+ 8x^9 - 2x^8 + 8x^7 + 2x^6 + \cdots - 8x^7 + 32x^6 + \cdots - 13x^2(x^8 + 2x^6 + 3x^4 + \cdots)$$
$$= 4(x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + \cdots).$$

Il n'est pas besoin de continuer.

5. *Autre méthode.* Reprenons l'identité

$$x^{2p-2} + x^{2p-4} + \cdots + x^2 + 1 = (x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1)(x^{p-1} - x^{p-2} + \cdots - x + 1), \quad \text{(B)}$$

conséquence immédiate de celle-ci :

$$\frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^p - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^p + 1}{x + 1}.$$

Le théorème de Gauss, appliqué au premier facteur, le transforme en

$$\frac{1}{4}[\varphi^2(x) - px^2\psi^2(x)]$$

De même,

$$x^{p-1} - x^{p-2} + \cdots - x + 1 = \frac{1}{4}[\varphi^2(-x) - px^2\psi^2(-x)].$$

Ainsi :

$$16(x^{2p-2} + x^{2p-4} + \cdots + x^2 + 1) = [\varphi^2(x) - px^2\psi^2(x)][\varphi^2(-x) - px^2\psi^2(-x)]. \quad . \quad \text{(A)}$$

Les calculs précédents sont donc inutiles (*).

6. *Autres réduites.* Les polynômes $\frac{x^{2p}-1}{x^2-1}$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont *symétriques* (**). Conséquemment, si l'on pose, suivant l'usage,

$$x+\frac{1}{x}=\mathrm{Z}=\mathrm{Z}_1, \qquad x^n+\frac{1}{x^n}=\mathrm{Z}_n, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

l'équation

$$x^{2p-2}+x^{2p-4}+\cdots+x^2+1=0 \,. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

deviendra

$$\mathrm{Z}_{p-1}+\mathrm{Z}_{p-2}+\cdots+\mathrm{Z}_1+1=0; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

et *les réduites* (7), (8), (9), (10) *seront remplacées par quatre équations en* z, *du degré* $\frac{p-1}{4}=\mu$, et dont toutes les racines sont réelles.

7. *Application.* Quand $p=13$, ou $\mu=3$, on trouve :

$$2z^3-z^2-2z+3+\sqrt{13}(z^2-1)=0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

$$2z^3-z^2-2z+3-\sqrt{13}(z^2-1)=0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

$$2z^3+z^2-2z-3+\sqrt{13}(z^2-1)=0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

$$2z^3+z^2-2z-3-\sqrt{13}(z^2-1)=0 \,. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)\ (***)$$

8. *Remarque.* 1° Les racines de l'équation (14) sont

$$z_1=2\cos\frac{10\pi}{13}, \qquad z_2=2\cos\frac{12\pi}{13}, \qquad z_3=2\cos\frac{4\pi}{13},$$

et l'on a

$$10+12+4=26.$$

(*) Excepté, bien entendu, ceux qui se rapportent à la seconde décomposition de

$$4\,\frac{x^{2p}-1}{x^2-1}.$$

(**) C'est-à-dire que, dans chacun d'eux, les termes également éloignés des extrêmes ont même coefficient.

(***) Les racines sont, ont le sait, comprises dans la formule

$$z=2\cos\frac{2l\pi}{13}.$$

2° Les racines de l'équation (15) sont

$$-z_1,\ -z_2,\ -z_3.$$

3° Les racines de l'équation (16) sont

$$\zeta_1 = 2\cos\frac{2\pi}{13},\qquad \zeta_2 = 2\cos\frac{6\pi}{13},\qquad \zeta_3 = 2\cos\frac{18\pi}{13};$$

et l'on a

$$2 + 6 + 18 = 26\ (^*).$$

4° Les racines de l'équation (17) sont

$$-\zeta_1,\ -\zeta_2,\ -\zeta_3.$$

9. *Développement de* Z_n. Les racines imaginaires de l'équation

$$x^p - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

sont données par la formule

$$x = \cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

pourvu que

$$\varphi = \frac{2l\pi}{p},$$

l étant un nombre entier.

Par suite,

$$Z_n = 2\cos n\varphi; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

et, en particulier,

$$Z_1 = z = 2\cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

(*) Ainsi le nombre 13 est décomposable, de deux manières *essentiellement différentes*, en *trois parties inégales*. Je ne pense pas que cette propriété puisse être généralisée. Si, par exemple, $\mu = 4$, d'où $p = 17$, on a

$$17 = 1 + 2 + 3 + 11 = 2 + 3 + 4 + 8 = \cdots;$$

mais ces décompositions ne sont pas *essentiellement différentes :* la partie 2 se trouve dans l'une et dans l'autre.

On conclut, de ces valeurs :

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{4 - z^2},$$

$$Z_n = \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2}\right)^n + \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2}\right)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

10. *Identité remarquable.* On peut, de différentes manières, démontrer la formule

$$\cos n\varphi = \sum_{k=0} A_{2k} \cos^{n-2k}\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

en posant

$$A_{2k} = (-1)^k 2^{n-2k-1} \frac{n}{n-k} C_{n-k,k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)\ (^*)$$

Si l'on a égard aux relations (20), (21), (22), on trouve l'*identité :*

$$\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2}\right)^n + \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2}\right)^n = \sum_{k=0} (-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k,k} z^{n-2k}, \quad . \quad . \quad . \quad (C)\ (^{**})$$

dans laquelle le second membre est

$$V_n(z) = z^n - \frac{n}{1} z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} z^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^{n-6} + \cdots (^{***}).$$

11. *Exemple.* Soit $n = 7$. Alors

$$V_7(z) = z^7 - 7z^5 + 14z^3 - 7z.$$

D'un autre côté, le premier membre de (C) égale

$$\frac{1}{64}[z^7 + 21z^5(z^2 - 4) + 35z^3(z^2 - 4)^2 + 7z(z^2 - 4)^3],$$

ou

$$\frac{1}{64}[64z^7 - 448z^5 + 896z^3 - 7 \cdot 64z];$$

c'est-à-dire

$$z^7 - 7z^5 + 14z^3 - 7z;$$

etc.

(*) Voir, par exemple, *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. VI, pp. 100 et 103.

(**) Elle est due, peut-être, à M. E. Mayer (*Comptes rendus,* 25 février 1889).

(***) Serret, *Algèbre supérieure,* t. I, p. 238.

12. *Conséquences d'une formule de Viète.* Cette formule est celle qui donne le développement de $\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$ (*). Nous en avons conclu l'*identité*

$$\left.\begin{aligned}&1-\frac{n-1}{1}\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\sin^4\varphi\cos^4\varphi-\cdots\\&=\sin^{2n}\varphi+\sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi+\sin^{2n-4}\varphi\cos^4\varphi+\cdots+\cos^{2n}\varphi.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\text{(D)}$$

Soit $\cos^2\varphi=y$. Alors (D) devient

$$\left.\begin{aligned}&1-\frac{n-1}{1}(1-y)y+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}(1-y)^2y^2-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}(1-y)^3y^3+\cdots\\&=\frac{(1-y)^{n+1}-y^{n+1}}{1-2y}.\end{aligned}\right\}\quad\text{(E)}$$

Soit encore $y(1-y)=\frac{1}{2z}$; d'où

$$y=\frac{z-\sqrt{z^2-4}}{2z},\qquad 1-y=\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2z};\quad\ldots\ldots\ldots(25)$$

et, par une réduction visible :

$$\left.\begin{aligned}&z^n-\frac{n-1}{1}z^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}z^{n-4}-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}z^{n-6}+\cdots\\&=\frac{1}{2^n}[C_{n+1,1}z^n+C_{n+1,3}(z^2-4)z^{n-2}+C_{n+1,5}(z^2-4)z^{n-4}+\cdots].\end{aligned}\right\}\quad.\ \text{(F)}$$

13. *Remarques.* I. Si l'on représente par $F_n(z)$ le premier membre de cette identité, on trouve aisément

$$V_n(z)=F_n(z)-F_{n-2}(z).\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

II. De (F), on déduit, comme cas particulier :

$$\left.\begin{aligned}&1-C_{n-1,1}+C_{n-2,2}-C_{n-3,3}+\cdots\\&=\frac{1}{2^n}[C_{n+1,1}-3C_{n+1,3}+3^2C_{n+1,5}-\cdots],\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(27)$$

$$\left.\begin{aligned}&1+C_{n-1,1}+C_{n-2,2}+C_{n-3,3}+\cdots\\&=\frac{1}{2^n}[C_{n+1,1}+5C_{n+1,3}+5^2C_{n+1,5}+\cdots]\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(28)$$

(*) *Troisième Mémoire sur les fonctions* X_n, p. 9.

III. Dans la relation (27), *le premier membre se réduit* à $+1$, -1 *ou zéro* (*). Il en est donc de même pour le second membre.

IV. Dans l'identité (28), le second membre équivaut à

$$\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}[(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}].$$

Par conséquent, *pour toute valeur entière et positive de* n :

$$1 + C_{n-1,1} + C_{n-2,2} + C_{n-3,3} + \cdots = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}[(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}] \quad . \ (29)\ (^{**})$$

XIII

SUR L'ÉQUATION $x^m - 1 = 0$ (***).

1. *Préliminaires.* Soit $m = pq$, les nombres p, q étant *impairs* et *premiers entre eux*. Dans le petit Mémoire cité, j'ai démontré les propositions suivantes :

1° Si l'on fait

$$\frac{(1-x)(1-x^{pq})}{(1-x^p)(1-x^q)} = X, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

et que l'on représente par $\varphi(n)$ le nombre des *solutions entières, non négatives,* de l'équation

$$pa + qb = n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(*) *Loc. cit.*, p. 10.

(**) Cette égalité, qui démontre une propriété du *triangle arithmétique,* paraît due à M. Édouard Lucas (*Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise,* pp. 9 et 10). D'ailleurs, la valeur commune des deux membres est le $n^{\text{ième}}$ terme de la série de Lamé (ou plutôt de Fibonacci) :

1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

(*Manuel des candidats à l'École polytechnique,* t. I, p. 86).

(***) Complément et simplification d'une Note sur le même sujet, publiée dans les *Bulletins de l'Académie* (1870). Un extrait de la Note actuelle a été communiqué au Congrès de Paris, le 8 août 1889.

on a

$$X = \sum_{n=0}^{n=(p-1)(q-1)} [\varphi(n) - \varphi(n-1)]x^n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

2°

$$\varphi(n) - \varphi(n-1) = \pm 1 \text{ ou zéro} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)\ (^*)$$

2. *Calcul de* X. La Note citée contient deux manières de former X. Celle qui suit est plus rapide.

On a, en effectuant la division de $1 - x^{pq}$ par $1 - x^p$:

$$X = (1-x)\frac{1 + x^p + x^{2p} + \cdots + x^{(q-1)p}}{1 - x^q},$$

ou

$$X = (1-x)[1 + x^p + x^{2p} + \cdots + x^{(q-1)p}][1 + x^q + x^{2q} + x^{3q} + \cdots]. \quad \ldots (5)$$

Le dernier terme de X doit être $x^{pq+1-p-q} = x^{(p-1)(q-1)}$. Si donc on multiplie

$$1 + x^p + x^{2p} + \cdots + x^{(q-1)p}$$

par

$$1 + x^q + x^{2q} + x^{3q} + \cdots,$$

en négligeant tous les termes dont le degré surpasse $(p-1)(q-1)$, le polynôme P ainsi obtenu, multiplié par $1-x$ (avec la précaution indiquée), donnera X.

3. *Suite*. On peut encore, pour plus de simplicité, former les *exposants de* x.

A cet effet, soient les progressions :

$$\begin{array}{llll}
0, & p, & 2p, \ldots, & (q-2)p; \\
q, & p+q, & 2p+q, \ldots\ldots\ldots\ldots; \\
2q, & p+2q, & 2p+2q, \ldots\ldots\ldots\ldots; \\
3q, & p+3q, & 2p+3q, \ldots\ldots\ldots\ldots; \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{array}$$

dont aucun terme ne surpasse $(p-1)(q-1)$. Ces nombres sont les exposants de x, dans les termes *positifs* de X.

(*) D'après un théorème connu, $\varphi(n) = 1$ *ou zéro*.

Si, à chacun d'eux, on ajoute l'unité, on forme les nouvelles progressions

$$
\begin{array}{llll}
1, & p+1, & 2p+1, \ldots, (q-2)p+1; \\
q+1, & p+q+1, & 2p+q+1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\
2q+1, & p+2q+1, & 2p+2q+1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\
3q+1, & p+3q+1, & 2p+3q+1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Ces nombres sont les exposants de x, dans les termes *négatifs* de X.

4. *Application.* Soient $p = 7$, $q = 5$. Les premières progressions sont :

$$
\begin{array}{rrrr}
0, & 7, & 14, & 21; \\
5, & 12, & 19; \\
10, & 17, & 24; \\
15, & 22; \\
20;
\end{array}
$$

et les autres :

$$
\begin{array}{rrrr}
1, & 8, & 15, & 22; \\
6, & 13, & 20; \\
11, & 18; \\
16, & 23; \\
21.
\end{array}
$$

Suppression faite des termes *semblables,* ces deux suites se réduisent à

$$
\begin{array}{rrr}
0, & 7, & 14; \\
5, & 12, & 19; \\
10, & 17, & 24; \\
1, & 8; \\
11, & 18; \\
16, & 23.
\end{array}
$$

Donc

$$
X = 1 - x + x^5 - x^6 + x^7 - x^8 + x^{10} - x^{11} + x^{12} - x^{13} + x^{15} - x^{16} + x^{17} - x^{18} + x^{19} - x^{23} + x^{24}.
$$

Tel est le quotient de

$$
1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + x^{28}
$$

par

$$
1 + x + x^2 + x^3 + x^4;
$$

de

$$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + x^{25} + x^{30}$$

par

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \text{ (*)};$$

et de

$$1 - x - x^{35} + x^{36}$$

par

$$1 - x^5 - x^7 + x^{12}.$$

5. *Autre développement de* X. Par la formule (3),

$$\begin{aligned} X = [\varphi(0) - \varphi(-1)] + [\varphi(1) - \varphi(0)]x + [\varphi(2) - \varphi(1)]x^2 + \cdots \\ + [\varphi(p-1)(q-1) - \varphi(pq-p-q)]x^{(p-1)(q-1)}. \end{aligned}$$

Mais, évidemment, $\varphi(-1) = 0$. De plus, $\varphi(p-1)(q-1) = 1$ (**). Donc

$$X = (1-x)[1 + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \cdots + \varphi(pq-p-q)x^{pq-p-q}] + x^{(p-1)(q-1)}. \quad . \quad (6)$$

6. *Valeur de* P. D'après les égalités (1) et

$$X = (1-x)P + x^{(p-1)(q-1)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7) \text{ (***)}$$

on a :

$$P = 1 + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \cdots + \varphi(pq-p-q)x^{pq-p-q}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$P = \frac{1 + x^{pq-q+1}(1 + x + x^2 + \cdots + x^{q-2}) - x^{(p-1)(q-1)}(1 + x + x^2 + \cdots + x^{q-1})}{(1-x^p)(1-x^q)};$$

puis, par une réduction visible,

$$P = \frac{1 + x^p + x^{2p} + \cdots + x^{(q-2)p} - x^{(p-1)(q-1)}(1 + x + x^2 + \cdots + x^{q-2})}{1 - x^q} \quad . \quad . \quad (9)$$

7. *Remarques*. I. La comparaison des valeurs (8) et (9) donne cette nouvelle *identité* :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1 + x^p + x^{2p} + \cdots + x^{(q-2)p} - x^{(p-1)(q-1)}(1 + x + x^2 + \cdots + x^{q-2})}{1 - x^q} \\ = 1 + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \cdots + \varphi(pq-p-q)x^{pq-p-q}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (A)$$

(*) *Bulletin*, mars 1870, p. 3.
(**) *Bulletin*, mars 1870, p. 186.
(***) Celle-ci résulte du paragraphe 2.

II. Dans le premier membre, on peut changer p en q, et q en p.

III. Si l'on fait $x = 1$, la fraction prend la forme $\frac{0}{0}$. La vraie valeur est $\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$. Conséquemment,

$$1 + \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(pq-p-q) = \frac{1}{2}(p-1)(q-1),$$

ou, ce qui revient au même (*),

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(p-1)(q-1) = \frac{1}{2}(p-1)(q-1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{10}$$

IV. Cette nouvelle égalité peut être énoncée ainsi :

De 1 *à* $(p-1)(q-1)$ *inclusivement, il existe autant de nombres ayant la forme* $pa + qb$, *que de nombres n'ayant pas cette forme* (**).

8. *Autre théorème.* Dans l'identité (A), prenons $x = 2$, et appelons N la valeur commune des deux membres, de manière que

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{2^{(p-1)(q-1)}(2^{q-1}-1) - [1 + 2^p + 2^{2p} + \cdots + 2^{(q-2)p}]}{2^q - 1} \\ &= 1 + 2.\varphi(1) + 2^2.\varphi(2) + \cdots + 2^{pq-p-q}\varphi'pq - p - q). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{11}$$

D'après Euler, *le nombre entier* N *est, d'une seule manière, la somme de plusieurs puissances de* 2. Soit 2^α un terme de cette somme. Alors

$$\varphi(\alpha) = +1.$$

Si, au contraire, 2^β n'entre pas dans la décomposition de N,

$$\varphi(\beta) = 0.$$

Conséquemment :

1° *La fraction*

$$\frac{2^{(p-1)(q-1}[2^{q-1}-1] - [1 + 2^p + 2^{2p} + \cdots + 2^{(q-2)p}]}{2^q - 1}$$

est réductible à un nombre entier N ;

(*) A cause de $1 = \varphi(p-1)(q-1)$.

(**) On ne doit pas oublier que p, q sont *impairs, premiers entre eux*. Ce petit théorème résulte, immédiatement, de la relation connue :

$$\varphi(n) + \varphi(pq - p - q - n) = 1.$$

(*Bulletin*, mars 1870, p. 185).

2° *Si, conformément à la remarque d'Euler, on suppose*

$$N = \sum 2^{\alpha},$$

on a

$$\varphi(\alpha) = +1.$$

9. *Exemple.* Soient, comme précédemment, $p = 7$, $q = 5$. Alors

$$N = \frac{2^{24}.(2^4 - 1) - [1 + 2^7 + 2^{14} + 2^{21}]}{2^5 - 1}$$

$$= \frac{16\,777\,216\,.\,15 - (1 + 128 + 16\,384 + 2\,097\,152)}{31}$$

$$= \frac{251\,658\,240 - 2\,113\,665}{31} = 8\,049\,825.$$

Ce dernier nombre, comme on le vérifie aisément, égale

$$2^{22} + 2^{21} + 2^{20} + 2^{19} + 2^{17} + 2^{15} + 2^{14} + 2^{12} + 2^{10} + 2^7 + 2^5 + 1;$$

et il est visible que les exposants 22, 21, 20, ... ont la forme $7a + 5b$.

10. *Remarque.* Le numérateur

$$2^{24}(2^4 - 1) - [1 + 2^7 + 2^{14} + 2^{21}]$$

étant écrit ainsi :

$$2^{24}(2^3 + 2^2 + 2 + 1) - (1 + 2^7 + 2^{14} + 2^{21}),$$

on voit qu'il est la somme des binômes

$$2^{24} - 2^{14}, \qquad 2^{27} - 2^7, \qquad 2^{26} - 2^{21}, \qquad 2^{25} - 1,$$

dont chacun est divisible par $2^5 - 1$. On a donc, tout de suite,

$$N = 2^{14}(2^5 + 1) + 2^7(2^{15} + 2^{10} + 2^5 + 1) + 2^{21} + 2^{20} + 2^{15} + 2^{10} + 2^5 + 1;$$

et cette expression ne diffère pas de la précédente.

11. *Généralisation.* La fraction

$$P = \frac{x^{(p-1)(q-1)}(1 + x + x^2 + \cdots + x^{q-2}) - [1 + x^p + x^{2p} + \cdots + x^{(q-2)p}]}{x^q - 1}$$

serait réductible à un polynôme entier (ce qui a lieu), si le numérateur était composé de $(q - 1)$ binômes

$$x^{(p-1)(q-1)+\lambda} - x^{\mu p},$$

divisibles, chacun, par $x^q - 1$ (*). Cette condition revient à

$$(p-1)(q-1) + \lambda - \mu p = \mathfrak{M}(q),$$

ou encore, à

$$pa + qb = (p-1)(q-1) + \lambda \quad \text{. . . . . (12)}$$

Le second membre est compris entre $(p-1)(q-1)$ et $p(q-1)$. Donc l'équation (12) admet une *solution entière, non négative* (**). En conséquence :

Le polynôme

$$x^{(p-1)(q-1)}(1 + x + x^2 + \cdots + x^{q-2}) - [1 + x^p + x^{2p} + \cdots + x^{(q-2)p}]$$

est décomposable, d'une seule manière, en $(q - 1)$ *binômes divisibles, chacun, par* $\mathrm{x}^{\mathrm{q}} - 1$.

12. *Réduction de* $\mathrm{x}^{\mathrm{m}} - 1 = 0$. Reprenons l'égalité (1), en l'écrivant ainsi :

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{x^p - 1}{x - 1}\,\frac{x^q - 1}{x - 1}\,\mathrm{X} \quad \text{. . . . . (13)}$$

La proposée (abstraction faite de la racine 1), peut donc être remplacée par

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = 0, \quad \text{. . . . . (14)}$$

$$x^{q-1} + x^{q-2} + \cdots + x + 1 = 0, \quad \text{. . . . . (15)}$$

$$\mathrm{X} = 0 \quad \text{. . . . . (16)}$$

Chacune de ces équations est *réciproque*. Par conséquent, si l'on pose, comme dans la Note XII :

$$x + \frac{1}{x} = z = \mathrm{Z}_1, \qquad x^n + \frac{1}{x^n} = \mathrm{Z}_n; \quad \text{. . . . . (17)}$$

(*) On doit avoir $\lambda < q - 1$, $\mu < q - 1$.

(**) *Bulletin*, p. 187.

puis que l'on fasse, pour abréger,

$$\alpha = \frac{p-1}{2}, \quad \beta = \frac{q-1}{2}, \quad \gamma = \frac{(p-1)(q-1)}{2} = 2\alpha\beta, \quad \ldots\ldots (18)$$

on aura les trois *réduites* :

$$Z_\alpha + Z_{\alpha-1} + \cdots + Z_1 + 1 = 0, \quad \ldots\ldots (19)$$

$$Z_\beta + Z_{\beta-1} + \cdots + Z_1 + 1 = 0, \quad \ldots\ldots (20)$$

$$Z_\gamma + A_1 Z_{\gamma-1} + A_2 Z_{\gamma-2} + \cdots + A_{\gamma-1} Z_1 + A_\gamma = 0 \quad \ldots\ldots (21)\,(*)$$

13. *Remarque.* La transformée de

$$x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1 = 0$$

est

$$Z_{\frac{m-1}{2}} + Z_{\frac{m-3}{2}} + \cdots + Z_1 + 1 = 0.$$

On a donc, identiquement :

$$\left.\begin{array}{l} Z_{\frac{m-1}{2}} + Z_{\frac{m-3}{2}} + \cdots + Z_1 + 1 \\ = (Z_\alpha + Z_{\alpha-1} + \cdots + Z_1 + 1)(Z_\beta + Z_{\beta-1} + \cdots + Z_1 + 1)(Z_\gamma + A_1 Z_{\gamma-1} + \cdots + A_\gamma) \end{array}\right\} \quad \ldots (B)$$

14. *Application.* Soient $p = 3$, $q = 5$. A cause de

$$X = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1,$$

l'identité devient

$$Z_7 + Z_6 + Z_5 + Z_4 + Z_3 + Z_2 + Z_1 + 1 = (Z_1 + 1)(Z_2 + Z_1 + 1)(Z_4 - Z_3 + Z_1 - 1).$$

D'après les valeurs rapportées dans la Note de 1870 (**), cette égalité se réduit à

$$z^7 + z^6 - 6z^5 - 5z^4 + 10z^3 + 6z^2 - 4z - 1 = (z+1)(z^2 + z - 1)(z^4 - z^3 - 4z^2 + 4z + 1);$$

ce qui est exact.

(*) Dans la dernière, on doit se le rappeler, les coefficients sont $+1$, -1 ou 0.

(**) L'expression de Z_{12} contient une faute typographique. Au lieu de $-112z^2$, on doit lire : $-112z^6$.

XIV (*).

UNE FORMULE RELATIVE A DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

1. *Formule de Viète* (**). On a, q étant *impair* :

$$\frac{\sin q\theta}{\sin\theta}=\frac{e^{q\theta\sqrt{-1}}-e^{-q\theta\sqrt{-1}}}{e^{\theta\sqrt{-1}}-e^{-\theta\sqrt{-1}}}=e^{(q-1)\theta\sqrt{-1}}+e^{(q-3)\theta\sqrt{-1}}+\cdots+e^{-(q-1)\theta\sqrt{-1}},$$

ou

$$\frac{\sin q\theta}{\sin\theta}=2[\cos(q-1)\theta+\cos(q-3)\theta+\cdots+\cos 2\theta]+1\quad . \quad . \quad . \quad (1)\ (^{***})$$

2. *Suite.* Si l'on change θ en $p\theta$, et qu'on divise, on trouve

$$\frac{\sin pq\theta\sin\theta}{\sin p\theta\sin q\theta}=\frac{2[\cos(q-1)p\theta+\cos(q-3)p\theta+\cdots+\cos 2p\theta]+1}{2[\cos(q-1)\theta+\cos(q-3)\theta+\cdots+\cos 2\theta]+1};\quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

et, à cause de la symétrie :

$$\frac{\sin pq\theta\sin\theta}{\sin p\theta\sin q\theta}=\frac{2[\cos(p-1)q\theta+\cos(p-3)q\theta+\cdots+\cos 2q\theta]+1}{2[\cos(p-1)\theta+\cos(p-3)\theta+\cdots+\cos 2\theta]+1}\quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

3. *Réduction.* Pour abréger, posons

$$\frac{\sin pq\theta\sin\theta}{\sin p\theta\sin q\theta}=Q. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Il est visible que

$$Q=\frac{e^{(p+q)\theta\sqrt{-1}}}{e^{(pq+1)\theta\sqrt{-1}}}\,\frac{(e^{2pq\theta\sqrt{-1}}-1)(e^{2\theta\sqrt{-1}}-1)}{(e^{2p\theta\sqrt{-1}}-1)(e^{2q\theta\sqrt{-1}}-1)}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Soient encore

$$e^{\theta\sqrt{-1}}=\alpha,\qquad \alpha^2=\beta.$$

(*) Communiquée au Congrès de Paris.

(**) Voir la Note XII.

(***) Cette manière de démontrer la *formule de Viète* me paraît simple.

L'égalité (5) devient

$$Q = \frac{1}{\alpha^{(p-1)(q-1)}} \frac{(1-\beta)(1-\beta^{pq})}{(1-\beta^p)(1-\beta^q)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

La nouvelle fraction ne diffère, de X (*), que par un changement de lettres. Donc (**) :

$$\frac{(1-\beta)(1-\beta^{pq})}{(1-\beta^p)(1-\beta^q)} = \sum_{n=0}^{n=(p-1)(q-1)} [\varphi(n) - \varphi(n-1)]\beta^n,$$

$$Q = \frac{1}{e^{(p-1)(q-1)\theta\sqrt{-1}}} \sum_{n=0}^{n=(p-1)(q-1)} [\varphi(n) - \varphi(n-1)]\, e^{2n\theta\sqrt{-1}},$$

ou

$$Q = \sum_{n=0}^{n=(p-1)(q-1)} [\varphi(n) - \varphi(n-1)] \left\{ \cos[2n-(p-1)(q-1)]\theta + \sqrt{-1}\sin[2n-(p-1)(q-1)]\theta \right\}. \quad (7)$$

4. *Suite.* Supposons que l'on attribue à n deux valeurs *complémentaires inégales ;* savoir :

$$n = n', \qquad n = (p-1)(q-1) - n'.$$

Les coefficients numériques, correspondants, seront :

$$\varphi(n') - \varphi(n'-1), \qquad \varphi[(p-1)(q-1)-n'] - \varphi[(p-1)(q-1)-n'-1].$$

Or, il est connu que

$$\varphi(n') + \varphi[(p-1)(q-1) - n' - 1] = 1 \text{ (***)},$$

ou

$$\varphi(n'-1) + \varphi[(p-1)(q-1) - n'] = 1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Dès lors, *les deux coefficients considérés sont égaux.* De plus, *les cosinus sont égaux, les sinus sont égaux et de signes contraires.* Enfin, pour $n = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$, on a :

$$\cos[2n-(p-1)(q-1)]\theta = 1, \qquad \sin[2n-(p-1)(q-1)]\theta = 0.$$

(*) Voir la Note XIII.

(**) Bien entendu, p et q sont supposés *impairs, premiers entre eux.*

(***) *Bulletin,* mars 1870, p. 185.

L'égalité (7) se réduit donc à

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin pq\theta \sin\theta}{\sin p\theta \sin q\theta} = 2\sum_{n=0}^{n=\frac{1}{2}(p-1)(q-1)-1} & [\varphi(n)-\varphi(n-1)]\cos[(p-1)(q-1)-2n]\theta \\ +\varphi\left[\frac{(p-1)(q-1)}{2}\right] & -\varphi\left[\frac{(p-1)(q-1)}{2}-1\right].\end{aligned}\right\} \quad \text{(A)}$$

Celle-ci est la formule annoncée.

5. *Remarques.* **I.** On peut remplacer le premier membre par

$$\frac{\cos(pq-1)\theta - \cos(pq+1)\theta}{\cos(p-q)\theta - \cos(p+q)\theta}.$$

Ainsi, *cette fraction représente le double d'une somme algébrique de cosinus* (*).

II. A cause de

$$\varphi\left[\frac{(p-1)(q-1)}{2}\right] + \varphi\left[\frac{(p-1)(q-1)}{2}-1\right] = 1, \text{(**)}$$

la seconde ligne de (A) peut être remplacée par

$$2\varphi\left[\frac{(p-1)(q-1)}{2}\right] - 1.$$

Elle se réduit donc à ± 1 (***).

6. *Application.* Soient $p = 7$, $q = 5$. On doit trouver

$$\frac{\cos 34\theta - \cos 36\theta}{\cos 2\theta - \cos 10\theta} = 2\sum_{n=0}^{n=11}[\varphi(n)-\varphi(n-1)]\cos(24-2n)\theta + \varphi(12) - \varphi(11);$$

(*) Abstraction faite de la seconde ligne.
(**) Cas particulier de la relation (8).
(***) Quand l'équation

$$pa + qb = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

admet une solution en nombres entiers, la valeur du binôme est $+1$. Dans le cas contraire, elle est -1.

ou, si l'on fait $2\theta = \omega$:

$$\frac{\cos 17\omega - \cos 18\omega}{\cos \omega - \cos 6\omega} = 2\sum_{n=0}^{n=11} [\varphi(n) - \varphi(n-1)] \cos(12-n)\omega + \varphi(12) - \varphi(11) \quad . \quad . \quad (8)$$

On a :

$$\varphi(-1) = 0,\quad \varphi(0) = 1,\quad \varphi(1) = 0,\quad \varphi(2) = 0,\quad \varphi(3) = 0,\quad \varphi(4) = 0,\quad \varphi(5) = 1,\quad \varphi(6) = 0,$$
$$\varphi(7) = 1,\quad \varphi(8) = 0,\quad \varphi(9) = 0,\quad \varphi(10) = 1,\quad \varphi(11) = 0,\quad \varphi(12) = 1.$$

Donc l'égalité (8) se réduit à celle-ci :

$$\frac{\cos 17\omega - \cos 18\omega}{\cos \omega - \cos 6\omega}$$
$$= 2[\cos 12\omega - \cos 11\omega + \cos 7\omega - \cos 6\omega + \cos 5\omega - \cos 4\omega + \cos 2\omega - \cos \omega] + 1.$$

Pour la vérifier, chassons le dénominateur.

Le produit du second membre, par $\cos \omega$, est

$$\cos 13\omega - \cos 12\omega + \cos 8\omega - \cos 7\omega + \cos 6\omega - \cos 5\omega + \cos 13\omega - \cos 2\omega + \cos \omega$$
$$+ \cos 11\omega - \cos 10\omega + \cos 6\omega - \cos 5\omega + \cos 4\omega - \cos 3\omega + \cos \omega - 1.$$

Le produit par $-\cos 6\omega$:

$$-\cos 18\omega + \cos 17\omega - \cos 13\omega + \cos 12\omega - \cos 11\omega + \cos 10\omega - \cos 8\omega + \cos 7\omega - \cos 6\omega.$$
$$-\cos 6\omega \quad + \cos 5\omega \quad - \cos \omega \quad + 1 \qquad - \cos \omega \quad + \cos 2\omega \quad - \cos 4\omega + \cos 5\,\omega.$$

Enfin, la somme de ces deux quantités se réduit à $-\cos 18\omega + 17\omega$.

7. *Intégrale définie.* Si l'on fait, pour abréger,

$$A_n = \varphi(n) - \varphi(n-1),$$

l'égalité (A) peut être écrite ainsi :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin pq\theta \sin \theta}{\sin p\theta \sin q\theta} &= 2\sum_{n=0}^{n=\frac{1}{2}(p-1)(q-1)-1} A_n \cos[(p-1)(q-1) - 2n]\theta \\ &+ 2\varphi\left[\frac{(p-1)(q-1)}{2} - 1\right] - 1. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Cela posé, multiplions par $\cos[(p-1)(q-1)-2n]\theta d\theta$, puis intégrons entre 0 et π. Nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{\sin pq\theta \sin\theta}{\sin p\theta \sin q\theta}\cos[(p-1)(q-1)-2n]\theta d\theta \\
&= 2\sum A_{n'}\int_0^\pi \cos[(p-1)(q-1)-2n']\theta \cos[(p-1)(q-1)-2n]\theta d\theta \\
&+ 2A_n\int_0^\pi \cos^2[(p-1)(q-1)-2n]\theta d\theta \\
&+ 2\varphi\left[\frac{(p-1)(q-1)}{2}-1\right]\int_0^\pi \cos[(p-1)(q-1)-2n]\theta d\theta.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (9)$$

Or : 1° La dernière intégrale est nulle, parce que $(p-1)(q-1)-2n$ est *positif*.

2° De même,

$$2\int_0^\pi \cos[(p-1)(q-1)-2n']\cos[(p-1)(q-1)-2n]\theta d\theta$$

$$=\int_0^\pi \cos 2[(p-1)(q-1)-n-n']d\theta + \cos(2n'-2n)\theta d\theta = 0.$$

3° Le coefficient de A_n est

$$\int_0^\pi \{1+\cos 2[(p-1)(q-1)-2n\}\theta d\theta = \pi.$$

Donc l'égalité (9) devient

$$\int_0^\pi \frac{\sin pq\theta \sin\theta}{\sin p\theta \sin q\theta}\cos[(p-1)(q-1)-2n]\theta d\theta = \pi[\varphi(n)-\varphi(n-1)] \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

D'après une remarque faite plusieurs fois, *cette intégrale définie égale* $+\pi$, $-\pi$, *ou zéro.*

8. *Application.* Soient, comme précédemment, $p=7$, $q=5$; puis $n=0$, $1, \ldots, 11$. La dernière relation donne, en particulier :

$$\int_0^\pi \frac{\sin 35\theta \sin\theta}{\sin 7\theta \sin 5\theta}\cos 24\theta d\theta = \pi, \qquad \int_0^\pi \frac{\sin 35\theta \sin\theta}{\sin 7\theta \sin 5\theta}\cos 12\theta d\theta = -\pi,$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin 35\theta \sin\theta}{\sin 7\theta \sin 5\theta}\cos 22\theta d\theta = -\pi, \qquad \int_0^\pi \frac{\sin 35\theta \sin\theta}{\sin 7\theta \sin 5\theta}\cos 10\theta d\theta = \pi,$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin 35\theta \sin\theta}{\sin 7\theta \sin 5\theta}\cos 20\theta d\theta = 0, \qquad \int_0^\pi \frac{\sin 35\theta \sin\theta}{\sin 7\theta \sin 5\theta}\cos 8\theta d\theta = -\pi,$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin 35\theta \sin\theta}{\sin 7\theta \sin 5\theta}\cos 18\theta d\theta = 0, \qquad \int_0^\pi \frac{\sin 35\theta \sin\theta}{\sin 7\theta \sin 5\theta}\cos 6\theta d\theta = 0,$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin 35\theta \sin\theta}{\sin 7\theta \sin 5\theta}\cos 16\theta d\theta = 0, \qquad \int_0^\pi \frac{\sin 35\theta \sin\theta}{\sin 7\theta \sin 5\theta}\cos 4\theta d\theta = \pi,$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin 35\theta \sin\theta}{\sin 7\theta \sin 5\theta}\cos 14\theta d\theta = \pi, \qquad \int_0^\pi \frac{\sin 35\theta \sin\theta}{\sin 7\theta \sin 5\theta}\cos 2\theta d\theta = -\pi.$$

9. *Autre intégrale.* Si, dans (C), on fait $n = 0, 1, 2, \ldots, \frac{(p-1)(q-1)}{2} - 1$; et que l'on ajoute, on trouve

$$\int_0^\pi \frac{\sin pq\theta \sin\theta}{\sin p\theta \sin q\theta} \mathrm{S} \,.\, d\theta = \pi \left\{ \varphi\left[\frac{(p-1)(q-1)}{2} - 1\right] - \varphi(-1) \right\};$$

en supposant

$$\mathrm{S} = \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cdots + \cos\left[\frac{(p-1)(q-1)}{2} - 1\right]\theta.$$

D'après une formule connue,

$$\mathrm{S} = \frac{\cos\frac{(p-1)(q-1)}{2}\theta \sin\left[\frac{(p-1)(q-1)}{2} - 1\right]\theta}{\sin\theta}.$$

D'autre part, $\varphi(-1) = 0$. Donc, finalement,

$$\int_0^\pi \frac{\sin pq\theta \cos \frac{(p-1)(q-1)}{2}\theta \sin\left[\frac{(p-1)(q-1)}{2} - 1\right]\theta}{\sin p\theta \sin q\theta} d\theta = \pi\varphi\left[\frac{(p-1)(q-1)}{2} - 1\right]. \quad \text{(D)}$$

Par exemple,

$$\int_0^\pi \frac{\sin 35\theta \cos 12\theta \sin 11\theta}{\sin 7\theta \sin 5\theta} = \varphi(11) = 0.$$

Ainsi, la somme des douze intégrales ci-dessus (8) doit être nulle. C'est ce qui a lieu.

Liége, 25 septembre 1889.

ERRATA.

Page 54, dernière formule. *Au lieu de* $(32 \sin^3\varphi - 32 \sin^3\varphi + 6 \sin \varphi)\varphi$, *lisez :*

$$(32 \sin^5\varphi - 32 \sin^3\varphi + 6 \sin \varphi)d\varphi.$$

Page 68, formule (E). *Au lieu de* $\frac{\mu - 1}{2}$, *lisez :* $\frac{\mu - i}{2}$.

Page 88, ligne 8. *Au lieu de* $(p-1)(q-1)$ *inclusivement, lisez :* $(p-1)(q-1)$, *inclusivement*, .