SUR

UN TABLEAU NUMÉRIQUE

ET SUR

SON APPLICATION A CERTAINES TRANSCENDANTES;

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 2 avril 1887.)

SUR

UN TABLEAU NUMÉRIQUE

ET SUR

SON APPLICATION A CERTAINES TRANSCENDANTES.

I. PRÉLIMINAIRES.

1. Le *tableau* suivant, formé de progressions arithmétiques et de progressions géométriques, *contient, sans répétition, tous les nombres entiers* (zéro excepté) (*).

1	3	5	7	9	11	...
2	6	10	14	18	22	...
4	12	20	28	36	44	...
8	24	40	56	72	88	..
16	48	80	112	144	176	...
...	...	..	...	...	...	...

2. Si la première ligne est remplacée par

$$1, \quad 1+a, \quad 1+2a, \quad 1+3a, \quad \ldots; \qquad (a > 2)$$

(*) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 65. Ce tableau peut être regardé comme une *table de Pythagore*, dans laquelle les multiplicandes seraient les *nombres impairs*, et les multiplicateurs, les *puissances de* 2.

et que la première colonne le soit par

$$1,\quad b,\quad b^2,\quad b^3,\quad \ldots$$

ce second tableau :

1	$1+a$	$1+2a$	$1+3a$	$1+4a$	.....
b	$(1+a)b$	$(1+2a)b$	$(1+3a)b$	$(1+4a)b$	....
b^2	$(1+a)b^2$	$(1+2a)b^2$	$(1+3a)b^2$	$(1+4a)b^2$	....
b^3	$(1+a)b^3$	$(1+2a)b^3$	$(1+3a)b^3$	$(1+4a)b^3$	.....
.....	.....	....	.....	....	....

ne contiendra pas tous les nombres entiers.

En effet, si l'on veut qu'il s'y trouve le nombre 2, on doit prendre $b=2$. Mais alors il ne contient pas les nombres entiers 3, 4, 5, ..., a.

3. Au moyen du premier tableau, formons celui-ci :

u_1	u_3	u_5	u_7	...
u_2	u_6	u_{10}	u_{14}	...
u_4	u_{12}	u_{20}	u_{28}	..
u_8	u_{24}	u_{40}	u_{56}	...
...	...	...	...	... ;

et considérons les séries :

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \cdots; \quad \ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + \cdots, \\ S_2 = u_2 + u_6 + u_{10} + u_{14} + \cdots, \\ S_3 = u_4 + u_{12} + u_{20} + u_{28} + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_1 = u_1 + u_2 + u_4 + u_8 + \cdots, \\ \Sigma_2 = u_3 + u_6 + u_{12} + u_{24} + \cdots, \\ \Sigma_3 = u_5 + u_{10} + u_{20} + u_{40} + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Je dis que :

Si toutes les séries sont convergentes, on a :

$$\left.\begin{array}{l} S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \cdots, \\ S = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \cdots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (A)$$

Cette proposition devient évidente au moyen du lemme suivant.

4. *Soit une série*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad \ldots \quad (4)$$

On supprime les termes $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma, \ldots$, *dont les indices vont en augmentant, et qui sont tels, que la série auxiliaire :*

$$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \cdots \quad \ldots \quad (5)$$

soit convergente. Il reste

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{\alpha-1} + u_{\alpha+1} + \cdots + u_{\beta-1} + u_{\beta+1} + \cdots \quad \ldots \quad (6)$$

Cela posé : les séries (4), (6) *sont, simultanément, convergentes, divergentes ou indéterminées.*

Appelons Σ_n la somme des termes $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma, \ldots$ qui précèdent u_n.

La somme des termes de la série (6), compris dans S_n, est $S_n - \Sigma_n$.

Or :

1° Si la série (4) est convergente, $S_n - \Sigma_n$ a une limite, dont la valeur est $\lim S_n - \lim \Sigma_n = S - \Sigma$;

Etc.

5. *Remarque.* — Cette proposition permet de reconnaître, *sans calcul,* la convergence ou la divergence de certaines séries. Soit, par exemple,

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots$$

Supprimons

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{8}, \quad -\frac{1}{9}, \quad \ldots$$

lesquels, évidemment, forment une série convergente. Il reste la série *divergente* (*) :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \cdots$$

Donc la proposée est *divergente.*

6. Revenons aux égalités (A).

Si, dans S, on supprime les termes

$$u_1, \quad u_3, \quad u_5, \quad \ldots,$$

il reste la série *convergente*

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + \cdots,$$

dont la somme est $S - S_1$.

(*) Parce que les dénominateurs forment une progression arithmétique.

Si, dans celle-ci, on supprime

$$u_2, \quad u_6, \quad u_{10}, \quad \ldots,$$

il reste la série *convergente*

$$u_4 + u_8 + u_{12} + \cdots,$$

dont la somme est $S - S_1 - S_2$.

En continuant de la sorte, on trouve

$$0 = lim\,(S - S_1 - S_2 - S_3 - \cdots);$$

ce qu'il fallait prouver (*).

7. *Suite.* — Soit, généralement,

$$u_n = \mathfrak{L}(v_n). \qquad (7)$$

Les relations (A) peuvent être écrites ainsi :

$$P = P_1P_2P_3\ldots = \Pi_1\Pi_2\Pi_3\ldots; \qquad (B)$$

pourvu que

$$P = v_1v_2v_3\ldots; \qquad (8)$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = v_1v_3v_5v_7\ldots, \\ P_2 = v_2v_6v_{10}v_{14}\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots; \end{array}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_1 = v_1v_2v_4v_8\ldots, \\ \Pi_2 = v_3v_6v_{12}v_{24}\ldots, \\ \Pi_3 = v_5v_{10}v_{20}v_{40}\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (10)$$

8. *Remarques.* — 1° *Si la série* (1), *supposée convergente, a tous ses termes positifs, les séries* (2), (3) *sont convergentes.*

2° *La réciproque n'est pas vraie.* Car si les séries (2), par exemple, sont

(*) Cette démonstration est peu rigoureuse; mais je crois qu'il serait facile de la rendre telle.

convergentes, la série (1) peut être considérée comme ayant pour termes $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$.

3° Dans le cas de la série harmonique :

$$\Sigma_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2,$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots = \frac{2}{3},$$

$$\Sigma_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \cdots = \frac{2}{5},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots ;$$

et la série (1) est *divergente.*

4° *Si les termes de la série (1), pris en valeurs absolues, sont respectivement inférieurs à ceux de la série harmonique, les séries (3) sont convergentes.*

II. APPLICATIONS.

9. *Première application.* — Soit d'abord $u_n = q^n$ (*); et, par conséquent :

$$S = q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \cdots ; \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= q + q^3 + q^5 + q^7 + \cdots, \\ S_2 &= q^2 + q^6 + q^{10} + q^{14} + \cdots, \\ S_3 &= q^4 + q^{12} + q^{20} + q^{28} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots ; \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_1 &= q + q^2 + q^4 + q^8 + \cdots, \\ \Sigma_2 &= q^3 + q^6 + q^{12} + q^{24} + \cdots, \\ \Sigma_3 &= q^5 + q^{10} + q^{20} + q^{40} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots ; \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

(*) Comme dans la théorie des fonctions elliptiques, on suppose

$$q = e^{-\pi\frac{\omega'}{\omega}} < 1.$$

puis :

$$S = \frac{q}{1-q}, \quad S_1 = \frac{q}{1-q^2}, \quad S_2 = \frac{q^2}{1-q^4}, \quad S_3 = \frac{q^4}{1-q^8}, \quad \ldots \ldots \tag{14}$$

Il résulte, de ces valeurs,

$$\frac{q}{1-q} = \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^4}{1-q^8} + \cdots; \tag{C}$$

relation connue (*).

10. *Suite.* — Soit, comme dans le Mémoire cité (**),

$$F(q) = q + q^2 + q^4 + q^8 + \cdots \tag{15}$$

Les formules (13) se réduisent à :

$$\Sigma_1 = F(q), \quad \Sigma_2 = F(q^3), \quad \Sigma_3 = F(q^5), \ldots \tag{16}$$

et comme

$$S = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \cdots, \tag{A}$$

la transcendante $F(q)$ satisfait à cette relation simple

$$F(q) + F(q^3) + F(q^5) + \cdots = \frac{q}{1-q} \ (^{***}), \tag{D}$$

conséquence immédiate de la formation du tableau numérique.

(*) *Recherches*...; page 75.
(**) *Ibid.*, page 76.
(***) Les *Recherches* contiennent diverses autres égalités, dans lesquelles entre $F(q)$. Par exemple celle-ci :

$$\int_0^1 \left[2\,\frac{1-qk'}{1-q^2} + \frac{1-k'}{q\,\wp q} \right] \omega\, dq = \pi \wp 2,$$

déjà signalée en 1872. (*Note sur une formule de M. Botesu.*)

11. *Une digression.* — Dans la *Note* indiquée, on trouve (page 6) :

$$\int_0^1 dx\left[\frac{x^n}{1-x}+\frac{x^{n-1}}{\ell(x)}+\frac{F(x^n)-x^n}{1+x}\right]=0,$$

ou

$$\int_0^1 dx\left[2\frac{x^{n+1}}{1-x^2}+\frac{x^{n-1}}{\ell(x)}+\frac{F(x^n)}{1+x}\right]=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E)$$

Si l'on suppose $n=1$, $n=3$, $n=5,\ldots$, et que l'on ait égard à la relation (D), on conclut, de cette égalité,

$$\int_0^1 dx\left[2\frac{x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{(1-x^2)\,\ell x}+\frac{x}{1-x^2}\right]=0,$$

ou

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}\left[\frac{x(1+2x-x^2)}{1-x^2}+\frac{1}{\ell x}\right]=0\ (*), \quad \ldots\ldots \quad (F)$$

Pour simplifier cette formule, je la combine, par addition, avec celle-ci :

$$\int_0^1 \frac{x(1-2x+x^2)}{(1-x^2)^2}\,dx=\ell 2-\frac{1}{2};$$

laquelle est, à peu près, évidente. Le résultat cherché est

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}\left[\frac{2x}{1-x^2}+\frac{1}{\ell x}\right]=\ell 2-\frac{1}{2}. \quad \ldots\ldots \quad (G)$$

12. *Deuxième application.* — Soit

$$v_n=1-q^n.$$

(*) La sommation est *légitime*, parce que les séries employées sont convergentes. Une simple figure démontre ce Lemme.

D'après les formules (8), (9), et au moyen de notations connues (*) :

$$P = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots = \alpha\alpha', \quad \ldots \quad (17)$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = (1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots = \alpha, \\ P_2 = (1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})\ldots = \alpha_1, \\ P_3 = (1-q^4)(1-q^{12})(1-q^{20})\ldots = \alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (18)$$

Donc

$$\alpha\alpha' = \alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots \text{ (**)}. \quad \ldots \quad (19)$$

13. *Suite.* — Le développement du premier membre est $\sum_0^\infty (n_p - n_i) q^n$ (***). De plus :

$$\alpha = \sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q)^n,$$

$$\alpha_1 = \sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q^2)^n,$$

$$\alpha_2 = \sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q^4)^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots \text{ (IV)}.$$

Par conséquent :

$$\sum_0^\infty (n_p - n_i) q^n = \sum_0^\infty \varphi_i(\lambda)(-q)^\lambda \cdot \sum_0^\infty \varphi_i(\mu)(-q^2)^\mu \cdot \sum_0^\infty \varphi_i(\nu)(-q^4)^\nu \ldots, \quad \ldots \quad (20)$$

et

$$n_p - n_i = \sum (-1)^{\lambda+\mu+\nu+\cdots} \varphi_i(\lambda)\varphi_i(\mu)\varphi_i(\nu)\ldots, \quad \ldots \quad (21)$$

si

$$n = \lambda + 2\mu + 4\nu + \cdots \text{ (V)} \quad \ldots \quad (22)$$

14. *Exemple.* — Soit $n = 5$. L'équation (22) est vérifiée par

$\lambda = 5,\ \mu = 0,\ \nu = 0$; $\lambda = 3,\ \mu = 1,\ \nu = 0$; $\lambda = 1,\ \mu = 2,\ \nu = 0$; $\lambda = 1,\ \mu = 0,\ \nu = 1$.

(*) *Recherches...*; pages 1, 64.
(**) *Ibid.*, formule (252).
(***) *Ibid.*, page 7.
(IV) *Ibid.*, page 5.
(V) D'après un théorème connu, le premier membre est zéro, + 1 ou — 1. *Recherches...*; page 7.

On doit donc trouver

$$5_p - 5_i = -\varphi_i(5) + \varphi_i(3)\varphi_i(1) - \varphi_i(1)\varphi_i(2) + \varphi_i(1)\varphi_i(1);$$

ou (*)

$$2 - 1 = -1 + 1 - 0 + 1;$$

ce qui est exact.

14. *Troisième application* — Si l'on suppose

$$v_n = 1 + q^n,$$

on obtient, sans nouveaux calculs,

$$\beta' = \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \qquad (23)$$

15. *Remarques.* — 1° Soit

$$\mathcal{F}(q) = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots \qquad (24)$$

Alors, par une formule connue (**),

$$\mathcal{F}(q) = \beta\,\mathcal{F}(q^2). \qquad (25)$$

Il résulte, de cette égalité (***),

$$\mathcal{F}(q) = \beta\beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \qquad (26)$$

Or :

$$\left.\begin{aligned} \beta &= (1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots\ldots \\ \beta_1 &= (1+q^2)(1+q^6)(1+q^{10})\ldots\ldots, \\ \beta_2 &= (1+q^4)(1+q^{12})(1+q^{20})\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

(*) *Recherches* . . . ; Tables II et III.

(**) *Ibid.*, page 52, note.

(***) Voir, par exemple, le *Calcul intégral de Bertrand*, p. 646.

Donc

$$\mathcal{F}(q) = (1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3)\ldots = \beta\beta', \quad \ldots \quad (28)$$

puis

$$\beta' = \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots; \quad \ldots \quad (23)$$

comme ci-dessus (*).

2° L'égalité (26) donne

$$\mathcal{F}(q^2) = \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots;$$

donc (23)

$$\beta' = \mathcal{F}(q^2). \quad \ldots \quad (29)$$

3° On sait que $\alpha\beta\beta' = 1$ (**). Donc, à cause de

$$\mathcal{F}(q) = \beta\beta' : \quad \ldots \quad (28)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \mathcal{F}(q) \quad \ldots \quad (30)$$

4° Le développement du premier membre, suivant les puissances de q, est $\sum_0^\infty \varphi(n) q^n$ (***). D'ailleurs, par la *définition* (24) :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}(q) = 1 &+ (q + q^2 + q^3 + \cdots) + (q + q^2 + q^3 + \cdots)(q^2 + q^4 + q^6 + \cdots) \\ &+ (q + q^2 + q^3 + \cdots)(q^2 + q^4 + q^6 + \cdots)(q^3 + q^6 + q^9 + \cdots) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \quad (31)$$

Donc, *dans cette nouvelle série, le coefficient de* q^n *est* φ(n) (IV).

5° On a ce petit théorème d'Arithmétique :

Le nombre des décompositions de n *en parties inégales* (ou $\varphi(n)$), *égale*

(*) En 1873, je n'avais point fait attention à ces conséquences de la formule (25) et du *tableau numérique*.

(**) *Recherches*. . . ; page 2.

(***) *Ibid.*, page 3.

(IV) *Ibid.*, page 48. On ne doit pas oublier que $\varphi(n)$ représente le *nombre des décompositions de* n *en parties entières, positives, inégales*.

le nombre des décompositions de n *en parties appartenant à la Table de Pythagore suivante* (*),

1	2	3	4	5	6	7	8	...
2	4	6	8	10	12	14	16	...
3	6	9	12	15	18	21	24	...
4	8	12	16	20	24	28	32	...
5	10	15	20	25	30	35	40	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

pourvu que l'on prenne la première ligne, puis les deux premières lignes, puis les trois premières, etc. (**).

Soit, par exemple, $n = 8$, auquel cas $\varphi(n) = 6$ (***).

Les décompositions, dont il s'agit, sont au nombre de 6; savoir :

$$8, \quad 6+2, \quad 4+4, \quad 2+6, \quad 1+4+3, \quad 3+2+3;$$

conformément à l'énoncé (IV).

16. *Quatrième application.* — Soit

$$u_n = x^n - x^{2n} + x^{3n}; \quad (0 < x < 1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (32)$$

(*) Table *indéfinie*.

(**) Il a une grande analogie avec celui que l'on trouve à la page 73 des *Recherches*.

(***) *Loc. cit.*, Table I.

(IV) n est considéré comme *une partie* de n.

et, par conséquent :

$$\begin{aligned}
S &= (x - x^2 + x^3) + (x^2 - x^4 + x^6) + (x^3 - x^6 + x^9) + \cdots,\\
S_1 &= (x - x^2 + x^3) + (x^3 - x^6 + x^9) + (x^5 - x^{10} + x^{15}) + \cdots,\\
S_2 &= (x^2 - x^4 + x^6) + (x^6 - x^{12} + x^{18}) + (x^{10} + x^{20} + x^{30}) + \cdots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il est clair que :

$$S = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} = \frac{x}{1-x}\left(1 - \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x+x^2}\right), \quad \ldots \quad (32)$$

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^3}{1-x^6} = \frac{x}{1-x^2}\left(1 - \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2+x^4}\right),\\
S_2 &= \frac{x^2}{1-x^4}\left(1 - \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^4}{1+x^4+x^8}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (33)$$

Donc, après suppression du facteur $\frac{x}{1-x}$:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x+x^2} = \frac{1}{1+x}\left[1 - \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2+x^4}\right] + \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}\left[1 - \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^4}{1+x^4+x^8}\right]\\
+ \frac{x^3}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}\left[1 - \frac{x^4}{1+x^8} + \frac{x^8}{1+x^8+x^{16}}\right] + \cdots
\end{aligned}$$

Si l'on fait les multiplications indiquées, les termes formant les deux premières colonnes se détruisent deux à deux, sauf le terme $\frac{1}{1+x}$.

Ainsi, l'égalité devient, au moyen d'une réduction évidente,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x+x^2} &= \frac{1}{(1+x)(1+x^2+x^4)} + \frac{x^3}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4+x^8)}\\
&+ \frac{x^9}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8+x^{16})} + \frac{x^{21}}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}+x^{32})} + \cdots (*). \quad (H)
\end{aligned}$$

(*) Les exposants sont :

$$0 = 3 - 3, \quad 3 = 6 - 3, \quad 9 = 12 - 3, \quad 21 = 24 - 3, \ldots$$

17. *Suite.* — Pour toute valeur positive de x, la série est convergente. Donc la relation (H), obtenue en supposant $x < 1$, subsiste pour $x \overline{\gtrless} 1$ (*). Si, par exemple, $x = 1$, on trouve

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2^2.3} + \frac{1}{2^3.3} + \cdots;$$

ce qui est exact.

18. *Cinquième application.* — Soit

$$u_n = x^n - x^{2n}.$$

Des calculs analogues aux précédents conduisent à cette autre *relation générale :*

$$1 = \frac{1-x+x^2}{1+x^2} + x\frac{1-x^2+x^4}{(1+x^2)(1+x^4)} + x^3\frac{1-x^4+x^8}{(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)} + x^7\frac{1-x^8+x^{16}}{(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})} + \cdots \quad \text{(K)}$$

19. *Théorème d'Arithmétique. — Soit* a *un nombre entier, supérieur à l'unité. Les nombres entiers*

$$N_1 = a^2 - a + 1, \quad N_2 = a^4 - a^2 + 1, \quad N_3 = a^8 - a^4 + 1, \quad N_4 = a^{16} - a^8 + 1, \quad \ldots\ldots$$

sont : 1° *impairs;* 2° *premiers avec* a *et* a — 1 ; 3° *premiers entre eux, deux à deux.*

1° Soit, généralement, $N_n = a^{2k} - a^k + 1$ (**). a^k et a^{2k} sont *de même parité;* donc N_n est *impair.*

(*) Et même pour $x < 0$, comme on le reconnaît aisément. Le seul cas d'exception pourrait être celui de $x = -1$. Mais si l'on multiplie les deux membres par $x + 1$, et qu'on attribue à x cette valeur particulière, on obtient, comme ci-dessus,

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2^2.3} - \frac{1}{2^3.3} - \cdots$$

Ainsi, la formule (H) est générale.

(**) $k = 2^n$.

2° $N_n = a^k(a^k - 1) + 1$. Évidemment, N_n *est premier avec* a^k *et* $a^k - 1$; donc ce nombre est premier avec a et $a - 1$.

3° On a, par des multiplications successives :

$$N_1(a^2 + a + 1) = a^4 + a^2 + 1,$$
$$N_2(a^4 + a^2 + 1) = a^8 + a^4 + 1,$$
$$N_3(a^8 + a^4 + 1) = a^{16} + a^8 + 1,$$
$$N_4(a^{16} + a^8 + 1) = a^{32} + a^{16} + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De là résulte, en particulier,

$$N_1N_2N_3N_4(a^2 + a + 1) = a^{32} + a^{16} + 1.$$

Mais

$$N_5 = a^{32} - a^{16} + 1.$$

Donc

$$N_1N_2N_3N_4(a^2 + a + 1) - N_5 = 2a^{16}; \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

et, en général,

$$N_1N_2N_3N_4 \ldots N_n(a^2 + a + 1) - N_{n+1} = 2a^k \text{ (*)}. \quad \ldots\ldots \quad (L)$$

Cela posé, si N_3 et N_5 (34), par exemple, avaient un facteur premier commun, p, ce facteur serait 2 ou un diviseur de a; contrairement à ce que l'on vient de voir.

20. *Sixième application.* — Prenons

$$u_n = \frac{x^n}{n},$$

x étant compris entre 0 et 1, exclusivement.

(*) La relation (L) a d'assez nombreuses conséquences, sur lesquelles nous reviendrons peut-être.

Il est visible que

$$S = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots = -\mathcal{L}(1 - x),$$

$$S_1 = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\cdots = \frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{1+x}{1-x},$$

$$S_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{10} + \cdots\cdots = \frac{1}{4}\mathcal{L}\frac{1+x^2}{1-x^2},$$

$$S_3 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{20}}{20} + \cdots\cdots = \frac{1}{8}\mathcal{L}\frac{1+x^4}{1-x^4},$$

. . . .

Par suite,

$$2\mathcal{L}\frac{1}{1-x} = \mathcal{L}\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{1}{4}\mathcal{L}\frac{1+x^4}{1-x^4} + \cdots;$$

ou, en passant des logarithmes aux nombres, et en changeant x^2 en x :

$$\frac{1}{1-x} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1+x^4}{1-x^4}\right)^{\frac{1}{8}}\left(\frac{1+x^8}{1-x^8}\right)^{\frac{1}{16}}\cdots \text{(*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{M})$$

Si, par exemple, $x = \frac{1}{2}$:

$$2 = \left(\frac{3}{1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{17}{15}\right)^{\frac{1}{8}}\left(\frac{257}{255}\right)^{\frac{1}{16}}\cdots$$

21. *Remarque.* — On a

$$1 - x = (1-x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{4}}(1-x)^{\frac{1}{8}}\cdots$$

Donc, par multiplication,

$$1 = (1+x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1+x^2}{1+x}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{1+x^4}{(1+x)(1+x^2)}\right]^{\frac{1}{8}}\left[\frac{1+x^8}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}\right]^{\frac{1}{16}}\cdots$$

(*) Dans les Mémoires intitulés : *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet, Recherches sur la constante* G *et sur les intégrales eulériennes,* on trouve des formules analogues à celle-ci.

Le premier facteur est $(1+x)^{\frac{1}{2}}$; le produit des deux premiers facteurs égale $\left[(1+x)(1+x^2)\right]^{\frac{1}{4}}$; le produit des trois premiers facteurs égale $\left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\right]^{\frac{1}{8}}$; etc. Ainsi

$$Lim.\left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^n)\right]^{\frac{1}{2n}}=1,\quad (x<1)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{N})$$

en supposant $n=2^k$.

22. *Septième application.* — Soient :

$$\left.\begin{aligned}
S_1&=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots,\\
S_2&=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\frac{1}{18}-\cdots,\\
S_3&=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}+\frac{1}{20}-\frac{1}{28}+\frac{1}{36}-\cdots,\\
S_4&=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{1}{40}-\frac{1}{56}+\frac{1}{72}-\cdots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

et, par conséquent :

$$S_1=\frac{\pi}{4},\quad S_2=\frac{\pi}{8},\quad S_3=\frac{\pi}{16},\quad S_4=\frac{\pi}{32},\ \cdots$$

Il est clair que

$$S=S_1+S_2+S_3+\cdots=\frac{\pi}{2},$$

série connue (*).

Donc, en vertu du Lemme (4) :

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\cdots\ (^{**})\quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{P})$$

(*) Euler, *Introduction à l'Analyse,* tome I, page 226.

(**) Voici la *loi* des termes :

1° Si $n=2^x$, $u_n=\frac{1}{n}$; 2° Si n est *impair,* $u_n=\pm\frac{1}{n}$, selon que $n=4\mu\pm 1$; 3° Si $n=2^{\alpha}i$, i étant *impair,* $u_n=u_i$.

23. *Remarque.* — D'après les formules (35) :

$$\Sigma_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\cdots = 2,$$

$$\Sigma_2 = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \cdots\right) = -\frac{2}{3},$$

$$\Sigma_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \cdots\cdots = \frac{2}{5},$$

$$\Sigma_4 = -\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} + \cdots\right) = -\frac{2}{7},$$

. . . .

puis

$$S = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) = \frac{\pi}{2};$$

comme ci-dessus.

24. *Huitième application.* — Prenons

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots = G\ (^*),$$

$$S_2 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{14^2} + \cdots = \frac{1}{4} G,$$

$$S_3 = \frac{1}{4^2} - \frac{1}{12^2} + \frac{1}{20^2} - \frac{1}{28^2} + \cdots = \frac{1}{16} G,$$

. . . .

Il résulte, de ces égalités,

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{4}{3} G\ (^{**}) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (Q)$$

(*) *Recherches sur la constante* G, p. 1.
(**) La loi des signes, et les calculs, sont les mêmes que dans le paragraphe 22.

25. *Neuvième application.* — Soit, comme dans les *Notes sur la théorie des fractions continues,*

$$u_n = \frac{q^n}{1+q^{2n}}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

et, par conséquent,

$$S = \frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi} - 1\right) (^*) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

On a

$$S_1 = \frac{q}{1+q^2} + \frac{q^3}{1+q^6} + \frac{q^5}{1+q^{10}} + \cdots = \frac{k_1\omega_1}{2\pi} (^{**}) \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Donc

$$S_2 = \frac{k_2\omega_2}{2\pi}, \quad S_3 = \frac{k_3\omega_3}{2\pi}, \ldots;$$

puis

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3 + \cdots = \frac{1}{2}(2\omega - \pi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (R)$$

Ainsi, les fractions $k_1\omega_1$, $k_2\omega_2$, $k_3\omega_3, \ldots$ *forment une série convergente, dont la somme est* $\frac{1}{2}(2\omega - \pi)$ (***).

26. *Suite.* — L'égalité (R) peut être écrite autrement.

La formule connue :

$$\frac{k\omega}{2\pi} = q^{\frac{1}{2}}(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \cdots)^2 \ (^{\text{IV}}),$$

donne, par le changement de q en q^2 :

$$k_1\omega_1 = 2\pi\left(q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{9}{2}} + q^{\frac{25}{2}} + q^{\frac{49}{2}} + \cdots\right)^2.$$

(*) *Loc. cit.*, page 49.

(**) *Ibid.*, page 13.

(***) Proposition analogue à celle que l'on trouve à la page 74 des *Recherches sur quelques produits indéfinis*.

(IV) *Recherches...*, page 2.

D'un autre côté,

$$2\omega - \pi = 4\pi (q + q^4 + q^9 + q^{16} + \cdots)(1 + q + q^4 + q^9 + \cdots).$$

Par conséquent, la relation (R) devient

$$\left.\begin{aligned}&\left(q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{9}{2}} + q^{\frac{25}{2}} + q^{\frac{49}{2}} + \cdots\right)^2 + (q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \cdots)^2\\ &+ (q^2 + q^{18} + q^{50} + q^{98} + \cdots)^2 + (q^4 + q^{36} + q^{100} + q^{196} + \cdots)^2 + \cdots\\ &= (q + q^4 + q^9 + q^{16} + \cdots)(1 + q + q^4 + q^9 + \cdots)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{S})$$

27. *Remarque.* — Cette égalité (S) démontre un autre petit théorème d'Arithmétique, presque évident :

La somme de deux carrés (*) *égale la demi-somme de deux carrés impairs, ou la somme de deux carrés impairs, ou le double de la somme de deux carrés impairs, etc.*

Par exemple,

$$2^2 + 5^2 = \frac{1}{2}(5^2 + 7^2), \quad 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2, \quad 4^2 + 10^2 = 2(2^2 + 5^2), \text{ etc},$$

28. *Suite.* — On sait que

$$q + q^9 + q^{25} + \cdots = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{k'})\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}},$$

et que

$$q^2 + q^8 + q^{18} + \cdots = \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{\frac{\omega}{\pi}(1 + k')}\right] \ (^{**}).$$

(*) L'un d'eux peut être nul.
(**) *Recherches*. . ., pages 102 et 2.

Conséquemment, si l'on change, encore, q en q^2, la relation (S) se transforme en

$$\omega\left(1-\sqrt{k_1}\right)^2+\omega_1\left(1-\sqrt{k_1'}\right)^2+\omega_2\left(1-\sqrt{k_2'}\right)^2+\cdots=2\left[\omega(1+k')-\pi\right]. \quad (\mathrm{T})$$

Voici donc une troisième série, formée par des transcendantes elliptiques, dont la somme est connue (*).

29. *Autre sommation.* — Reprenons la formule

$$u_n=\frac{q^n}{1+q^{2n}}. \quad (36)$$

Il en résulte

$$\Sigma_1=\frac{q}{1+q^2}+\frac{q^2}{1+q^4}+\frac{q^4}{1+q^8}+\cdots; \quad (39)$$

c'est-à-dire,

$$\Sigma_1=q+q^2-q^3+q^4+q^5-q^6-q^7+q^8+q^9+q^{10}-q^{11}-q^{12}+q^{13}-q^{14}+\cdots(^{**}). \quad (40)$$

Dans cette remarquable série, *le coefficient de* q^n *est* ± 1, *selon que* n *égale* $2^\alpha(4\mu\pm1)$.

En effet :

1° Les fractions $\frac{q}{1+q^2}$, $\frac{q^2}{1+q^4}$, $\frac{q^4}{1+q^8}$, ..., produisent des termes dans lesquels n a les formes suivantes :

$$1+2x,\quad 2+4x=2(1+2x),\quad 4+8x=4(1+2x)\cdots;$$

donc $n=1, 2, 3, 4, 5, \ldots$: *la série renferme toutes les puissances entières de* q, sans répétition.

2° Si $n=2^\alpha$, *le coefficient est* $+1$.

3° Si $n=2^\alpha+2q.2^{\alpha+1}=2^\alpha(4q+1)$, *le coefficient est* $+1$.

4° Si $n=2^\alpha+(2q+1)2^{\alpha+1}=2^\alpha(4q+3)$, *le coefficient est* -1.

(*) J'ai vérifié, directement, l'égalité (T).

(**) Voir, à la page 90 des *Recherches*, un développement analogue à celui-ci.

30. *Remarques.* — 1° La formule (40) peut être écrite ainsi :

$$\Sigma_1 = (q + q^2 + q^4 + q^8 + \cdot\cdot) - (q^3 + q^6 + q^{12} + q^{24} + \cdots) + (q^5 + q^{10} + q^{20} + \cdots) + (q^7 + q^{14} + q^{28} + \cdots) - \cdots$$

Conséquemment (15)

$$\Sigma_1 = \frac{q}{1+q^2} + \frac{q^2}{1+q^4} + \frac{q^4}{1+q^8} + \cdots = \mathrm{F}(q) - \mathrm{F}(q^3) + \mathrm{F}(q^5) - \cdots; \quad . \quad . \quad (\mathrm{U})$$

puis

$$\Sigma_2 = \mathrm{F}(q^3) - \mathrm{F}(q^9) + \mathrm{F}(q^{15}) - \mathrm{F}(q^{21}) + \cdots,$$

$$\Sigma_3 = \mathrm{F}(q^5) - \mathrm{F}(q^{15}) + \mathrm{F}(q^{25}) - \mathrm{F}(q^{35}) + \cdots,$$

$$\Sigma_4 = \mathrm{F}(q^2) - \mathrm{F}(q^{21}) + \mathrm{F}(q^{35}) - \mathrm{F}(q^{49}) + \cdots$$

. . . .

2° D'après ces valeurs,

$$\mathrm{S} = \frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi} - 1\right) = \varepsilon_1 \mathrm{F}(q) + \varepsilon_5 \mathrm{F}(q^5) + \varepsilon_9 \mathrm{F}(q^9) + \cdots (^*) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

3° On a vu que

$$\mathrm{F}(q) + \mathrm{F}(q^3) + \mathrm{F}(q^5) + \cdots = \frac{q}{1-q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{D})$$

Ainsi, la série

$$\mathrm{F}(q) + \mathrm{F}(q^3) + \mathrm{F}(q^5) + \cdots$$

a une limite fort simple ; et la série

$$\mathrm{F}(q) - \mathrm{F}(q^3) + \mathrm{F}(q^5) - \cdots,$$

conjuguée de la première, n'est peut-être pas sommable.

(*) *Recherches*. . . , pages 73, 76.

31. *Autre transcendante.* — De la formule (39), on conclut

$$\int_0^1 \frac{\Sigma_1}{q}\,dq = \operatorname{arc\,tg} q + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(q^2) + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}(q^4) + \frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}(q^8) + \cdots; \quad (42)$$

et, en particulier,

$$\int_0^1 \frac{\Sigma_1}{q}\,dq = \frac{\pi}{2},$$

ou (40) :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \cdots, \quad (P)$$

32. *Dixième application.* — Prenons enfin

$$u_n = \frac{q^n}{1 + q^n + q^{2n}}; \quad (42)$$

ou, sous une forme plus commode,

$$u_\alpha = \frac{q^\alpha(1 - q^\alpha)}{1 - q^{3\alpha}}. \quad (43)$$

Soit, après un changement de notation,

$$S = \Sigma_0^\infty A_n q^n. \quad (44)$$

1° Si $n = 3\alpha\beta + \alpha = (3\beta + 1)\alpha$, la partie correspondante de A_n est $+1$.

2° Si $n = 3\alpha\beta + 2\alpha = (3\beta + 2)\alpha$, la partie correspondante de A_n est -1.

Par conséquent,

A_n *égale l'excès du nombre des diviseurs de* n, *ayant la forme* $3\mu + 1$, *sur le nombre de ceux qui ont la forme* $3\mu - 1$ (*).

(*) On peut voir, dans les *Recherches* (pages 73, 75), une proposition analogue à celle-ci, mais relative au développement de

$$f(q) = \frac{q}{1 - q} - \frac{q^5}{1 - q^5} + \frac{q^3}{1 - q^5} - \cdots$$

33. *Remarque.* — D'après cette loi générale :

1° Si n, supposé *premier*, a la forme $3\mu + 1$, $A_n = 2$.
2° Si n, supposé *premier*, a la forme $3\mu - 1$, $A_n = 0$.
3° Si $n = (3\mu - 1)^k$, $A_n = k + 1$.
4° Si $n = (3\mu - 1)^k$, $A_n = 0$ ou $+1$, selon que l'exposant k est *impair* ou *pair*.
5° Si $n = 3^\alpha n'$, n' étant *premier avec* 3; $A_n = A_{n'}$.
Etc.

34. *Vérification.* — Le développement de

$$S = \frac{q(1-q)}{1-q^3} + \frac{q^2(1-q^2)}{1-q^6} + \frac{q^3(1-q^3)}{1-q^9} + \frac{q^4(1-q^4)}{1-q^{12}} + \cdots,$$

limité aux vingt-cinq premiers termes, est

$$q + q^3 + q^4 + 2q^9 + q^{12} + 2q^{13} + q^{16} + 2q^{19} + 2q^{21} + q^{25}.$$

Tous les coefficients satisfont aux conditions énoncées.

Liège, 22 mars 1887.