REMARQUES

SUR

LA THÉORIE DES COURBES

ET DES SURFACES;

PAR

E. CATALAN *,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

(Mémoire présenté à la Classe des sciences, le 5 mai 1874.)

* Un extrait de ce petit Mémoire, déposé à l'Académie, sous enveloppe cachetée, dans la séance du 3 février 1872, a été ouvert le 3 juillet suivant et paraphé, à toutes les pages, par M. d'Omalius. Les propositions énoncées dans cette communication sont désignées par le signe (B).

REMARQUES

SUR

LA THÉORIE DES COURBES

ET DES SURFACES.

I. — Surfaces gauches conjuguées *.

1. Soient G, G′, G″... (fig. I), diverses génératrices successives d'une surface gauche S. Soient : P la perpendiculaire commune à G et G′; P′, la perpendiculaire commune à G′ et G″, etc.; de manière que M′M″... ait pour limite la *ligne de striction* de S. Le lieu des droites P, P′, P″, ... est, en général, une surface gauche S′ ayant, avec S, cette relation remarquable :

Les surfaces S, S′ *se touchent suivant leur commune ligne de striction* (B).

En effet :

1° La droite G′ est perpendiculaire à P et P′; donc MM′M″... *est la ligne de striction de* S′;

2° Le plan tangent à S, en M **, contient la *tangente* MM′ à la

* Prévoyant que je ne pourrai, de longtemps, continuer mes *Recherches sur les surfaces gauches* (Mém. de l'Académie, coll. in-8°, t. XVIII), je me décide à publier ce que je retrouve dans mes notes de 1854.

** C'est-à-dire le *plan central*.

ligne de striction, et la *tangente* P à une *trajectoire orthogonale* des génératrices. Ces droites déterminent le plan tangent à S'; en M. Donc ces deux plans coïncident, et *les surfaces* S, S' *se touchent suivant leur commune ligne de striction.*

2. A cause de cette réciprocité entre les surfaces S, S', j'ai cru pouvoir les appeler *surfaces gauches conjuguées.*

3. *Remarque.* Le lieu S' des droites P, P', P'', ... est une *développable* dans deux cas particuliers :

1° Quand ces droites se rencontrent deux à deux;

2° Quand elles sont parallèles.

Dans le premier cas, *la ligne de striction* donnée *est une trajectoire orthogonale des génératrices* G, G', G'', ...; c'est-à-dire que *la surface* S *est le lieu des binormales de cette courbe,* laquelle devient, en même temps, l'*arête de rebroussement* de la surface S'.

Si les plus courtes distances P, P', P'', ... sont parallèles entre elles, *les génératrices* G, G', G'', ... *sont parallèles à un même plan directeur.* Alors la surface S' devient le cylindre qui projette, sur ce plan, la ligne de striction de S : celle-ci est le lieu des points de contact des génératrices G, G', G'', ... et du cylindre.

Dans ces deux cas particuliers, les surfaces S, S' se touchent encore suivant la ligne de striction de S.

4. L'interprétation algébrique du théorème précédent conduit à quelques relations simples.

Soient :

a, b, c (fig. 2) les cosinus *directifs* de la tangente MT à la ligne de striction AB;

l, m, n les cosinus directifs de G;

e, f, g les cosinus directifs de P;

λ, μ, ν les angles formés, avec les trois axes, par la normale MN aux surfaces S, S'.

On a, par des formules connues,

$$\frac{\cos\lambda}{nb - mc} = \frac{\cos\mu}{lc - na} = \frac{\cos\nu}{ma - lb} = \pm\frac{1}{\sin\theta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

θ étant l'angle des droites G, MT.

D'un autre côté, *la droite* MN, *perpendiculaire à* G, *est située dans un plan parallèle aux droites consécutives* G, G'; donc *.

$$\frac{\cos\lambda}{l'} = \frac{\cos\mu}{m'} = \frac{\cos\nu}{n'} = \pm\frac{dt}{\varepsilon}\ ^{**} \quad \ldots\ldots\ (2)$$

On tire, des égalités (1), (2) :

$$\frac{nb - mc}{l'} = \frac{lc - na}{m'} = \frac{ma - lb}{n'} = \pm\frac{dt}{\varepsilon}\sin\theta \quad \ldots\ (3)$$

2° Ces proportions donnent

$$al' + bm' + cn' = 0, \quad \ldots\ldots\ (4)$$

équation différentielle de la ligne de striction ***.

3° On a

$$\sin^2\theta = (nb - mc)^2 + (lc - na)^2 + (ma - lb)^2,$$
$$\sin\theta = \cos \mathrm{TMP} = ae + bf + cg.$$

Mais par les formules (1), appliquées à la droite P :

$$\frac{e}{mn' - nm'} = \frac{f}{nl' - ln'} = \frac{g}{lm' - ml'} = \pm\frac{dt}{\varepsilon} = \pm\frac{1}{\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}};$$

donc

$$\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}\,\Sigma a\,(mn' - nm')\,; \quad \ldots\ (5)$$

puis, à cause de la valeur trouvée pour $\sin^2\theta$:

$$\left.\begin{aligned}&(l'^2 + m'^2 + n'^2)\left[(nb - mc)^2 + (lc - na)^2 + (ma - lb)^2\right]\\ &= \left[a(mn' - nm') + b(nl' - ln') + c(lm' - ml')\right]^2.\end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

* *Théorie analytique des lignes à double courbure* (encore inédite), § I^er^.

** Les accents désignent les dérivées relatives à la variable indépendante t; ε est l'angle infiniment petit formé par G et G'.

*** *Recherches sur les surfaces gauches*, p. 22.

5. *Remarque.* La dernière relation est une *pure identité;* c'est-à-dire que si, ayant égard aux conditions

$$al' + bm' + cn' = 0, \quad ll' + mm' + nn' = 0,$$

on remplace, dans cette égalité (6) l', m', n' par les binômes $nb - mc$, $lc - na$, $ma - nb$, on trouve $0 = 0$.

II. — Développable accompagnatrice.

6. Soient toujours G, G′, G″, ... des génératrices consécutives de la surface gauche S. Par G, faisons passer un plan P parallèle à G′; par G′, un plan P′ parallèle à G″; et ainsi de suite *. L'*enveloppe du plan* P *est une développable* Σ, *dont les génératrices sont parallèles, respectivement, à* G, G′, G″, ... (B).

En effet, le plan P est parallèle à G′; le plan P′ passe par G′; donc l'intersection g des plans P, P′ est parallèle à G′; ou, à la limite, parallèle à G.

7. *Les surfaces* S, Σ *sont asymptotiques* (B).

Soit g (fig. 3) la droite, parallèle à G, suivant laquelle le plan P touche Σ. Coupons les surfaces S, Σ, et le plan P, par un plan Q parallèle à G; soient L, λ, D les trois intersections : D est parallèle à G.

Le plan asymptotique P, qui touche Σ suivant g, peut être regardé comme tangent à S, en un point situé à l'infini, sur G **.

Considérons maintenant les intersections L, λ. L'asymptote de L est la droite D, intersection du plan Q par le plan P, *limite des plans tangents* ***. De même, la droite D est l'asymptote de λ; donc les courbes L, λ sont asymptotiques l'une à l'autre, et il en est de même, conséquemment, pour les surfaces S, Σ.

* Le plan P est ce que l'on appelle maintenant (1875) *plan asymptotique à la surface* S. Il est perpendiculaire au plan central.

** *Recherches, etc.*, p. 34.

*** *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, seconde partie, p. 62.

8. Toute surface gauche S donnant, pour ainsi dire, naissance à une développable Σ qui jouit des propriétés précédentes, cette surface Σ peut être nommée *développable accompagnatrice.*

9. Si, par un point quelconque O, l'on mène des parallèles aux génératrices de S, le lieu de ces nouvelles droites est le *cône directeur* de S. Soient H, H′ les génératrices du cône, respectivement parallèles à G, G′. Le plan P est parallèle au plan HOH′, lequel a pour limite le plan tangent au cône, suivant H. Ainsi *le plan* P, *tangent à la développable accompagnatrice* Σ, *suivant la génératrice* g, *et le plan* Q, *tangent au cône directeur suivant* H *parallèle à* g, *sont parallèles entre eux.*

Cette simple remarque fera connaître, dans un grand nombre de cas, la nature de l'accompagnatrice Σ (1873).

10. Par exemple, si les génératrices de S sont également inclinées sur l'horizon, le cône directeur est *droit;* donc la développable Σ est une *surface à pente constante,* c'est-à-dire *un* certain *héliçoïde* *.

11. Supposons que la ligne de striction AB (fig. 4) soit normale aux génératrices de S : alors ces droites sont les *binormales* de AB. La binormale M′G′, perpendiculaire à la tangente MT de AB, est, par cela même, parallèle au plan GMC, normal à AB : autrement dit, ce plan GMC est asymptotique à S. L'enveloppe de ce même plan, c'est-à-dire la développable Σ, ne diffère donc pas de la *surface polaire* ** de AB : *la surface polaire est l'accompagnatrice du lieu des binormales.*

12. Cherchons la distance Δ des génératrices parallèles G, g. L'équation du plan asymptotique P étant ***

$$(mn' - nm')(X - x) + (nl' - ln')(Y - y) + (lm' - ml')(Z - z) = 0, \quad (7)$$

* Voir le § IV.

** *Théorie analytique, etc.*, § VIII.

*** *Recherches, etc.*, p. 24.

la droite g est représentée par cette équation (7), jointe à l'équation dérivée :

$$\Sigma(mn'' - nm'')(X - x) = \Sigma(mn' - nm')\, x'.$$

Or, x, y, z étant les coordonnées du point M,

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = as' ;$$

puis

$$\Sigma(mn' - nm')\, x' = s' \Sigma a (mn' - nm').$$

La seconde équation de g est donc

$$\Sigma(mn'' - nm'')(X - x) = s'\Sigma a (mn' - nm') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Au point M, menons le plan perpendiculaire à G, g : il est représenté par

$$l(X - x) + m(Y - y) + n(Z - z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

On tire, des équations (7), (9) :

$$\frac{X - x}{l'} = \frac{Y - y}{m'} = \frac{Z - z}{n'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Telles sont les équations de la perpendiculaire commune à G, g, passant en M. Il en résulte, à cause des relations (2), que *cette commune perpendiculaire* Δ *est la normale à* S, *en* M *.

D'après l'équation (8), la valeur commune des trois rapports est

$$-\frac{s'\Sigma a(mn' - nm')}{\Sigma(mn' - nm')\, l''}.$$

Ces rapports sont égaux, aussi, à

$$\frac{\Delta}{\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'l}};$$

donc

$$\Delta = \pm s' \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}\, \frac{\Sigma a (mn' - nm')}{\Sigma(mn' - nm')\, l''} \;{}^{**} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

* Effectivement, la droite Δ, perpendiculaire à G, est située dans le plan asymptotique P ; la normale MN, à S, satisfait aux mêmes conditions ; donc ces droites coïncident.

** On obtient une vérification de cette formule en supposant, comme ci-

13. La formule (11) comporte plusieurs simplifications.

1° D'après la valeur de sin θ (5) :

$$\Delta = \pm \frac{s'(l'^2 + m'^2 + n'^2)\cos\theta}{\Sigma(mn' - nm')\, l''}.$$

2° En faisant $R = \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}$, on a (**4**, 5°) :

$$mn' - nm' = eR, \quad nl' - ln' = fR, \quad lm' - ml' = gR;$$

et, par conséquent,

$$\Sigma l'(mn'' - nm'') = R'\Sigma el' + R\Sigma e'l'.$$

La première somme représente, à un facteur près, le cosinus de l'angle formé par MN (fig. 5) avec P ; donc elle est nulle. Ainsi

$$\Delta = \pm \frac{Rs' \sin\theta}{e'l' + f'm' + g'n'}.$$

3° La droite MN, normale à la surface S, est normale à la surface S' (**1**). Conséquemment, les équations

$$\frac{\cos\lambda}{l'} = \frac{\cos\mu}{m'} = \frac{\cos\nu}{n'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

entraînent celles-ci

$$\frac{\cos\lambda}{e'} = \frac{\cos\mu}{f'} = \frac{\cos\nu}{g'}: \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

dessus, que la surface S soit le lieu des binormales à la courbe AB. Dans ce cas (*Théorie analytique, etc.*, §§ II et III) :

$$\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2} = \frac{1}{r}, \quad \Sigma a(mn' - nm') = \frac{1}{r}, \quad \Sigma(mn' - nm'')\, l'' = -\frac{1}{r^2\rho};$$

donc, à cause de $S' = 1$:

$$\Delta = \rho;$$

résultat exact, attendu que Σ *est le lieu des axes des cercles osculateurs* (**11**).

puis

$$\frac{e'}{l'} = \frac{f'}{m'} = \frac{g'}{n'} = \frac{\Sigma e'l'}{R^2} = \frac{\sqrt{e'^2 + f'^2 + g'^2}}{R} \text{ *} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

L'expression cherchée est donc, finalement,

$$\Delta = \frac{s' \sin \theta}{\sqrt{e'^2 + f'^2 + g'^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

14. *Remarque.* Soit δ la plus courte distance des deux génératrices G, G'. Il est visible que $\delta = ds \sin \theta$. Soit, en outre, η l'angle infiniment petit des *deux plus courtes distances consécutives*, de manière que

$$\eta^2 = de^2 + df^2 + dg^2.$$

La formule (15) devient

$$\Delta = \frac{\delta}{\eta}\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

et celle-ci est évidente si l'on considère l'angle dièdre formé par deux plans asymptotiques successifs.

III. — Osculatrice **.

15. MN étant la normale en un point quelconque M d'une surface S, soient MG la section normale, et Mgh la circonférence osculatrice à MG : *le lieu des circonférences* Mgh, *osculatrices aux sections normales* MG, *est une surface* Σ *osculatrice, en* M, *à la surface donnée* S. On peut, d'une manière absolue, désigner cette surface Σ sous le nom d'*osculatrice* ***.

* Ces formules ont une grande analogie avec celles de M. Frenet (*Théorie analytique, etc.*, § III).

** Cette surface a été imaginée par M. Ghysens, élève de l'Université de Liége. (J'apprends aujourd'hui, 14 janvier 1875, par une lettre de M. G., que l'osculatrice a déjà été étudiée par M. Moutard.)

*** L'ellipsoïde osculateur est toujours indéterminé. Au contraire, *en tout point* M *d'une surface donnée, il n'y a qu'une seule osculatrice* (Remarque due à M. Ghysens). (B.)

16. Si a, b sont les rayons de courbure principaux, l'osculatrice est représentée par le système

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \omega, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{a} \cos^2\omega + \frac{1}{b} \sin^2\omega;$$

ou par l'équation unique

$$(x^2 + y^2 + z^2)(ay^2 + bx^2) = 2ab(x^2 + y^2) z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

17. *Lorsque* a, b *sont de signes contraires, l'osculatrice admet deux sections rectilignes* (B).

18. Si $b = -a$, c'est-à-dire si *la courbure moyenne est nulle,* l'équation précédente se réduit à

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 - y^2) = 2a(x^2 + y^2).$$

La discussion de cette équation, la construction de l'*épure,* et même la *construction de la surface,* sont alors des problèmes très-simples.

19. La surface *réciproque* de l'osculatrice, le pôle étant à l'origine, est évidemment un *conoïde.* La recherche des lignes de courbure de l'osculatrice se ramène donc à celle des lignes de courbure du conoïde réciproque *. Au moyen des formules

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{u}{U} = \frac{k^2}{U^2},$$

on trouve, en partant de l'équation (17) :

$$k^2(aY^2 + bX^2) = 2ab(X^2 + Y^2) z.$$

20. *Remarque.* Le lieu de l'axe CD du cercle osculateur Mgh est aussi un conoïde : cette nouvelle surface est représentée par

$$ab(x^2 + y^2) = (ax^2 + by^2) z.$$

* *Mémoire sur les surfaces gauches à plan directeur* (JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 29e Cahier).

21. On trouve aisément que l'aire et le volume de l'osculatrice sont donnés par les formules

$$A = 2\pi (a + b) \sqrt{ab}, \quad V = \frac{\pi}{6} (3a^2 + 2ab + 3b^2) \sqrt{ab} \text{ (B)}.$$

IV. — Surfaces à pente constante *.

22. Je rappelle d'abord ces propriétés connues :

1° *Les lignes de courbure d'une surface à pente constante sont les génératrices rectilignes et leurs trajectoires orthogonales,* c'est-à-dire *les lignes de plus grande pente et les lignes de niveau ;*

2° *Les lignes de niveau sont des courbes parallèles* **;

3° *L'arête de rebroussement est une hélice tracée sur un cylindre ayant pour section droite la développée d'une ligne de niveau.*

23. Par conséquent, *toute surface à pente constante est un héliçoïde développable* (B).

24. AMB (fig. 7) étant l'*hélice générale* dont il s'agit, soit *amb* sa projection horizontale; soient MT, *m*T les tangentes en deux points correspondants; MC, *mc* les rayons R, ρ des cercles osculateurs : *ces rayons sont parallèles,* parce que AMB est une ligne géodésique du cylindre (B).

Soient encore M', *m'* deux points correspondants, infiniment voisins de M, *m*. Si l'on abaisse M'P, *m'p*, respectivement perpendiculaires à MC, *mc*, les points P, *p* seront situés sur une même verticale ***.

* Ces surfaces sont souvent attribuées à M. de St-Venant, bien que Monge s'en soit occupé (*Analyse app.*, §§ VIII).

** La considération des *courbes parallèles,* c'est-à-dire ayant *mêmes plans normaux,* est due, je pense, à M. Camille Laduron. Elle est, en quelque sorte, corrélative de celle des *surfaces parallèles.*

*** *La projection d'un angle droit est un angle droit, quand un des côtés de l'angle est parallèle au plan de projection ;* et réciproquement.

Il résulte, de cette construction :

$$R = \frac{(MM')^2}{2MP}, \quad \rho = \frac{(mm')^2}{2mp}, \quad \frac{R}{\rho} = \left(\frac{MM'}{mm'}\right)^2.$$

Mais, α étant l'angle MTm, ou tg α la *pente constante* donnée,

$$\frac{mm'}{MM'} = \cos\alpha;$$

donc

$$R = \frac{\rho}{\cos^2\alpha}, \qquad (18)$$

absolument *comme si l'hélice* AMB *était tracée sur un cylindre de révolution* (B).

25. Supposons que l'on développe la surface dont AMB est l'arête de rebroussement. Soient $A_1M_1B_1$ la transformée de AMB, et R_1 le rayon de courbure de cette *transformée par développement*. D'après un théorème que j'ai démontré autrefois *, $R_1 = R$; donc aussi

$$R_1 = \frac{\rho}{\cos^2\alpha}.$$

Par conséquent :

1° *Dans le développement d'une surface à pente constante, l'hélice* AMB, *arête de rebroussement de cette surface, se transforme suivant une courbe semblable à la développée* amb *d'une ligne de niveau : le rapport de similitude égale* $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ (B).

2° *La trace horizontale de la surface* (dont T est un point) *se transforme suivant une développante de la première transformée.*

3° *Il en est de même*, évidemment, *pour les transformées des lignes de niveau ;* etc.

* (*Comptes rendus*, t. XVII; *Recherches, etc.*, p. 63.) On ne doit pas oublier que *le plan* CMT, *osculateur à l'hélice* AMB, *est tangent à l'héliçoïde.*

V. — Lignes de courbure planes.

26. M. Serret, dans l'une de ses Notes sur le *Calcul intégral* de Lacroix *, s'énonce ainsi :

« Si une ligne de courbure d'une surface est plane, les normales de la surface, aux points de la ligne de courbure, forment » une surface développable dont l'arête de rebroussement... est... » une hélice tracée sur un cylindre à base quelconque. »

Cette proposition, évidente par les remarques précédentes, jointes au Théorème de Joachimstal, peut être complétée comme il suit :

1° *La développable dont il s'agit est une surface à pente constante ;*

2° *La base du cylindre est la développée de la ligne de courbure;*

3° *Si une surface admet un système de lignes de courbures planes, l'une des nappes du lieu des centres de courbure est engendrée par une hélice variable* (B).

27. AB (fig. 8) étant une ligne de courbure d'une surface S, prenons des normales MN, M'N', M''N'', ... égales entre elles : le lieu de leurs extrémités est une ligne de courbure de la surface S', *parallèle* à S**. Les tangentes MT, NS sont parallèles, comme intersections de deux plans parallèles (les plans tangents en M, N) par *le plan de deux normales consécutives* MN, M'N'. Autrement dit, le plan normal en M, à AB, est normal en N, à CD. Ainsi, *quand deux surfaces* S, S' *sont parallèles, les lignes de courbure de la première sont, respectivement, parallèles aux lignes de courbure de la seconde* (B).

28. En particulier :

1° *Toute surface* S', *parallèle à une surface* S *qui admet un*

* Tome II, p. 301.

** *Recherche des lignes de courbure....* (Mém. cour. et Mém. des savants étrangers, t. XXXII, p. 16).

système de lignes de courbure planes, admet aussi un système de lignes de courbure planes, respectivement parallèles aux premières (B) *.

2° *Si une surface* S *admet un système de lignes de courbure circulaires, toute surface* S′, *parallèle à* S, *en admet également un* (B).

VI. — Surfaces d'enroulement **.

29. Soit une ligne C, située dans un plan P. Si ce plan s'enroule autour d'une développable S, enveloppe de ses positions successives, la ligne C engendrera une surface remarquable Σ, dont les surfaces de révolution sont un cas particulier, et que l'on peut appeler *surface d'enroulement* ***.

30. De cette définition, résultent les propriétés suivantes :

1° *Les sections de* Σ, *par les plans* P, P′, P″, ... *tangents à* S, *sont égales entre elles* (B) ;

2° *Ces sections* C, C′, C″, ... *sont les lignes de courbure de la surface* Σ (B) ;

3° *Les secondes lignes de courbure sont les courbes décrites par les différents points de* C, c'est-à-dire des *trajectoires orthogonales de* P (B) **** ;

* On lit, dans le 33e Cahier du *Journal de l'École polytechnique* (p. 165) : « *Si l'on contracte d'une certaine quantité une surface à lignes de courbure* » *planes, la surface obtenue a aussi ses lignes de courbure planes.* » La proposition ainsi énoncée ne diffère probablement pas de la nôtre.

** Elles ont été traitées par Monge (*Analyse appliquée*, pp. 322 et suiv.).

*** Que l'on se représente une pièce de drap, d'abord étendue sur une longue table, puis enroulée sur un *noyau* de bois. Dans ce mouvement, une ligne quelconque, tracée sur le drap étendu, engendre une surface d'enroulement.

**** Quand le plan mobile, *roulant sur* S, passe de la position P à la position infiniment voisine P′, *la ligne* C *engendre un élément de surface de révolution :* l'axe de cette surface est l'intersection des plans P, P′; ou encore la droite G suivant laquelle le plan P touche S; ou enfin l'*axe instantané* d'une figure dont *l* ferait partie. Cette simple remarque rend évidentes, croyons-nous, toutes les propriétés énoncées.

4° *Ces secondes lignes de courbure sont des courbes gauches,* excepté quand la développable S se réduit à un cylindre : dans ce cas, *ces lignes sont des développantes de la section droite du cylindre* (B).

31. *Remarque. Les trajectoires orthogonales d'un plan mobile* P *sont des courbes parallèles* (B).

32. *Si* C, C_1 *sont deux lignes situées dans le plan* P, et se coupant en M, *les surfaces d'enroulement* Σ, Σ_1, respectivement engendrées par C, C_1, *ont une ligne de courbure commune :* c'est la trajectoire du point M. De plus, *en tous les points de cette commune ligne de courbure, les deux surfaces se coupent sous un angle constant,* conformément à un théorème connu (B).

Soient, dans le plan P (fig. 9), un système de courbes AB, A_1B_1, A_2B_2, ..., dont les trajectoires orthogonales soient CC_1C_2, DD_1D_2, EE_1E_2. . Pendant le mouvement du plan, ces diverses lignes engendrent deux séries de surfaces d'enroulement telles, que *les surfaces de la première série sont orthogonales relativement à celles de la seconde* (B) *. De plus, *toutes ces surfaces coupent orthogonalement les plans* P, P', P'', ... (B).

Voilà donc un *système orthogonal triple,* excessivement simple (B).

33. *Remarques* I. Si les lignes AB, A_1B_1, A_2B_2, ... sont *parallèles,* les trajectoires CC_1C_2..., DD_1D_2..., deviennent les normales communes à ces lignes, et, conséquemment, *le système se compose de surfaces parallèles, de surfaces développables et de plans* (B);

II. Si AB, A_1B_1, ... se réduisent à des *droites parallèles,* il en est de même pour CD, C_1D_1, ...; et alors *le système orthogonal est formé de plans et de deux séries de surfaces développables parallèles* (B) **;

III. Soient S, S_1, S_2, ... les surfaces engendrées par AB, A_1B_1,

* En effet, quand deux surfaces de révolution ont même axe, elles sont orthogonales si leurs sections méridiennes le sont.

** *Recherche des lignes de courbure...*, p. 16.

A_2B_2, ... D'après la propriété de la normale à une surface de révolution, *la trajectoire orthogonale* CC_1C_2 ..., *dans sa position primitive, est normale, en* C, C_1, C_2 ..., *à* S, S_1, S_2, ... Mais, évidemment, une *position quelconque* du plan P peut être regardée comme *position primitive ;* donc *les lignes* CD, C_1D_1, C_2D_2, ... *dans toutes leurs positions, coupent orthogonalement les surfaces* S, S_1, S_2, ...

IV. De même, *les courbes* AB, A_1B_1, ... *dans leurs diverses positions, sont les trajectoires orthogonales des surfaces* S, S_1, S_2, ..., *engendrées* par CD, C_1D_1, C_2D_2, ...

V. Conséquemment, *chacune des deux séries de surfaces admet une infinité de systèmes de trajectoires orthogonales, chaque système étant formé d'une infinité de lignes égales entre elles.*

34. Supposons, comme dans la Remarque II, que les lignes AB, A_1B_1, A_2B_2, ... soient des *droites parallèles ;* et supposons, en outre, que l'enveloppe du plan P soit un cylindre Σ. Alors S, S_1, S_2,... sont des *surfaces à pente constante, égales entre elles ;* S_1, S_2, S_3, ... sont aussi des *surfaces à pente constante,* que l'on peut appeler *complémentaires* des premières.

VII. — Trajectoires orthogonales des sections planes d'une surface.

35. Lemme. *Si les génératrices* G, G', G'', ... (fig. 10) *d'une surface* S, *rencontrent normalement une surface* S', *l'intersection* AMM'M''... B, *des deux surfaces, est une trajectoire orthogonale de* G, G', G'', ... (B).

36. Théorème général *. *Soient* ab, a'b', a''b'', ... *les sections faites, dans une surface* S, *par des plans* P, P', P'', ..., *ayant une enveloppe* E. *Soient* AB, A_1B_1, ... *ce que deviennent ces lignes lorsque les plans mobiles, ayant roulé sur* E, *viennent se con-*

* *Bulletins de l'Académie*, février 1872.

fondre avec un même plan Π, *tangent à* E. *Soient enfin* CD, C′D′, C″D″, ... *les trajectoires orthogonales de* AB, A′B′, A″B″, ... *Si le plan* Π *s'enroule autour de* E, *de manière à prendre les positions* P, P′, P″, ..., *les surfaces d'enroulement* Σ, Σ′, Σ″, ... *engendrées par* CD, C′D′, C″D″, ... *coupent* S *suivant des lignes* cd, c′d′, c″d″, ..., *trajectoires orthogonales de* ab, a′b′, ... (B).

Considérons, par exemple, la surface d'enroulement Σ, engendrée par CD. Cette surface Σ, rencontrée normalement par AB, A′B′, A″B″, ... (**33**, IV), est rencontrée, normalement aussi, par les *génératrices ab*, *a′b′*, *a″b″*, ... positions initiales de AB, A′B′, A″B″ : l'intersection *cd* des surfaces Σ, S est donc une trajectoire orthogonale des lignes *ab*, *a′b′*, *a″b″*, ... (**35**).

37. D'après ce théorème, *pour trouver les trajectoires orthogonales des sections planes d'une surface,* il suffit de *construire, dans un plan donné, les trajectoires orthogonales d'une série de lignes données :* le premier problème, appartenant à la *Géométrie de l'espace,* est ramené à un problème de *Géométrie plane,* beaucoup plus simple.

38. *Première application.* Si les courbes *ab, a′b′,* ... sont des *circonférences concentriques, dont les plans passent par une même droite* Oz, auquel cas la surface S est une *cyclotomique, les trajectoires orthogonales* cd, c′d′, *sont les intersections de* S *avec des cônes de révolution ayant* O *pour centre et* Oz *pour axe* (B) *.

39. *Deuxième application.* Supposons que les génératrices de S soient des *circonférences* ab, a′b′, ... *ayant leurs centres sur une droite* Oz, *et se coupant en un point* O *de cette ligne* **. *Les trajectoires orthogonales* cd, c′d′, ... *sont les intersections de* S *avec les tores engendrés par les circonférences tangentes, en* O, *à l'axe* Oz (B).

En effet, les *transformées* des circonférences *ab, a′b′*, ... (fig. 11)

* *Mélanges mathématiques,* p. 171.

** L'*Osculatrice* est un cas particulier de cette surface S.

sont les circonférences AB, A′B′, ... situées dans un même plan; et les trajectoires orthogonales de celle-ci sont les circonférences CD, C′D′, ...

40. *Troisième application.* Soit une surface gauche S, engendrée par *une droite* ab *rencontrant, sous un angle constant* θ, *une droite fixe* Oz *. *Les trajectoires orthogonales des génératrices sont les intersections de* S *avec des cônes de révolution autour de* Oz. *Ces cônes, tous égaux entre eux, ont pour angle générateur le complément de* θ (B).

41. *Remarque.* Si l'angle θ est droit, la surface gauche devient un conoïde. Dans ce cas, les cônes dont il s'agit sont remplacés par des cylindres de révolution autour de Oz. Les trajectoires orthogonales se projettent, sur le *plan directeur,* suivant des circonférences concentriques, etc. **.

42. *Quatrième application.* Considérons la surface S engendrée par une *circonférence* ab, *variable de grandeur, tangente à une droite fixe* Oz, *en un même point* O. *Les trajectoires orthogonales des génératrices sont les intersections de* S *avec des sphères normales, en* O, *à la droite* Oz (B).

43. *Remarque.* La surface *réciproque* de S, si l'on prend pour pôle le point O, est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz. D'après un théorème connu ***, *les circonférences* ab, a′b′, ... *constituent un premier système de lignes de courbure. Les secondes lignes de courbure sont* donc *sphériques.* Cette double circonstance se présente toutes les fois que la surface S est la réciproque d'une surface cylindrique (B).

44. *Cinquième application. Soient une sphère* S *et un cylindre de révolution,* E, *dont l'axe passe par le centre* O *de la sphère.*

* La directrice Oz est la *ligne de striction* (*Recherches sur les surfaces gauches,* p. 22.)

** Propriétés évidentes et connues.

*** Liouville, *Journal de Mathématiques,* t. XII, p. 281.

Les plans P, P′, P″, ... *tangents à* E, *coupent la sphère suivant de petits cercles* ab, a′b′, a″b″, ... *tous égaux entre eux. Quelles sont les trajectoires orthogonales de ces cercles?*

Si le plan P, supposé mobile, roule sur E, en entraînant les petits cercles, et qu'il vienne prendre la position Π (**36**); on a, dans le plan Π, une suite de cercles AB, A′B′, A″B″,... (fig. 12) égaux entre eux, et dont les centres sont en ligne droite. Soit CMD une trajectoire orthogonale de ces dernières courbes. Le rayon MI est tangent, en M, à CMD; donc *cette trajectoire est une tractrice* *. Les autres trajectoires ne diffèrent de celle-ci que par la position. Elles sont représentées, comme l'on sait, par les équations

$$x = b - a\left[\mathrm{l.}\, tg\,\frac{1}{2}\varphi + \cos\varphi\right], \quad y = a\sin\varphi, \text{**}$$

dans lesquelles a désigne le rayon, et b, la constante arbitraire. *Les trajectoires des petits cercles* ab, a′b′, ... *sont* donc *les intersections de la sphère avec les surfaces d'enroulement engendrées par ces tractrices.*

45. *Sixième application. On donne un cône de révolution* AOB *et une sphère* AOB, *concentrique avec le cône. Trouver les trajectoires orthogonales des sections faites, dans la sphère, par les plans tangents au cône.*

Si le plan tangent roule de la position OB à la position OA, en entraînant les grands cercles d'intersection, et qu'on le rabatte ensuite dans le plan méridien AOB, pris pour *plan vertical de projection,* le *dernier cône* sera développé suivant un secteur AOD, et *tous les grands cercles* viendront se confondre avec OADE... La construction générale (**36**) est donc en défaut. Mais comme le rayon OD est normal à *toutes les circonférences* AMDE.., *la surface*

* Duhamel, *Cours de Mécanique,* t. I^er^, p. 125.

** Si l'on suppose $b = 0$, on a la tractrice CMD (fig. 13), tangente, en C, à l'axe Oy. Un calcul très-simple prouve que *l'espace indéfini* COMD *est équivalent au quart du cercle dont le rayon est* a.

conique d'enroulement, engendrée par ce rayon, *coupe la sphère suivant l'une des trajectoires demandées.* Il en serait de même, bien entendu, pour les surfaces coniques engendrées par les autres rayons : cherchons donc, seulement, cette surface d'enroulement particulière.

A cet effet, prenons *arc* Am = *arc* AM ; menons la tangente MT, terminée au rayon OD prolongé; puis la tangente mt égale à MT : *le point* t, *ainsi déterminé, appartient à la trace horizontale du cône d'enroulement.*

Si l'on fait CA $= a$, OA $=$ R, C$t = u$, BC$t = \omega$, etc., on a

$$a\pi = \mathrm{R}\alpha,\quad a\gamma = \mathrm{R}\beta,\quad \mathrm{MT} = mt = \sqrt{u^2 - a^2},$$

$$\alpha - \beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{\mathrm{R}},\quad \pi - \omega - \gamma = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a};$$

puis, par l'élimination de α, β, γ :

$$\omega = \frac{\mathrm{R}}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{\mathrm{R}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Telle est l'équation de la *trace horizontale du cône d'enroulement.*

La génératrice qui passe au point t perce la sphère en un point P de la trajectoire considérée. Soient p la projection horizontale de ce point, et C$p =$ U : il est visible que $\frac{u}{\mathrm{U}} = \sqrt{\frac{\mathrm{R}^2 - a^2}{\mathrm{R}^2 - \mathrm{U}^2}}$; donc *la projection horizontale de l'une des trajections* est représentée par l'équation que l'on obtient en remplaçant u par sa valeur dans la relation (19); savoir

$$\omega = \frac{\mathrm{R}}{a} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\mathrm{U}^2 - a^2}{\mathrm{R}^2 - \mathrm{U}^2}} - \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\mathrm{R}}{a} \sqrt{\frac{\mathrm{U}^2 - a^2}{\mathrm{R}^2 - \mathrm{U}^2}}\right) \quad . \quad . \quad (20)$$

45. *Remarques* I. On aurait l'équation de toutes les trajectoires en changeant, dans le premier membre, ω en $\omega -$ *const.*

II. Les plans tangents au cône sont également inclinés sur l'axe. Conséquemment, *les tangentes à chacune des trajectoires* *font, avec cet axe, un angle constant,* dont le cosinus égale $\frac{a}{R}$. Ces courbes, que l'on pourrait appeler *hélices sphériques* *, sont définies par l'équation différentielle $\frac{dz}{ds}=\frac{a}{R}$, jointe à $x^2+y^2+z^2=R^2$.

III. Si l'on fait $x=U\cos\omega$, $y=U\sin\omega$, on a $dz=-\frac{UdU}{\sqrt{R^2-U^2}}$. On trouve ensuite, en supposant que *s augmente quand* U *diminue,*

$$ds=-dU\sqrt{\frac{R^2}{R^2-U^2}+U^2\left(\frac{d\omega}{dU}\right)^2};$$

puis, au lieu de l'équation différentielle ci-dessus :

$$\frac{U}{\sqrt{R^2+U^2(R^2-U^2)\left(\frac{d\omega}{dU}\right)^2}}=\frac{a}{R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Or, d'après l'équation (20),

$$d\omega=\frac{R}{a}\,\frac{R^2-U^2}{R^2-a^2}\left(\frac{a^2}{U^2}-1\right)d.\sqrt{\frac{U^2-a^2}{R^2-U^2}};$$

ou, si l'on effectue les calculs,

$$\frac{d\omega}{dU}=-\frac{R}{aU}\sqrt{\frac{U^2-a^2}{R^2-U^2}}.$$

L'équation (21) devient donc l'*identité*

$$\frac{U}{R\sqrt{1+\frac{U^2-a^2}{a^2}}}=\frac{a}{R}.$$

* Elles portent le nom de *développantes sphériques.* Ce sont d'ailleurs de véritables *hélices,* tracées sur le cylindre représenté par l'équation (20). Voir, par exemple, un Mémoire de Th. Olivier, dans le 23e Cahier du *Journal de l'École polytechnique.*

VIII. — Surfaces à ligne de striction rectiligne.

47. L'une des plus simples et des plus remarquables est l'*hyperboloïde-conchoïdal* *, dont le modèle a été construit par *Bardin* et, plus récemment, par M. Muret.

Si l'on substitue, à la seconde directrice rectiligne, une courbe AB (fig. 15), située dans un plan perpendiculaire à Oz, et dont l'équation soit $u = f(\omega)$; on a, en supposant que le triangle rectangle GOM soit isoscèle :

$$\mathrm{O}p = \mathrm{OM} - \mathrm{P}p = \mathrm{OM} - \mathrm{O}z;$$

ou

$$u = f(\omega) - z;$$

ou enfin

$$z = f\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right) - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Chacune de ces équations représente la surface.

48. *Remarques* I. Une section CD, déterminée par $z = \mathrm{P}p = h$, a pour équation

$$u = f(\omega) - h;$$

donc *tout plan parallèle à* AB *coupe la surface suivant une conchoïde de* AB (B).

II. Si la directrice AB est circulaire, la directrice Oz peut passer à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle; elle peut encore rencontrer la circonférence; ce qui fait trois variétés de surfaces, faciles à construire (B).

49. Pour toutes les surfaces considérées, le *cône directeur* est de révolution autour de Oz. De plus, comme nous l'avons déjà dit (**39**), les trajectoires orthogonales des génératrices sont déterminées par des cônes de révolution, égaux au cône directeur, et que l'on obtient en faisant glisser celui-ci le long de Oz (B).

* *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, p. 132.

50. Les *développables accompagnatrices* (II) de nos surfaces gauches sont des *surfaces à pente constante, dont la directrice est l'anti-podaire de* AB, *relativement au pôle* O (B).

En effet, le *plan asymptotique* suivant MG, c'est-à-dire le *plan tangent au cône directeur,* aurait pour trace *horizontale* la perpendiculaire MT à OM; et, d'un autre côté, l'enveloppe de MT est l'anti-podaire de AB.

51. *Cas particuliers.* 1° Si AB est *rectiligne,* l'anti-podaire est la parabole ayant AB pour tangente au sommet, et O pour foyer. Ainsi, *la développable accompagnatrice de l'hyperboloïde-conchoïdal est un héliçoïde à base parabolique* (**23**).

2° Si AB est une circonférence, l'anti-podaire est une ellipse ou une hyperbole, dont le point O est un foyer. Dans le premier cas, l'accompagnatrice est *la surface à pente constante, à base elliptique;* surface très-remarquable, étudiée par M. de Saint-Venant, et qu'il a fait construire.

3° Si AB est une circonférence passant au pôle O, l'anti-podaire se réduit au point O′, diamétralement opposé au point O. Dans ce cas, *la développable accompagnatrice* de notre surface gauche *est le cône directeur ayant son sommet en* O′ (B).

IX. — Surfaces conchoïdales.

52. Soit S une surface donnée. Si, d'une origine fixe O, on mène un rayon vecteur quelconque OM, et qu'on le prolonge de MM′ $= k$, k étant une constante, le lieu du point M′ est une surface S′ que l'on peut appeler *conchoïde* de S *. On peut dire, encore, que les surfaces S, S′ sont *conchoïdales.*

Les surfaces conchoïdales jouissent de quelques propriétés intéressantes, qui n'avaient peut-être pas été remarquées.

* A un même point M correspondent, véritablement, deux points M′, M″, situés de part et d'autre de M. La *conchoïde complète* d'une même nappe S est donc composée de deux nappes, S′, S″. Pour plus de simplicité, nous négligeons la nappe S″; ce qui revient à supposer que le paramètre k est essentiellement positif.

53. THÉORÈME. 1° *Les podaires de deux surfaces parallèles* Σ, Σ', *sont des surfaces conchoïdales*, S, S';

2° *Réciproquement, les anti-podaires de deux surfaces conchoïdales* S, S', *sont deux surfaces parallèles*, Σ, Σ' :

1° O étant le pôle (fig 16), soit PP' une *normale commune* aux surfaces parallèles Σ, Σ'. La droite OMM', parallèle à PP', perce les plans tangents PM, P'M', en deux *points correspondants* M, M', l'un appartenant à la podaire S de Σ, l'autre à la podaire S' de Σ'. D'ailleurs $MM' = PP' =$ *const.*; donc les surfaces S, S' sont conchoïdales.

2° La réciproque résulte du théorème suivant.

54. THÉORÈME. 1° *Les normales à deux surfaces conchoïdales, en deux points correspondants, sont situées dans un même plan;*

2° *La droite menée du pôle, au point de concours de ces normales, est perpendiculaire au rayon vecteur commun.*

MN étant la normale, en M, à la surface *donnée* S; menons, dans le plan normal OMN, ON perpendiculaire à OMM'; puis, du point N, ainsi déterminé, tirons NPP' parallèle à OMM'. Enfin, menons encore MP, M'P' parallèles à ON. D'après un théorème connu, le lieu Σ du point P est l'*anti-podaire* de S, et M'N est la normale à la podaire du lieu Σ' des points P'. Et comme cette podaire est la surface S', conchoïde de S (**53**), les deux parties de la proposition sont démontrées.

55. THÉORÈME. *Les conjuguées d'une suite de surfaces conchoïdales,* S, S', S'', ..., *sont des surfaces conchoïdales,* s, s', s'', ...

M (fig. 17) étant un point quelconque de la surface S; menons, dans le plan *normal* OMN, Om égale et perpendiculaire à OM; puis On égale et perpendiculaire à ON : mn, égale et perpendiculaire à MN, est la normale au lieu s des points m *. D'après le dernier théorème, les normales en M', M'', ... concourent en N; donc le plan OMN contient les points m', m'', ..., conjugués de M', M'', ...; etc.

* *Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes*, pp. 6, 29, 31, ...

56. *Remarque.* Si la surface S est un plan, les surfaces S′,S″,... sont engendrées par des *conchoïdes de Nicomède,* tournant autour de l'axe commun. Dans ce cas, *la conjuguée* s *de* S *est un cylindre de révolution* * ; et *les surfaces* s′, s″, *sont engendrées par des conchoïdes égales aux premières, tournant autour de l'axe commun,* mais *après avoir effectué un quart de révolution autour de cet axe* **.

X. — Cyclide à directrices rectilignes ***.

57. Problème. *Soient* (fig. 18) AB, CD *deux droites perpendiculaires entre elles, et non situées dans un même plan; soit* $EF = \delta$ *la commune perpendiculaire à ces lignes. Discuter la surface engendrée par une circonférence variable* EHGH′, *qui, tangente en* E *à la directrice* Ab, *rencontre constamment l'autre directrice* CD ****.

1° Si la génératrice coupe CD en G, il est visible que EG est un diamètre; donc *la circonférence mobile, tangente à l'une des directrices, est orthogonale à l'autre.*

2° Dans le plan *horizontal* ECD (fig. 19), décrivons, sur EF comme diamètre, la circonférence EFI, rencontrant en I le diamètre variable EG. L'inspection de la figure donne

$$EG.EI = \overline{EF}^2 = \delta^2.$$

* Mém. cité, p. 8.

** Les surfaces S′,S″, ... *conchoïdes du plan* S, sont représentées par

$$(z-c)^2(x^2+y^2+z^2) - k^2z^2 = 0;$$

tandis que l'équation des surfaces s', s'', ... *conchoïdes du cylindre* s, est

$$(x^2+y^2-c^2)^2(x^2+y^2+z^2)^2 - 2k^2(x^2+y^2)(x^2+y^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) + k^4(x^2+y^2)^2 = 0.$$

*** Suivant l'usage, j'appelle *cyclide* toute surface qui admet *deux systèmes de lignes de courbures circulaires.*

**** Cette surface est un cas particulier de l'une de celles qui ont été considérées ci-dessus (**42**).

Conséquemment, *la surface réciproque de* S *est le cylindre* C *qui a pour section droite le cercle* EF (**43**).

3° *Les premières lignes de courbure sont* donc *les circonférences génératrices* EHGH′ (**43**).

4° *Les secondes lignes de courbure,* trajectoires orthogonales des premières, *sont des courbes sphériques* (**43**). Je dis, en outre, qu'*elles sont planes*.

En effet, la circonférence ef, ligne de courbure du cylindre C, est l'intersection d'un plan et d'une sphère, surfaces dont les réciproques sont sphériques; etc.

5° *La surface* S, *admettant deux systèmes de lignes de courbure circulaires, est une cyclide.*

6° Considérons, sur le cône Eef (fig. 20), la circonférence ef, *ligne de courbure du cylindre* C, et la circonférence pq, *ligne de courbure de la cyclide* S. Soit F′ le point inconnu où le diamètre qp, prolongé, rencontre EF. D'après l'égalité $\mathrm{E}p \cdot \mathrm{E}f = \mathrm{E}q \cdot \mathrm{E}e$, les triangles E$pq$, E$ef$ sont semblables; donc le premier est rectangle, et le triangle F′Eq est semblable à Eef. Conséquemment

$$\frac{\mathrm{E}e}{\mathrm{EF}'} = \frac{ef}{\mathrm{E}q};$$

puis, à cause de l'égalité précédente,

$$\mathrm{EF}' = ef = \mathrm{EF}.$$

Ainsi, *les plans des secondes lignes de courbure passent tous par la seconde directrice* CD.

7° En outre, *le lieu du point* p *est la circonférence* EKF, *décrite sur* EF *comme diamètre.*

8° De là résulte un second mode de génération de notre surface : *la cyclide* S, *lieu d'une circonférence qui, tangente à* AB, *coupe normalement* CD, *est aussi le lieu d'une circonférence* pq, *dont le plan passe par* CD, *et qui rencontre orthogonalement la droite* AB *et la circonférence* EKF *.

* Les résultats précédents sont, bien entendu, compris dans ceux que l'on connaît. Néanmoins, à cause de la simplicité des démonstrations, j'ai cru pouvoir signaler ce cas particulier de la *cyclide,* surface étudiée par MM. Charles Dupin, Mannheim, Picart, Roberts, ...

XI. — Quelques théorèmes sur les courbes gauches *.

58. Lemme. *Le cercle osculateur d'une ligne* C, *tracée sur une surface* S, *est osculateur à la section faite, dans* S, *par le plan osculateur de* C **.

59. Soit $MC = \rho$ (fig. 21) le rayon de courbure d'une ligne donnée AMB, ayant MT pour tangente. Par AMB, faisons passer une surface quelconque S. Soit MN la normale à S, et soit $MI = R$ le rayon de courbure de la *section normale* TMN. D'après le théorème de Meusnier, le rayon de courbure de la *section oblique* TMC a pour valeur $R \cos NMC = R \cos \theta$.

Mais, en vertu du lemme, ce rayon de courbure égale $MC = \rho$. Donc

$$\rho = R \cos \theta.$$

Cette relation donne, immédiatement, les propositions suivantes :

1° *Les sections faites, par un même plan* TMN, *dans toutes les surfaces passant par une courbe gauche* AMB *et ayant une normale commune* MN, *ont même cercle osculateur ;*

2° *Le lieu des centres* I *des circonférences osculatrices est l'axe* DCE *du cercle osculateur à la courbe* AMB ;

3° *Le lieu des mêmes circonférences est une cyclide à directrices rectilignes* (**57**) *** ;

* Ce paragaphe a été écrit à l'occasion d'une Note de M. Imchenetsky, présentée à la Société des Sciences, de Liége.

** Voir, par exemple, le *Calcul différentiel* de M. Bertrand (p. 656). La démonstration donnée par ce savant géomètre m'ayant semblé peu satisfaisante, j'en ai cherché une autre, que je ne rapporterai pas ici.

*** *L'une des directrices est la tangente donnée,* MT; *l'autre, parallèle à l'axe* DCE *du cercle osculateur* de AMB, *passe par le point diamétralement opposé à* M. Cette seconde droite sera peut-être utile dans la théorie des courbes. Ne pourrait-on, provisoirement, l'appeler *anti-tangente ?* Il est facile de voir que le *lieu de l'anti-tangente est une surface gauche.*

4° *Si deux surfaces* S, S′ (fig. 22) *se coupent suivant une ligne* AMB; *que* I, I′ *soient les centres de courbure des sections normales* TMN, TM′N′ *passant par la tangente* MT *à l'intersection : le centre* C *du cercle osculateur à cette ligne est la projection de* M *sur* II′ *.

XII. — Enveloppe d'un cylindre de révolution.

60. Problème. *Si l'axe* MT *d'un cylindre de révolution roule sur une courbe donnée*, AMB, *quelle est l'enveloppe de la surface cylindrique?*

Par les considérations les plus élémentaires, on reconnaît que :

1° *L'intersection de deux cylindres de révolution, égaux entre eux, et dont les axes se rencontrent, est composée de deux ellipses ;*

2° *Si les axes viennent à coïncider, l'une des ellipses se réduit à la section droite ; et l'autre se transforme en deux génératrices, parallèles à l'axe commun, et passant par les extrémités du diamètre* 2R *de la section droite perpendiculaire au plan des deux axes* **.

Par conséquent, l'enveloppe cherchée se compose de deux parties :

1° *Une surface-canal* Σ, *enveloppe d'une sphère inscrite au cylindre donné, et dont le centre décrirait* AMB;

* Si l'on désigne par φ l'angle des normales MN, M′N′, et par R, R′, ρ les rayons de courbure, on a, comme il est facile de le voir,

$$\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} - \frac{2}{RR'}\cos\varphi;$$

et, si les surfaces sont orthogonales :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2}.$$

** Plus exactement, *le diamètre* dont il s'agit *est la limite de cette perpendiculaire :* dans le problème actuel, ce diamètre coïncide avec la *binormale* de AMB.

2° *Une surface réglée* S (fig. 23), *dont on trouve deux génératrices* GH, G'H' *en prenant, sur la binormale* GMG', MG=M'G'=R, *et menant, par les points* G, G', *des parallèles à* MT *.

61. Soient :

x, y, z les coordonnées du point de contact M;

a, b, c les cosinus directifs de la tangente MT;

l, m, n les cosinus directifs de la binormale MN;

ρ, r le rayon de courbure et le rayon de torsion de la ligne AMB.

On a, par des formules connues ** :

$$\frac{l}{bc'-cb'}=\frac{m}{ca'-ac'}=\frac{n}{ab'-ba'}=\frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}=\rho, \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{l'}{a'}=\frac{m'}{b'}=\frac{n'}{c'}=-\frac{\rho}{r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$al'+bm'+cn'=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$a'l'+b'm'+c'n'=-\frac{1}{r\rho}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$l'^2+m'^2+n'^2=\frac{1}{r^2}\ *** . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Considérons, en particulier, le point G dont les coordonnées sont $x-Rl$, $y-Rm$, $z-Rn$. La génératrice GH, passant par ce point, a pour équations

$$\frac{X-x-Rl}{a}=\frac{Y-y-Rm}{b}=\frac{Z-z-Rn}{c}=\varphi,$$

φ étant une fonction de s, inconnue ****.

* Ces génératrices sont tangentes à la sphère mobile; et, par conséquent, tangentes à la surface-canal.

** Voir, par exemple, notre *Théorie analytique des lignes à double courbure.*

*** Dans ces égalités, les accents désignent des dérivées relatives à l'arc AM $= s$, pris pour variable indépendante. Pour la discussion des signes, voir le travail cité.

**** Cette fonction représente la distance comprise entre le point G et le point où la génératrice GH touche son enveloppe, *si la surface* S *est développable.*

Écrivons-les ainsi :

$$X - x - Rl = a\varphi, \quad Y - y - Rm = b\varphi, \quad Z - z - Rn - c\varphi \quad . \quad (6)$$

62. *Si la surface* S *est développable*, on doit avoir, avec ces équations (6), les relations

$$-a - Rl' = a\varphi' + a'\varphi, \quad -b - Rm' = b\varphi' + b'\varphi, \quad -c - Rn' = c\varphi' + c'\varphi; \quad (7)$$

dérivées des premières.

Comme

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad aa' + bb' = cc' = 0,$$

on conclut, de ces équations (7) :

$$-1 - R\Sigma al' = \varphi', \quad -R\Sigma a'l' = \varphi\Sigma a'^2, \quad 1 + R^2\Sigma l'^2 = \varphi'^2 + \varphi^2\Sigma a'^2;$$

ou, à cause des relations (1) et (3) :

$$-1 = \varphi', \quad R\frac{\rho}{r} = \varphi, \quad 1 + \frac{R^2}{r^2} = \varphi'^2 + \frac{\varphi^2}{\rho^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

L'élimination de φ, φ', entre ces trois équations (8), conduit à une identité; donc deux génératrices consécutives se rencontrent; ou, ce qui est équivalent, *la surface* S *est développable* *.

63. Soit P le point où la génératrice GH touche son enveloppe. D'après la valeur de φ (8) :

$$GP = R\frac{\rho}{r}, \qquad \operatorname{tg} PMT = \frac{r}{\rho}.$$

Or, $\frac{r}{\rho}$ représente aussi la tangente de l'angle H formé par la tangente MT avec la *rectifiante* **; donc *le point* P *est l'intersection de la rectifiante* MR *avec la génératrice* GH.

64. PP′P″ ... étant l'arête de rebroussement de la surface S, soient PM, P′M′, P″M″, ... les *rectifiantes* passant en P, P′, P″, ...

* On arrive au même résultat, mais moins simplement, quand on considère GH comme l'intersection du plan rectifiant avec un plan parallèle au plan osculateur.

** *Théorie analytique...*, § VII.

Si l'on développe la surface rectifiante, *la courbe* AMB *devient une ligne droite* amb *. Les *rabattements* des binormales MG, M'G',... seront les droites *mg, m'g',* ... perpendiculaires à *ab*, et égales à R; donc *la transformée de l'arête de rebroussement est une droite,* parallèle à *ab*. Conséquemment, *cette arête est une ligne géodésique de la surface rectifiante.*

65. *En résumé, l'enveloppe cherchée se compose : 1° de la surface-canal engendrée par la section droite* CC' *du cylindre, section dont le centre* M *décrit la courbe donnée* AB; 2° *des développables* S, S' *engendrées par les génératrices* GH, G'H' *du cylindre, passant aux extrémités du diamètre* GMG', BINORMAL *à la tangente* MT.

En outre, les arêtes de rebroussement de ces développables sont décrites par les points P, P', *intersections de* GH, G'H *par la rectifiante* PMP'. *Enfin, chacune de ces arêtes de rebroussement est une ligne géodésique de la surface rectifiante.*

66. *Remarque.* Si l'on fait varier le rayon h, on obtient, sur la surface rectifiante, une infinité de lignes géodésiques, dont les *transformées par développement* sont parallèles à la transformée de la directrice AMB : celle-ci répond au cas de $R = 0$.

XIII. — Du lieu des centres de courbure d'un ellipsoïde.

67. Soient les équations connues

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2 - g^2} + \frac{y^2}{b^2 - g^2} + \frac{z^2}{c^2 - g^2} = 1, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{a^2 - h^2} + \frac{y^2}{b^2 - h^2} + \frac{z^2}{c^2 - h^2} = 1, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

dans lesquelles nous supposons

$$a > g > b > h > c.$$

* C'est à cette propriété que la rectifiante doit son nom.

M (fig. 24) étant un point pris sur l'ellipsoïde donné, soient MG, MH les lignes de courbure qui se croisent en ce point. La première, représentée par les équations (1), (2), ou par $g = \text{const}$, se confond avec CB lorsque $g = a$. De même, la seconde ligne de courbure, MH, représentée par les équations (1), (3), ou par $h = \text{const}$, coïncide avec CA si $h = b$.

69. Les rayons principaux en M ont pour valeurs, comme l'on sait, $\frac{g^3h}{abc}$ et $\frac{gh^3}{abc}$ *. De ces deux rayons, l'un, que nous représenterons par R_g, est le *rayon de courbure de la section principale tangente à* MG. Quand les paramètres g, h atteignent leurs limites a, b, R_g devient $\frac{b^2}{c}$, rayon de courbure de l'ellipse BC, au sommet B. On conclut, de cette remarque **,

$$R_g = \frac{gh^3}{abc}, \quad R_h = \frac{g^3h}{abc} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

70. Soient encore u le rayon vecteur OM, et v la distance du centre au plan tangent en M ; de manière que

$$u^2 = a^2 + b^2 + c^2 - g^2 - h^2, \quad v = \frac{abc}{gh} \;{}^{***} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Au moyen de cette dernière valeur, les formules (3) deviennent

$$R_g = \frac{h^2}{v}, \quad R_h = \frac{g^2}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Celles-ci expriment que :

Le long d'une ligne de courbure (MH), *le rayon de la section principale* (MG, M'G', M''G'', ...) NORMALE *à cette ligne, varie en raison inverse de la distance du centre au plan tangent* ****.

* Voir, par exemple, *Mélanges mathématiques*, p. 263.

** Faute de l'avoir faite autrefois, j'ai commis une légère inexactitude dans un énoncé (*Comptes rendus*, t. LXXI, p. 33).

*** *Mélanges*, p. 262.

**** Comme l'on a aussi

$$R_g = \frac{a^2b^2c^2}{g^2v^3}, \quad R_h = \frac{a^2b^2c^2}{h^2v^3},$$

on peut dire encore que :

Le long d'une ligne de courbure (MG), *le rayon de la section principale*, TANGENTE *à cette ligne, varie en raison inverse du cube de la distance du centre au plan tangent.*

71. *Remarque.* On a

$$R_g . R_h = \frac{h^2 g^2}{v^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{v^4},$$

ou

$$\frac{1}{R_g . R_h} = \frac{v^4}{a^2 b^2 c^2}.$$

Si l'on convient, d'après Gauss, de prendre, comme *mesure de la courbure*, $k = \frac{1}{R_g R_h}$, on voit que *la courbure, en un point quelconque de l'ellipsoïde, est proportionnelle à la quatrième puissance de la distance du centre au plan tangent.*

En outre, *une ligne de courbure constante* * *est le lieu des points de contact d'un plan qui roule de manière à toucher l'ellipsoïde et une sphère concentrique avec celui-ci* **.

72. A une même ligne de courbure, MG, correspondent deux lieux de centres de courbure : le premier, A, est l'*arête de rebroussement de la* NORMALIE *** *qui a pour directrice* MG; le second, B, contient les *centres des sections principales, normales à* MG.

Comme les cosinus directifs de la normale MN ont pour valeurs, respectivement **** :

$$-\frac{vx}{a^2}, \quad -\frac{vy}{b^2}, \quad -\frac{vz}{c^2};$$

les coordonnées d'un point de A sont

$$X_g = \left(1 - \frac{v}{a^2} R_g\right) x, \quad Y_g = \left(1 - \frac{v}{b^2} R_g\right) y, \quad Z_g = \left(1 - \frac{v}{c^2} R_g\right) z;$$

ou, par la première des formules (5) :

$$X_g = \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right) x, \quad Y_g = \left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right) y, \quad Z_g = \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) z \quad . \; . \; . \; (6)$$

* C'est-à-dire, représentée par $k = \text{const.}$

** *Recherches sur les surfaces gauches*, p. 45.

*** Dénomination proposée par M. Mannheim.

**** *Mélanges mathématiques*, p. 264. Ici, ces valeurs sont affectées du signe —, parce qu'il s'agit du segment MN, intérieur à l'ellipsoïde.

De même, les coordonnées du point où la normale MN rencontre B ont pour expressions :

$$X_h = \left(1 - \frac{g^2}{a^2}\right) x, \quad Y_h = \left(1 - \frac{g^2}{b^2}\right) y, \quad Z_h = \left(1 - \frac{g^2}{c^2}\right) z. \quad . \quad . \quad (7)$$

73. On a *

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{(a^2-g^2)(a^2-h^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{(b^2-g^2)(b^2-h^2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \quad \frac{z^2}{c^2} = \frac{(c^2-g^2)(c^2-h^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}; \quad (8)$$

donc

$$X_g^2 = \frac{(a^2-g^2)(a^2-h^2)^3}{a^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \quad Y_g^2 = \frac{(b^2-g^2)(b^2-h^2)^3}{b^2(b^2-a^2)(b^2-c^2)}, \quad Z_g^2 = \frac{(c^2-g^2)(c^2-h^2)^3}{c^2(c^2-a^2)(c^2-b^2)}; \quad (9)$$

$$X_h^2 = \frac{(a^2-g^2)^3(a^2-h^2)}{a^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \quad Y_h^2 = \frac{(b^2-g^2)^3(b^2-h^2)}{b^2(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \quad Z_h^2 = \frac{(c^2-g^2)^3(c^2-h^2)}{c^2(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \quad (10)$$

Puisque nous considérons la ligne de courbure MG, représentée par $g =$ const, nous devons éliminer h, soit entre les équations (9), soit entre les équations (10).

74. On tire, des équations (9), en supprimant les indices :

$$\left.\begin{aligned} a^2 - h^2 &= \left[\frac{a^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)X^2}{a^2-g^2}\right]^{\frac{1}{3}}, \\ b^2 - h^2 &= \left[\frac{b^2(b^2-c^2)(b^2-a^2)Y^2}{b^2-g^2}\right]^{\frac{1}{3}}, \\ c^2 - h^2 &= \left[\frac{c^2(c^2-a^2)(c^2-b^2)Z^2}{c^2-g^2}\right]^{\frac{1}{3}}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

en sorte que de simples soustractions donneraient les équations des projections de A. Mais, pour avoir des résultats symétriques, formons les deux combinaisons suivantes :

$$\Sigma(a^2-h^2)(b^2-c^2) = 0 = \Sigma(b^2-c^2)\left[\frac{a^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)X^2}{a^2-g^2}\right]^{\frac{1}{3}},$$

$$\Sigma(a^2-h^2)(b^4-c^4) = \Sigma a^2(b^4-c^4) - \Sigma(b^4-c^4)\left[\frac{a^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)X^2}{a^2-g^2}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

* *Mélanges*, p. 257.

La première équation se réduit à

$$\left[\frac{a^2(b^2-c^2)^2X^2}{a^2-g^2}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{b^2(c^2-a^2)^2Y^2}{b^2-g^2}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{c^2(a^2-b^2)^2Z^2}{c^2-g^2}\right]^{\frac{1}{3}}=0. \quad (12)$$

La seconde devient d'abord

$$(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)=-\left[(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)\right]^{\frac{1}{3}}\Sigma(b^2+c^2)(b^2-c^2)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{a^2X^2}{a^2-g^2}\right)^{\frac{1}{3}};$$

puis

$$\left[(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)\right]^{\frac{2}{3}}=-(a^2+b^2+c^2)\Sigma\left[\frac{a^2(b^2-c^2)^2X^2}{a^2-g^2}\right]^{\frac{1}{3}}$$
$$+\Sigma a^2(b^2-c^2)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{a^2X^2}{a^2-g^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

La première partie du second membre est nulle, en vertu de l'équation (12); donc l'on peut prendre, comme seconde équation de A :

$$\Sigma a^2\left[\frac{a^2(b^2-c^2)^2X^2}{a^2-g^2}\right]^{\frac{1}{3}}=\left[(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)\right]^{\frac{2}{3}} \quad . \; . \; . \quad (13)$$

Ainsi, l'*arête de rebroussement* A *est l'intersection des surfaces représentées par les équations* (12), (13) : la première est un *cône du sixième ordre.*

75. Un calcul analogue au précédent, mais plus simple, appliqué aux relations (10), conduit à ces équations de la courbe B :

$$\frac{a^2X^2}{(a^2-g^2)^3}+\frac{b^2Y^2}{(b^2-g^2)^3}+\frac{c^2Z^2}{(c^2-g^2)^3}=0, \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

$$\frac{a^2X^2}{(a^2-g^2)^2}+\frac{b^2Y^2}{(b^2-g^2)^2}+\frac{c^2Z^2}{(c^2-g^2)^2}=1 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Elles représentent *un ellipsoïde* E *et un cône* C, ayant mêmes plans principaux. Il en résulte que, sur chacun de ces plans, la courbe B se projette suivant une ellipse ou une hyperbole; etc.

76. *Remarques* I. L'équation (14) est la dérivée de (15), relativement à g^2. Conséquemment, *la courbe* B *est la ligne suivant* *laquelle l'ellipsoïde* E, *variable avec* g, *touche son enveloppe : elle est la caractéristique de* E.

II. La courbe B peut être regardée comme une génératrice de la surface Σ, lieu des centres de courbure de l'ellipsoïde donné *. Pour trouver l'équation de ce lieu, on devrait éliminer g entre les équations précédentes; donc *la surface* Σ *est l'enveloppe de l'ellipsoïde* E **.

Liége, 3 mai 1874.

PREMIÈRE ADDITION ***.

XIV. — Sur la polhodie.

Dans son intéressant Rapport sur le Mémoire précédent, M. De Tilly fait le rapprochement suivant, qui m'avait échappé:

Si un plan roule de manière à toucher un ellipsoïde et une sphère concentriques, le lieu des points de contact avec la première surface (c'est-à-dire une *ligne de courbure constante,* relativement à l'ellipsoïde), *est la polhodie de Poinsot.* La Note actuelle a pour objet l'examen de quelques propriétés de cette courbe.

I. Poinsot a nommé *poloïde* [IV], *polodie* [V] et *polhodie* [VI] *le lieu décrit, sur la surface de l'ellipsoïde* CENTRAL *d'un corps, par le*

* D'après les hypothèses précédentes, cette courbe engendre seulement une nappe du lieu dont il s'agit : pour qu'elle engendre la seconde nappe, il suffit d'omettre la restriction $g > b$.

** *Comptes rendus,* t. LXXI, p. 53.

*** Présentée à l'Académie, le 1er août 1874.

[IV] BRIOT (d'après Poinsot), *Journal de Liouville,* t. VII, p. 78.

[V] *Éléments de Statique* (1842), p. 514.

[VI] POINSOT, *Journal de Liouville,* t. VI, p. 102.

*pôle de l'*AXE INSTANTANÉ *. Il a démontré que la polhodie est, en même temps, *le lieu des points où l'ellipsoïde serait touché par un plan mobile, qui resterait toujours à la même distance du centre* **. D'après cette seconde définition :

En chaque point d'une polhodie, les rayons principaux de l'ellipsoïde forment un produit constant; ou, ce qui est équivalent :

La polhodie est, relativement à l'ellipsoïde qui la contient, une ligne de courbure constante ***.

II. Si p désigne la distance du centre de l'ellipsoïde au plan mobile P, ou le rayon de la sphère S sur laquelle roule ce plan (en même temps qu'il roule sur l'ellipsoïde), les équations de la polhodie sont

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{p^2} \quad (2)$$

Du centre commun, abaissons la perpendiculaire p sur P : l'équation de P étant

$$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1,$$

les équations de p sont

$$\frac{a^2}{x}X=\frac{b^2}{y}Y=\frac{c^2}{z}Z.$$

Éliminant x, y, z, on trouve les relations

$$a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2=p^4, \quad (3)$$

$$X^2+Y^2+Z^2=p^2, \quad (4)$$

* *Éléments de Statique*, p. 511.

** *Ibid.*, p. 512.

*** *Recherches sur les surfaces gauches*, p. 45. Suivant M. DE LA GOURNERIE (*Traité de Géométrie descriptive*, art. 945), « *M. Valson a démontré que le produit des rayons principaux d'une surface du second ordre est constant en tous les points d'une polhodie.* » Mais ce théorème semble fort ancien, car on le trouve dans les *Développements de Géométrie*, de Charles Dupin (pp. 211, 212).

qui représentent la *conique sphérique* C, *lieu des points de contact du plan* P *avec la sphère* S.

III. *Remarques.* 1° *Les ellipsoïdes représentés par les équations* (1), (5) *sont polaires réciproques relativement à la sphère* S*.

2° Pour une même valeur de p, *la courbe* C *est le lieu des projections du centre sur les plans tangents à l'ellipsoïde, aux points de la polhodie.* Par conséquent, *si* p *varie, la polhodie engendre l'ellipsoïde, et la conique* C *engendre la podaire de l'ellipsoïde.* Pour avoir l'équation de cette podaire, il suffit d'éliminer p entre les équations (3), (4). On trouve ainsi :

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2; \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

résultat connu **.

IV. J'ai démontré, autrefois, un théorème que l'on peut énoncer ainsi :

Si deux surfaces du second degré ont leurs plans principaux parallèles chacun à chacun, l'intersection est située sur trois surfaces de révolution, du second degré, dont les axes sont parallèles aux axes principaux donnés ***.

Conséquemment, la polhodie représentée par les équations (1), (2) est située sur trois surfaces de révolution, du second ordre. Les équations de ces surfaces sont, comme on le reconnaît aisément :

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^4} x^2 = p^2 - \frac{(p^2 - b^2)(p^2 - c^2)}{p^2},$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}{b^4} y^2 = p^2 - \frac{(p^2 - c^2)(p^2 - a^2)}{p^2},$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{c^4} z^2 = p^2 - \frac{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}{p^2}.$$

* Voir, par exemple, le *Mémoire sur une transformation géométrique*, etc., pp. 50, 51, 52.

** Mémoire cité, p. 48.

*** *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. VI, p.433 (1847). En 1859, M. l'abbé Aoust a communiqué, à l'Académie des Sciences, la proposition suivante, cas particulier du théorème : « *Par une seule et même ligne de » courbure de l'ellipsoïde passent trois surfaces de révolution du second » ordre telles, que leurs axes de révolution coïncident avec les trois axes de l'ellipsoïde.* »

V. *Remarque.* Appliqué aux lignes de courbure de l'ellipsoïde, déterminées par

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}=1,$$

le même théorème donne les équations

$$x^2+y^2+z^2-\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2(a^2-\lambda^2)}x^2=b^2+c^2-\lambda^2,$$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}{b^2(b-\lambda^2)}y^2=c^2+a^2-\lambda^2,$$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{c^2(c^2-\lambda^2)}z^2=a^2+b^2-\lambda^2.$$

Celles-ci représentent trois surfaces de révolution, *nécessairement différentes des premières.*

VI. Supposons que le centre de l'ellipsoïde donné soit un point fixe, pris pour origine, et qu'un plan fixe P, parallèle au plan xy, soit à une distance p de celui-ci. Si l'ellipsoïde roule sur le plan, le lieu décrit sur l'ellipsoïde, par le point de contact, est une polhodie *. Quant au lieu décrit par le même point de contact, sur le plan fixe, c'est une courbe transcendante, nommée *serpoloïde* **, *herpolodie* ***, ou *herpolhodie* ****, dont Poinsot a donné l'équation différentielle. On peut, de la manière suivante, simplifier les calculs du célèbre Géomètre.

VII. Si l'on observe que l'herpolhodie se projette, en vraie grandeur, sur le plan xy, que l'on prenne pour pôle l'origine, et que l'on emploie les notations habituelles, on a d'abord

$$x^2+y^2+z^2=p^2+u^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=u^2d\omega^2+du^2. \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

* Poinsot, *Journal de Liouville,* t. XVI, p. 85.

** Briot, *Journal de Liouville,* t. VII, p. 80.

*** *Éléments de Statique* (1842), p. 514.

**** Poinsot, *Journal de Liouville*, t. XVI, p. 102.

Des équations (1), (2), (6), on tire

$$x^2 = \frac{a^4}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\left[u^2 + \frac{1}{p^2}(p^2-b^2)(p^2-c^2)\right];$$

puis, de celle-ci :

$$xdx = \frac{a^4 udu}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$dx^2 = \frac{a^4u^2du^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)\left[u^2+\frac{1}{p^2}(p^2-b^2)(p^2-c^2)\right]}.$$

Par conséquent, l'équation différentielle cherchée est

$$d\omega^2 = \left\{-\frac{1}{u^2} + \Sigma \frac{a^4}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)\left[u^2+\frac{1}{p^2}(p^2-b^2)(p^2-c^2)\right]}\right\} du^2. \quad (8)$$

VIII. A cause de l'*identité*

$$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2) = -(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2),$$

la quantité entre parenthèses égale

$$\frac{1}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}\left[\Sigma\frac{a^4(b^2-c^2)}{u^2} - \Sigma\frac{a^4(b^2-c^2)}{u^2+\frac{1}{p^2}(p^2-b^2)(p^2-c^2)}\right]$$

$$= \frac{1}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)p^2u^2}\,\Sigma\,\frac{a^4(b^2-c^2)(p^2-b^2)(p^2-c^2)}{u^2+\frac{1}{p^2}(p^2-b^2)(p^2-c^2)}.$$

Nous avons donc, au lieu de l'équation (8),

$$d\omega^2 = \frac{du^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)p^2u^2}\,\Sigma\frac{a^4(b^2-c^2)(p^2-b^2)(p^2-c^2)}{u^2+\frac{1}{p^2}(p^2-b^2)(p^2-c^2)}. \quad (9)$$

IX. Soient, pour abréger :

$$A = a^4(b^2-c^2)(p^2-b^2)(p^2-c^2),$$

$$B = b^4(c^2-a^2)(p^2-c^2)(p^2-a^2),$$

$$C = c^4(a^2-b^2)(p^2-a^2)(p^2-b^2),$$

$$\alpha = \frac{1}{p^2}(p^2 - b^2)(p^2 - c^2),$$

$$\beta = \frac{1}{p^2}(p^2 - c^2)(p^2 - a^2),$$

$$\gamma = \frac{1}{p^2}(p^2 - a^2)(p^2 - b^2),$$

$$\Sigma \frac{\mathrm{A}}{u^2 + \alpha} = \frac{\mathrm{G}u^4 + \mathrm{H}u^2 + \mathrm{K}}{(u^2 + \alpha)(u^2 + \beta)(u^2 + \gamma)}.$$

Il est visible que

$$\mathrm{G} = \Sigma\mathrm{A}, \quad \mathrm{H} = \Sigma\mathrm{A}(\beta + \gamma), \quad \mathrm{K} = \Sigma\mathrm{A}\beta\gamma = p^2\alpha\beta\gamma\Sigma a^4(b^2 - c^2).$$

Or :

$$\Sigma\mathrm{A} = p^4\Sigma a^4(b^2 - c^2) - p^2\Sigma a^4(b^4 - c^4) + a^2b^2c^2\Sigma a^2(b^2 - c)$$
$$= -p^4(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2),$$

$$\Sigma\mathrm{A}(\beta + \gamma) = \frac{1}{p^2}(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)(p^2 - c^2)\Sigma a^4(b^2 - c^2)(2p^2 - b^2 - c^2)$$
$$= -2(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)(p^2 - c^2)(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2),$$

$$p^2\alpha\beta\gamma\Sigma a^4(b^2 - c^2) = -\frac{1}{p^4}(p^2 - a^2)^2(p^2 - b^2)^2(p^2 - c^2)^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2);$$

donc

$$\mathrm{G}u^4 + \mathrm{H}u^2 + \mathrm{K} = -(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$$
$$\times\left[p^4u^4 + 2(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)(p^2 - c)u^2 + \frac{1}{p^4}(p^2 - a^2)^2(p^2 - b^2)^2(p^2 - c^2)^2\right],$$

ou

$$\mathrm{G}u^4 + \mathrm{H}u^2 + \mathrm{K} = -\frac{1}{p^4}(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)\left[p^4u^2 + (p^2 - a^2)(p^2 - b^2)(p^2 - c^2)\right]^2.$$

X. Au moyen de cette valeur, l'équation (9) devient

$$p^6 d\omega^2 = \frac{-\dfrac{du^2}{u^2}\left[p^4u^2 + (p^2 - a^2)(p^2 - b^2)(p^2 - c^2\right]^2}{\left[u^2 + \dfrac{1}{p^2}(p^2 - b^2)(p^2 - c^2)\right]\left[u^2 + \dfrac{1}{p^2}(p^2 - c^2)(p^2 - a^2)\right]\left[u^2 + \dfrac{1}{p^2}(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)\right]}.$$

Ainsi, l'équation différentielle de l'herpolhodie est, finalement,

$$d\omega = \frac{\dfrac{du}{u}\left[p^4u^2 + (p^2 - a^2)(p^2 - b^2)(p^2 - c^2)\right]\sqrt{-1}}{\sqrt{\left[p^2u^2 + (p^2 - b^2)(p^2 - c^2)\right]\left[p^2u^2 + (p^2 - c^2)(p^2 - a^2\right]\left[p^2u^2 + (p^2 - a^2)(p^2 - b^2)\right]}}. \quad (10)$$

XI. Soit $p=b$, auquel cas *la polhodie est une ellipse,* représentée par deux quelconques des équations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ &\frac{b^2x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{b^2z^2}{c^2}=1,\\ &\frac{z^2}{x^2}=\frac{c^4(a^2-b^2)}{a^4(b^2-c^2)}\ ^{*}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

L'équation (10) se réduit à

$$d\omega=b\frac{du}{u\sqrt{\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{b^2}-u^2}} \quad \ldots\ldots (12)$$

Si l'on fait, pour abréger, $\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{b^2}=m^2$, que l'on intègre, et que l'on suppose $\omega=0$ pour $u=m$, on trouve

$$u=\frac{2m}{e^{\frac{m\omega}{b}}+e^{-\frac{m\omega}{b}}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

résultat conforme à celui qu'a donné Poinsot **. L'inspection de cette formule prouve que l'*herpolhodie est alors une spirale tournant indéfiniment autour du pôle.*

XII. *Remarque.* D'après la génération de la polhodie et de l'herpolhodie, *un arc de la première courbe, et l'arc correspondant de la seconde, ont même longueur.* En particulier, *la spirale* (13) *a même longueur que l'ellipse* (11). La vérification est facile. En effet, l'équation (12) donne

$$ds=du\sqrt{\frac{m^2+b^2-u^2}{m^2-u^2}};$$

et, si l'on fait $u=m\sin\varphi$, $e^2=\frac{m^2}{m^2+b^2}$:

$$ds=\sqrt{m^2+b^2}\,d\omega\sqrt{1-e^2\sin^2\omega}.$$

* La troisième est une conséquence des deux premières.

** *Journal de Liouville,* t. XVI, p. 118.

Par conséquent, *la longueur de la demi-spirale, comprise entre le sommet et le point asymptotique, est donnée par la formule*

$$s = \sqrt{m^2 + b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \sqrt{1 - e^2 \sin^2\omega}.$$

D'un autre côté, cette même formule représente la *longueur du quadrans de l'ellipse dont les demi-axes seraient* m, $\sqrt{m^2+b^2}$, etc.

XIII. *Autre remarque.* Quand $p = b$, les équations (3), (4) de la conique-sphérique deviennent

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 = b^4, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = b^2.$$

Il résulte, de celles-ci :

$$\frac{X}{Z} = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}.$$

Ainsi, *cette conique se réduit à une circonférence de grand cercle.* Conséquemment, *l'enveloppe du plan mobile* P *est un cylindre de révolution ;* etc.

SECONDE ADDITION *.

XV. — Des surfaces parallèles à l'hyperboloïde.

1. On sait que, pour trouver l'équation des *surfaces parallèles à un ellipsoïde donné,* l'on devrait éliminer λ entre les équations

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 + \frac{k^2}{\lambda},$$

$$\frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} = \frac{k^2}{\lambda^2} \text{ ** };$$

dont la seconde est la dérivée de la première. J'ignore si cette éli-

* Présentée à l'Académie, le 5 mars 1874.

** Voir, par exemple, un Mémoire de M. Cayley (*Annali di Matematica,* 1860).

mination, qui semble devoir être fort laborieuse, a été effectuée *. Quoi qu'il en soit, on simplifie la solution du problème en prenant d'abord, au lieu d'un ellipsoïde, l'hyperboloïde à une nappe, représenté par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

En effet, si le centre d'une sphère, dont le rayon est la distance donnée k, parcourt une génératrice rectiligne G de l'hyperboloïde, l'enveloppe est un cylindre de révolution C; et, quand la droite G engendre l'hyperboloïde, le cylindre C est enveloppé par la surface cherchée Σ, *parallèle à l'hyperboloïde* **.

2. Si

$$x-mz-p=\mathrm{P}=0,\quad y-nz-q=\mathrm{Q}=0, \ldots \ldots \quad (2)$$

sont les équations de l'axe, le cylindre est représenté par

$$\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2+(n\mathrm{P}-m\mathrm{Q})^2=(m^2+n^2+c)k^2 \ldots \ldots \quad (3)$$

Dans le cas de l'hyperboloïde,

$$m=\frac{a}{c}\sin\varphi,\quad n=\frac{b}{c}\cos\varphi,\quad p=a\cos\varphi,\quad q=-b\sin\varphi;$$

* La recherche de l'équation de la *toroïde* est déjà un peu pénible (*Nouvelles Annales*, t. III, p. 553).

** En général, au lieu d'éliminer les paramètres λ, μ entre les équations

$$f(x, y, z, \lambda, \mu)=0,\quad \frac{df}{d\lambda}=0,\quad \frac{df}{d\mu}=0;$$

on peut commencer par éliminer λ entre les deux premières; ce qui donne une équation $\mathrm{F}(x, y, z, \mu)=0$; après quoi l'on élimine μ entre $\mathrm{F}=0$ et $\frac{d\mathrm{F}}{d\mu}=0$. Les deux procédés conduisent au même résultat.

M. W. Roberts considère la surface parallèle à l'ellipsoïde, comme l'enveloppe d'une série de *tores*, déterminés par les sections circulaires de celui-ci. La substitution du cylindre au tore amène, évidemment, des simplifications dans les calculs.

donc :

$$P = \frac{1}{c}(cx - az \sin\varphi - ac\cos\varphi),$$

$$Q = \frac{1}{c}(cy - bz\cos\varphi + bc\sin\varphi),$$

$$nP - mQ = \frac{1}{c}(bx\cos\varphi - ay\sin\varphi - ab),$$

$$m^2 + n^2 + 1 = \frac{1}{c^2}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi + c^2).$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (3) devient

$$\left.\begin{array}{l}(cx - az\sin\varphi - ac\cos\varphi)^2 + (cy - bz\cos\varphi + bc\sin)^2 \\ + (bx\cos\varphi - by\sin\varphi - ab)^2 = (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi + c^2)k^2\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

3. A cause de

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}, \quad \cos^2\varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, \quad \sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi,$$

cette équation (4) peut être mise sous la forme

$$A\sin 2\varphi + B\cos 2\varphi + 2C\sin\varphi + 2D\cos\varphi + E = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

L'intersection de deux cylindres consécutifs, ou la *génératrice* de la surface Σ, est représentée par le système de l'équation (5) et de l'équation dérivée :

$$A\cos 2\varphi - B\sin 2\varphi + C\cos\varphi - D\sin\varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Si l'on pose $tang\,\varphi = t$, ces deux équations, rendues rationnelles, s'élèvent au quatrième degré. Il convient donc, avant d'éliminer t, de les remplacer par deux autres, plus simples.

1° En transposant les termes qui contiennent $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, élevant au carré, puis ajoutant, l'on trouve

$$\begin{array}{l}A^2 + B^2 + E^2 + 2E(A\sin 2\varphi + B\cos 2\varphi) \\ = (4C^2 + D^2)\sin^2\varphi + 6CD\sin\varphi\cos\varphi + (C^2 + 4D^2)\cos^2\varphi,\end{array}$$

ou

$$[A^2 + (B - E)^2 - 4C^2 - D^2]t^2 + 2(AE - 3CD)t + A^2 + (B + E)^2 - C^2 - 4D^2 = 0. \ (7)$$

2° Si l'on transpose encore les mêmes termes, et que l'on divise ensuite *membre à membre*, on trouve aisément

$$\frac{(B-E)t^2 - 2At - (B+E)}{At^2 + 2Bt - A} + 2\frac{Ct+D}{Dt-C} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

4. Les équations (7), (8) étant représentées par

$$Ft^2 + Gt + H = 0, \quad Kt^3 + Lt^2 + Mt + N = 0,$$

l'élimination de t ne présente plus aucune difficulté.

5. Nommons L la ligne suivant laquelle le cylindre C touche son enveloppe Σ. Cette ligne L *est l'intersection de* C *avec la surface du second degré* représentée par l'équation (6). Il est facile de reconnaître que L *appartient*, en outre, *à un paraboloïde hyperbolique* P.

En effet, si par un point quelconque de la génératrice G on mène, à l'hyperboloïde, une normale égale à k, le lieu de l'extrémité de cette normale est une ligne L', intersection du cylindre C et du *paraboloïde normal* P. Et comme la surface Σ est le lieu de L', cette ligne coïncide avec L. Par conséquent, *la génératrice* L *de la surface* Σ *est l'intersection de trois surfaces du second degré, connues*.

6. Lorsque $\sin\varphi = 0$ ou $\cos\varphi = 0$, *la surface* S, représentée par l'équation (6), *se confond avec le paraboloïde* P. Mais ces deux cas singuliers sont les seuls : pour toutes les autres valeurs de $\sin\varphi$ ou de $\cos\varphi$, *la surface* S *ne contient pas la génératrice* G; donc elle diffère de P.

7. En général, la surface Σ, parallèle à une surface réglée R, peut être envisagée de deux manières :

1° Comme l'enveloppe d'un cylindre de révolution C, ayant pour axe une génératrice G de R;

2° Comme le lien engendré par l'intersection L du cylindre C avec le *paraboloïde normal* P déterminé par la droite G.

8. La ligne L est la *caractéristique* de C (*).

9. Si la surface R est *développable*, la surface Σ l'est également; et le problème présente diverses circonstances intéressantes, sur lesquelles je reviendrai peut-être.

(*) Soit $F(x, y, z, \alpha) = 0$ l'équation du cylindre, α étant un paramètre, variable avec G. La caractéristique est représentée par le système

$$F = 0, \quad \frac{dF}{d\alpha} = 0.$$

Quant au paraboloïde P, il a pour équation

$$F + \lambda \frac{dF}{d\alpha} = 0,$$

λ ayant une valeur convenable.

Fig. 1.

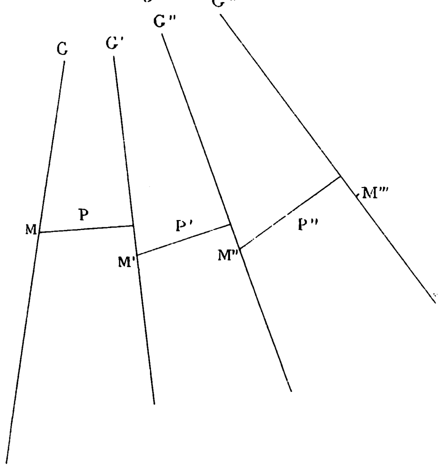


Fig. 2.

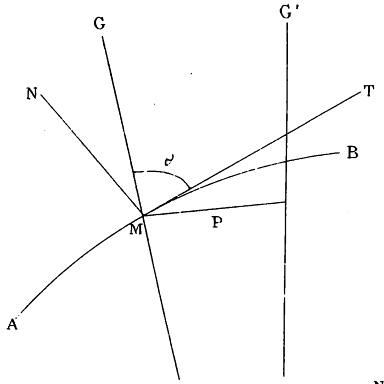


Fig. 3.

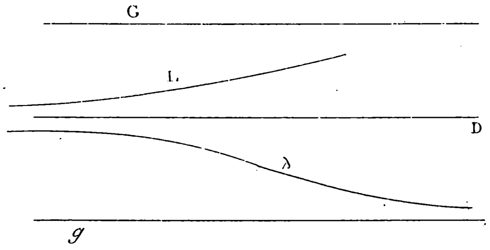


Fig. 4.

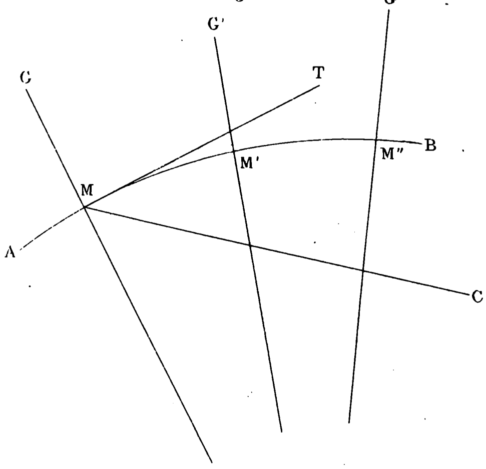


Fig. 5.

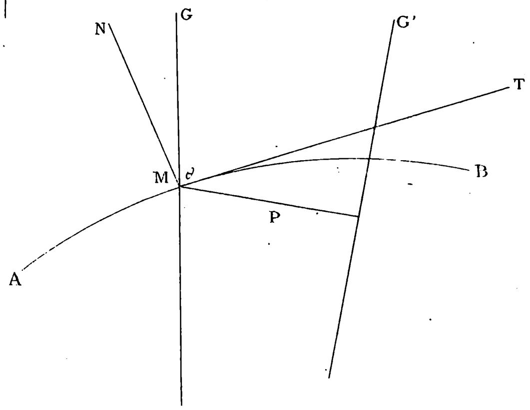


Fig. 6.

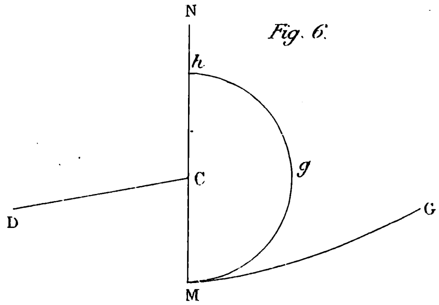


Fig. 7.

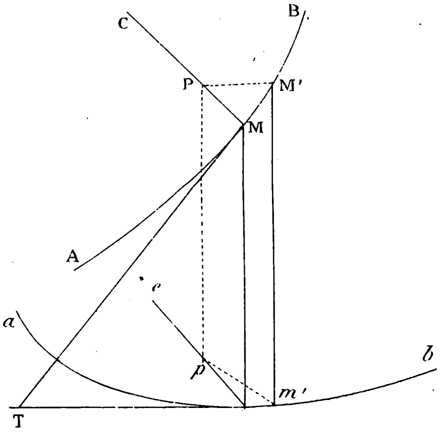


Fig. 8.

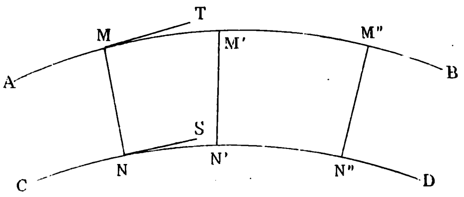


Fig. 9.

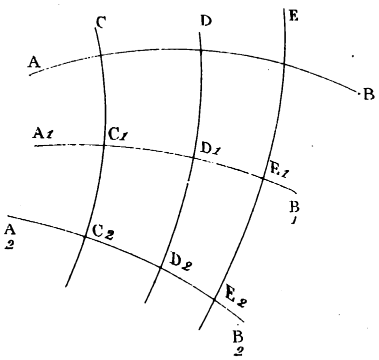
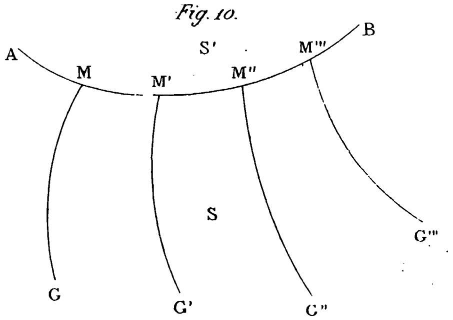


Fig. 10.



Lith. Ve Simonau-Toovey, Brux.

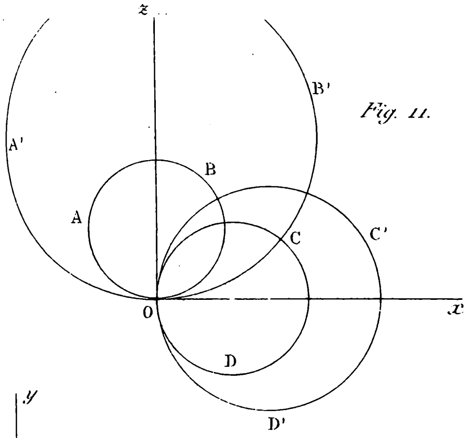
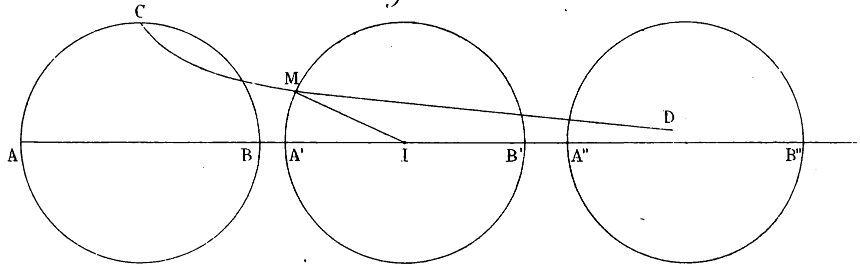


Fig. 11.

Fig. 12.



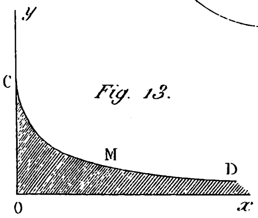


Fig. 13.

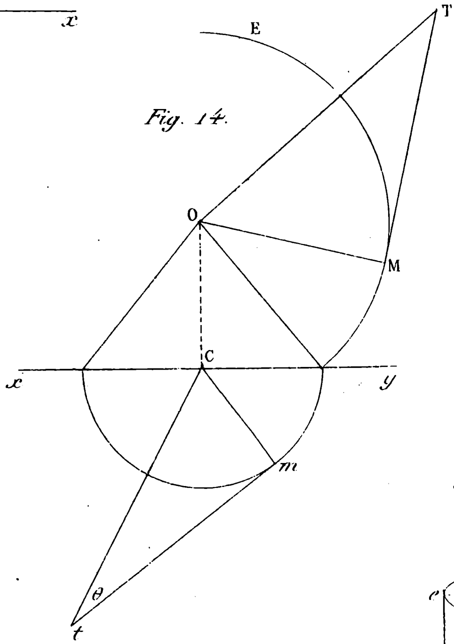


Fig. 14.

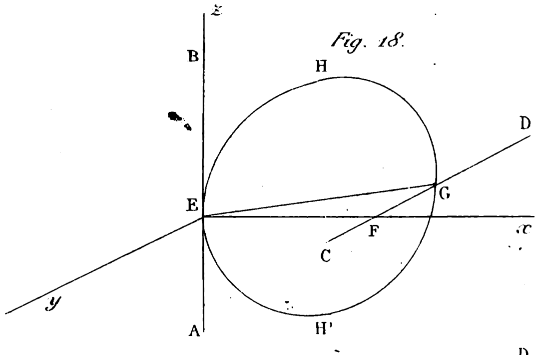


Fig. 18.

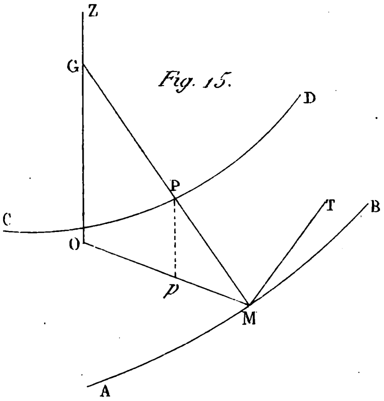


Fig. 15.

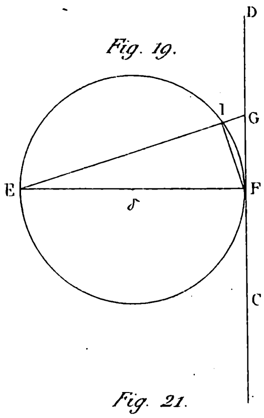


Fig. 19.

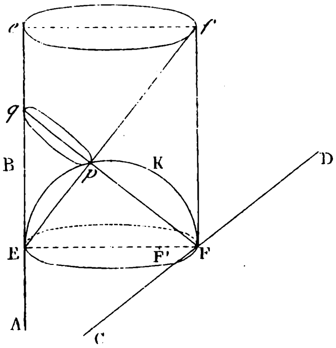


Fig. 20

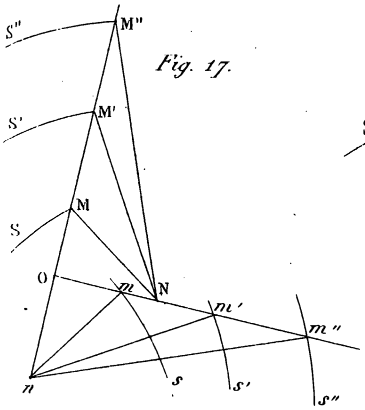


Fig. 17.

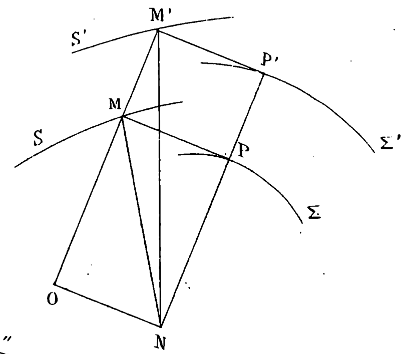


Fig. 16.

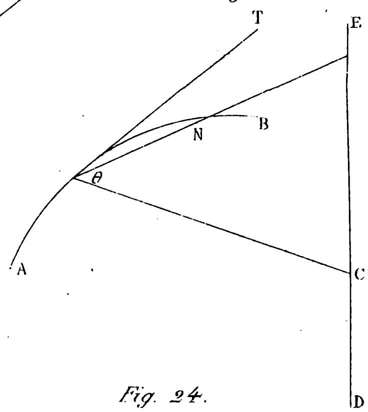


Fig. 21.

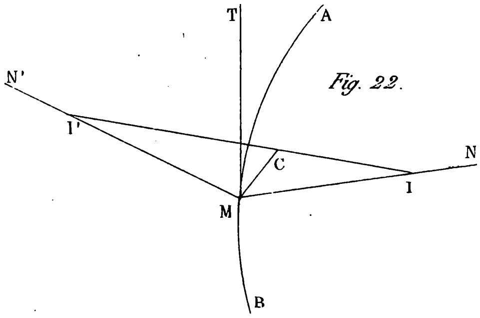


Fig. 22.

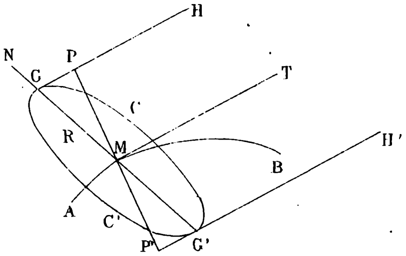


Fig. 23.

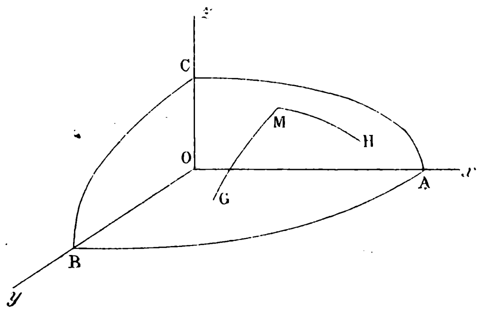


Fig. 24.