MÉMOIRE

SUR

LES FONCTIONS X_n DE LEGENDRE

PAR

Eugène CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

(Présenté à la Classe des sciences, le 5 octobre 1879.)

MÉMOIRE

SUR

LES FONCTIONS X_n DE LEGENDRE.

Les polynômes, connus sous le nom de *fonctions* X_n, jouissent de propriétés nombreuses, découvertes par LEGENDRE, LAPLACE, RODRIGUES, JACOBI, DIRICHLET, ... Je me propose d'en indiquer quelques autres, la plupart fort simples, et cependant non encore signalées : au moins, je ne les ai rencontrées dans aucun des ouvrages que j'ai pu consulter, pas même dans le *Traité des fonctions sphériques*, de M. HEINE.

Pour plus de clarté dans l'exposition, je rappellerai, sans les démontrer, les théorèmes fondamentaux (*).

I

RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS X_n ET LEURS DÉRIVÉES.

1. *Définition.* Soient z et x deux quantités données; la première, comprise entre 0 et 1; la seconde, comprise entre -1 et $+1$. Si l'on développe, suivant les puissances entières et positives de z, la fonction

$$u = (1 - 2zx + z^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(*) Un extrait, fort abrégé, du présent travail, a paru dans le *Compte rendu de la cinquième session de l'Association française, pour l'avancement des sciences* (Clermont-Ferrand, 1876).

le coefficient de z^n, dans ce développement, *est la fonction* X_n. Ainsi

$$u = X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots + X_n z^n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

2. THÉORÈME I. *La fonction* u *satisfait à l'équation*

$$(1 - x^2)\frac{du}{dx} + (1 - xz)\frac{du}{dz} = ux. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

3. THÉORÈME II. *La fonction* u *satisfait à l'équation*

$$(1 - x^2)\frac{du}{dx} + (x - z)z\frac{du}{dz} = uz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

4. THÉORÈME III. *On a, entre* X_{n-1} *et* X_n, *la relation*

$$(1 - x^2)\frac{dX_{n-1}}{dx} = n(xX_{n-1} - X_n). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5)$$

5. THÉORÈME IV. *On a, entre* X_{n-1} *et* X_n, *la relation*

$$(1 - x^2)\frac{dX_n}{dx} = n(X_{n-1} - xX_n). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6)$$

6. *Remarques.* — I. Si, après avoir changé $n - 1$ en n, dans l'égalité (5), on la combine avec l'égalité (6), on trouve

$$(n + 1)X_{n+1} - (2n + 1)xX_n + nX_{n-1} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (7)$$

relation connue.

II. Il en résulte

$$\frac{X_{n+1}}{X_n} = \frac{2n + 1}{n + 1}x + \cfrac{1}{\cfrac{n + 1}{n}\cfrac{X_n}{X_{n-1}}},$$

puis le *développement, en fraction continue, de* $\frac{X_{n+1}}{X_n}$ (*).

(*) A cause de $X_0 = 1$, $X_1 = x$, on a :

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{3}{2}x + \cfrac{1}{\cfrac{2}{1}x}, \quad \frac{X_3}{X_2} = \frac{5}{3}x + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}\cfrac{X_2}{X_1}}, \quad \ldots$$

III. L'équation (3), aux dérivées partielles, a pour intégrale générale :

$$u=(x-z)\varphi\left(\frac{x-z}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Il est facile de voir que la fonction (1) est comprise dans cette formule.

7. Théorème V. *Les fonctions* X_{n-1}, X_n *satisfont aux équations*

$$(1-x)\left(\frac{dX_n}{dx}+\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)=n(X_{n-1}-X_n), \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

$$(1+x)\left(\frac{dX_n}{dx}-\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)=n(X_{n-1}+X_n). \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

En effet, si l'on combine, par addition, les égalités (5), (6), et qu'on supprime le facteur $1+x$, on trouve l'équation (8). De même, l'égalité (9) résulte d'une soustraction.

8. *Remarque.* Si l'on fait

$$X_n+X_{n-1}=S_n, \quad X_n-X_{n-1}=T_n,$$

les dernières équations deviennent :

$$(1-x)\frac{dS_n}{dx}+nT_n=0, \quad (1+x)\frac{dT_n}{dx}-nS_n=0.$$

Par conséquent, *les polynômes* S_n, T_n, *du* $n^{\text{ième}}$ *degré, satisfont aux équations du second ordre :*

$$(1+x)\frac{d\left[(1-x)\dfrac{dS_n}{dx}\right]}{dx}+n^2S_n=0, \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$(1-x)\frac{d\left[(1+x)\dfrac{dT_n}{dx}\right]}{dx}+n^2T_n=0\ (*). \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

(*) Ces équations prouvent que : 1° S_n *est divisible par* $x+1$; 2° T_n *est divisible par* $x-1$; propriétés connues, et d'ailleurs évidentes par les égalités (8), (9).

9. Théorème VI. *On a, entre trois fonctions consécutives, les relations*

$$X_{n-1} - X_{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)}(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}, \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = (2n+1)X_n. \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

1° Dans l'équation (5), changeons n en $n+1$: elle devient

$$(1-x^2)\frac{dX_n}{dx} = (n+1)(xX_n - X_{n+1}).$$

Éliminant xX_n, entre celle-ci et l'égalité (6), on trouve la relation (12).

2° Si l'on change n en $n+1$, dans l'égalité (8), et que l'on retranche, on obtient

$$(1-x)\left(\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx}\right) = (2n+1)X_n - \left[(n+1)X_{n+1} + nX_{n-1}\right].$$

D'après la relation (7), le second membre équivaut à

$$(2n+1)X_n - (2n+1)xX_n;$$

donc

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = (2n+1)X_n.$$

10. Corollaires. — I. *Le polynôme* $X_{n+1} - X_{n-1}$ *est divisible par* $x^2 - 1$.

II. *Si l'on fait* $X_n = \frac{P_n}{2^n}$: 1° *tous les coefficients du polynôme*

$$P_{n+1} - 4P_{n-1}$$

sont divisibles par $2n+1$; 2° *tous les coefficients du polynôme* $\frac{dP_n}{dx}$ *sont divisibles par* $\frac{n(n+1)}{2}$; 3° *tous les coefficients du polynôme*

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} - 4\frac{dP_{n-1}}{dx}$$

sont divisibles par $2(2n+1)$.

On verra, plus loin, que *les coefficients de* P_n *sont entiers*
Cela posé, après le changement indiqué, l'égalité (12) devient

$$(P_{n+1} - 4P_{n-1})\frac{n(n+1)}{2} = (2n+1)(x^2-1)\frac{dP_n}{dx};$$

et l'égalité (13) :

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} - 4\frac{dP_{n-1}}{dx} = 2(2n+1)P_n.$$

Or, les nombres *entiers* $\frac{n(n+1)}{2}$, $2n+1$ sont premiers entre eux ; etc.

11. Théorème VII. *La fonction* X_n *satisfait à l'équation*

$$\frac{d.\left[(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}\right]}{dx} + n(n+1)X_n = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Si, dans l'équation (12), on prend les dérivées des deux membres, et que l'on ait égard à la relation (13), on trouve le résultat énoncé (*).

12. Théorème VIII. *Entre un nombre quelconque de fonctions* X_n, *on a les relations :*

$$(1-x)\frac{dX_n}{dx} = -nX_n + (2n-1)X_{n-1} - (2n-3)X_{n-2} + \cdots \pm 3X_1 \mp 1, \quad (15)$$

$$(1+x)\frac{dX_n}{dx} = nX_n + (2n-1)X_{n-1} + (2n-3)X_{n-2} + \cdots + 3X_1 + 1, \quad (16)$$

$$\frac{dX_n}{dx} = (2n-1)X_{n-1} + (2n-5)X_{n-3} + (2n-9)X_{n-5} + \cdots (^{**}). \quad (17)$$

(*) Cette méthode me paraît plus simple que celle qui a été employée par M. Bertrand (*Calcul différentiel*, p. 358).

(**) Selon que n est *pair* ou *impair*, le dernier terme est $3X_1$ ou 1.

Si, dans les équations (8), (9), on change n en $n-1$, $n-2$,..., des éliminations très-simples donnent les égalités (15) et (16). Quant à la relation (17), elle résulte des deux premières (*).

13. Théorème IX. *Les indices α, β, γ satisfaisant, de toutes les manières possibles, à la condition*

$$\alpha+\beta+\gamma=n,$$

on a

$$\frac{dX_{n+1}}{dx}=\Sigma(X_\alpha X_\beta X_\gamma). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Si l'on prend l'équation de définition (1):

$$(1-2zx+z^2)^{-\frac{1}{2}}=X_0+X_1z+\cdots+X_nz^n+\cdots,$$

on en déduit

$$(1-2zx+z^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{dX_1}{dx}+\frac{dX_2}{dx}z+\cdots+\frac{dX_{n+1}}{dx}z^n+\cdots,$$

ou

$$(X_0+X_1z+\cdots+X_nz^n+\cdots)^3=\frac{dX_1}{dx}+\frac{dX_2}{dx}z+\cdots+\frac{dX_{n+1}}{dx}z^n+\cdots \quad (19)$$

Identifiant les deux membres, on trouve la relation (18).

14. *Application.* Soit $n=3$. Les décompositions de ce nombre donnent

$\alpha=3,\ \beta=0,\ \gamma=0$; $\alpha=0,\ \beta=3,\ \gamma=0$; $\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=3$;

$\alpha=2,\ \beta=1,\ \gamma=0$; $\alpha=2,\ \beta=0,\ \gamma=1$; $\alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=0$;

$\alpha=0,\ \beta=2,\ \gamma=1$; $\alpha=0,\ \beta=1,\ \gamma=2$; $\alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=2$;

$\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=1$.

(*) A l'endroit cité, cette relation (17) est démontrée un peu longuement.

On doit trouver

$$\frac{dX_4}{dx} = 3X_3 + 6X_1X_2 + X_1^3,$$

ou

$$\frac{1}{8}(140x^3 - 60x) = \frac{3}{2}(5x^3 - 3x) + 3x(3x^2 - 1) + x^3;$$

ce qui est exact (*).

15. *Remarques.* — I. Lorsque $x = 1$, on a $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, ... Ainsi le second membre de la formule (18) devient égal au nombre des solutions de

$$\alpha + \beta + \gamma = n.$$

Ce nombre de solutions égale donc *la valeur de* $\frac{dX_{n+1}}{dx}$, *pour* $x = 1$. En effet, comme on le verra plus loin,

$$\left(\frac{dX_{n+1}}{dx}\right)_1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

et cette fraction est le nombre dont il s'agit.

II. D'après cela, quand $x = 1$, l'équation (19) devient

$$(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots)^3 = 1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + \cdots;$$

résultat évident, par la formule du binôme.

II

VALEURS DE X_0, X_1, X_2, X_3, ...

16. Si l'on part des valeurs initiales :

$$X_0 = 1, \quad X_1 = x,$$

(*) On simplifie les calculs analogues à celui-ci, en cherchant d'abord les *décompositions de* n, *essentiellement différentes*, et en multipliant chaque terme, $X_\alpha X_\beta X_\gamma$, par un certain nombre de permutations.

qui résultent de l'équation (1), on trouve, par la *relation de récurrence* (7) :

$$X_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad X_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad X_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$X_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \quad X_6 = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),$$

$$X_7 = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x),$$

$$X_8 = \frac{1}{128}(6\,435x^8 - 12\,012x^6 + 6\,930x^4 - 1\,260x^2 + 35),$$

. . . .

17. *Remarque.* La même équation, si l'on y fait $x = 1$, $x = -1$, $x = 0$, devient

$$u = (1 - z)^{-1}, \quad u = (1 + z)^{-1}, \quad u = (1 + z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent :

1° *Pour* $x = 1$, $X_n = 1$;
2° *Pour* $x = -1$, $X_n = (-1)^n$;
3° *Pour* $x = 0$:

$$X_n = 0, \quad X_n = \pm \frac{1.3.5 \ldots (n-1)}{2.4.6 \ldots n};$$

selon que n est *impair* ou *pair* (*).

III

EXPRESSIONS DIVERSES DE X_n.

18. *Formule de Rodrigues.* Cette formule fondamentale, souvent attribuée à Jacobi, est

$$X_n = \frac{1}{2^n.1.2.3 \ldots n} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

(*) X_0 fait exception à cette règle.

Elle résulte, comme l'on sait, de l'équation (1), combinée avec le théorème de MAC-LAURIN.

Si l'on développe $(x^2-1)^n$, et qu'on prenne la dérivée $n^{\text{ième}}$, on a

$$X_n = \frac{1}{2^n}\Sigma_{p=0}(-1)^p C_{n,p}.C_{2n-2p,n}x^{n-2p}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

19. *Remarques*. — I. La plus grande valeur de p est $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$.

II. Le coefficient de x^n, dans X_n, est $\frac{1}{2^n}C_{2n,n}$.

20. Nous allons transformer, en intégrale définie, le produit

$$C_{n,p}.C_{2n-2p,n} = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots(n-p)} \times \frac{1.2.3\ldots(2n-2p)}{1.2.3\ldots n \times 1.2.3\ldots(n-2p)}.$$

A cet effet, observons que le second membre égale

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots 2p \times 1.2.3\ldots(n-2p)} \times \frac{1.2.3\ldots 2p \times 1.2.3\ldots(2n-2p)}{1.2.3\ldots n \times 1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots(n-p)}$$

$$= \frac{C_{n,2p}}{1.2.3\ldots n} \times \frac{1.2.3\ldots 2p}{1.2.3\ldots p} \times \frac{1.2.3\ldots(2n-2p)}{1.2.3\ldots(n-p)}$$

$$= \frac{C_{n,2p}}{1.2.3\ldots n} \times (p+1)(p+2)\ldots 2p \times (n-p+1)(n-p+2)\ldots(2n-2p).$$

D'après une transformation bien connue :

$$(p+1)(p+2)\ldots 2p = 2.6.10\ldots(4p-2),$$

$$(n-p+1)(n-p+2)\ldots(2n-2p) = 2.6.10\ldots(4n-4p-2);$$

donc

$$C_{n,p}.C_{2n-2p,n} = \frac{C_{n,2p}}{1.2.3\ldots n}2.6.10\ldots(4p-2) \times 2.6.10\ldots(4n-4p-2)$$

$$= 4^n\frac{C_{n,2p}}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\left(p-\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n-p-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{4^n}{\pi}\frac{C_{n,2p}}{1.2.3\ldots n}\Gamma\left(p-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-p+\frac{1}{2}\right);$$

et enfin

$$C_{n,p}\,.\,C_{2n-2p,n} = \frac{2^{2n+1}}{\pi}\,C_{n,2p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2p}\varphi\sin^{2p}\varphi\,d\varphi\ (*). \quad . \quad . \quad (22)$$

21. En vertu de l'identité (22), la formule (21) devient.

$$X_n = \frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\Sigma(-1)^p\,.\,C_{n,2p}\cos^{2n-2p}\varphi\sin^{2p}\varphi\,x^{n-2p},$$

ou, comme $2p$ ne surpasse pas n :

$$X_n = \frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\varphi\,d\varphi\,\Sigma(-1)^p C_{n,2p}\cos^{n-2p}\varphi\sin^{2p}\varphi\,x^{n-2p}.$$

La sommation indiquée a pour valeur la partie *réelle* de $(x\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n$; donc enfin

$$X_n = \frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\varphi\,(x\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n d\varphi; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

pourvu que, dans le développement de l'intégrale, on néglige les termes imaginaires.

22. Il est facile de transformer cette expression en une autre, un peu moins simple, mais de forme réelle. Posons, en effet,

$$\operatorname{tg}\varphi = x\operatorname{tg}\omega.$$

Cette égalité donne :

$$\sin\varphi = \frac{x\sin\omega}{\sqrt{x^2\sin^2\omega + \cos^2\omega}}, \quad \cos\varphi = \frac{\cos\omega}{\sqrt{x^2\sin^2\omega + \cos^2\omega}},$$

$$x\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi = x\frac{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega}{\sqrt{x^2\sin^2\omega + \cos^2\omega}},$$

$$d\varphi = x\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\omega}d\omega = x\frac{d\omega}{x^2\sin^2\omega + \cos^2\omega}.$$

(*) Au moyen de la formule de Legendre :

$$\frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(p)} = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right),$$

on peut abréger un peu ce calcul ; mais la méthode précédente nous paraît avoir, sur celle-ci, l'avantage de la simplicité.

L'intégrale ci-dessus devient

$$x^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n\omega(\cos n\omega + \sqrt{-1}\sin n\omega)d\omega}{(x^2\sin^2\omega + \cos^2\omega)^{n+1}}.$$

Donc

$$X_n = \frac{(2x)^{n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n\omega \cos n\omega d\omega}{(x^2\sin^2\omega + \cos^2\omega)^{n+1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Il est assez remarquable que le polynôme entier X_n se présente sous forme fractionnaire.

23. *Quatrième expression de* X_n. Si, dans la formule de Rodrigues, on met $(x^2 - 1)^n$ sous la forme $(x + 1)^n(x - 1)^n$, on a, par la formule de Leibniz :

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} =$$

$$1.2.3...n\left[(x+1)^n + \left[\frac{n}{1}\right]^2(x+1)^{n-1}(x-1) + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2(x+1)^{n-2}(x-1)^2 + \cdots + (x-1)^n\right];$$

puis

$$2^n X_n =$$

$$(x+1)^n + \left[\frac{n}{1}\right]^2(x+1)^{n-1}(x-1) + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2(x+1)^{n-2}(x-1)^2 + \cdots + (x-1)^n. \quad (25)$$

Ainsi, comme nous l'avons annoncé (**10**, II), X_n a la forme $\frac{P_n}{2^n}$, P_n ayant tous ses coefficients entiers.

24. *Remarque.* Pour $x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, on a ce résultat simple:

$$4^n X_n = 3^n - \left[\frac{n}{1}\right]^2 3^{n-1} + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 3^{n-2} - \cdots \pm \left[\frac{n}{1}\right]^2 \mp 1. \quad . \quad (26)$$

25. *Cinquième expression de* X_n. Le second membre de l'égalité (25) a pour terme général :

$$(-1)^p[C_{n,p}]^2(1 + x)^{n-p}(1 - x)^p.$$

D'après une importante formule de Poisson, peut-être trop peu remarquée,

$$C_{n,p} = \frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi \cos(n-2p)\varphi d\varphi \text{ (*)};$$

donc la quantité précédente devient

$$\frac{2^{n+1}}{\pi}(-1)^p C_{n,p}.(1+x)^{n-p}(1-x)^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi \cos(n-2p)\varphi d\varphi;$$

et la formule (25) :

$$X_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi d\varphi \left[(1+x)^n \cos n\varphi - \frac{n}{1}(1+x)^{n-1}(1-x)\cos(n-2)\varphi + \cdots\right].$$

La quantité entre parenthèses est la partie réelle de

$$(1+x)^n e^{n\varphi\sqrt{-1}} - \frac{n}{1}(1+x)^{n-1}(1-x)e^{(n-2)\varphi\sqrt{-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}(1+x)^{n-2}(1-x)^2 e^{(n-4)\varphi\sqrt{-1}} -$$
$$= \left[(1+x)e^{\varphi\sqrt{-1}} - (1-x)e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right]^n = 2^n\left[x\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right]^n.$$

Ainsi, comme on l'a déjà vu (21), la fonction X_n égale la partie réelle de

$$\frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi(x\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n d\varphi \text{ (**)}.$$

26. *Sixième expression de* X_n. Si l'on fait, en général, $x = \cos\alpha$, on a

$$1 - 2zx + z^2 = (1-az)(1-bz),$$

avec les conditions

$$a + b = 2\cos\alpha, \quad ab = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

(*) *Recherches sur la Probabilité des jugements*, p. 181.

(**) C'est par cette seconde méthode, plus simple que la première, que nous avons trouvé la formule (23).

Le développement du premier facteur de n est

$$(1-az)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}az + \frac{1.3}{2.4}a^2z^2 + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots\;2p}a^pz^p + \cdots;$$

ou, par une transformation connue (*) :

$$(1-az)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma_0^\infty C_{2p,p}\left(\frac{az}{4}\right)^p.$$

De même,

$$(1-bz)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma_0^\infty C_{2q,q}\left(\frac{bz}{4}\right)^q.$$

Dans le produit, le coefficient de z^n, c'est-à-dire X_n, est

$$\frac{1}{4^n}\Sigma C_{2p,p}.C_{2q,q}a^pb^q =$$

$$\frac{1}{4^n}\Sigma C_{2p,p}.C_{2q,q}(\cos p\alpha + \sqrt{-1}\sin p\alpha)(\cos q\alpha - \sqrt{-1}\sin q\alpha)$$

$$= \frac{1}{4^n}\Sigma C_{2p,p}.C_{2q,q}\left[\cos(p-q)\alpha + \sqrt{-1}\sin(p-q)\alpha\right],$$

pourvu que $p+q=n$.

La fonction X_n est réelle (et d'ailleurs les sinus sont, deux à deux, égaux et de signes contraires); donc

$$\left.\begin{array}{l} 4^nX_n = C_{2n,n}\cos n\alpha + C_{2n-2,n-1}.C_{2,1}\cdot\cos(n-2)\alpha \\ \quad + C_{2n-4,n-2}.C_{4,2}\cos(n-4)\alpha + \cdots + C_{2n,n}\cos n\alpha \end{array}\right\}; \tag{28}$$

formule connue.

27. *Formule de Jacobi.* En modifiant très-peu les calculs précédents, on arrive, de la manière la plus simple, à cette célèbre formule.

La fraction

$$\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots\;2p} = \frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\ldots(p-\frac{1}{2})}{1.2.3\ldots p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)}.$$

(*) $$\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots\;2p} = \frac{1.2.3\ldots2p}{[2.4.6\ldots2p]^2} = \frac{1}{4^p}C_{2p,p}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
X_n &= \frac{1}{\pi} \sum \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\,\Gamma(q+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}\, a^p b^q \qquad\qquad (p+q=n) \\
&= \frac{1}{\pi} \sum \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}\; \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(q+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}\, a^p b^q \\
&= \frac{1}{\pi}\, C_{n,p} a^p b^q \int_0^1 \theta^{p-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{q-\frac{1}{2}} d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \sum C_{n,p} (a\theta)^p (b-b\theta)^q \,;
\end{aligned}$$

ou, en effectuant la sommation indiquée,

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \left[a\theta + b(1-\theta)\right]^n.$$

Si l'on fait, suivant l'usage, $\theta = \sin^2\varphi$, cette formule devient

$$X_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi)^n d\varphi \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Les équations (27) donnent

$$a = x + \sqrt{x^2-1}, \qquad b = x - \sqrt{x^2-1}\,;$$

donc

$$X_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[x - \sqrt{x^2-1}\cos 2\varphi\right]^n;$$

ou, ce qui est équivalent,

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n d\omega\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

formule de Jacobi (*).

28. *Huitième expression de* X_n. Si, dans la dernière intégrale,

(*) Dirichlet et M. H. Laurent l'attribuent à Laplace.

on néglige la partie imaginaire (nécessairement nulle), on a, en reprenant $\frac{\pi}{2}$ pour limite supérieure :

$$\mathrm{X}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \left[x^n - \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} (1 - x^2) \cos^2 \omega + \cdots\cdots \right].$$

En général,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\omega d\omega = \frac{\pi}{2} \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots\ 2p}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{X}_n = x^n - \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{2} x^{n-2}(1-x^2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\frac{1.3}{2.4} x^{n-4}(1-x^2)^2 - \cdots;$$

ou, plus simplement,

$$\mathrm{X}_n = x^n - \frac{n(n-1)}{2^2} x^{n-2}(1-x^2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.4^2} x^{n-4}(1-x^2)^2 - \cdots \quad (31)$$

29. *Remarques*. — I. Si l'on remplace x par $\cos\alpha$, cette formule devient

$$\mathrm{X}_n = \cos^n\alpha - \frac{n(n-1)}{2^2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.4^2}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \cdots (^*)\ . \quad (32)$$

II. Le même changement, effectué sur la formule (25), la transforme en

$$2^n\mathrm{X}_n = (1+\cos\alpha)^n - \left[\frac{n}{1}\right]^2 (1+\cos\alpha)^{n-1}(1-\cos\alpha) + \cdots\cdots;$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$\mathrm{X}_n = \cos^{2n}\frac{\alpha}{2} - \left[\frac{n}{1}\right]^2 \cos^{2n-2}\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cdots\cdots \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (33)$$

(*) Ce développement est plus simple que celui qui a été donné par Dirichlet. (*Journal de Crelle*, t. XVII.)

III. On peut vérifier que les seconds membres des égalités (32), (33), de formes différentes, sont identiques au fond (*).

IV. Si, dans les formules (25), (31), on égale les coefficients de x^n, on trouve

$$1+\left[\frac{n}{1}\right]^2+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2+\cdots+\left[\frac{n}{1}\right]^2+1$$
$$=2^n\left\{1+\frac{n(n-1)}{2^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.4^2}+\cdots\right\}.$$

Le premier membre égale $C_{2n,n}$ (**). Ainsi

$$1+\frac{n(n-1)}{2^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.4^2}+\cdots=\frac{1}{2^n}C_{2n,n}. \quad . \quad . \quad (34)$$

Par exemple,

$$1+\frac{5.4}{2^2}+\frac{5.4.3.2}{2^2.4^2}=\frac{1}{32}\cdot\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}.$$

V. Il est visible que

$$C_{2n,n}=2^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots\ n};$$

donc l'identité (34) peut être écrite ainsi :

$$1+\frac{n(n-1)}{2^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.4^2}+\cdots=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots\ n}. \quad (35)$$

VI. Dans celle-ci, le second membre est réductible à la forme $\frac{N}{2^k}$, N et k étant des nombres entiers (***) : il en est donc de même pour le premier membre.

Exemple :

$$1+\frac{9.8}{2^2}+\frac{9.8.7.6}{2^2.4^2}+\frac{9.8.7.6.5.4}{2^2.4^2.6^2}+\frac{9.8.7.6\ 5.4.3.2}{2^2.4^2.6^2.8^2}=\frac{10\ 155}{2^7}.$$

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, p. 286.
(**) *Mélanges mathématiques*, p. 158.
(***) *Cours d'Analyse de l'Université de Liége*, seconde édition, p. 75.

VII. La formule (31) donne

$$\frac{dX_n}{dx} = nx^{n-1} - \frac{n(n-1)}{4}\left[(n-2)x^{n-3}(1-x^2) - 2x^{n-1}\right] + \cdots;$$

et, pour $x = 1$:

$$\left(\frac{dX_n}{dx}\right)_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Cette valeur nous servira plus tard.

VIII. D'après les formules (32), (33), *les équations*

$$\cos^n\alpha - \frac{n(n-1)}{2^2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.4^2}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \cdots =$$

$$\cos^{2n}\frac{\alpha}{2} - \left[\frac{n}{1}\right]^2\cos^{2n-2}\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2\cos^{2n-4}\frac{\alpha}{2}\sin^4\frac{\alpha}{2} - \cdots = 0$$

admettent les mêmes solutions : je veux dire que si, dans la seconde, on remplaçait $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ par $\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$, $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ par $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$, ces deux équations pourraient être identifiées. Cela étant, posons

$$\cot\alpha = y, \quad \cot\frac{\alpha}{2} = z.$$

En négligeant les valeurs de α qui répondent à $\sin\alpha = 0$, $\sin\frac{\alpha}{2} = 0$, nous aurons

$$y^n - \frac{n(n-1)}{2^2}y^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.4^2}y^{n-4} - \cdots = 0, \quad (36)$$

$$z^{2n} - \left[\frac{n}{1}\right]^2 z^{2n-2} + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 z^{2n-4} - \cdots = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Ainsi, *l'équation réciproque* (37) *est réductible à l'équation* (36). On a, d'ailleurs,

$$y = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

IX. La *théorie des équations réciproques* prouve qu'une autre *réduite* de l'équation (37) résulte de la formule

$$s = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

On a donc, entre y et s, la relation

$$s^2 - y^2 = 1.$$

Soit, par exemple, $n = 4$. Les équations (37), (36) deviennent, respectivement :

$$z^8 - 16z^6 + 56z^4 - 16z^2 + 1 = 0, \qquad y^4 - 3y^2 + \frac{3}{8} = 0.$$

Quant à l'équation en s, elle est, d'après la règle ordinaire,

$$8s^4 - 40s^2 + 35 = 0.$$

Par suite :

$$y^2 = \frac{6 \pm \sqrt{30}}{4}, \quad s^2 = \frac{10 \pm \sqrt{30}}{4};$$

etc.

30. *Neuvième expression de* X_n. Écrivons ainsi la formule (30) :

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\omega\right)^n d\omega \text{ (*)}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

et posons :

$$\cos\alpha = \rho\cos\varphi, \quad \sin\alpha\cos\omega = \rho\sin\varphi.$$

Il résulte, de ces équations :

$$\rho^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\omega, \quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha\cos\omega;$$

puis :

$$\rho = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}, \qquad \cos\omega = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \sin\omega = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}}{\sin\alpha\cos\varphi},$$

$$d\omega = -\frac{\cos\alpha\, d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}},$$

$$X_n = -\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{-\alpha}\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}\right)^n\left(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi\right)\frac{\cos\alpha\, d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}}$$

(*) La fonction X_n étant réelle, il est indifférent de prendre $\sqrt{-1}$ avec le signe + ou avec le signe —. Afin que l'arc φ soit inférieur à π (en valeur absolue), nous adoptons le signe +.

En négligeant la partie imaginaire, nécessairement nulle, on a donc, au lieu de la formule de Jacobi,

$$X_n = \frac{2}{\pi}\cos^{n+1}\alpha \int_0^\alpha \frac{\cos n\varphi}{\cos^{n+1}\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}} \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

31. *Remarque.* D'après ce que nous venons de dire, et α *étant inférieur à* $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^\alpha \frac{\sin n\varphi}{\cos^{n+1}\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

32. *Suite.* Soient

$$\varphi = \frac{\theta}{2}, \quad \alpha = \frac{\beta}{2} :$$

la formule (40) devient

$$X_n = \frac{2}{\pi}\cos^{n+1}\frac{\beta}{2} \int_0^\beta \frac{\cos\frac{n}{2}\theta}{\cos^{n+1}\frac{\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\beta)}} \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

Celle-ci a quelque analogie avec l'expression

$$X_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\beta \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\beta)}},$$

que M. Mehler a trouvée en transformant, d'une manière simple, les valeurs de X_n données par Dirichlet (*).

IV

AUTRES INTÉGRALES.

33. D'après une formule démontrée par Lagrange, $\cos n\varphi$ est développable suivant les puissances de $\cos\varphi$, les exposants de ces puissances étant de *même parité* que n. La substitution, dans la

(*) *Annales de Clebsch*, t. V.

formule (40), donne donc une somme de termes de la forme

$$B_q = \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\cos^q \varphi \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

l'exposant q étant *impair* (*).

Posons

$$\sin \varphi = \sin \alpha \sin \theta : \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

il résulte, de cette transformation connue,

$$B_q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^{q+1} \varphi};$$

ou, en remplaçant $q + 1$ par $2p$:

$$B_{2p-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\cos^2 \alpha \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

34. En général, soit

$$V_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta)^p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

On sait que

$$V_1 = \frac{\pi}{2(ab)^{\frac{1}{2}}}, \quad V_2 = \frac{\pi}{4} \frac{a+b}{(ab)^{\frac{3}{2}}}, \quad V_3 = \frac{\pi}{16} \frac{3a^2 + 2ab + 3b^2}{(ab)^{\frac{5}{2}}}, \quad \ldots (^{**});$$

mais, chose à laquelle on n'a peut-être pas fait attention, cette intégrale V_p est, très-simplement, réductible à X_{p-1}.

Pour le faire voir, je considère l'intégrale

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta + \lambda} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a + \lambda) \sin^2 \theta + (b + \lambda) \cos^2 \theta}.$$

(*) S'il était *pair*, B_q dépendrait des intégrales elliptiques.

(**) Tortolini, *Journal de Crelle*, t. XXXIV; Bierens de Haan, table 67.

D'après la valeur de V_1,

$$L = \frac{\pi}{2\sqrt{(a+\lambda)(b+\lambda)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

De plus,

$$\frac{d^{p-1}L}{d\lambda^{p-1}} = (-1)^{p-1}\, 1.2.3\ldots(p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta + \lambda)^p}.$$

Et comme cette dernière intégrale se réduit à V_p, si $\lambda = 0$, on peut écrire

$$V_p = \frac{(-1)^{p-1}}{1.2.3\ldots(p-1)}\,\frac{d^{p-1}L}{d\lambda^{p-1}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

pourvu que, dans le résultat du calcul, on fasse $\lambda = 0$.

D'après ce que l'on a vu précédemment (**25**), le coefficient de z^{p-1}, dans le développement de $(1-gz)^{-\frac{1}{2}}(1-hz)^{-\frac{1}{2}}$, est

$$X_{p-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (g\sin^2\theta + h\cos^2\theta)^{p-1}\,d\theta \ (^*).$$

De même, le coefficient de λ^{p-1}, dans le développement de L, est

$$\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}(-1)^{p-1}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{a}\sin^2\theta + \frac{1}{b}\cos^2\theta\right)^{p-1} d\theta,$$

ou

$$(-1)^{p-1}(ab)^{-\left(p-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^{p-1}\,d\theta;$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(-1)^{p-1}(ab)^{-\left(p-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)^{p-1}\,d\theta \ (^{**}).$$

(*) Pour plus de clarté, nous remplaçons a et b par g et h.

(**) Les limites étant 0 et $\frac{\pi}{2}$, l'intégrale ne change pas, si θ est remplacé par son complément.

Ainsi, le terme en λ^{p-1}, dans le développement dont il s'agit, est

$$(-1)^{p-1}\lambda^{p-1}(ab)^{-\left(p-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)^{p-1}d\theta.$$

Ce terme est le seul dont la dérivée $(p-1)^{ième}$ ne s'annule pas avec λ. La formule (48) devient donc

$$\mathrm{V}_p=(ab)^{-\left(p-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)^{p-1}d\theta \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

Comparant cette expression avec celle qui définit V_p (46), on a ce résultat remarquable, et que je crois nouveau :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)^p}=\frac{1}{(ab)^{p-\frac{1}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)^{p-1}d\theta. \quad (50)$$

35. Si, comme au n° **26**, on suppose

$$a=x+\sqrt{x^2-1},\quad b=x-\sqrt{x^2-1},$$

on a, au lieu des relations (49), (50) :

$$\mathrm{V}_p=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(x-\sqrt{x^2-1}\cos 2\theta)^p}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\sqrt{x^2-1}\cos 2\theta)^{p-1}d\theta,$$

ou

$$\mathrm{V}_p=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\omega}{(x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega)^p}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega)^{p-1}d\omega\ (*); \quad (51)$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{V}_p=\frac{\pi}{2}\mathrm{X}_{p-1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

(*) L'équation

$$\int_0^{\pi}\frac{d\omega}{(x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega)^p}=\int_0^{\pi}(x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega)^{p-1}d\omega$$

a été donnée par Jacobi. (HEINE, *Fonctions sphériques,* seconde édition, p. 36.)

36. On tire, de l'équation (46) :

$$\frac{dV_p}{da} = -p\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)^{p+1}},$$

$$\frac{dV_p}{db} = -p\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)^{p+1}};$$

donc, par addition,

$$V_{p+1} = -\frac{1}{p}\left(\frac{dV_p}{da} + \frac{dV_p}{db}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

37. Les premières valeurs de V_p (**34**), ou la formule (49), conduisent à supposer

$$V_p = \frac{\pi}{2^p\Gamma(p)} \frac{N_p}{(ab)^{p-\frac{1}{2}}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

N_p étant un *polynôme entier*. La valeur de ce polynôme, sous forme d'intégrale définie, est

$$N_p = \frac{1}{\pi} 2^p\Gamma(p) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)^{p-1} d\theta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

En outre, d'après l'équation (53),

$$N_{p+1} = (2p-1)(a+b)N_p - 2ab\left(\frac{dN_p}{da} + \frac{dN_p}{db}\right) \text{ (*)} \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Si l'on part de

$$N_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 1,$$

cette formule (56) donne, successivement :

$$N_2 = a + b, \quad N_3 = 3a^2 + 2ab + 3b^2, \quad N_4 = (a+b)(15a^2 - 6ab + 15b^2),$$

etc.

(*) Les équations (53), (56) sont *aux différences mêlées.*

38. Les polynômes N_p jouissent des propriétés suivantes, qu'il suffit d'énoncer :

1° N_p est une *fonction homogène*, dans laquelle a et b entrent symétriquement, et *dont le degré est* p — 1 ;

2° *La somme des coefficients de* N_p *égale* $2^{p-1}\Gamma(p)$;

3° Si l'on suppose $a = b = 1$, on a

$$\frac{dN_p}{da} = \frac{dN_p}{db} = (p-1)\,2^{p-2}\,\Gamma(p)\,;$$

4° D'après la théorie des fonctions homogènes,

$$a\frac{dN_p}{da} + b\frac{dN_p}{db} = (p-1)\,N_p\,; \qquad (57)$$

5° Si l'on fait

$$a + b = \lambda, \quad ab = \mu,$$

le développement de N_p prend la forme

$$A\lambda^{p-1} + B\lambda^{p-3}\mu + C\lambda^{p-5}\mu^2 + \cdots;$$

etc.

39. Lorsque $b = 1$, ce qui arrive pour la fonction B_{2p-1} (**33**), la formule (56) n'est plus applicable; mais on peut la remplacer par celle que l'on obtient en éliminant $\frac{dN_p}{db}$; savoir

$$N_{p+1} = \left[a + (2p-1)\,b\right]N_p + 2a\,(a-b)\,\frac{dN_p}{da}\,;$$

et, dans le cas particulier considéré :

$$N_{p+1} = (a + 2p - 1)\,N_p + 2a\,(a-1)\frac{dN_p}{da} \qquad (58)$$

Enfin, si $a = x^2$, la dernière relation devient, à cause de $\frac{dN_p}{da} = \frac{1}{2x}\frac{dN_p}{dx}$:

$$N_{p+1} = (x^2 + 2p - 1)\,N_p + x\,(x^2-1)\,\frac{dN_p}{dx}\,; \qquad (59)$$

et la formule (54) :

$$V_p = B_{2p-1} = \frac{\pi}{2^p\Gamma(p)}\,\frac{N_p}{x^{2p-1}} \qquad (60)$$

40. *Relations entre les polynômes* X *et* N. Écrivons ainsi la formule de Lagrange, déjà citée (**33**) :

$$\cos n\varphi = a_0 \cos^n\varphi + a_2 \cos^{n-2}\varphi + a_4 \cos^{n-4}\varphi + \cdots; \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

puis développons l'équation

$$X_n = \frac{2}{\pi} \cos^{n+1}\alpha \int_0^{\alpha} \frac{\cos n\varphi}{\cos^{n+1}\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}}, \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

en ayant égard aux relations :

$$\cos \alpha = x,$$

$$B_{2p-1} = \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\cos^{2p-1}\varphi \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Nous trouvons

$$X_n = \frac{2}{\pi} [a_0 B_1 + a_2 B_3 + a_4 B_5 + \cdots] x^{n+1};$$

ou, par les formules (60) :

$$X_n = a_0 N_1 x^n + \frac{a_2}{1.2} N_2 x^{n-2} + \frac{a_4}{1.2.2^2} N_3 x^{n-4} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

41. *Vérifications.* Les premières valeurs des quantités N sont, d'après le n° **37** et la formule (59) :

$$N_1 = 1, \quad N_2 = x^2 + 1, \quad N_3 = 3x^4 + 2x^2 + 3, \quad N_4 = 15x^6 + 9x^4 + 9x^2 + 15,$$
$$N_5 = 105x^8 + 60x^6 + 54x^4 + 60x^2 + 105, \ldots$$

D'un autre côté, par la formule de Lagrange :

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \cos\varphi, \\
\cos 2\varphi &= 2\cos^2\varphi - 1, \\
\cos 3\varphi &= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi, \\
\cos 4\varphi &= 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1, \\
\cos 5\varphi &= 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{array}{lllll}
\textit{pour } n=1: & a_0=1; & & \\
\quad\text{»}\quad n=2: & a_0=2, & a_2=-1; & \\
\quad\text{»}\quad n=3: & a_0=4, & a_2=-3; & \\
\quad\text{»}\quad n=4: & a_0=8, & a_2=-8, & a_4=1; \\
\quad\text{»}\quad n=5: & a_0=16, & a_2=-20, & a_4=5; \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & &
\end{array}$$

Cela posé, on trouve, par l'application de la formule (62) :

$$\begin{aligned}
X_1 &= x;\\
X_2 &= 2x^2 - \tfrac{1}{2}(x^2+1) = \tfrac{1}{2}(3x^2-1);\\
X_3 &= 4x^3 - \tfrac{3}{2}(x^2+1)x = \tfrac{1}{2}(5x^3-3x);\\
X_4 &= 8x^4 - 4(x^2+1)x^2 + \tfrac{1}{8}(3x^4+2x^2+3) = \tfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3);\\
X_5 &= 16x^5 - 10(x^2+1)x^3 + \tfrac{5}{8}(3x^4+2x^2+3)x = \tfrac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x);
\end{aligned}$$

comme précédemment (**16**).

42. *Valeur générale de* N_{p+1}. Le développement rappelé ci-dessus (**34**), et la formule (55), écrite ainsi :

$$N_{p+1} = \frac{2}{\pi} 2^p \Gamma(p+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta)^p \, d\theta, \quad . \; . \; . \; (63)$$

donnent, indifféremment (*),

$$\left.\begin{aligned}
N_{p+1} = 1.3.5\ldots(2p-1)x^{2p} + \frac{p}{1}.1.3.5\ldots(2p-3).1\,x^{2p-2}\\
+\frac{p(p-1)}{1.2}1.3.5\ldots(2p-5).1.3.x^{2p-4}+\cdots+1.3.5\ldots(2p-1).
\end{aligned}\right\} (64)$$

(*) En vertu de la formule connue (**20**) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\theta \cos^{2p-2m}\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{1}{\Gamma(p+1)} 1.3.5\ldots(2m-1) \times 1.3.5\ldots(2p-2m-1),$$

le terme général de N_{p+1} est

$$C_{p,m}.1.3.5\ldots(2m-1)\times 1.3.5\ldots(2p-2m-1)x^{2p-2m}.$$

Si, par exemple, $p = 4$:

$$N_5 = 1.3.5.7x^8 + 4.1.3.5.1x^6 + 6.1.3.1.3x^4 + 4.1.1.3.5x^2 + 1.3.5.7$$
$$= 105x^8 + 60x^6 + 54x^4 + 60x^2 + 105;$$

comme ci-dessus.

43. *Transformation de la formule* (62). Dans le second membre, changeons x en $\frac{1}{x}$, puis multiplions, par x^n, chacun des résultats. Nous trouvons ainsi, en négligeant les coefficients :

$$\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) \frac{1}{x^{n-2}} x^n = N_2, \quad \left(\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^2} + 3\right) \frac{1}{x^{n-4}} x^n = N_3, \text{ etc.}$$

Ainsi, ce second membre prend la forme plus simple :

$$a_0 N_1 + \frac{a_2}{1.2} N_2 + \frac{a_4}{1.2.2^2} N_3 + \frac{a_6}{1.2.3.2^3} N_4 + \cdots$$

Pour effectuer le même changement sur le premier membre, il faut d'abord mettre X_n sous l'une des formes indiquées précédemment. Si l'on adopte, par exemple, la formule de Jacobi, on trouve

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \sqrt{1 - x^2} \cos \omega)^n \, d\omega \\ = a_0 N_1 + \frac{a_2}{1.2} N_2 + \frac{a_4}{1.2.2^2} N_3 + \frac{a_6}{1.2.3.2^3} N_4 + \cdots \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (65)$$

44. *Relations entre les coefficients* $a_0, a_2, a_4, \ldots$. On a

$$\int_0^{\pi} (1 - \sqrt{1 - x^2} \cos \omega)^n \, d\omega = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sqrt{1 - x^2} \cos \varphi)^n \, d\varphi;$$

pourvu que, dans le développement de la seconde différentielle, on néglige les puissances *impaires* de cos φ. Si l'on remet, pour $N_1, N_2, N_3, \ldots$ leurs valeurs (63), l'équation (65) devient

$$\begin{array}{l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - t \cos \varphi)^n \, d\varphi \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[a_0 + a_2 (1 - t^2 \cos^2 \varphi) + a_4 (1 - t^2 \cos^2 \varphi)^2 + \cdots\right]; \end{array} \quad . \quad (66)$$

t représentant $\sqrt{1 - x^2}$.

Ordonnant les deux membres suivant les puissances de t, et identifiant, on trouve ces équations remarquables :

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots &= 1, \\ a_2 + 2a_4 + 3a_6 + 4a_8 + \cdots &= -\frac{n(n-1)}{1.2}, \\ a_4 + 3a_6 + 6a_8 + \cdots &= +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}, \\ a_6 + 4a_8 + \cdots &= -\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.2.\,.6}, \\ a_8 + \cdots &= +\frac{n(n-1)\ldots(n-7)}{1.2\ldots 8}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

On en peut conclure, soit la *vérification* des valeurs de a_0, a_2, a_4, ..., soit diverses identités, parmi lesquelles je choisis ces deux-ci :

$$2^{n-1} - 1 = \frac{n^2(n^2-2^2)\ldots\left(n^2-\overline{n-4}^2\right)}{1.2\ldots\quad(n-2)} - \frac{n^2(n^2-2^2)\ldots\left(n^2-\overline{n-6}^2\right)}{1.2\ldots\quad(n-4)} + \cdots \pm 1, \quad (68)$$

$$\left.\begin{aligned} &2^{n-1} - (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} \\ &= 2.\frac{n^2(n^2-2^2)\ldots\left(n^2-\overline{n-4}^2\right)}{1.2\ldots\quad(n-2)} - 2^2\frac{n^2(n^2-2^2)\ldots\left(n^2-\overline{n-6}^2\right)}{1.2\ldots\quad(n-4)} + \cdots \pm 2^{\frac{n}{2}} \end{aligned}\right\} (^*).\ (69)$$

Si, par exemple, $n = 10$, on a :

$$2^9 - 1 = \frac{10^2.12.8.14.6.16.4}{2.3.4.5.6.7.8} - \frac{10^2.12.8.14.6}{2.3.4.5.6} + \frac{10^2.12.8}{2.3.4} - \frac{10^2}{2} + 1,$$

$$2^9 = 2.\frac{10^2.12.8.14.6.16.4}{2.3.4.5.6.7.8} - 2^2.\frac{10^2.12.8.14.6}{2.3.4.5.6} + 2^3.\frac{10^2.12.8}{2.3.4} - 2^4.\frac{10^2}{2} + 2^5;$$

ou

$$511 = 1\,280 - 1\,120 + 400 - 50 + 1,$$

$$512 = 2\,560 - 4\,480 + 3\,200 - 800 + 32;$$

ce qui est exact.

(*) n est supposé *pair*.

45. *Remarque.* Lorsque n est *pair*, les valeurs des coefficients a_0, a_2, a_4,... peuvent être écrites ainsi :

$$a_0 = \frac{n}{n} 2^{n-1} C_{n-1,0}, \qquad a_2 = -\frac{n}{n-2} 2^{n-3} C_{n-2,1},$$

$$a_4 = \frac{n}{n-4} 2^{n-5} C_{n-3,2}, \quad a_6 = -\frac{n}{n-6} 2^{n-7} C_{n-4,3}, \ldots \text{(*)}.$$

Au moyen de ce changement, l'identité (68) devient

$$\frac{2^{n-3}}{n-2} C_{n-2,1} - \frac{2^{n-5}}{n-4} C_{n-3,2} + \frac{2^{n-7}}{n-6} C_{n-4,3} - \cdots \pm \frac{1}{n} = \frac{2^{n-1}-1}{n} \quad (70)$$

46. *Fonction génératrice des polynômes* N. Reprenons la formule

$$\frac{N_{p+1}}{2^p \Gamma(p+1)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta)^p \, d\theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; (65)$$

D'après la définition de Laplace, la fonction *génératrice* du premier membre est

$$v = \sum_0^\infty \frac{N_{p+1}}{2^p \Gamma(p+1)} z^p \text{ (**)}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (71)$$

Il est visible que

$$v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 - (x^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta) z};$$

ou, par la formule connue (**34**) :

$$v = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2 z)(1 - z)}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (72)$$

Donc, *si l'on réduit en série cette fonction* v, *le coefficient de* z^p *sera* $\frac{N_{p+1}}{2^p \Gamma(p+1)}$. A cause de l'analogie qui existe entre v et u, les

(*) Voir, par exemple : Le Cointe, *Théorie des fonctions circulaires*, p. 127.

(**) On peut toujours supposer que le polynôme N_{p+1} a été divisé par un facteur simple. C'est pourquoi nous disons : *fonction génératrice des polynômes* N_p, et non : *fonction génératrice de* $\frac{N_{p+1}}{2^p \Gamma(p+1)}$.

polynômes N doivent jouir de propriétés aussi remarquables, peut-être, que les polynômes X. Nous en avons déjà indiqué quelques-unes. En voici une autre, dont la vérification est facile:

$$N_{p+1} = (2p-1)(x^2+1)N_p - 4(p-1)^2 x^2 N_{p-1} \quad \ldots \quad (73)$$

47. *Remarques.* — I. D'après cette égalité, et à cause de $N_2 = x^2 + 1$ (**41**) : N_p *se réduit à zéro ou à* $2^{p-1}(1.3.5\ldots\overline{p-2})$, *pour* $x^2 = -1$, *selon que* p *est* PAIR *ou* IMPAIR (*).

II. On a trouvé

$$\left.\begin{array}{l} N_{p+1} = 1.3.5\ldots(2p-1)x^{2p} + \frac{p}{1}1.3.5\ldots(2p-3).1.x^{2p-2} \\ \quad + \frac{p(p-1)}{1.2}1.3.5\ldots(2p-5)1.3x^{2p-4} + \cdots + 1.3.5\ldots(2p-1). \end{array}\right\} (64)$$

Donc, par la première Remarque :

$$\left.\begin{array}{l} 1.3.5\ldots(2p-1) - \frac{p}{1}\cdot 1.3.5\ldots(2p-3)1 + \frac{p(p-1)}{1.2}1.3.5\ldots(2p-5)1.3 - \cdots \\ \quad + 1.3.5\ldots(2p-1) = 2^p(1.3.5\ldots\overline{p-1})^2 \qquad (p\ pair). \end{array}\right\} (74)$$

III. Si l'on remplace p par $2n$, et que l'on ait égard à une transformation connue, employée plusieurs fois dans ce Mémoire, on peut écrire ainsi l'identité précédente :

$$\left.\begin{array}{l} 1.3.5\ldots(4n-1) - \frac{2n}{1}\cdot 1.3.5\ldots(4n-3)1 + \frac{2n(2n-1)}{1.2}1.3.5\ldots(4n-5).1.3 \\ \quad - \cdots + 1.3.5\ldots(4n-1) = \left[(n+1)(n+2)\ldots 2n\right]^2. \end{array}\right\} (75)$$

IV. *Si l'on suppose*

$$u_1 = 1.3.5\ldots(4n-1),\quad u_2 = 1.3.5\ldots(4n-3).1,\quad u_3 = 1.3\ldots(4n-5).1.3,$$
$$\ldots\ldots,\quad u_{2n+1} = 1.3.5\ldots(4n-1);$$

la différence $(2n)^{\text{ième}}$, *de* u_1, *est un carré.*

(*) Ces conclusions résultent, aussi, de la formule (63).

V

SOLUTION D'UN PROBLÈME.

48. Les théorèmes I, II, III, dont les conséquences sont très-nombreuses (*), résultent des valeurs de $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dz}$, *heureusement* combinées. Pour trouver d'autres théorèmes, proposons-nous la question suivante :

Déterminer trois polynômes :

$$P = ax^2 + bxz + cz^2 + dx + ez + f,$$
$$P' = a'x^2 + b'xz + c'z^2 + d'x + e'z + f',$$
$$Q = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

tels, que l'on ait, identiquement :

$$P\frac{du}{dx} + P'\frac{du}{dz} = Qu\ (^{**})\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

A cause de

$$\frac{du}{dx} = u^3 z, \quad \frac{du}{dz} = u^3(x - z),$$

la condition (76) devient

$$\begin{aligned} &z(ax^2 + bxz + cz^2 + dx + ez + f) \\ &+ (z - x)(a'x^2 + b'xz + c'z^2 + d'x + e'z + f') \\ &= (1 - 2zx + z^2)(\alpha x + \beta z + \gamma). \end{aligned}$$

Identifiant les deux membres, on trouve d'abord :

$$\gamma = 0, \quad a' = 0, \quad d' = 0;$$

$$b = -(a + c' + \alpha + 2\beta), \quad c = c' + \beta, \quad d = -e', \quad e = e',$$
$$f = \alpha + \beta, \quad b' = -(a + 2\alpha), \quad f' = \alpha.$$

(*) On le verra plus loin.

(**) P, P' étant du second degré, il est visible que le polynôme Q doit être du premier degré. Au reste, on pourrait encore généraliser beaucoup la question.

Ainsi, *quelles que soient les quantités* a, c', e', α, β, *l'équation*

$$z\left[ax^2-(a+c'+\alpha+2\beta)xz+(c'+\beta)z^2+e'x+e'z+\alpha+\beta\right] \\ +(x-z)\left[-(a+2\alpha)xz+c'z^2+e'z+\alpha\right]=(1-2zx+z^2)(\alpha x+\beta z)$$

est identique.

Pour plus de régularité dans la notation, remplaçons c' par b, e' par d; nous aurons la proposition suivante :

49. Théorème X (*). *La fonction* u *satisfait à l'équation*

$$\left.\begin{array}{r}\left[ax^2-(a+b+\alpha+2\beta)xz+(b+\beta)z^2-dx+dz+\alpha+\beta\right]\dfrac{du}{dx} \\ +\left[-(a+2\alpha)xz+bz^2+dz+\alpha\right]\dfrac{du}{dz}=(\alpha x+\beta z)u\end{array}\right\}. \quad (77)$$

50. Corollaires. — I.

$$-(x-z)(x+1)\frac{du}{dx}+\left[z^2+(1-x)z+1\right]\frac{du}{dz}=u(x-z). \quad (78)$$

II.

$$(1-zx)\frac{du}{dx}+(1-2zx)\frac{du}{dz}=ux; \quad \ldots\ldots \quad (79)$$

relation très-simple.

III.

$$(x-z)\frac{du}{dx}-z\frac{du}{dz}=0. \quad \ldots\ldots \quad (80)$$

IV.

$$(x-z)^2\frac{du}{dx}+(xz-1)\frac{du}{dz}+(x-z)u=0; \quad \ldots\ldots \quad (81)$$

etc.

51. Théorème XI. *On a, entre deux fonctions consécutives, la relation*

$$\frac{dX_n}{dx}=nX_{n-1}+x\frac{dX_{n-1}}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (82)$$

(*) Nous reprenons ici la série des théorèmes, interrompue au paragraphe II.

Si, dans le Corollaire III, on remplace u par $\sum_0^\infty X_n z^n$, qu'on identifie les deux membres, et que l'on ait égard à la relation

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

on trouve la formule (82).

52. THÉORÈME XII. *On a, entre trois fonctions consécutives, la relation*

$$(x^2-1)\frac{dX_n}{dx} - x\frac{dX_{n-1}}{dx} + \frac{dX_{n-2}}{dx} - nxX_n + (2n-1)X_n = 0. \quad (83)$$

Même démonstration, combinée avec l'égalité (82).

53. *Remarque.* Le Théorème XI est une conséquence des relations

$$(1-x)\left(\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx}\right) = n(X_{n-1} - X_n), \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

$$(1+x)\left(\frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx}\right) = n(X_{n-1} + X_n) \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

De même, l'égalité (83) résulte de ces deux-ci, combinées avec l'équation

$$\frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n-2}}{dx} = (2n-1)X_n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

VI

AUTRES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS X_n (*).

54. THÉORÈME XIII. *Deux fonctions consécutives satisfont à la relation*

$$\frac{1}{n}\frac{d(X_{n-1}X_n)}{dx} = \frac{X_{n-1}^2 - X_n^2}{1-x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

(*) Ce sont celles qui ont été l'occasion du présent travail.

Ce théorème important est une conséquence, immédiate, des formules

$$(1 - x^2)\frac{dX_{n-1}}{dx} = n\,(xX_{n-1} - X_n), \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5)$$

$$(1 - x^2)\frac{dX_n}{dx} = n\,(X_{n-1} - xX_n). \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (6)$$

55. COROLLAIRES. — I.

$$\int_0^x \frac{X_{n-1}^2 - X_n^2}{1 - x^2}\,dx = \frac{1}{n} X_{n-1}X_n \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (85)$$

Nous n'ajoutons pas de constante, parce *qu'une des fonctions* X_{n-1}, X_n *est divisible par* x (**17**, 30).

II.

$$\int_0^1 \frac{X_{n-1}^2 - X_n^2}{1 - x^2}\,dx = \frac{1}{n} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (86)$$

En effet, pour $x = 1$, $X_n = 1$ (**17**, 10).

III.

$$\int_0^x \frac{1 - X_n^2}{1 - x^2}\,dx = X_0X_1 + \frac{1}{2}X_1X_2 + \frac{1}{3}X_2X_3 + \cdots + \frac{1}{n}X_{n-1}X_n \ . \quad (87)$$

Cette égalité est une conséquence du Corollaire I, et de $X_0 = 1$.

IV.

$$\int_0^1 \frac{1 - X_n^2}{1 - x^2}\,dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (88)$$

V.

$$\int_0^1 \frac{X_n^2 - X_{2n}^2}{1 - x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (89)$$

D'après le Corollaire IV, le premier membre égale

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Or, il est connu que cette somme est identique avec

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n}\ (^*).$$

VI.

$$\lim\int_0^1 \frac{X_n^2-X_{2n}^2}{1-x^2}\,dx = l.2 \ldots\ldots\ldots \quad (90)$$

Quand n croît indéfiniment, le second membre de l'équation (89) tend vers $l.2$: il en est de même, par conséquent, pour le premier membre.

VII.

$$\int_0^x \frac{1+X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{n-1}^2-nX_n^2}{1-x^2}dx = X_0X_1+X_1X_2+\cdots+X_{n-1}X_n. \quad (91)$$

D'après le Corollaire I, le second membre égale

$$\int_0^x \frac{(X_0^2-X_1^2)+2(X_1^2-X_2^2)+\cdots+n(X_{n-1}^2-X_n^2)}{1-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^x \frac{1+X_1^2+X_2^2+\cdots-nX_n^2}{1-x^2}\,dx.$$

VIII.

$$\int_0^1 \frac{1+X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{n-1}^2-nX_n^2}{1-x^2}\,dx = n \ \ldots\ldots \quad (92)$$

IX.

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^x \frac{1-2X_1^2+2X_2^2-2X_3^2+\cdots\pm 2X_{n-1}^2\mp X_n^2}{1-x^2}\,dx\\ &=X_1-\frac{1}{2}X_1X_2+\frac{1}{3}X_2X_3-\cdots\pm\frac{1}{n}X_{n-1}X_n\end{aligned}\right\}(^{**}).\ . \quad (93)$$

(*) *Note sur une formule de M. Botesu.* (BULLETINS DE L'ACADÉMIE, juillet 1872.)

(**) On doit prendre les signes supérieurs si n est *impair*.

Autre conséquence du Corollaire I.

X.

$$\int_0^1 \frac{1-2X_1^2+2X_2^2-\cdots\pm 2X_{n-1}^2\mp X_n^2}{1-x^2}\,dx = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\pm\frac{1}{n}. \quad (94)$$

XI.

$$\int_0^1 \frac{X_1^2-X_2^2+X_3^2-\cdots-X_{2n}^2}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right). \quad (95)$$

Se déduit du Corollaire II, par le changement de n en $2n$.

XII.

$$\int_0^1 \frac{X_{2n+1}^2-X_{2n+2}^2+\cdots-X_{4n}^2}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right). \quad (96)$$

XIII.

$$\left.\begin{aligned} \lim.\int_0^1 \frac{X_{2n+1}^2-X_{2n+2}^2+\cdots-X_{4n}^2}{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.2 \\ &= \frac{1}{2}\lim\int_0^1 \frac{X_n^2-X_{2n}^2}{1-x^2}\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (97)$$

XIV.

$$\int_0^1 \frac{1-2X_1^2+2X_2^2-\cdots-(1\mp 2)X_n^2\pm\cdots-2X_{2n-1}^2+2X_{2n}^2}{1-x^2}\,dx = 0\ (*). \quad (98)$$

Conséquence des Corollaires V et X.

(*) Le terme du milieu égale X_n^2 ou $-3X_n^2$, selon que n est *pair* ou *impair*. Par exemple :

$$\int_0^1 \frac{1-2X_1^2+X_2^2-2X_3^2+2X_4^2}{1-x^2}\,dx = 0,$$

$$\int_0^1 \frac{1-2X_1^2+2X_2^2-3X_3^2+2X_4^2-2X_5^2+2X_6^2}{1-x^2}\,dx = 0.$$

XV.

$$\left.\begin{aligned}\int_0^x \frac{1-3X_1^2+5X_2^2-7X_3^2+\cdots\pm(2n-1)X_{n-1}^2\mp nX_n^2}{1-x^2}dx\\ =X_0X_1-X_1X_2+X_2X_3-\cdots\pm X_{n-1}X_n.\end{aligned}\right\}\ldots (99)$$

Le Corollaire I donne, successivement :

$$\int_0^x \frac{1-X_1^2}{1-x^2}dx=X_0X_1,\quad \ldots\ldots,\quad n\int_0^x \frac{X_{n-1}^2-X_n^2}{1-x^2}dx=X_{n-1}X_n.$$

Donc, par des soustractions et des additions, on obtient la relation (99) (*).

XVI.

$$\int_0^1 \frac{1-3X_1^2+5X_2^2-\cdots\pm(2n-1)X_{n-1}^2\mp nX_n^2}{1-x^2}dx=\left\{\begin{array}{l}0\ (n\ \textit{pair})\\ 1\ (n\ \textit{impair})\end{array}\right\}\ (100)$$

En vertu de l'équation (99), le second membre est formé de *binômes nuls,* ou de binômes nuls, augmentés de $+1$.

56. Théorème XIV. *On a, entre deux fonctions consécutives, la relation*

$$n\frac{d(X_{n-1}X_n)}{dx}=\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2-\left(\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)^2 \ldots\ldots (101)$$

Des égalités

$$(1-x)\left(\frac{dX_n}{dx}+\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)=n(X_{n-1}-X_n), \ldots\ldots (8)$$

$$(1-x)\left(\frac{dX_n}{dx}-\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)=n(X_{n-1}+X_n), \ldots\ldots (9)$$

(*) D'après la démonstration, le polynôme

$$1-3X_1^2+5X_2^2-\cdots\pm(2n-1)X_{n-1}^2\pm nX_n^2$$

est divisible par $1-x^2$. Conséquemment,

$$1-3+5-7+\cdots\pm(2n-1)=\mp n.$$

On retrouve ainsi un petit théorème d'Arithmétique, peu remarqué.

on tire

$$(1-x^2)\left[\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2-\left(\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)^2\right]=n^2(X_{n-1}^2-X_n^2)\ .\ .\ .\ (102)$$

Le second membre égale $n(1-x^2)\frac{d(X_{n-1}X_n)}{dx}$ (Th. XIII); donc, etc.

57. Corollaires. — I.

$$\int_0^x\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2dx-\int_0^x\left(\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)^2dx=nX_{n-1}X_n\ .\quad (103)$$

II.

$$\int_0^1\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2dx-\int_0^1\left(\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)^2dx=n.\ .\ .\ .\ .\ (104)$$

III.

$$\int_0^1\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2dx=\frac{1}{2}n(n+1)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (105)$$

Résulte du Corollaire II.

IV.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{n}\int_0^x\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2dx+\frac{1}{n(n-1)}\int_0^x\left(\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)^2dx+\cdots\\&+\frac{1}{2.1}\int_0^x\left(\frac{dX_1}{dx}\right)^2dx=X_0X_1+X_1X_2+\cdots+X_{n-1}X_n\end{aligned}\right\}..\ (106)$$

Si, après avoir divisé par n les deux membres de l'égalité (103), on change n en $n-1$, $n-2$,... 1, et que l'on fasse les sommes, on trouve la relation (106).

V.

$$\frac{1}{n}\int_0^1\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2dx+\frac{1}{n(n-1)}\int_0^1\left(\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)^2dx+\cdots+\frac{1}{2.1}\int_0^1\left(\frac{dX_1}{dx}\right)^2dx=n.\ (107)$$

VI.

$$\int_0^1\left[\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2-2\left(\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)^2+\left(\frac{dX_{n-2}}{dx}\right)^2\right]dx=1\ .\ .\ .\ (108)$$

Conséquence du Corollaire II.

58. *Remarque.* Les seconds membres des équations (91),(106), identiques, s'annulent avec x. Donc

$$1+X_1^2+X_2^2+X_3^2+\cdots+X_{n-1}^2-nX_n^2$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2+\frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)^2+\cdots+\frac{1}{2.1}\left(\frac{dX_1}{dx}\right)^2.$$

Cette égalité est une conséquence de la relation (102) : elle n'exprime rien de nouveau.

59. Théorème XV. *Deux fonctions consécutives satisfont à la relation*

$$2x\frac{d(X_{n-1}X_n)}{dx}=\frac{d(X_{n-1}^2+X_n^2)}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

L'élimination de n, entre les équations (8), (9), donne

$$(1+x)(X_{n-1}-X_n)\left(\frac{dX_n}{dx}-\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)=(1-x)(X_{n-1}+X_n)\left(\frac{dX_n}{dx}+\frac{dX_{n-1}}{dx}\right),$$

ou

$$\frac{dX_{n-1}}{dx}(X_{n-1}-xX_n)+\frac{dX_n}{dx}(X_n-xX_{n-1})=0;$$

etc.

60. Corollaires. — I.

$$X_{n-1}^2-2xX_{n-1}X_n+X_n^2=-2\int X_{n-1}X_n dx+const \quad \ldots \quad (110)$$

II.

$$X_{n-1}^2-2xX_{n-1}X_n+X_n^2=-2\int_{-1}^{x}X_{n-1}X_n dx \quad \ldots\ldots \quad (111)$$

En effet, pour $x=-1$, la valeur du premier membre est (17, 20) :

$$1+2(-1)^{2n-1}+1=0.$$

III.

$$\int_{-1}^{+1}X_{n-1}X_n dx=0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (112)$$

formule connue.

IV.

$$\int_{-1}^{0} X_{n-1} X_n dx = -\frac{1}{2^{2n+1}} \left[\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\quad\frac{n}{2}}\right]^2 \text{(n } pair\text{)}; \;.\;.\; (113)$$

$$\int_{-1}^{0} X_{n-1} X_n dx = -\frac{1}{2^{2n-1}} \left[\frac{(n-1)(n-2)\ldots\left(\frac{n+1}{2}\right)}{1.2\ldots\quad\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right]^2 \text{(n } impair\text{)} \;.\; (114)$$

Si n est *pair*, X_{n-1} s'annule avec x. En même temps (**17**, 30),

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots\quad n}.$$

Donc, par la relation (111),

$$\int_{-1}^{0} X_{n-1}X_n dx = -\frac{(X_n)^2}{2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots\quad n}\right]^2 = -\frac{1}{2^{2n+1}}\left[\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\quad\frac{n}{2}}\right]^2.$$

De même, si n est *impair*.

V.

$$X_{n-1} X_n = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{x} d\left[X_{n-1}^2 + X_n^2\right]. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (115)$$

Divisant, par $2xdx$, les deux membres de l'égalité (109), et intégrant à partir de $x = 0$, on trouve la relation (115).

VI.

$$X_0X_1 - X_1X_2 + X_2X_3 - \cdots \pm X_{n-1}X_n = \pm\frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{x} d\left[X_n^2\right]. \; (116)$$

VII.

$$\left.\begin{array}{ll} \displaystyle\int_0^1 \frac{X_n}{x} dX_n = 0, & \text{(n } pair\text{)} \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{X_n}{x} dX_n = +1. & \text{(n } impair\text{)} \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (117)$$

Même démonstration que ci-dessus. (**53.** Corollaire XVI.)

61. *Remarques.* — I. Les relations (110), (111), (113), (114) nous semblent compléter le théorème exprimé par la formule (112).

II. Si, comme précédemment, on fait $x = \cos\alpha$, le premier membre de l'égalité (111) représente *le carré du troisième côté d'un triangle, dont les deux autres côtés seraient* X_{n-1}, X_n; α *étant l'angle compris entre ces deux côtés. Quant au second membre, il équivaut à* $4\int_{-\pi}^{\alpha} T d\alpha$, T *désignant l'aire du triangle variable.*

III. D'après les relations (99), (116) :

$$\frac{1 - 3X_1^2 + 5X_2^2 - \cdots \pm (2n-1)X_{n-1}^2 \mp nX_n^2}{1 - x^2} = \pm \frac{X_n}{x} \frac{dX_n}{dx} \text{ (*)}. \quad (118)$$

62. Théorème XVI. *On a, entre deux fonctions consécutives, la relation*

$$\frac{1}{x^{n+1}} \frac{dX_{n-1}}{dx} = \frac{d\left(\frac{X_n}{x^n}\right)}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (119)$$

L'équation connue

$$\frac{dX_{n-1}}{dx} = x\frac{dX_n}{dx} - nX_n \text{ (**)},$$

étant mise sous la forme

$$\frac{1}{x^{n+1}} \frac{dX_{n-1}}{dx} = \frac{1}{x^{n+1}} \left(x \frac{dX_n}{dx} - nX_n \right),$$

on voit que le second membre est la dérivée de $\frac{X_n}{x^n}$.

63. Corollaires. — I.

$$\int \frac{dX_{n-1}}{x^{n+1}} = \frac{X_n}{x^n} + const. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (120)$$

(*) Même observation que ci-dessus (**58**).

(**) Celle-ci, analogue à la relation (82), est, comme cette dernière, une conséquence des égalités (8), (9).

II. *Si* a *est une racine de* $X_n = 0$:

$$\int_a^x \frac{dX_{n-1}}{x^{n+2}} = \frac{X_n}{x^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (121)$$

III.

$$X_n = \left[1 + \int_{-1}^x \frac{dX_{n-1}}{x^{n+1}}\right] x^n. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (122)$$

On tire, de l'équation (120),

$$\int_{-1}^x \frac{dX_{n-1}}{x^{n+1}} = \frac{X_n}{x^n} - \left[\frac{X_n}{x^n}\right]_{(x=-1)}.$$

La quantité entre parenthèses égale $\frac{(-1)^n}{(-1)^n} = +1$; etc.

IV. *Si* a, b *sont deux racines de* $X_n = 0$ (*), *on a*

$$\int_a^b \frac{dX_{n-1}}{x^{n+1}} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (123)$$

En effet, le second membre de l'égalité (121) s'annule pour $x = b$ (**).

64. *Formation de* X_n, *au moyen de* X_{n-1}. Soit, pour abréger,

$$X_{n-1} = Ax^{n-1} - Bx^{n-3} + Cx^{n-5} - \ldots; \quad \ldots\ldots \quad (124)$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{x^{n+1}} \frac{dX_{n-1}}{dx} = \frac{(n-1)A}{x^3} - \frac{(n-3)B}{x^5} + \frac{(n-5)C}{x^7} - \ldots$$

(*) On peut les supposer positives, afin que $\frac{dX_{n-1}}{x^{n+1}}$ reste finie dans l'intervalle.

(**) Cette propriété des fonctions consécutives, X_{n-1}, X_n, nous semble très-remarquable.

La formule (120) donne

$$\frac{X_n}{x^n} = \Gamma - \frac{(n-1)A}{2x^2} + \frac{(n-3)B}{4x^4} - \frac{(n-5)C}{6x^6} + \cdots,$$

ou

$$X_n = \Gamma x^n - \frac{(n-1)A}{2} x^{n-2} + \frac{(n-3)B}{4} x^{n-4} - \frac{(n-5)C}{6} x^{n-6} + \cdots;$$

Γ étant la constante.

On a vu (**19**, II) que $\Gamma = \frac{1}{2^n} C_{2n,n}$; donc enfin

$$X_n = \frac{1}{2^n} C_{2n,n} x^n - \frac{n-1}{2} A x^{n-2} + \frac{n-3}{4} B x^{n-4} - \frac{n-5}{6} C x^{n-6} + \cdots \quad (125)$$

La comparaison des formules (124), (125) donne cette règle simple :

Connaissant X_{n-1}, *on forme le polynôme*

$$P = \frac{n-1}{2} A x^{n-2} - \frac{n-3}{4} B x^{n-4} + \frac{n-5}{6} C x^{n-6} - \cdots,$$

dont les termes sont ceux de $\frac{dX_{n-1}}{dx}$, *respectivement divisés par* 2, 4, 6, ... ; *et l'on a*

$$X_n = \frac{1}{2^n} C_{2n,n} x^n - P.$$

65. *Application.*

$$X_4 = \frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8},$$

$$P = \frac{35}{8}\frac{4}{2} x^3 - \frac{15}{4}\cdot\frac{2}{4} x = \frac{35}{4} x^3 - \frac{15}{8} x.$$

Donc

$$X_5 = \frac{1}{32} C_{10,5} x^5 - P = \frac{63}{8} x^5 - \frac{35}{4} x^3 + \frac{15}{8} x.$$

66. *Remarque*. Si l'on part de $X_1 = x$, et que l'on applique la règle précédente, on trouve

$$\left.\begin{aligned}2^n X_n = C_{2n,n} x^n - C_{n-1,1} \cdot C_{2n-2,n-1} x^{n-2} + C_{n-2,2} \cdot C_{2n-4,n-2} x^{n-4} \\ - C_{n-3,3} \cdot C_{2n-6,n-3} x^{n-6} + \cdots,\end{aligned}\right\} (126)$$

relation qui ne diffère pas de la formule (21).

67. Théorème XVII.

$$X_n = \frac{1}{n(x^2-1)^{\frac{n}{2}-1}} \frac{d\left[(x^2-1)^{\frac{n}{2}} X_{n-1}\right]}{dx} \quad \ldots\ldots (127)$$

L'équation

$$(1-x^2)\frac{dX_{n-1}}{dx} = n(xX_{n-1} - X_n). \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

étant écrite ainsi :

$$(x^2-1)^{\frac{n}{2}} \frac{dX_{n-1}}{dx} + n(x^2-1)^{\frac{n}{2}-1} xX_{n-1} = n(x^2-1)^{\frac{n}{2}-1} X_n,$$

le premier membre est la dérivée de $(x^2-1)^{\frac{n}{2}} X_{n-1}$.

68. *Application.* Soit

$$X_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x);$$

et, par conséquent,

$$(x^2-1)^3 \frac{1}{8}(63x^{11} - 259x^9 + 414x^7 - 318x^5 + 115x^3 - 15x).$$

La dérivée est

$$\frac{1}{8}(693x^{10} - 2331x^8 + 2898x^6 - 1590x^4 + 345x^2 - 15).$$

Divisant par $(x^2-1)^2$, on trouve

$$\frac{3}{8}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

Ainsi

$$X_6 = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5);$$

résultat exact (**16**).

69. *Remarques.* — I. Si l'on fait

$$(1-x^2)^{\frac{n+1}{2}} X_n = Z_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (128)$$

l'équation (127) se réduit à

$$n Z_n + (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dZ_{n-1}}{dx} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (129)$$

II. *Les équations*

$$Z_n = 0, \quad \frac{dZ_{n-1}}{dx} = 0,$$

ont les mêmes racines (*).

III. Si l'on considère les courbes C_{n-1}, C_n, respectivement représentées par

$$Y_{n-1} = Z_{n-1}, \quad Y_n = Z_n;$$

aux points *maximums* ou *minimums* de la première, correspondent les *points-racines* de la seconde.

IV. A cause de $X_1 = x$, et de la formule (128), la courbe C_1 a pour équation $Y_1 = x - x^3$: c'est une parabole cubique. Elle coupe l'axe des abscisses à l'origine, et aux points déterminés par $x = \pm 1$. Toutes les autres courbes, C_2, C_3, ... touchent, en ces deux points, le même axe.

70. Théorème XVIII.

$$X_{n+1} - X_{n-1} = (2n+1) \int_{-1}^{x} X_n dx \quad \ldots\ldots \quad (130)$$

Cette relation se déduit de l'égalité

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = (2n+1) X_n. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

D'ailleurs, comme X_{n-1} et X_{n+1} prennent la même valeur pour $x = -1$ (**17**, 20), on n'ajoute pas de constante.

(*) Abstraction faite de ± 1, si $n = 2$.

71. COROLLAIRES. — I.

$$X_{n+1}-1=3\int_{-1}^{x}X_1dx+7\int_{-1}^{x}X_3dx+\cdots+(2n+1)\int_{-1}^{x}X_ndx \quad (n\ impair);\ (131)$$

$$X_{n+1}-x=5\int_{-1}^{x}X_2dx+9\int_{-1}^{x}X_4dx+\cdots+(2n+1)\int_{-1}^{x}X_ndx \quad (n\ pair).\ (132)$$

II.

$$(2n+1)\int_{-1}^{x}X_ndx=0, \qquad pour\ n\ infini. \ .\ .\ .\ .\ (133)$$

En effet, le premier membre de l'équation (130) tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment.

VII

QUELQUES VÉRIFICATIONS.

72. Il n'est peut-être pas inutile d'appliquer, à certains cas particuliers, quelques-unes des formules obtenues ci-dessus; par exemple, les relations (89), (96). On doit trouver, en supposant $n=2$:

$$\int_0^1 \frac{X_2^2-X_4^2}{1-x^2}dx=\frac{7}{12}, \quad \int_0^1 \frac{X_5^2-X_6^2+X_7^2-X_8^2}{1-x^2}=\frac{7}{24}.$$

D'après les valeurs de $X_1, X_2, \ldots X_8$, rapportées dans le paragraphe II, on a

$$X_2+X_4=\frac{1}{8}(-1+18x^2+35x^4), \quad \frac{X_2-X_4}{1-x^2}=\frac{7}{8}(-1+5x^2),$$

$$X_5+X_6=\frac{1}{16}(-5+30x+105x^2-140x^3-315x^4+126x^5+231x^6),$$

$$\frac{X_5+X_6}{1+x}=\frac{1}{16}(-5+35x+70x^2-210x^3-105x^4+231x^5),$$

$$X_5-X_6=\frac{1}{16}(5+30x-105x^2-140x^3+315x^4+126x^5-231x^6$$

$$\frac{X_5-X_6}{1-x}=\frac{1}{16}(5+35x-70x^2-210x^3+105x^4+231x^5),$$

$$X_7+X_8=\frac{1}{128}(35-280x-1\,260x^2+2\,520x^3+6\,930x^4-5\,444x^5$$
$$-12\,012x^6+3\,432x^7+6\,435x^8),$$

$$\frac{X_7+X_8}{1+x}=\frac{1}{128}(35-315x-945x^2+3\,465x^3+3\,465x^4-9\,009x^5$$
$$-3\,003x^6+6\,435x^7),$$

$$X_7-X_8=\frac{1}{128}(-35-280x+1\,260x^2+2\,520x^3-6\,930x^4-5\,544x^5$$
$$+12\,012x^6+3\,432x^7-6\,435x^8),$$

$$\frac{X_7-X_8}{1-x}=\frac{1}{128}(-35-315x+945x^2+3\,465x^3-3\,465x^4-9\,009x^5$$
$$+3\,003x^6+6\,435x^7),$$

$$\frac{X_2^2-X_4^2}{1-x^2}=\frac{7}{64}(1+15x^2-125x^4+175x^6),$$

$$\frac{X_5^2-X_6^2}{1-x^2}=\frac{1}{256}\left[(35x-210x^3+231x^5)^2-(5-70x^2+105x^4)^2\right]$$
$$=\frac{1}{256}\left[49x^2(25-300x^2+1\,230x^4-1\,980x^6+1\,089x^8)\right.$$
$$\left.-25(1-28x^2+238x^4-588x^6+441x^8)\right],$$

$$\frac{X_7^2-X_8^2}{1-x^2}=\frac{1}{128^2}\left[(315x-3\,465x^3+9\,009x^5-6\,435x^7)^2\right.$$
$$\left.-(35-945x^2+3\,465x^4-3\,003x^6)^2\right]$$
$$=\frac{1}{128^2}\left[81x^2(1\,225-26\,950x^2+218\,295x^4-820\,820x^6\right.$$
$$+1\,552\,551x^8-1\,431\,430x^{10}+511\,225x^{12})$$
$$-49(25-1\,350x^2+23\,175x^4-137\,940x^6$$
$$\left.+360\,885x^8-424\,710x^{10}+184\,041x^{12})\right];$$

puis :

$$\int_0^1\frac{X_2^2-X_4^2}{1-x^2}dx=\frac{7}{64}\left(1+\frac{15}{3}-25+25\right)=\frac{7}{12},$$

$$\int_0^1\frac{X_5^2-X_6^2}{1-x^2}dx=\frac{1}{256}\left[49\left(\frac{25}{3}-60+\frac{1\,230}{7}-220+99\right)\right.$$
$$\left.-25\left(1-\frac{28}{3}+\frac{238}{5}-84+49\right)\right]$$
$$=\frac{1}{256}\left[49\left(\frac{25}{3}+\frac{1\,230}{7}-181\right)-25\left(-\frac{28}{3}+\frac{238}{5}-34\right)\right]=\frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 \frac{X_7^2 - X_8^2}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{128^2}\Bigg[81\left(\frac{1\,225}{3} - 5\,390 + 31\,185 - \frac{820\,820}{9}\right.$$

$$\left. + 141\,141 - 110\,110 + \frac{102\,245}{3}\right)$$

$$- 49\left(25 - 450 + 4\,635 - \frac{137\,940}{7} + 40\,095 - 38\,610 + 14\,157\right)\Bigg]$$

$$= \frac{1}{128^2}\left[81\left(91\,316 - \frac{820\,820}{9}\right) - 49\left(19\,852 - \frac{137\,940}{7}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{128^2}[7\,396\,596 - 972\,748 - 6\,421\,800] = \frac{1}{8},$$

$$\int_0^1 \frac{X_5^2 - X_6^2 + X_7^2 - X_8^2}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}.$$

73. Prenons la formule

$$X_{n-1}X_n = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{x}\,d\,[X_{n-1}^2 + X_n^2], \quad \ldots\ldots \quad (115)$$

en supposant $n = 5$. Elle donne

$$\frac{1}{64}(35x^4 - 30x^2 + 3)(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$= \frac{1}{64}\int_0^x [35x^4 - 30x^2 + 3)(140x^2 - 60)$$

$$+ (63x^4 - 70x^2 + 15)(315x^4 - 210x^2 + 15)]\,dx,$$

ou

$$(35x^4 - 30x^2 + 3)(63x^4 - 70x^2 + 15)x = 20\int_0^x (35x^4 - 30x^2 + 3)(7x^2 - 3)dx$$

$$+ 15\int_0^x (63x^4 - 70x^2 + 15)(21x^4 - 14x^2 + 1)\,dx,$$

ou

$$(2\,205x^8 - 4\,340x^6 + 2\,814x^4 - 660x^2 + 45)x$$

$$= 20\int_0^x (245x^6 - 315x^4 + 111x^2 - 9)\,dx$$

$$+ 15\int_0^x (1\,323x^8 - 2\,352x^6 + 1\,358x^4 - 280x^2 + 15)\,dx$$

$$= 20\,(35x^7 - 63x^5 + 37x^3 - 9x)$$

$$+ 15\left(147x^9 - 336x^7 + \frac{1\,358}{5}x^5 - \frac{280}{3}x^3 + 15x\right)$$

$$= 2\,205x^9 - 4\,340x^7 + 2\,814x^5 - 660x^3 + 45x.$$

74. Soit enfin la relation

$$X_n = \left[1 + \int_{-1}^{x} \frac{dX_{n-1}}{x^{n+1}}\right] x^n \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (122)$$

Pour $n = 6$, elle se réduit à

$$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) = x^6 + x^6 \int_{-1}^{x} \frac{1}{8x^7}(315x^4 - 210x^2 + 15)\,dx.$$

L'intégrale est

$$\frac{1}{8}\left[-\frac{315}{2x^2} + \frac{210}{4x^4} - \frac{15}{6x^6}\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{8}\left[-\frac{315}{2x^2} + \frac{105}{2x^4} - \frac{5}{2x^6} + \frac{215}{2}\right].$$

On doit donc trouver

$$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) = x^6 + \frac{1}{16}(-315x^4 + 105x^2 - 5 + 215x^6);$$

ce qui est exact.

VIII

SUR L'ÉQUATION $X_n = 0$.

75. On sait que *les racines de cette équation sont : 1° réelles et inégales; 2° comprises entre* -1 *et* $+1$; *3° égales et de signes contraires deux à deux* (*).

76. On a vu (**29**) que, si dans $X_n = 0$, ou

$$(1+x)^n - \left[\frac{n}{1}\right]^2 (1+x)^{n-1}(1-x) + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 (1+x)^{n-2}(1-x)^2 - \cdots = 0, \quad (25)$$

on fait

$$\frac{1-x}{1+x} = z^2,$$

(*) Si n est *impair*, X_n est divisible par x. Il y a donc une racine nulle, *unique*.

on obtient, comme *transformée*, l'équation *réciproque*

$$z^{2n}-\left[\frac{n}{1}\right]^2 z^{2n-2}+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 z^{2n-4}-\ldots\mp\left[\frac{n}{1}\right]^2 z^2\pm 1=0. \quad (37)$$

Celle-ci, comme la proposée, a donc toutes ses racines réelles (*).

77. Remarque. *A toute équation réciproque, correspond une équation dont les racines sont, deux à deux, égales et de signes contraires.*

Soit $f(y)=0$ une équation *réciproque*. Si l'on fait $y=\frac{x-1}{x+1}$, l'équation transformée, $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$, jouit de la propriété énoncée. En effet, la relation entre y et x n'est pas altérée quand on y change y en $\frac{1}{y}$ et x en $-x$.

78. *Séparation des racines.* Pour l'effectuer, on peut, aux *fonctions de Sturm*, substituer les quantités X_{n-1}, X_{n-2}, ... X_1, X_0 (**).

79. Application. *Combien l'équation* $X_5=0$ *a-t-elle de racines comprises entre* $\frac{1}{2}$ *et* $\frac{2}{3}$?

En négligeant des facteurs positifs, l'on a

$$X_5=63x^5-70x^3+15x,\quad X_4=35x^4-30x^2+3,$$

$$X_3=5x^3-3x,\quad X_2=3x^2-1,\quad X_1=x,\quad X_0=1.$$

	X_5	X_4	X_3	X_2	X_1	X_0
$x=\frac{1}{2}$ ...	+	−	−	−	+	+
$x=\frac{2}{3}$	−	−	−	+	+	+:

une seule racine.

En effet, la plus petite racine positive est

$$\sqrt{\frac{35-\sqrt{180}}{63}}=0,538\ldots,$$

nombre compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

(*) Cette propriété paraît avoir été signalée, d'abord, par M. H. Laurent.
(**) Proposition connue.

80. Théorème XIX. *Les racines de* $X_{n-1} = 0$ *séparent les racines de* $X_n = 0$ (*).

81. Corollaire. *La plus grande racine, de* $X_n = 0$, *croît avec* n.

D'après le théorème, cette *plus grande racine* surpasse la plus grande racine de $X_{n-1} = 0$.

82. *Remarque.* Ces *plus grandes racines* convergent, rapidement, vers 1 : la plus grande racine de $X_6 = 0$ surpasse, déjà, 0, 9.

La formule de Newton conduit à la même conclusion. En effet, pour $x = 1$,

$$h = -\frac{1}{\left(\frac{dX_n}{dx}\right)_1},$$

ou (**30**, VII) :

$$h = -\frac{2}{n(n+1)}.$$

Ainsi, la valeur de la plus grande racine est, très-sensiblement, $1 - \frac{2}{n(n+1)}$.

IX

QUELQUES SÉRIES ET QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES.

83. Théorème XX. *On a, en séries convergentes :*

$$-1 = 3\int_{-1}^{x} X_1 dx + 7\int_{-1}^{x} X_3 dx + 11\int_{-1}^{x} X_5 dx + \cdots, \quad . \; . \quad (134)$$

$$-x = 5\int_{-1}^{x} X_2 dx + 9\int_{-1}^{x} X_4 dx + 13\int_{-1}^{x} X_6 dx + \cdots \quad . \; . \quad (135)$$

Nous avons trouvé :

$$X_{n+1} - 1 = 3\int_{-1}^{x} X_1 dx + 7\int_{-1}^{x} X_3 dx + \cdots + (2n+1)\int_{-1}^{x} X_n dx, \text{(n } impair\text{)} \quad (131)$$

$$X_{n+1} - x = 5\int_{-1}^{x} X_2 dx + 9\int_{-1}^{x} X_4 dx + \cdots + (2n+1)\int_{-1}^{x} X_n dx. \text{ (n } pair\text{)} \quad (132)$$

(*) Proposition connue.

Quand n croît indéfiniment, les premiers membres tendent, l'un vers -1, l'autre vers $-x$ (*) : les seconds jouissent donc de ces mêmes propriétés.

84. Corollaires :

$$1-x=-3\int_{-1}^{x}X_1dx+5\int_{-1}^{x}X_2dx-7\int_{-1}^{x}X_3dx+9\int_{-1}^{x}X_4dx-\cdots, \quad (136)$$

$$-1=3\int_{-1}^{0}X_1dx+7\int_{-1}^{0}X_3dx+11\int_{-1}^{0}X_5dx+\cdots, \quad (137)$$

$$0=5\int_{-1}^{0}X_2dx+9\int_{-1}^{0}X_4dx+13\int_{-1}^{0}X_6dx+\cdots; \quad (138)$$

etc.

85. *Remarque.* Au lieu d'effectuer les intégrations indiquées, il est préférable d'appliquer, à chacune des séries précédentes, l'identité (130).

Soit, par exemple, la série (137), dont le terme général est

$$(4n-3)\int_{-1}^{0}X_{2n-1}dx=[X_{2n}]_0-[X_{2n-2}]_0.$$

Or (**17**, 3°) :

$$[X_{2n}]_0=\mp\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ 2n},\quad [X_{2n-2}]_0=\pm\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)};$$

selon que n est *pair* ou *impair*. Le terme général devient

$$\mp\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ 2n}+\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\right]=\mp\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{4n-1}{2n}.$$

On a donc, au lieu de la formule (137) :

$$1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}+\frac{1.3}{2.4}\frac{11}{6}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{15}{8}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{19}{10}-\cdots\ (^{**}). \quad (139)$$

(*) On suppose x compris entre -1 et $+1$, *exclusivement.*

(**) Pour vérifier cette égalité, il suffit d'écrire ainsi le second membre :

$$2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2.4}+\frac{1.3}{2.4.6}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}+\cdots\right)$$

$$=2\sqrt{\frac{1}{2}}-(\sqrt{2}-1);\ \text{etc.}$$

86. *Suite.* Au moyen de la formule

$$X_n = \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi\,(x\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n\,dx\ (^*), \quad . \; . \; . \quad (23)$$

il est facile d'exprimer $\int_{-1}^{x} X_n dx$ sous forme d'intégrale définie.

En effet : 1°

$$\int_{-1}^{x} X_n dx = \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\varphi d\varphi \int_{-1}^{x} (x\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n \cos\varphi dx$$

$$= \frac{2^{n+1}}{(n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\varphi d\varphi \left[(x\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^{n+1}\right]_{-1}^{x}.$$

2°

$$\left[\left(x\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right)^{n+1}\right]_{-1}^{x} = \left(x\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right)^{n+1} - \left(-\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right)^{n+1}$$

$$= \left(x\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\sin\varphi\right)^{n+1} + (-1)^n\left[\cos(n+1)\varphi - \sqrt{-1}\,\sin(n+1)\varphi\right]$$

$$= \left(x\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\sin\varphi\right)^{n+1} + (-1)^n\cos(n+1)\varphi,$$

si l'on néglige la partie imaginaire, dans le second terme.

3° D'après une formule connue,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\varphi \cos(n+1)\varphi d\varphi = 0.$$

Donc

$$\int_{-1}^{x} X_n dx = \frac{2^{n+1}}{(n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\varphi \left(x\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi\right)^{n+1} d\varphi, \quad (140)$$

si l'on fait abstraction de la partie imaginaire; ou, *rigoureusement :*

$$\int_0^{x} X_n dx =$$

$$\frac{2^n}{n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\varphi d\varphi \left[\left(x\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right)^{n+1} + \left(x\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi\right)^{n+1}\right].(1$$

(*) Rappelons que l'on doit faire abstraction de la partie imaginaire. Au surplus, on pourrait écrire

$$X_n = \frac{2^n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi \left[(x\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n + (x\cos\varphi - \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n\right] d\varphi,$$

sans restriction.

En particulier :

$$\int_{-1}^{0} X_n dx = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n\ pair). \quad . \quad . \quad (142)$$

$$\int_{-1}^{0} X_n dx = \frac{2^{n+1}\left(\sqrt{-1}\right)^{n+1}}{(n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\varphi \sin^{n+1}\varphi d\varphi. \quad (n\ impair)\ (^*)\ (143)$$

87. *Formule de Baüer.* A cause de $X_0 = 1$, $X_1 = x$, on a, identiquement :

$$1 - x = (1 - X_2) - (X_1 - X_3) + (X_2 - X_4) - (X_3 - X_5) + \cdots$$

En effet, X_n a pour limite zéro.

Pour transformer le second membre, j'applique la relation

$$X_{n-1} - X_{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)} (1 - x^2) \frac{dX_n}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Elle donne, successivement :

$$1 - X_2 = \frac{3}{1.2} (1 - x^2) \frac{dX_1}{dx}, \quad X_1 - X_3 = \frac{5}{2.3} (1 - x^2) \frac{dX_2}{dx},$$

$$X_2 - X_4 = \frac{7}{3.4} (1 - x^2) \frac{dX_3}{dx}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

L'égalité ci-dessus devient donc, après suppression d'un facteur,

$$\frac{1}{1+x} = \frac{3}{1.2}\frac{dX_1}{dx} - \frac{5}{2.3}\frac{dX_2}{dx} + \frac{7}{3.4}\frac{dX_3}{dx} - \frac{9}{4.5}\frac{dX_4}{dx} + \cdots \quad (144)$$

En intégrant, on a

$$\log(1+x) = C + \frac{3}{1.2} X_1 - \frac{5}{2.3} X_2 + \frac{7}{3.4} X_3 - \frac{9}{4.5} X_4 + \cdots$$

(*) Très-probablement, ces formules sont connues. Cependant, je ne me rappelle pas de les avoir rencontrées. De la première, il résulte que l'équation (138) est une simple identité : tous les termes du second membre sont nuls.

Pour déterminer la constante, prenons $x = 1$:

$$\log 2 = C + \frac{3}{1.2} - \frac{5}{2.3} + \frac{7}{3.4} - \frac{9}{4.5} + \cdots$$

Il est visible que la série équivaut à

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \cdots;$$

donc $C = 1.2 - 1$; et enfin

$$\log \frac{1+x}{2} = -1 + \frac{3}{1.2} X_1 - \frac{5}{2.3} X_2 + \frac{7}{3.4} X_3 - \frac{9}{4.5} X_4 + \cdots; \quad (145)$$

formule de M. Baüer (*).

88. *Remarque.* Si $x = 0$, elle donne

$$\log 2 = 1 + \frac{5}{2.3} X_2 + \frac{9}{4.5} X_4 + \frac{13}{6.7} X_6 + \cdots$$

Mais, dans ce cas,

$$X_n = \pm \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots\ n}.$$

(**17**, 3°.) Par conséquent,

$$\log 2 = 1 - \frac{5}{2.3}\frac{1}{2} + \frac{9}{4.5}\frac{1.3}{2.4} - \frac{13}{6.7}\frac{1.3.5}{2.4.6} + \cdots \quad . \; . \; . \; (146)$$

89. *Valeur d'une intégrale définie.* Dans la formule (145), le terme général est $(-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} X_n$. Multiplions les deux membres par $X_n dx$, et intégrons entre les limites -1 et $+1$. D'après des propriétés connues (**), le nouveau second membre se réduit à

$$(-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \int_{-1}^{+1} (X_n)^2 dx = (-1)^{n-1} \frac{2}{n(n+1)}.$$

(*) *Journal de Crelle*, t. LVI, p. 118.
(**) Ivory et Jacobi (*Journal de Liouville*, t. II, p. 106).

Par conséquent,

$$\int_{-1}^{+1} X_n \log \frac{1+x}{2} dx = (-1)^{n-1} \frac{2}{n(n+1)};$$

ou, plus simplement,

$$\int_{-1}^{+1} X_n \log(1+x) dx = (-1)^{n-1} \frac{2}{n(n+1)} (*). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

Cette formule me paraît d'autant plus remarquable, que, pour la vérifier (sur des cas particuliers), j'ai dû recourir à des développements en séries.

90. *Autre intégrale définie.* On a (147) :

$$(n+1)\int_{-1}^{+1} X_{n+1} \log(1+x) dx = (-1)^n \frac{2}{n+2},$$

$$n\int_{-1}^{+1} X_{n-1} \log(1+x) dx = (-1)^n \frac{2}{n-1};$$

et, par conséquent,

$$\int_{-1}^{+1} \left[(n+1)X_{n+1} + nX_{n-1}\right] \log(1+x) dx = (-1)^n \frac{2(2n+1)}{(n+2)(n-1)}.$$

Mais :

$$(n+1)X_{n+1} + nX_{n-1} = (2n+1)xX_n; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

donc

$$\int_{-1}^{+1} xX_n \log(1+x) dx = (-1)^n \frac{2}{(n+2)(n-1)} \quad . \quad . \quad . \quad (148)$$

91. *Suite.* Dans la formule (147), supposons $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ..., et ajoutons les résultats obtenus. La somme des seconds membres est

$$2\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots\right] = -2 + 4\log 2.$$

(*) Si l'on néglige un facteur constant,

$$\int_{-1}^{+1} X_n \log 2 . dx = \int_{-1}^{+1} X_n X_0 dx = 0.$$

Par conséquent :

1° *La série* $X_1 + X_2 + X_3 + \cdots$ *est convergente* (*);

$$2^\circ \quad \int_{-1}^{+1} (X_1 + X_2 + X_3 + \cdots) \log(1+x)\,dx = -2 + 4\log 2. \quad . \quad . \quad (149)$$

De même, par la formule (148),

$$\int_{-1}^{+1} (X_2 + X_3 + \cdots) x \log(1+x)\,dx = 2\left[\frac{1}{1.4} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.6} - \cdots\right].$$

Le second membre étant écrit ainsi :

$$\frac{2}{3}\left[1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \cdots\right],$$

on voit qu'il a pour limite $\frac{4}{3}\log 2 - \frac{5}{9}$. Donc.

$$\int_{-1}^{+1} (X_2 + X_3 + X_4 + \cdots) x \log(1+x)\,dx = \frac{4}{3}\log 2 - \frac{5}{9} \quad . \quad . \quad (150)$$

92. *Remarques*. — I. La série

$$\int u_1 dx + \int u_2 dx + \int u_3 dx + \cdots$$

peut, comme l'on sait, être convergente, sans que

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

le soit. Il est donc essentiel de prouver, directement, la convergence de la série

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n + \cdots$$

A cet effet, reprenons la formule de Jacobi :

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\omega\right)^n d\omega.$$

(*) Excepté, bien entendu, pour $x = \pm 1$.

Il en résulte

$$1 + X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1 + q + q^2 + \cdots + q^n)\,d\omega;$$

q désignant, pour abréger, $\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\omega$.

Les conditions de la convergence se réduisent donc à ces deux-ci : 1° que le module ρ, de la variable q, soit inférieur à l'unité; 2° que, cette première condition étant remplie, l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{d\omega}{1-q}$$

soit *finie et déterminée.*

Or : 1°

$$\rho^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\omega = 1 - \sin^2\alpha\sin^2\omega,$$

quantité inférieure à 1, excepté si $\alpha = 0$ ou π;

2°

$$\int_0^\pi \frac{d\omega}{1-q} = \int_0^\pi \frac{d\omega}{1 - \cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\omega}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}} = \frac{\pi}{\sqrt{2(1-x)}}.$$

Ainsi *la série* $1 + X_1 + X_2 + \cdots$ *a pour limite* $\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}$.

II. Si l'on admettait que la série

$$X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots + X_n z^n + \cdots \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

est convergente pour $z = 1$, on aurait, immédiatement,

$$X_0 + X_1 + X_2 + \cdots = \frac{1}{\sqrt{2-2x}}.$$

93. *Autres intégrales définies.* Au moyen de la sommation précédente, les formules (149), (150) deviennent :

$$\int_{-1}^{+1}\left[\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} - 1\right]\log(1+x)\,dx = 4\log 2 - 2, \quad \ldots \quad (151)$$

$$\int_{-1}^{+1}\left[\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} - 1 - x\right]x\log(1+x)\,dx = \frac{4}{5}\log 2 - \frac{5}{9}; \quad \ldots \quad (152)$$

égalités dont la vérification est facile.

Il en résulte, par l'élimination de log 2 :

$$\int_{-1}^{+1}\left[\frac{3x-1}{\sqrt{2(1-x)}}+1-3x-3x^2\right]\log(1+x)dx=\frac{1}{3} \quad . \; . \quad (153)$$

94. Théorème XXI. *On a, en série convergente,*

$$\log\frac{1+x}{1-x}=\frac{3}{1.1}\,X_1+\frac{7}{3.2}\,X_3+\frac{11}{5.3}\,X_5+\frac{15}{7.4}\,X_7+\cdots \quad . \; . \quad (154)$$

De la relation

$$X_{n-1}-X_{n+1}=\frac{2n+1}{n(n+1)}(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

on conclut, si n est *impair :*

$$\frac{2n+1}{n(n+1)}X_n=\int_0^x\frac{X_{n-1}-X_{n+1}}{1-x^2}\,dx;$$

puis

$$\frac{3}{1.2}\,X_1+\frac{7}{3.4}\,X_3+\cdots+\frac{2n+1}{n(n+1)}\,X_n=\int_0^x\frac{1-X_{n+1}}{1-x^2}\,dx.$$

Lorsque n croît indéfiniment, le second membre tend vers

$$\int_0^x\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x};$$

donc, etc.

95. Corollaire.

$$\log 2=3\,[X_1]_{\frac{1}{3}}+\frac{7}{2.3}\,[X_3]_{\frac{1}{3}}+\frac{11}{3.5}\,[X_5]_{\frac{1}{3}}+\frac{15}{4.7}\,[X_7]_{\frac{1}{3}}+\cdots \quad . \quad (155)$$

96. Théorème XXII. *On a, en série convergente,*

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left[X_1+\frac{1}{2}X_1X_2+\frac{1}{3}X_2X_3+\frac{1}{4}X_3X_4+\cdots\right] \quad . \; . \quad (156)$$

En effet,

$$\int_0^x \frac{1-X_n^2}{1-x^2}\,dx = X_0X_1 + \frac{1}{2}X_1X_2 + \frac{1}{3}X_2X_3 + \cdots \quad . \; . \; . \; (87)$$

97. Corollaire.

$$\log 2 = 2\left[X_1 + \frac{1}{2}X_1X_2 + \frac{1}{3}X_2X_3 + \frac{1}{4}X_3X_4 + \cdots\right]_{x=\frac{1}{3}} \quad . \; . \; (157)$$

98. *Remarque.* La formule (156), qui n'est peut-être pas nouvelle, a une singulière relation avec celle de Gauss :

$$\log\frac{x+1}{x-1} = 2\left[\frac{1}{X_1} + \frac{1}{2}\frac{1}{X_1X_2} + \frac{1}{3}\frac{1}{X_2X_3} + \cdots\right].$$

Pour passer de la première à la seconde, il suffit de changer, à la fois, x en $\frac{1}{x}$, et X_n en $\frac{1}{X_n}$ (*).

99. *Autre intégrale définie.* Si l'on part de la relation

$$1 + X_1 + X_2 + \cdots + X_n + \cdots = \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}},$$

et que l'on opère comme ci-dessus (**89**), on trouve

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_n}{\sqrt{1-x}}\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{2n+1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (158)$$

100. *Généralisation.* L'équation (2), traitée de la même manière, donne

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_n}{\sqrt{1-2zx+z^2}}\,dx = \frac{2}{2n+1}z^n, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (159)$$

ou

$$z^n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n}{\sqrt{1-2zx+z^2}}\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; (160)$$

(*) Dans le Mémoire de M. H. Laurent, la formule de Gauss est inexactement citée (*Journal de Resal*, t. I, p. 38).

Ainsi, *une puissance entière de* z (et par suite une fonction quelconque de cette variable) *est égale à une intégrale définie, de la forme,*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(\mathrm{X})\,dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} \ (^*).$$

101. PROBLÈME. *La série*

$$1+\mathrm{X}_1^2+\mathrm{X}_2^2+\cdots+\mathrm{X}_n^2+\cdots$$

est-elle convergente?

Le terme général est, par la formule de Jacobi,

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \left(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\omega\right)\left(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\theta\right)d\omega d\theta.$$

Si donc la formule est convergente, on a, pour la limite cherchée,

$$\mathrm{S}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{1}{1-q}\,d\omega d\theta,$$

en supposant

$$q=\left(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\omega\right)\left(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\theta\right),$$

ou

$$q=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos\omega\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha\,(\cos\omega+\cos\theta).$$

Il résulte, de cette valeur,

$$\mathrm{S}=\frac{1}{\pi^2\sin\alpha}\int_0^\pi d\omega\int_0^\pi \frac{d\theta}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\cos\theta}:$$

$$\mathrm{A}=\sin\alpha-\sqrt{-1}\cos\alpha\cos\omega,\quad \mathrm{B}=\sin\alpha\cos\omega-\sqrt{-1}\cos\alpha.$$

(*) Je répéterai ce que j'ai dit (**96**) : il est presque impossible qu'un résultat aussi évident soit inconnu; et cependant, je ne l'ai rencontré nulle part. Je tâcherai, peut-être, quelque jour, de développer les conséquences de la formule (160).

On a

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{A + B\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}} = \frac{\pi}{\sin\omega}.$$

Donc

$$S = \frac{1}{\pi \sin\alpha} \int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\sin\omega}.$$

Cette intégrale est infinie. Conséquemment, *la série proposée est divergente.*