SECONDE NOTE

SUR

LES FONCTIONS X_n;

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présentée à la Classe des sciences, dans la séance du 7 août 1886.)

SECONDE NOTE

SUR LES FONCTIONS X_n (*).

---

1. De la relation

$$(1 - x)\left(\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx}\right) = n(X_{n-1} - X_n) \text{ (**)}, \qquad (1)$$

résulte

$$\int_{-1}^{+1} (x^p - x^{p+1})(dX_n + dX_{n-1}) = n \int_{-1}^{+1} (x^p X_{n-1} - x^p X_n)\,dx,$$

ou

$$\int_{-1}^{+1} (x^p dX_n + x^p dX_{n-1} - x^{p+1} dX_n - x^{p+1} dx_{n-1}) = n \int_{-1}^{+1} (x^p X_{n-1} - x^p X_n)\,dx. \qquad (2)$$

Supposons que les nombres n, p soient *de même parité*, et que le premier ne surpasse pas le second. Les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} x^p dX_n, \quad \int_{-1}^{+1} x^{p+1} dX_{n-1}, \quad \int_{-1}^{+1} x^p X_{n-1}\,dx$$

seront *nulles*.

En effet, dans la première, par exemple, tous les termes de $\frac{dX_n}{dx}$ sont *de même parité* que $n - 1$; $x^p \frac{dX_n}{dx}$ est une fonction *impaire*, etc.

(*) *Recherches sur les fonctions* X_n, *de Legendre :* premier Mémoire (in-8°), octobre 1879; première Note (in-4°), octobre 1880; deuxième Mémoire (in-4°), août 1881 ; troisième Mémoire (in-4°), octobre 1885; seconde Note (in-4°), novembre 1886.

(**) Premier Mémoire, p. 5.

L'égalité (2) se réduit donc à

$$\int_{-1}^{+1} x^p dX_{n-1} - \int_{-1}^{+1} x^{p+1} dX_n = -n \int_{-1}^{+1} x^p X_n dx \,. \quad . \quad . \quad (3)$$

Il est visible que :

$$\int_{-1}^{+1} x^p dX_{n-1} = -p \int_{-1}^{+1} x^{p-1} X_{n-1} dx,$$

$$\int_{-1}^{+1} x^{p+1} dX_n = -(p+1) \int_{-1}^{+1} x^p X_n dx.$$

Par conséquent, l'égalité (3) devient

$$\int_{-1}^{+1} x^p X_n dx = \frac{p}{p+n+1} \int_{-1}^{+1} x^{p-1} X_{n-1} dx. \quad . \quad (\mathrm{A})$$

Cette relation (peut-être nouvelle) en fait connaître d'autres, assez importantes.

2. D'abord, si l'on fait attention que

$$\int_{-1}^{+1} x^{p-n+1} X_1 dx = \frac{2}{p-n+3} \, (^*), \quad . \quad (4)$$

on conclut, de (A) :

$$\int_{-1}^{+1} x^p X_n dx = 2 \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1)\cdots(p-n+3)}, \quad . \quad (\mathrm{B})$$

$$\int_{-1}^{+1} x^n X_n dx = 2 \frac{1.2.3 \ldots n}{1.3.5 \ldots \overline{2n+1}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

formules dues à Dirichlet (**).

(*) A cause de $X_1 = x$.

(**) La première est démontrée, d'une autre manière, dans notre deuxième Mémoire (p. 43).
[De même que (B) est une conséquence immédiate de (A), (A) est une conséquence immédiate de (B). — Remarque faite par le Rapporteur, M. De Tilly.]

3. Multiplions, par z^n, les deux membres de (B), puis faisons croître indéfiniment n. A cause de l'égalité

$$\sum_0^\infty X_n z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}}, \tag{6}$$

qui définit X_n (*), nous aurons, en désignant par K_n le second membre de (B):

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^p dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = \sum_{n=\substack{0\\1}}^{n=\infty} K_n z^n \text{ (**)}.$$

Mais, si n surpasse p, $K_n = 0$ (***); donc, simplement,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^p dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = 2\sum_{n=\substack{0\\1}}^{n=p} \frac{p(p-1)\ldots(p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1)\ldots(p-n+3)} z^n. \tag{C}$$

Ainsi, l'intégrale se réduit à un polynôme entier, du degré p, dont tous les termes sont de même parité (IV).

4. Les considérations exposées à la fin du *deuxième* Mémoire (V) permettent d'établir, autrement que nous venons de le faire, l'égalité (C).

Posons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^p dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = f(z), \tag{7}$$

et

$$x^p = A_p X_p + A_{p-2} X_{p-2} + \cdots \tag{8}$$

(*) Premier Mémoire, p. 4.

(**) La somme doit être prise à partir de $n=0$, ou de $n=1$, selon que p est *pair* ou *impair*.

(***) Cette propriété, évidente d'après la formule (B), résulte aussi d'un théorème fondamental, dû à Jacobi.

(IV) Cette conclusion est d'accord avec la formule 167 du *deuxième* Mémoire; mais, en outre, le coefficient de z^n est connu.

(V) Pages 88 et suivantes.

D'après la formule (B) et les propriétés des fonctions X_n (*) :

$$\frac{2}{2p+1}\cdot A_p = 2\cdot\frac{2.3\ldots p}{3.5\ldots\overline{2p+1}},$$

$$\frac{2}{2p-3}\cdot A_{p-2} = 2\cdot\frac{4.5\ldots p}{5.7\ldots\overline{2p-1}},$$

$$\frac{2}{2p-7}\cdot A_{p-4} = 2\cdot\frac{6.7\ldots p}{7.9\ldots\overline{2p-3}},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

De plus,

$$f(z) = A_p\int_{-1}^{+1}\frac{X_p dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} + A_{p-2}\int_{-1}^{+1}\frac{X_{p-2}dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} + \cdots,$$

ou (**)

$$f(z) = \frac{2}{2p+1}A_p z^p + \frac{2}{2p-3}A_{p-2}z^{p-2} + \cdots,$$

ou enfin

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^p dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = 2\left[\frac{2.3\ldots p}{3.5\ldots\overline{2p+1}}z^p + \frac{4.5\ldots p}{5.7\ldots\overline{2p-1}}z^{p-2} + \frac{6.7\ldots p}{7.9\ldots\overline{2p-3}}z^{p-4} + \cdots\right]. \quad (C')$$

5. *Remarque.* — Si, dans l'équation (8), on fait $x = 1$, elle se réduit à

$$A_p + A_{p-2} + A_{p-4} + \cdots = 1.$$

Nous avons donc ce petit théorème d'Arithmétique :

La somme des fractions

$$(2p+1)\frac{2.3\ldots p}{3.5.7\ldots\overline{2p+1}},\quad (2p-3)\frac{4.5\ldots p}{5.7\ldots\overline{2p-1}},\quad (2p-7)\frac{6.7\ldots p}{7.9\ldots\overline{2p-3}},\quad \ldots\ldots$$

égale l'unité.

(*) Rappelées ci-dessus (p. 5).
(**) Premier Mémoire, p. 62.

Par exemple :

$$13 . \frac{2.3.4.5\,6}{3.5.7.9.11.13} + 9 . \frac{4.5.6}{5.7.9.11} + 5 . \frac{6}{7.9} + 1 . \frac{1}{7} = 1 ;$$

$$15 . \frac{2.3.4.5.6.7}{3.5.7.9.11.13.15} + 11 . \frac{4.5.6.7}{5.7.9.11.15} + 7 . \frac{6.7}{7.9.11} + 3 . \frac{1}{9} = 1 .$$

6. Soit

$$1 - 2zx + z^2 = u^2 ;$$

d'où :

$$x = \frac{1 + z^2 - u^2}{2z}, \quad dx = - \frac{u}{z} du.$$

Les limites de u sont $1 + z$, $1 - z$. Donc la relation (C) devient

$$\frac{1}{(2z)^{p+1}} \int_{1-z}^{1+z} (1 + z^2 - u^2)^p du = \sum_{n=\frac{0}{1}}^{n=p} \frac{p(p-1)\dots(p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1)\dots(p-n+3)} z^n. \quad (9)$$

Si p est *pair*, le développement du second membre est

$$\frac{1}{p+1} + \frac{p}{(p+1)(p+3)} z^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{(p-1)(p+1)(p+3)(p+5)} z^4 + \cdots + \frac{p(p-1)\dots 3.2}{3.5\dots\overline{2p+1}} z^p ;$$

et, si p est *impair* :

$$\frac{1}{p+2} z + \frac{p(p-1)}{p(p+2)(p+4)} z^3 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{(p-2)p(p+2)(p+4)(p+6)} z^5 + \cdots + \frac{p(p-1)\dots 3.2}{3.5\dots\overline{2p+1}} z^p .$$

D'autre part, l'intégrale a pour valeur

$$\left[(1 + z^2)^p u - \frac{1}{3} C_{p,1} (1 + z^2)^{p-1} u^3 + \frac{1}{5} C_{p,2} (1 + z^2)^{p-2} u^5 - \cdots \right]_{1-z}^{1+z}$$

$$= 2 \Big\{ (1 + z^2)^p z - \frac{1}{3} C_{p,1} (1 + z^2)^{p-1} (3z + z^3) + \frac{1}{5} C_{p,2} (1 + z^2)^{p-2} (5z + 10z^3 + z^5) - \cdots$$

$$\pm \frac{1}{2p+1} \left[\frac{2p+1}{1} z + \frac{(2p+1)2p(2p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \cdots + z^{2p+1} \right] \Big\} .$$

Conséquemment, si l'on pose, pour abréger :

$$Z = (1+z^2)^p - \frac{1}{3}C_{p,1}(1+z^2)^{p-1}(3+z^2) + \frac{1}{5}C_{p,2}(1+z^2)^{p-2}(5+10z^2+z^4) - \cdots$$
$$\pm \frac{1}{2p+1}\left[\frac{2p+1}{1} + \frac{(2p+1)2p(2p-1)}{1\cdot 2\cdot 3}z^2 + \cdots + z^{2p}\right], \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

on a cette *double identité :*

$$\frac{Z}{(2z)^p} = \frac{1}{p+1} + \frac{p}{(p+1)(p+3)}z^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{(p-1)(p+1)(p+3)(p+5)}z^4 + \cdots + \frac{p(p-1)\ldots 3.2}{3.5\ldots\overline{2p+1}}z^p \text{ (p } \textit{pair});$$
$$= \frac{1}{p+2}z + \frac{p(p-1)}{p(p+2)(p+4)}z^3 + \cdots + \frac{p(p-1)\ldots 3.2}{3.5\ldots\overline{2p+1}}z^p \text{ (p } \textit{impair}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

7. On en conclurait d'autres, simplement numériques, en ordonnant, suivant les puissances de z^2, le polynôme Z (*); et en égalant les coefficients des mêmes puissances de z^2, dans les deux membres. On obtient ainsi, par exemple,

$$1 - \frac{1}{3}C_{p,1} + \frac{1}{5}C_{p,2} - \frac{1}{7}C_{p,3} + \cdots \pm \frac{1}{2p+1} = 2^p\frac{1.2.3\ldots p}{1.3.5\ldots\overline{2p+1}}; \quad . \quad . \quad (11)$$

relation connue, dont la vérification est facile.

8. La valeur de Z, répondant à $z = 1$, est

$$2^p - \frac{1}{3}C_{p,1}.2^{p+1} + \frac{1}{5}C_{p,2}.2^{p+2} - \ldots \pm \frac{1}{2p+1}\cdot 2^{2p}.$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} &1 - \frac{1}{3}C_{p,1}.2 + \frac{1}{5}C_{p,2}.2^2 - \ldots \pm \frac{1}{2p+1}2^p \\ &= \frac{1}{p+1} + \frac{p}{(p+1)(p+3)} + \frac{p(p-1)(p-2)}{(p-1)(p+1)(p+3)(p+5)} + \cdots + \frac{p(p-1)\ldots 3.2}{3.5\ldots\overline{2p+1}} \text{ (p } \textit{pair}) \\ &= \frac{1}{p+2} + \frac{p(p-1)}{p(p+2)(p+4)} + \cdots + \frac{p(p-1)\ldots 3.2}{3.5\ldots\overline{2p+1}} \text{ (p } \textit{impair}). \end{aligned}\right\} . \quad (E)$$

(*) Ce polynôme, dont le degré est $2p$, ne doit contenir aucun terme en z^0, z^2, ... ; car il est divisible par z^p.

9. Lorsque, dans l'intégrale

$$\int_{1-z}^{1+z} (1 + z^2 - u^2)^p du,$$

on suppose $z = 1$, elle devient $\int_0^2 (2 - u^2)^p du$; puis, si l'on fait $u = 2\sin\varphi$:

$$2^{p+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin^2\varphi)^p \cos\varphi d\varphi = 2^{p+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p 2\varphi \,.\, \cos\varphi d\varphi.$$

La formule (9) est donc transformée en celle-ci :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p 2\varphi \,.\, \cos\varphi d\varphi = \sum_{n=\frac{0}{1}}^{n=p} \frac{p(p-1)\ldots(p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1)\ldots(p-n+3)}. \qquad \text{(F)}$$

10. Une autre intégrale définie, dont la valeur est fort simple, fait retomber sur le théorème d'Arithmétique signalé précédemment (5).

Dans la formule de Dirichlet :

$$\int_{-1}^{+1} x^p X_n dx = 2\frac{p(p-1)\ldots(p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1)\ldots(p-n+3)}, \quad . \quad . \quad \text{(B)}$$

supposons $n = p$, $n = p - 2$, $n = p - 4$, ... ; nous aurons

$$\int_{-1}^{+1} x^p dx \sum_{n=\frac{0}{1}}^{n=p} (2n+1)X_n = 2\sum_{n=\frac{0}{1}}^{n=p} (2n+1)\frac{p(p-1)\cdots(p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1)\ldots(p-n+3)}.$$

D'après une formule connue (*),

$$\sum_{n=\frac{0}{1}}^{n=p} (2n+1)X_n = \frac{dX_{p+1}}{dx}.$$

(*) Premier Mémoire, p. 7

Le premier membre de l'égalité ci-dessus peut donc être remplacé par

$$\int_{-1}^{+1} x^p dX_{p+1} = \left[x^p X_{p+1}\right]_{-1}^{+1} - p\int_{-1}^{+1} x^{p-1} X_{p+1} dx = 2.$$

En conséquence,

$$\sum_{n=\substack{0\\1}}^{n=p} (2n+1)\frac{p(p-1)\dots(p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1)\dots(p-n+3)} = 1; \tag{G}$$

comme précédemment.

11. *Comparaison entre deux intégrales.* — Pour terminer, je vais réduire, à l'intégrale eulérienne

$$\int_0^1 x^p(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \mathrm{B}\left(p+1, \frac{1}{2}\right),$$

l'intégrale $\int_0^1 x^p(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx$, *conjuguée* de la première.

Si, dans la relation

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^p dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = 2\sum_{n=\substack{1\\0}}^{n=p} \frac{p(p-1)\dots(p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1)\dots(p-n+3)} z^n, \tag{C}$$

on suppose $z=1$, elle devient

$$\int_{-1}^{+1} x^p(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{2}\,\mathrm{F}, \tag{12}$$

F représentant la somme des fractions contenues sous le signe $\sum$.

Le premier membre est décomposable en

$$\int_{-1}^{0} x^p(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx + \mathrm{B}\left(p+1, \frac{1}{2}\right).$$

Soit $x = -\alpha$; et, par conséquent,

$$\int_{-1}^{0} x^p(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \int_{0}^{1}(-\alpha)^p(1+\alpha)^{-\frac{1}{2}}d\alpha = \pm\int_{0}^{1} x^p(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

selon que p est *pair* ou *impair*. La relation cherchée est donc

$$\pm\int_{0}^{1} x^p(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx = -B\left(p+1, \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}F. \qquad \text{(H)}$$

Ainsi, *lorsque l'exposant* p *est entier positif, la somme ou la différence des intégrales* $\int_0^1 x^p(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx$, $B(p+1, \frac{1}{2})$, *est égale au produit de* $2\sqrt{2}$ *par un nombre commensurable connu.*

Spa, 23 juillet 1886.

ADDITION.

12. *Autres relations.* — A cause des formules (B), (E), la somme désignée par F se compose, indifféremment, de

$$\int_{0}^{1}(X_p + X_{p-2} + X_{p-4} + \cdots)dx \text{ (*)},$$

ou de

$$1 - \frac{1}{3}C_{p,1}.2 + \frac{1}{5}C_{p,2}.2^2 - \cdots \pm \frac{1}{2p+1}2^p.$$

En outre, cette dernière quantité équivaut à $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p 2\varphi.\cos\varphi d\varphi$. (F).

(*) Le dernier terme est X_0 ou X_1, selon que p est *pair* ou *impair*.

Par conséquent, on a les trois égalités suivantes :

$$\int_0^1 x^p(X_p + X_{p-2} + X_{p-4} + \cdots)dx = 1 - \frac{1}{3}C_{p,1}.2 + \frac{1}{5}C_{p,2}.2^2 - \cdots \pm \frac{1}{2p+1}2^p, \qquad \text{(K)}$$

$$B\left(p+1, \frac{1}{2}\right) \pm \int_0^1 (1+x)^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{2}\left\{1 - \frac{1}{3}C_{p,1} + \frac{1}{5}C_{p,2}.2^2 - \cdots \pm \frac{1}{2p+1}2^p\right\} (^*), \qquad \text{(L)}$$

$$\int_0^1 x^p(X_p + X_{p-2} + X_{p-4} + \cdots)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p 2\varphi . \cos\varphi d\varphi. \qquad \text{(M)}$$

13. *Réduction d'une intégrale.* — Soit

$$N_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p 2\varphi . \cos\varphi d\varphi. \qquad (15)$$

L'intégration par parties donne aisément

$$N_p = \frac{2pN_{p-1} \pm 1}{2p+1}. \qquad \text{(N)}$$

D'ailleurs, $N_0 = 1$; donc, par l'application de cette formule :

$$N_1 = \frac{1}{3}, \quad N_2 = \frac{7}{3.5}, \quad N_3 = \frac{27}{3.5.7}, \quad N_4 = \frac{107}{5.7.9}, \quad \text{etc.}$$

14. *Remarque.* — De l'égalité (14), on conclut encore :

$$(2p+1)N_p = N_{p-1} + N_{p-2} + \cdots + N_0 + \substack{1 \\ 0}, \qquad \text{(P)}$$

selon que p est *pair* ou *impair*. Voici donc une *nouvelle propriété* des fonctions X_n.

Liège, 4 janvier 1886.

(*) Le signe + répondant au cas où p est *pair*.