RECHERCHES

SUR

LES SURFACES GAUCHES,

PAR

M. CATALAN.

(PREMIER MÉMOIRE.)

(Présenté à la séance de la classe des sciences, le 5 octobre 1865.)

RECHERCHES

SUR

LES SURFACES GAUCHES.

(PREMIER MÉMOIRE.)

I. — Formules préliminaires.

1. *Équations des génératrices.* — Nous supposons la surface gauche rapportée à trois axes rectangulaires, et nous représenterons ordinairement la génératrice, dans chacune de ses positions, par

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dans ces équations, a, b, c sont les coordonnées du point où la génératrice rencontre la *directrice*, et l, m, n, les cosinus des angles formés, avec les axes, par la génératrice : ces six quantités sont des fonctions d'un paramètre u, variable avec la position de la génératrice. Dans chaque cas particulier, l'élimination de u donnera l'équation de la surface.

2. *Coordonnées d'un point de la surface.* — Chacun des rapports $\frac{x-a}{l}$, $\frac{y-b}{m}$, $\frac{z-c}{n}$ représente la distance du point (x, y, z) au point (a, b, c). En la désignant par v, nous aurons

$$x=a+lv, \quad y=b+mv, \quad z=c+nv; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en sorte que les coordonnées d'un point quelconque de la surface s'expriment simplement au moyen des deux variables indépendantes u, v.

3. *Angle de deux génératrices.* — De la relation fondamentale

$$\cos(G, G_1) = ll_1 + mm_1 + nn_1,$$

on conclut, comme l'on sait,

$$\sin^2(G, G_1) = (mn_1 - nm_1)^2 + (nl_1 - ln_1)^2 + (lm_1 - ml_1)^2 \quad . \quad . \quad (3)$$

4. *Angle de deux génératrices consécutives.* — Si les génératrices G, G_1 font entre elles un angle infiniment petit η, on a

$$l_1 = l + dl, \quad m_1 = m + dm, \quad n_1 = n + dn;$$

en sorte que la formule précédente devient

$$\eta^2 = (mdn - ndm)^2 + (ndl - ldn)^2 + (ldm - mdl)^2; \quad . \quad . \quad (4)$$

ou, à cause de

$$1 = l^2 + m^2 + n^2:$$
$$\eta^2 = dl^2 + dm^2 + dn^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

5. *Remarque.* — Si l'on indique par des accents les dérivées relatives à u, et que l'on fasse

$$C = l'^2 + m'^2 + n'^2 \quad (*),$$

les formules (4) et (5) seront remplacées par celles-ci :

$$\eta^2 = [(mn' - nm')^2 + (nl' - ln')^2 + (lm' - ml')^2]du^2, \quad . \quad . \quad (6)$$
$$\eta' = \sqrt{C}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

6. ***Perpendiculaire à deux génératrices consécutives.*** — Soient e, f, g les cosinus des angles formés, avec les trois axes, par cette perpendiculaire. Les relations évidentes

$$el + fm + gn = 0, \quad el' + fm' + gn' = 0$$

(*) On verra, au n° 10, le motif de cette notation.

donnent

$$\frac{e}{mn' - nm} = \frac{f}{nl' - ln'} = \frac{g}{lm' - ml'} = \frac{1}{\sqrt{C}} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

7. *Angle de la perpendiculaire et de la directrice.* — Soit ψ l'angle formé par la tangente à la directrice, au point (a, b, c), avec la perpendiculaire à la génératrice passant en ce point et à la génératrice infiniment voisine. On a

$$\cos\psi = \frac{eda + fdb + gdc}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}};$$

ou, en remplaçant e, f, g par leurs valeurs, et en posant, pour abréger,

$$A = a'^2 + b'^2 + c'^2 : \quad (*)$$

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{AC}}\left[(mn' - nm')a' + (nl' - ln')b' + (lm' - ml')c'\right]. \quad . \quad (9)$$

8. *Distance de deux génératrices consécutives.* — A, A_1 étant les points où ces droites coupent la directrice, la plus courte distance δ sera la projection de AA_1 sur la commune perpendiculaire à ces deux mêmes droites. On a donc, à cause de $AA_1 = \sqrt{A}du$:

$$\delta = \sqrt{A}du\cos\psi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

9. *Valeurs des dérivées partielles.* — Reprenons les équations

$$x = a + lv, \quad y = b + mv, \quad z = c + nv; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

et calculons les dérivées partielles :

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t.$$

Pour cela, désignons, comme précédemment, par x', y', z', x'', y'', z'', ... des dérivées relatives à u, ou obtenues en supposant v constante. A cause de

$$\frac{dx}{dv} = l, \quad \frac{dy}{dv} = m, \quad \frac{dz}{dv} = n,$$

(*) Voir la note précédente.

nous aurons d'abord

$$z' = px' + qy', \quad n = pl + qm. \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

De même,

$$p' = rx' + sy', \quad \frac{dp}{dv} = rl + sm, \quad \ldots \ldots \quad (b)$$

$$q' = sx' + ty', \quad \frac{dq}{dv} = sl + tm \quad \ldots \ldots \quad (c)$$

Les équations (a) donnent

$$z'' = px'' + qy'' + p'x' + q'y', \quad n' = pl' + qm' + p'l + q'm; \quad (d)$$

puis, à cause de

$$\frac{dx'}{dv} = \frac{d.\dfrac{dx}{dv}}{du} = l', \quad \frac{dy'}{dv} = m', \quad \frac{dz'}{dv} = n':$$

$$n' = pl' + qm' + x'\frac{dp}{dv} + y'\frac{dq}{dv}, \qquad 0 = l\frac{dp}{dv} + m\frac{dq}{dv} \quad \ldots \quad (e)$$

On tire, des équations (a) :

$$p = \frac{ny' - mz'}{ly' - mx'}, \quad q = \frac{lz' - nx'}{ly' - mx'}. \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Afin de simplifier les relations (d), (e), posons

$$pl' + qm' - n' = \frac{\mathrm{M}}{ly' - mx'}, \quad px'' + qy'' - z'' = \frac{\mathrm{N}}{ly' - mx'}; \quad (f)$$

nous aurons

$$p'x' + q'y' = -\frac{\mathrm{N}}{ly' - mx'}, \quad p'l + q'm = -\frac{\mathrm{M}}{ly' - mx'}, \quad \ldots \quad (g)$$

$$x'\frac{dp}{dv} + y'\frac{dq}{dv} = -\frac{\mathrm{M}}{ly' - mx'}, \quad l\frac{dp}{dv} + m\frac{dq}{dv} = 0; \quad . \quad (h)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} p' &= \frac{\mathrm{N}m - \mathrm{M}y'}{(ly' - nx')^2}, & q' &= \frac{\mathrm{M}x' - \mathrm{N}l}{(ly' - mx')^2}, \\ \frac{dp}{dv} &= \frac{\mathrm{M}m}{(ly' - mx')^2}, & \frac{dq}{dv} &= -\frac{\mathrm{M}l}{(ly' - mx')^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (i)$$

D'ailleurs, par les formules (11) et (f) :

$$\left.\begin{aligned} M &= l'(ny' - mz') + m'(lz' - nx') + n'(mx' - ly'), \\ N &= x''(ny' - mz') + y''(lz' - nx') + z''(mx' - ly'); \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (12)$$

en sorte que les auxiliaires M, N sont des fonctions symétriques des coordonnées x, y, z et de leurs dérivées relatives à u. Il y a plus : M est indépendante de v. En effet, à cause de l'identité

$$l'(mn' - nm') + m'(nl' - ln') + n'(lm' - ml') = 0,$$

on a

$$M = (mn' - nm')a' + (nl' - ln')b' + (lm' - ml')c' \text{ (*)} \quad . \quad (13)$$

Actuellement, les relations (b'), (c) donnent

$$r = \frac{y'\dfrac{dp}{dv} - mp'}{ly' - mx'}, \quad s = \frac{lp' - x'\dfrac{dp}{dv}}{ly' - mx'} = \frac{y'\dfrac{dq}{dv} - mq'}{ly' - mx'}, \quad t = \frac{lq' - x'\dfrac{dq}{dv}}{ly' - mx'};$$

ou, à cause des valeurs (i) :

$$r = m\,\frac{2My' - Nm}{(ly' - mx')^3}, \quad s = -\frac{M(ly' + mx') - Nlm}{(ly' - mx')^3}, \quad t = l\,\frac{2Mx' - Nl}{(ly' - mx')^3}. \quad (14)$$

10. *Direction de la normale.* — Soient λ, μ, ν les angles de la normale avec les axes. On a, par les formules (11) :

$$\frac{\cos\lambda}{ny' - mz'} = \frac{\cos\mu}{lz' - nx'} = \frac{\cos\nu}{mx' - ly'} = \frac{1}{D}; \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

en posant

$$D^2 = (ny' - mz')^2 + (lz' - nx')^2 + (mx' - ly')^2 \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Le second membre peut aisément être mis sous la forme

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - (lx' + my' + nz')^2;$$

(*) La comparaison des formules (9) et (13) conduit à $M = \sqrt{AC}\cos\psi$.

donc il équivaut à

$$a'^2+b'^2+c'^2+2(a'l'+b'm'+c'n')v+(l'^2+m'^2+n'^2)v^2-(la'+mb'+nc')^2.$$

Par suite, si l'on pose (7) :

$$\left.\begin{array}{l} A=a'^2+b'^2+c'^2, \quad B=a'l'+b'm'+c'n', \quad C=l'^2+m'^2+n'^2, \\ \qquad U=la'+mb'+nc', \end{array}\right\} \quad (17)$$

on aura

$$D^2=A+2Bv+Cv^2-U^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

11. *Indice.* — J'appelle *indice*, la limite du rapport entre la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines et l'angle de ces droites. L'indice mesure, en quelque sorte, le *degré de gauchissement* de la surface : quand il est nul, la surface est développable (*). D'après les formules (10) et (7), la valeur de l'indice est

$$i=\sqrt{\frac{A}{C}}\cos\psi.$$

Mais [(13), *note*],

$$\cos\psi=\frac{M}{\sqrt{AC}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

donc

$$i=\frac{M}{C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

12. *Courbure de la surface.* — On tire, des formules (14),

$$rt-s^2=-\frac{M^2}{(ly'-mx')^4}.$$

D'un autre côté, la *mesure de la courbure*, en un point quelconque, est

$$k=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}=(rt-s^2)\cos^4\nu;$$

(*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, seconde partie, p. 8.

donc (15)

$$k = -\frac{M^2}{D^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

13. Si l'on compare cette valeur à celle qui résulte de la formule générale de Gauss :

$$\left.\begin{aligned}4(EG-F^2)^2k = {} & E\left[\frac{dE}{dv}\frac{dG}{dv} - 2\frac{dF}{du}\frac{dG}{dv} + \left(\frac{dG}{du}\right)^2\right] \\ & + F\left[\frac{dE}{du}\frac{dG}{dv} - \frac{dE}{dv}\frac{dG}{du} - 2\frac{dE}{dv}\frac{dF}{dv} + 4\frac{dF}{du}\frac{dF}{dv} - 2\frac{dF}{du}\frac{dG}{du}\right] \\ & + G\left[\frac{dE}{du}\frac{dG}{du} - 2\frac{dE}{du}\frac{dF}{dv} + \left(\frac{dE}{dv}\right)^2\right] \\ & - 2(EG-F^2)\left[\frac{d^2E}{dv^2} - 2\frac{d^2F}{du\,dv} + \frac{d^2G}{du^2}\right] (^*),\end{aligned}\right\} (a)$$

on arrive à une relation assez simple entre les quantités A, B, C, U.

Pour faire cette comparaison, je remarque d'abord que

$$\left.\begin{aligned}dx &= (a' + vl')\,du + l\,dv, \\ dy &= (b' + vm')\,du + m\,dv, \\ dz &= (c' + vn')\,du + n\,dv;\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

donc, en employant les notations de Gauss :

$$\begin{aligned}E &= (a' + vl')^2 + (b' + vm')^2 + (c' + vn')^2 = A + 2Bv + Cv^2, \\ F &= la' + mb' + nc' = U, \\ G &= l^2 + m^2 + n^2 = 1.\end{aligned}$$

Ces valeurs font disparaître plusieurs termes de la formule (a), et la réduisent à :

$$4(EG - F^2)^2 k = G\left(\frac{dE}{dv}\right)^2 - 2(EG - F^2)\frac{d^2E}{dv^2} \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

D'ailleurs,

$$\frac{dE}{dv} = 2(B + Cv), \quad \frac{d^2E}{dv^2} = 2C, \quad EG - F^2 = A + 2Bv + Cv - U^2;$$

(*) *Nouvelles Annales de mathématiques*, t. XI, p. 218.

donc, en substituant et simplifiant,

$$k = \frac{B^2 - AC + CU^2}{(A + 2Bv + Cv^2 - U^2)^2}.$$

Le dénominateur est égal à D^4 (18); conséquemment

$$k = \frac{B^2 - AC + CU^2}{D^4}; \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

puis, à cause de la formule (21),

$$M^2 = AC - B^2 - CU^2. \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

14. L'élimination des quantités $\frac{dp}{dv}$, $\frac{dq}{dv}$, entre les équations (b), (c), (e) de l'article (9), conduit à

$$l^2 r + 2lms + m^2 t = 0. \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

Cette relation importante, dont nous ferons diverses applications, exprime que *toute section normale, passant par une génératrice, a une courbure nulle* (*); ce qui, du reste, est évident.

II. — Trajectoires des génératrices.

15. Si l'on veut tracer, sur la surface gauche, une ligne qui coupe à angle droit toutes les génératrices, on doit établir, entre les différentielles des coordonnées d'un point quelconque de cette ligne, la condition

$$ldx + mdy + ndz = 0 \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

A cause des valeurs (22), cette équation devient

$$(la' + mb' + nc')\,du + dv = 0;$$

c'est-à-dire (17) :

$$Udu + dv = 0. \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

(*) Leroy, *Analyse appliquée*, p. 309.

On conclut, de celle-ci :

$$v = \mathrm{H} - \int \mathrm{U} du, \qquad (28)$$

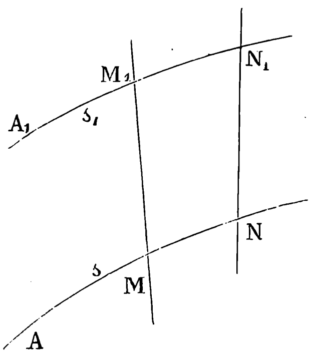
H étant une constante arbitraire (*).

16. Pour deux points appartenant à la même génératrice, l'intégrale ne change pas. Si donc v_1, H_1 sont les valeurs de v et de H qui se rapportent au second point,

$$v - v_1 = \mathrm{H} - \mathrm{H}_1.$$

Cette équation exprime que :

Deux trajectoires orthogonales interceptent, sur toutes les génératrices, des segments égaux (**).



17. Supposons que la trajectoire, au lieu d'être orthogonale, coupe les génératrices sous un angle constant θ; nous aurons, en représentant par s la longueur de cette courbe (***) :

$$l dx + m dy + n dz = ds \cos\theta; \qquad (29)$$

d'où, au lieu de l'équation (28),

$$v = \mathrm{H} - \int \mathrm{U} du + s \cos\theta. \qquad (30)$$

Soient M, M_1 deux points appartenant à une même génératrice;

(*) *Société Philomathique*, séance du 13 février 1847.

(**) Cette proposition est comprise dans un théorème de Gauss : si je l'énonce, c'est parce qu'elle a été le point de départ de ces *Recherches*, suggérées par la lecture d'un Mémoire de M. Molins. (*Journal de Liouville*, t. VIII, p. 132.)

(***) Conformément à l'usage, et malgré le léger inconvénient qui en résulte, la même lettre s désigne, tout à la fois, la fonction $\frac{d^2z}{dxdy}$ et la longueur d'un arc de courbe.

soient v, v_1 leurs distances au point (a, b, c) : la dernière équation donne

$$MM_1 = v - v_1 = H - H_1 + (s - s_1) \cos \theta.$$

La même relation, appliquée aux points N, N_1, où les trajectoires AMN, $A_1 M_1 N_1$ coupent une nouvelle génératrice, devient

$$NN_1 = H - H_1 + (s + MN - s_1 - M_1 N_1) \cos \theta.$$

Par suite,

$$MM_1 - NN_1 = (M_1 N_1 - MN) \cos \theta.$$

Ainsi, *dans tout quadrilatère formé par deux génératrices rectilignes et par deux trajectoires, la différence des côtés rectilignes est égale à la différence des côtés curvilignes, multipliée par le cosinus de l'angle constant sous lequel les trajectoires coupent les génératrices* (*).

18. *Remarque.* — Dans le cas des trajectoires orthogonales, $\cos \theta = 0$, $MM_1 = NN_1$; en sorte que l'on ne peut plus rien conclure relativement à la différence entre $M_1 N_1$ et MN.

19. Le théorème précédent peut encore se déduire de la proposition suivante, évidente par le n° 16 :

Dans tout triangle formé par une génératrice, une trajectoire orthogonale et une trajectoire oblique, le côté rectiligne est égal à l'hypoténuse, multipliée par le cosinus de l'angle compris (**).

20. Enfin, si l'on considère un triangle formé par trois trajectoires; que l'on appelle a, b, c les côtés de ce triangle, et A, B, C les angles qu'ils forment avec les génératrices, ces angles étant comptés en faisant le tour de la figure dans le même sens, on trouve aisément :

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = 0.$$

Cette relation, identique avec le théorème relatif aux projections des côtés d'un triangle rectiligne, peut être regardée comme la

(*) *Société Philomathique*, 4 novembre 1848.

(**) *Ibidem.*

formule fondamentale d'une nouvelle Trigonométrie : celle des figures tracées sur une surface gauche, par les trajectoires des génératrices. Nous ne faisons qu'indiquer ce sujet, et nous passons à d'autres propriétés (*).

21. *Différentielle de l'arc de trajectoire.* — En supposant que la directrice soit une trajectoire orthogonale, nous aurons, pour une autre trajectoire orthogonale quelconque :

$$dx = (a' + vl')\,du, \quad dy = (b' + vm')\,du, \quad dz = (c' + vn')\,du\,; \quad (31)$$

attendu que cette nouvelle courbe est représentée par $v = const.$ (16).

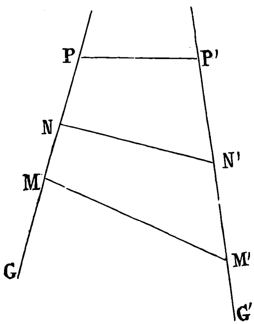
Par suite (10),

$$ds^2 = (\mathrm{A} + 2\mathrm{B}v + \mathrm{C}v^2)\,du^2\,; \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

ou encore

$$ds^2 = d\sigma^2 + (2\mathrm{B}v + \mathrm{C}v^2)\,du^2, \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

en appelant $d\sigma$ l'élément de la trajectoire directrice.



22. *Remarques.* — I. Soient MM', NN', PP' des perpendiculaires à une génératrice G, rencontrant une génératrice G', infiniment voisine de G. Parmi ces perpendiculaires, qui peuvent être regardées comme les éléments d'autant de trajectoires orthogonales, la plus petite est PP', perpendiculaire à G'. On peut donc déterminer la plus courte distance δ des deux génératrices G, G', en cherchant la valeur de v qui rend minimum ds^2. Cette condition donne

$$v = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}, \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

(*) Ceci a été écrit vers 1849.

puis

$$\delta^2 = \left(A - \frac{B^2}{C}\right) du^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

II. On a trouvé, ci-dessus :

$$\delta = \sqrt{A}du \cos\psi \ (10), \quad \cos\psi = \frac{M}{\sqrt{AC}} \ (19), \quad M^2 = AC - B^2 - CU^2. \quad (24)$$

Mais, la directrice étant une trajectoire orthogonale, $U = 0$; donc les formules (35) et (10) sont équivalentes.

III. D'après les valeurs (22), et en supposant toujours que la directrice soit une trajectoire orthogonale, l'élément d'une courbe quelconque, tracée sur la surface, est déterminé par la formule

$$ds^2 = (A + 2Bv + Cv^2)\, du^2 + dv^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Ce résultat s'accorde avec un théorème de M. Bour (*).

23. *Application à l'hyperboloïde gauche de révolution.* — Une génératrice quelconque peut être représentée par

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{z}{\gamma}\cos u + \sin u, \quad \frac{y}{\alpha} = \frac{z}{\gamma}\sin u - \cos u. \quad . \quad . \quad (a)$$

Comparant avec les équations (1), on trouve :

$$a = \alpha \sin u, \qquad b = -\alpha \cos u, \qquad c = 0,$$

$$l = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \cos u, \quad m = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \sin u, \quad n = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}};$$

puis

$$U = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}.$$

L'équation (28) devient donc, simplement,

$$v = H - \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} u. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 39e cahier, p. 31. Ce jeune géomètre, déjà illustre, vient d'être ravi à ses nombreux amis et à la science. Il n'avait que trente-trois ans ! (Juin 1866.)

En égalant à $\frac{z}{n}$ cette valeur de v, on obtient

$$u = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}{\alpha^2}\left(\mathrm{H} - \frac{z\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}{\gamma}\right);$$

ou, pour plus de symétrie,

$$u = \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2 \gamma}(h - z), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

h étant une nouvelle constante arbitraire.

La combinaison de cette formule avec les équations (a) donne ensuite

$$x \sin\left[\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2\gamma}(h - z)\right] - y \cos\left[\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2\gamma}(h - z)\right] = \alpha. \quad . \quad (d)$$

Telle est l'équation d'une surface qui coupe l'hyperboloïde suivant les trajectoires orthogonales d'un premier système de génératrices rectilignes. Un calcul semblable au précédent conduit à l'équation

$$x \sin\left[\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2\gamma}(k - z)\right] + y \cos\left[\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2\gamma}(k - z)\right] = \alpha; \quad . \quad (e)$$

qui représente la surface relative au second système de génératrices.

24. Les équations (d), (e), quand on y fait varier les constantes h, k, représentent des surfaces gauches dont les génératrices, parallèles au plan des xy, sont toutes à une distance α de l'axe des z; en sorte qu'elles touchent un cylindre de révolution autour de cet axe. Pour trouver le lieu des points de contact, posons

$$x = \alpha \cos \omega, \quad y = \alpha \sin \omega :$$

il vient, en remplaçant k par h,

$$\sin\left[\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2\gamma}(h - z) \mp \omega\right] = 1;$$

d'où

$$\mp\omega = (4n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2\gamma}(h-z). \quad \ldots \quad (f)$$

Cette dernière équation appartient évidemment à des hélices, toutes égales entre elles, coupant le plan des xy sous un angle dont la tangente est $\frac{\alpha\gamma}{\alpha^2+\gamma^2}$, et qui tournent, les unes dans un sens, les autres dans le sens opposé. Les surfaces dont il s'agit sont donc des *hélicoïdes à noyau plein et à plan directeur.*

25. Les intersections de ces hélicoïdes avec l'hyperboloïde, c'est-à-dire les trajectoires cherchées, se projettent, sur le plan des xy, suivant des *spirales* dont l'équation est, par ce qui précède,

$$\begin{aligned} &x \sin\left[\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2\gamma}\left(h-\gamma\sqrt{\frac{x^2+y^2}{\alpha^2}-1}\right)\right] \\ &\mp y\cos\left[\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2\gamma}\left(h-\gamma\sqrt{\frac{x^2+y^2}{\alpha^2}-1}\right)\right] = \alpha. \quad \ldots \quad (g) \end{aligned}$$

Pour plus de simplicité, on peut supposer $h=0$: car toutes ces spirales sont égales entre elles. On peut aussi remplacer les coordonnées rectangulaires x, y par $w\cos\omega$, $w\sin\omega$.

Au moyen de ces modifications, l'équation (g) devient

$$\pm\omega = \frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2}\sqrt{\frac{w^2}{\alpha^2}-1} + \text{arc}\sin\frac{\alpha}{w}.$$

Sous cette forme, on voit que les projections horizontales des trajectoires ont quelque analogie avec la *développante du cercle.*

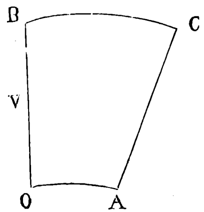
III. — Quadrature de la surface.

26. Prenons, pour élément d'une surface gauche, le petit rectangle compris entre deux génératrices et deux trajectoires orthogonales : nous aurons, en appelant S l'aire cherchée,

$$dS = ds\,dv\,;$$

c'est-à-dire, à cause de la formule (32),

$$dS = du\,dv\sqrt{A + 2Bv + Cv^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37$$



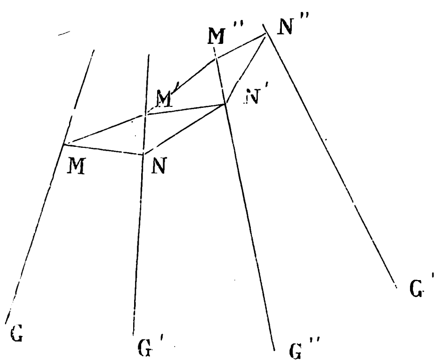
Par suite, l'aire du *rectangle* OABC ayant pour côtés la trajectoire-directrice OA, une trajectoire quelconque BC, une première génératrice OB et une autre génératrice quelconque AC, sera donnée par l'intégrale double

$$S = \int_{u_0}^{u} du \int_{0}^{v} dv \sqrt{A + 2Bv + Cv^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38$$

immédiatement réductible à une quadrature.

IV. — Ligne de striction.

27. Considérons diverses génératrices G, G′, G″,... de la surface gauche. Soit MN la perpendiculaire commune à G et G′; soit M′N′ la perpendiculaire commune à G′ et G″; et ainsi de suite. La limite vers laquelle tendent à la fois les lignes polygonales MM′ M″..., NN′N″..., est ce qu'on appelle la *ligne de striction* de la surface. Cherchons les équations de cette ligne.



Soient x, y, z les coordonnées du point M, et $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ les coordonnées du point N, supposé infiniment voisin de M. En exprimant que MN est perpendiculaire aux génératrices G, G', nous aurons

$$ldx + mdy + ndz = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$
$$dldx + dmdy + dndx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Dans la seconde équation, remplaçons dx, dy, dz par leurs valeurs générales (22), et ayons égard à la relation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1\,;$$

nous obtiendrons

$$a'l' + b'm' + c'n' + (l'^2 + m'^2 + n'^2)\,v = 0\,;$$

d'où, en employant les notations convenues (10) :

$$v = -\frac{B}{C}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Dans chaque cas particulier, cette formule (déjà trouvée au n° 22) donnera l'inconnue v en fonction du paramètre u; après quoi les équations (1) feront connaître les coordonnées x, y, z du point correspondant de la ligne de striction. Cette courbe sera donc complétement déterminée.

28. *Application à l'hyperboloïde gauche.* — Une génératrice peut être représentée par

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{z}{\gamma}\cos u + \sin u\,, \quad \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}\sin u - \cos u. \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Si l'on prend pour directrice l'*ellipse de gorge*, on aura, en conservant les notations précédentes et en posant, pour abréger,

$$G^2 = \alpha^2\cos^2 u + \beta^2\sin^2 u + \gamma^2:$$

$$\left.\begin{array}{lll} a = \alpha\sin u, & b = -\beta\cos u, & c = 0, \\ l = \dfrac{\alpha\cos u}{G}, & m = \dfrac{\beta\sin u}{G}, & n = \dfrac{\gamma}{G}; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

$$a' = \alpha\cos u\,, \quad b' = \beta\sin u\,, \quad c' = 0\,,$$

$$\left.\begin{array}{l} l' = -\dfrac{\alpha}{G^2}(G\sin u + G'\cos u), \\ m' = \dfrac{\beta}{G^2}(G\cos u - G'\sin u), \\ n' = -\dfrac{\gamma}{G^2}G'; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

$$GG' = (\beta^2 - \alpha^2) \sin u \cos u \,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

puis

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{(\beta^2 - \alpha^2)\gamma^2}{G^3} \sin u \cos u, \quad C = \frac{1}{G^4}[\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 \sin^2 u + \beta^2 \cos^2 u)\gamma^2], \\ v &= (\alpha^2 - \beta^2)\gamma^2 \sin u \cos u \, \frac{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 u + \beta^2 \sin^2 u + \gamma^2}}{\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 \sin^2 u + \beta^2 \cos^2 u)\gamma^2}. \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

De cette valeur, et des formules précédentes, on conclut :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\alpha^3(\beta^2 + \gamma^2) \sin u}{\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 \sin^2 u + \beta^2 \cos^2 u)\gamma^2}, \\ y &= -\frac{\beta^3(\alpha^2 + \gamma^2) \cos u}{\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 \sin^2 u + \beta^2 \cos^2 u)\gamma^2}, \\ z &= \frac{\gamma^3(\alpha^2 - \beta^2) \sin u \cos u}{\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 \sin^2 u + \beta^2 \cos^2 u)\gamma^2}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (f)$$

ou, pour abréger,

$$x = \frac{A_1}{D_1} \sin u, \quad y = -\frac{B_1}{D_1} \cos u, \quad z = \frac{C_1}{D_1} \sin u \cos u. \quad \ldots \quad (g)$$

On tire, de ces dernières équations,

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{B_1^2} = \frac{1}{D_1^2}, \quad C_1 D_1\, xy = -A_1 B_1\, z;$$

puis

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{B_1^2} = \frac{C_1^2\, x^2 y^2}{A_1^2\, B_1^2 z^2};$$

c'est-à-dire

$$\alpha^6(\beta^2 + \gamma^2)^2 y^2 z^2 + \beta^6(\alpha^2 + \gamma^2)^2 x^2 z^2 - \gamma^6(\alpha^2 - \beta^2)^2 x^2 y^2 = 0. \quad (40)$$

Telle est l'équation (*) d'une surface qui, par son intersection avec l'hyperboloïde, détermine la ligne de striction. Cette surface est un cône composé de *huit nappes*, asymptotiques aux plans représentés par

$$\frac{x}{z} = \pm \frac{\alpha^3(\beta^2 + \gamma^2)}{\gamma^3(\alpha^2 - \beta^2)}, \quad \frac{y}{z} = \pm \frac{\beta^3(\alpha^2 + \gamma^2)}{\gamma^3(\alpha^2 - \beta^2)}.$$

(*) Elle a été donnée par M. Chasles. (*Correspondance mathématique de M. Quetelet*, 3e série, tome XI, page 49.)

On peut tirer encore, des équations (f') :

$$\alpha^5(\beta^2+\gamma^2)\,y\sin u+\beta^5(\alpha^2+\gamma^2)\,x\cos u=0,$$
$$\beta x\sin u-\alpha y\cos u=0;$$

d'où, par l'élimination de u,

$$\alpha^2\beta^8(\alpha^2+\gamma^2)^2\alpha^2+\beta^2\alpha^8(\beta^2+\gamma^2)^2y^2=[\beta^4(\alpha^2+\gamma^2)x^2+\alpha^4(\beta^2+\gamma^2)y^2]^2. \quad (41)$$

Le cylindre représenté par cette équation coupe l'hyperboloïde suivant la ligne de striction. La trace du cylindre, sur le plan des xy, est extérieure à l'ellipse de gorge, qu'elle touche aux quatre sommets. Quant à la ligne de striction, elle se compose de deux branches fermées, répondant aux deux systèmes de génératrices rectilignes, et qui *coupent*, en ses sommets, l'ellipse de gorge. On aura une idée assez exacte de cette courbe, si l'on se représente une *couronne formée de deux tiges entrelacées.*

29. *Application au paraboloïde hyperbolique.* — Cette surface admettant deux plans directeurs, la ligne de striction, relative à un premier système de génératrices rectilignes, est déterminée par un cylindre circonscrit, perpendiculaire au premier plan directeur (*). D'après un théorème connu, cette courbe est située dans le plan diamétral conjugué des génératrices du cylindre. De même pour la ligne de striction relative au second système. On conclut de là que si le paraboloïde a pour équation

$$\frac{y^2}{\beta}-\frac{z^2}{\gamma}=2x,$$

les plans des *deux paraboles de striction* seront représentés par

$$\frac{y}{z}=\pm\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

30. *Application à la surface de la vis à filet triangulaire.* — Si la génératrice fait un angle de 45° avec la directrice rectiligne,

(*) *Mémoire sur les surfaces gauches à plan directeur* (*Journal de l'École polytechnique*, 29e cahier, p. 124).

et s'il en est de même pour la tangente à l'hélice directrice, on peut prendre, pour équations de la génératrice,

$$x = (z - u)\cos u, \quad y = (z - u)\sin u. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

A cause de

$$l = \frac{\cos u}{\sqrt{2}}, \quad m = \frac{\sin u}{\sqrt{2}}, \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

l'équation

$$dl\,dx + dm\,dy + dn\,dx = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

devient

$$-\sin u\,[\cos u\,d(z - u) - (z - u)\sin u\,du]$$
$$+\cos u\,[\sin u\,d(z - u) + (z - u)\cos u\,du] = 0,$$

ou

$$z - u = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Ainsi, *la ligne de striction se confond avec la directrice rectiligne de l'héliçoïde* proposé. On voit que, dans certains cas, au lieu de recourir à la formule générale (34), il vaut mieux faire directement le calcul, en employant les équations de l'article 27.

31. Par exemple, supposons que la génératrice rencontre, sous un angle constant, une directrice rectiligne : le cas que nous venons de traiter rentre dans celui-ci. En prenant la directrice pour axe des z, nous pouvons représenter la génératrice par les équations

$$x = \alpha(z - u), \quad y = \beta(z - u);$$

dans lesquelles

$$\alpha^2 + \beta^2 = \text{const.}$$

Les relations évidentes

$$\alpha\,dx + \beta\,dy + dz = 0, \quad d\alpha\,dx + d\beta\,dy = 0$$

conduisent à

$$[\alpha d(z - u) + (z - u)dx]\,d\alpha + [\beta d(z - u) + (z - u)d\beta]\,d\beta = 0.$$

Mais

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta = 0;$$

donc

$$z - u = 0, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

Ainsi, *quand la génératrice rectiligne coupe, sous un angle constant, une droite donnée, celle-ci est la ligne de striction de la surface gauche* (*). Cette circonstance se présente, par exemple, dans la remarquable surface à laquelle j'ai donné le nom d'*hyperboloïde-conchoïdal* (**).

32. *Inclinaison des génératrices sur la ligne de striction.* — Revenant au cas général, j'observe que la formule

$$v = -\frac{B}{C} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

détermine la distance comprise, sur une génératrice quelconque, entre la directrice donnée et la ligne de striction. Si ces deux lignes se confondent, $B = 0$, ou

$$da\,dl + db\,dm + dc\,dn = 0. \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

Afin d'interpréter ce résultat, désignons par θ l'angle de la génératrice avec la tangente à la ligne de striction, au point (a, b, c), et par $d\sigma$ l'élément de cette courbe. Nous aurons, en nous rappelant la signification des lettres l, m, n :

$$\cos\theta = l\frac{da}{d\sigma} + m\frac{db}{d\sigma} + n\frac{dc}{d\sigma}; \quad \ldots \ldots \quad (45)$$

d'où, à cause de l'équation (44),

$$d.\cos\theta = ld.\frac{da}{d\sigma} + md.\frac{db}{d\sigma} + nd.\frac{dc}{d\sigma}. \quad \ldots \ldots \quad (46)$$

Soient actuellement α, β, γ les cosinus des angles formés, avec

(*) *Société philomathique,* séance du 4 novembre 1848.

(**) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive,* seconde partie, p. 89.

les trois axes, par le rayon de courbure de la ligne de striction, et soit ε l'angle de contingence de cette ligne. On a

$$d\,.\frac{da}{d\sigma}=\varepsilon\alpha,\quad d\,.\frac{db}{d\sigma}=\varepsilon\beta,\quad d\cdot\frac{dc}{d\sigma}=\varepsilon\gamma\,;$$

donc la relation (46) devient

$$d\,.\cos\theta=\varepsilon(l\alpha+m\beta+n\gamma).$$

La quantité entre parenthèses représente le cosinus de l'angle φ que fait la génératrice avec le rayon de courbure de la ligne de striction. Nous avons donc finalement, au lieu de l'équation (44),

$$\cos\varphi=\frac{d\,.\cos\theta}{\varepsilon}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Par conséquent :

1° *Le cosinus de l'angle formé par la génératrice rectiligne avec le rayon de courbure de la ligne de striction, est égal à la différentielle du cosinus de l'angle qu'elle fait avec la tangente à cette ligne, divisée par l'angle de contingence de cette même ligne ;*

2° *Réciproquement, si la génératrice rectiligne se meut de manière que le cosinus de l'angle qu'elle fait avec le rayon de courbure de la directrice, soit égal à la différentielle de l'angle qu'elle fait avec la tangente à cette ligne, divisée par l'angle de contingence de cette même directrice, celle-ci est la ligne de striction de la surface gauche* (*).

33. Ce théorème général, que l'on peut vérifier géométriquement, entraîne plusieurs conséquences remarquables :

1° Si l'angle θ est constant, $\cos\varphi=0$; donc $\varphi=\frac{\pi}{2}$: *si la génératrice coupe, sous un angle constant, la ligne de striction, elle est nécessairement perpendiculaire au rayon de courbure de cette ligne* (**) (à moins que ε soit nul).

(*) *Société philomathique,* 4 novembre 1848.

(**) *Ibidem.*

2° *Réciproquement, si une droite se meut en faisant un angle constant avec la directrice, et en restant perpendiculaire au rayon de courbure de cette ligne, celle-ci est la ligne de striction* (*).

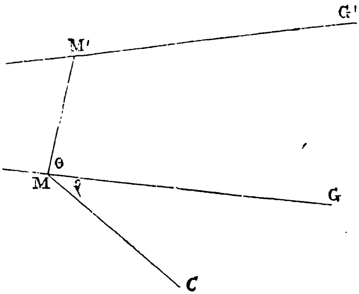
3° *En particulier, le lieu des binormales à une courbe donnée est une surface gauche ayant cette courbe pour ligne de striction.* Ce théorème est dû à M. Saint-Venant (**).

4° Si $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire *si la ligne de striction est droite*, $d.\cos\theta = 0$, et *l'angle θ est constant.*

5° Si $d\theta = \varepsilon$, $\cos\varphi = -\sin\theta$: ce résultat apprend que *la génératrice est alors dirigée dans le plan osculateur de la ligne de striction. La réciproque est vraie* (*).

34. *Remarque.* — Le théorème démontré dans l'article 31 est un cas particulier du corollaire 2°. Il est également compris dans la proposition suivante :

Si la génératrice fait un angle constant avec la ligne de striction, celle-ci est une ligne géodésique de la surface (*).



Pour démontrer ce théorème, considérons deux génératrices MG, M'G', l'élément MM' de la ligne de striction, et le rayon de courbure MC de cette ligne. En désignant par A l'angle des plans M'MG, M'MC, nous aurons, dans l'angle trièdre M, à cause de l'angle droit M'MC,

$$\cos\varphi = \sin\theta\cos A.$$

Mais, par l'équation (47),

$$\cos\varphi = -\frac{\sin\theta d\theta}{\varepsilon};$$

(*) *Société Philomathique*, 4 novembre 1848.

(**) *Journal de l'École polytechnique*, 30e cahier, p. 47.

donc

$$\cos A = -\frac{d\theta}{\varepsilon}. \qquad (48)$$

Telle est la formule simple qui donne l'*inclinaison du plan osculateur de la ligne de striction sur le plan tangent à la surface gauche*. Si l'angle θ est constant, $\cos A = 0$, c'est-à-dire qu'alors le plan osculateur est normal à la surface. C'est ce qu'il fallait démontrer.

35. *Remarque.* — Si l'on désigne par ρ le rayon de courbure de la ligne de striction, on change l'équation (48) en

$$\frac{d\theta}{d\sigma} + \frac{\cos A}{\rho} = 0. \qquad (49)$$

Conséquemment, le théorème général ci-dessus (32) ne diffère pas de celui qui est démontré à la page 71 du *Journal de l'École polytechnique* (32^e cahier).

36. Si la ligne de striction est donnée, les angles φ et θ déterminent, à chaque instant, la position de la génératrice. L'un d'eux étant pris arbitrairement, l'autre sera donné par l'équation (47). On en tire, par exemple,

$$\cos\theta = \int \varepsilon \cos\varphi. \qquad (50)$$

37. *Application.* — Prenons, pour ligne de striction, l'hélice représentée par

$$a = \cos u, \quad b = \sin u, \quad c = u; \qquad (a)$$

et supposons

$$\varphi = u + \frac{\pi}{2}. \qquad (b)$$

On a

$$\varepsilon = \frac{du}{\sqrt{2}}; \qquad (c)$$

donc, par l'équation (47),

$$\cos\theta = \cos\theta_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \cos u); \qquad (d)$$

θ_0 étant la valeur de θ qui répond à $u = o$.

Les formules de l'article (32) donnent ensuite, à cause de

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{da}{d\sigma}=-\dfrac{\sin u}{\sqrt{2}},\ \dfrac{db}{d\sigma}=\dfrac{\cos u}{\sqrt{2}},\ \dfrac{dc}{d\sigma}=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ d.\dfrac{da}{d\sigma}=-\dfrac{\cos u}{\sqrt{2}}du,\quad d.\dfrac{db}{d\sigma}=-\dfrac{\sin u}{\sqrt{2}}du,\ d.\dfrac{dc}{d\sigma}=0,\\ \alpha=-\cos u,\quad \beta=-\sin u,\quad \gamma=0:\end{array}\right\}\ldots(c)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos\theta_0+\cos u-1=-l\sin u+m\cos u+n,\\ \sin u=l\cos u+m\sin u.\end{array}\right\}\ldots(f)$$

On a, en outre,

$$1=l^2+m^2+n^2.$$

L'élimination de l et de m, entre les trois dernières équations, conduit à

$$(\sqrt{2}\cos\theta_0+\cos u-1-n)^2+\sin^2 u=1-n^2;$$

d'où l'on tire

$$n=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\cos\theta_0+\cos u-1\ \pm\sqrt{2\cos^2 u-(\sqrt{2}\cos\theta_0+\cos u-1)^2}\right].\ .\ (g)$$

Ces valeurs de n seront nécessairement imaginaires pour certaines valeurs de a, par exemple pour $u=\frac{\pi}{2}$. De là résulte que la droite mobile, au lieu d'engendrer une surface continue, engendrera réellement des *nappes* indéfinies, mais séparées les unes des autres (*). Il n'y a d'exception que si l'on suppose $\theta_0=\pm\frac{\pi}{4}$. Il résulte, de cette hypothèse,

$$n=0,\quad n=\cos u.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (h)$$

La première valeur est inadmissible, parce qu'elle donne $l=0$,

(*) Si par exemple on suppose $\theta_0=\frac{\pi}{2}$, la formule (g) devient

$$n=\frac{1}{2}\left(\cos u-1\pm\sqrt{\cos^2 u+2\cos u-1}\right).$$

Celle-ci exige que $\cos u$ soit compris entre 1 et $\sqrt{2}-1$.

$m = 1$; en sorte que la surface serait cylindrique. L'autre valeur de n, substituée dans les équations (f), conduit à

$$l = \sin u \cos u, \quad m = \sin u^2.$$

Par suite, les équations de la génératrice sont

$$\frac{x - \cos u}{\sin u \cos u} = \frac{y - \sin u}{\sin^2 u} = \frac{z - u}{\cos u}. \quad \ldots\ldots \quad (i)$$

A l'inspection de ces formules, on reconnaît que la génératrice rencontre toujours l'axe des z. D'ailleurs, l'angle sous lequel ces deux droites se coupent, au lieu d'être constant, a pour mesure le paramètre u. La surface est donc une sorte d'*héliçoïde rampant*, dont la forme a quelque analogie avec celle de la *surface de la vis à filet triangulaire*. En éliminant u, on trouve

$$z = \operatorname{arctg.} \frac{y}{x} + \frac{x}{y}\left[-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right]. \quad \ldots\ldots \quad (50)$$

58. Problème. — *Trouver les surfaces gauches qui ont une ligne de striction donnée et une directrice rectiligne donnée.*

Si l'on prend la directrice rectiligne pour axe des z, les équations

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

doivent être vérifiées par $x = 0$, $y = 0$; ce qui exige que

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m}. \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Posons

$$a = w \cos u, \quad b = w \sin u, \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

et remplaçons n par $\cos \gamma$; nous trouvons

$$l = \sin \gamma \cos u, \quad m = \sin \gamma \sin u. \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

Il résulte, de ces valeurs,

$$da\,dl + db\,dm = \cos\gamma\,d\gamma\,dw + w\sin\gamma\,du^2;$$

en sorte que l'équation (44) devient

$$\cos\gamma\,d\gamma\,dw + w\sin\gamma\,du^2 - dc\sin\gamma\,d\gamma = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Celle-ci, dans laquelle w et c sont des fonctions données du paramètre u, est réductible à la forme

$$(V + \cot\gamma)\,d\gamma + V_1\,du = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

V et V_1 étant des fonctions de u.

39. L'équation (52) ne paraissant pas généralement intégrable, nous nous contenterons de la considérer dans quelques cas particuliers.

1° Si $c = 0$, c'est-à-dire *si la ligne de striction est située dans un plan perpendiculaire à la directrice rectiligne*, $V = 0$; donc

$$\log\sin\gamma + \int V_1\,du = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

2° Plus généralement, si $V = -\dfrac{dc}{dw}$ se réduit à une constante h, l'équation (52) a pour intégrale

$$\log\sin\gamma + h\gamma + \int V_1\,du = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Dans ce cas, $c = -hw + h_1$; en sorte que *la ligne de striction est située sur un cône de révolution ayant pour axe la directrice.*

3° Quand le rayon vecteur w est constant, c'est-à-dire *quand la ligne de striction appartient à un cylindre de révolution autour de la directrice rectiligne*, l'équation (51) se réduit à

$$d\gamma = w\frac{du^2}{dc},$$

dont l'intégrale est

$$\gamma = w \int \frac{du^2}{dc} + \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

40. *Applications :* 1° Prenons, pour ligne de striction, la *spirale d'Archimède*, représentée par

$$w = u, \quad c = 0;$$

nous aurons $V = 0$, $V_1 = u$; puis

$$\log \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_0} + \frac{1}{2} u^2 = 0,$$

γ_0 étant la valeur de γ qui répond à $u = 0$. Pour plus de simplicité, soit $\gamma_0 = \frac{\pi}{2}$; il vient

$$\sin \gamma = e^{-\frac{1}{2} u^2}, \quad \cos \gamma = n = \sqrt{1 - e^{-u^2}}, \quad l = e^{-\frac{1}{2} u^2} \cos u, \quad m = e^{-\frac{1}{2} u^2} \sin u.$$

La génératrice est donc représentée par

$$\frac{x - u \cos u}{\cos u} = \frac{y - u \sin u}{\sin u} = \frac{z}{\sqrt{e^{u^2} - 1}}.$$

2° En supposant encore $c = 0$, adoptons, comme ligne de striction, l'ellipse déterminée par

$$w^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cos^2 u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Cette équation donne

$$dw = -\frac{1}{2} w^3 \sin u \cos u du, \quad V = 0, \quad V_1 = -\frac{2 - \cos^2 u}{\sin u \cos u} \quad . \quad (b)$$

Par suite

$$\log \sin \gamma = \int \frac{2 - \cos^2 u}{\sin u \cos u} du + \text{const},$$

ou

$$\log \sin \gamma = 2 \log \operatorname{tang} u - \log \sin u + \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

En supposant la constante nulle, on tire, de cette équation,

$$\sin \gamma = \frac{\sin u}{\cos^2 u}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

On obtient ensuite

$$n = \frac{\sqrt{\cos^4 u - \sin^2 u}}{\cos^2 u}, \quad l = \operatorname{tg} u, \quad m = \operatorname{tg}^2 u; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

d'où enfin, pour les équations de la génératrice :

$$\frac{x - w \cos u}{\cos u} = \frac{y - w \sin u}{\sin u} = \frac{z \sin u}{\sqrt{\cos^4 u - \sin^2 u}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Ici se présente une circonstance analogue à celle que nous avons rencontrée plus haut (37) : la variable u doit être comprise entre certaines limites, en sorte que la génératrice parcourt seulement une partie de l'ellipse donnée.

3° Adoptons enfin, pour ligne de striction, la *spirale conique* représentée par

$$c = w = u. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Nous aurons

$$V = -\frac{dc}{dw} = -1 \; ; \quad V_1 = w \frac{du}{dw} = u; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

donc, par la formule (54),

$$\log \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_\prime} = u - \frac{1}{2} u^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

etc.

41. Reprenons les équations du n° 32 :

$$\cos \theta = l \frac{da}{d\sigma} + m \frac{db}{d\sigma} + n \frac{dc}{d\sigma}, \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

$$d \,.\, \cos \theta = ld \,.\, \frac{da}{d\sigma} + md \,.\, \frac{db}{d\sigma} + nd \,.\, \frac{dc}{d\sigma}. \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

En supposant toujours que la ligne de striction soit donnée, et que θ soit une fonction connue, ces deux équations, jointes à

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

donneront les valeurs de l, m, n en fonction de u; en sorte que, comme on l'a vu dans les exemples précédents, les équations de la génératrice ne contiendront plus aucune inconnue, et que la surface sera complétement définie. On peut modifier un peu ce calcul, de manière à déterminer la génératrice, à chaque instant, par l'intersection de deux surfaces.

Pour cela, représentons par v, comme précédemment, la distance comprise entre le point (x, y, z) de la génératrice et le point (a, b, c) de la ligne de striction, de manière que

$$v^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2, \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

$$l = \frac{x-a}{v}, \quad m = \frac{y-b}{v}, \quad n = \frac{z-c}{v}. \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

En substituant ces valeurs dans les équations (45), (46), et en désignant par α, β, γ les angles formés, avec les trois axes, par la tangente à la ligne de striction, on trouve

$$\frac{d.\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{(x-a)\,d.\cos\alpha + (y-b)\,d.\cos\beta + (z-c)\,d.\cos\gamma}{(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma},$$

ou

$$\begin{aligned}&(x-a)\,[\cos\theta\, d.\cos\alpha - \cos\alpha d.\cos\theta]\\ &+ (y-b)\,[\cos\theta\, d.\cos\beta - \cos\beta d.\cos\theta]\\ &+ (z-c)\,[\cos\theta\, d.\cos\gamma - \cos\gamma d.\cos\theta] = 0,\end{aligned}$$

ou encore

$$(x-a)\,d.\frac{\cos\alpha}{\cos\theta} + (y-b)\,d.\frac{\cos\beta}{\cos\theta} + (z-c)\,d.\frac{\cos\gamma}{\cos\theta} = 0. \quad (56)$$

Si, à cette équation (56), on joint celle-ci :

$$\begin{aligned}&[(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma]^2\\ &= [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]\cos^2\theta, \quad \ldots\ldots \quad (57)\end{aligned}$$

qui résulte des relations (45), (a), (b), on a tout ce qui est nécessaire pour définir le mouvement de la génératrice.

L'équation (56) représente un *cône de révolution autour de la tangente à la ligne de striction*, et l'équation (56), un *plan perpendiculaire au plan osculateur de cette ligne* (*). Le plan coupe le cône suivant deux génératrices; en sorte que, pour une même forme de la fonction θ, il y a généralement deux surfaces gauches ayant la ligne de striction donnée.

42. *Remarque.* — Les calculs précédents supposent θ différent de 0 et de $\frac{\pi}{2}$. Si $\theta = 0$, la surface est développable. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, les équations de la génératrice deviennent

$$\left.\begin{aligned}&(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma = 0,\\ &(x-a)\,d\,.\frac{da}{d\sigma} + (y-b)\,d\,.\frac{db}{d\sigma} + (z-c)\,d\,.\frac{dc}{d\sigma} = 0,\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \qquad (58)$$

Dans ce cas, la génératrice est normale, en même temps, à la ligne de striction et au rayon de courbure de cette ligne : *la surface gauche est le lieu des binormales à la courbe donnée* (**).

43. PROBLÈME. — *Trouver toutes les surfaces à lignes de stric-*

(*) En effet, l'*axe du cercle osculateur* fait, avec les axes des coordonnées, des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$b'c'' - c'b'', \quad c'a'' - a'c'', \quad a'b'' - b'a'';$$

les accents désignant des dérivées relatives à u. De même, les cosinus des angles formés, avec les axes, par la perpendiculaire au plan (56), sont proportionnels à

$$\left(\frac{\frac{a'}{\sigma'}}{\cos\theta}\right)', \quad \left(\frac{\frac{b'}{\sigma'}}{\cos\theta}\right)', \quad \left(\frac{\frac{c'}{\sigma'}}{\cos\theta}\right)';$$

et il est visible que

$$(b'c''-c'b'')\left(\frac{\frac{a'}{\sigma'}}{\cos\theta}\right)' + (c'a''-a'c'')\left(\frac{\frac{b'}{\sigma'}}{\cos\theta}\right)' + (a'b''-b'a'')\left(\frac{\frac{c'}{\sigma'}}{\cos\theta}\right)' = 0.$$

(**) Voyez le Mémoire de M. Saint-Venant, déjà cité.

tion planes. — Nous avons résolu cette question dans un cas particulier (39, 1°). Pour la traiter généralement, reprenons la relation (44), en y supposant $c = 0$; nous aurons

$$dadl + dbdm = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

On satisfait à cette équation en prenant

$$\frac{dl}{db} = -\frac{dm}{da} = \varphi(u),$$

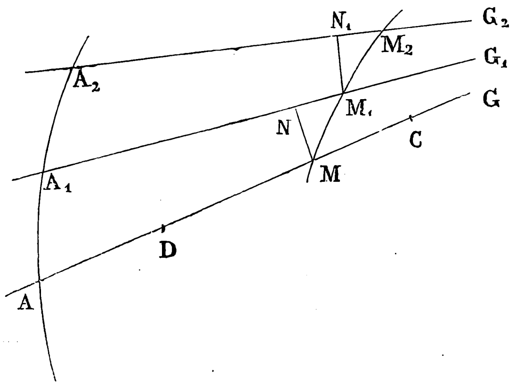
la fonction φ étant arbitraire. Par suite

$$l = \int \varphi(u)\, db, \quad m = -\int \varphi(u)\, da. \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

Ces deux formules donnent la solution cherchée.

V. — Plan asymptotique et plan central.

44. Le point M, où la ligne de striction $MM_1 MM_2$ vient couper une génératrice G, jouit de la propriété suivante, démontrée par M. Chasles :



Si, par la génératrice G, *on fait passer deux plans perpendi-*

culaires entre eux, ils touchent la surface en deux points C, D, *tels que le rectangle des distances* MC, MD *est constant* (*). Pour cette raison, on a donné au point M le nom de *point central.* En outre, M. de la Gournerie a proposé la dénomination de *plan central* pour le plan P, tangent en M (**). Ce plan, qui contient évidemment la commune perpendiculaire MN aux génératrices infiniment voisines G, G_1, est perpendiculaire au plan Q mené par la génératrice G, parallèlement à la génératrice G_1 (***). Enfin, ces deux plans sont perpendiculaires au plan R passant par la perpendiculaire MN et par la normale, en M, à la surface.

Le plan Q, *limite des plans tangents*, peut être désigné sous le nom de *plan asymptotique.* Quant au plan R, une dénomination convenable paraît assez difficile à trouver : provisoirement, nous employerons celle de *plan binormal.*

Cherchons les équations de ces trois plans.

En désignant par x, y, z les coordonnées du point central M; par X, Y, Z les coordonnées *courantes ;* et en conservant les notations employées au commencement de ce Mémoire, nous pouvons représenter ainsi la commune perpendiculaire MN :

$$\frac{X-x}{mn'-nm'}=\frac{Y-y}{nl'-ln'}=\frac{Z-z}{lm'-ml'}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Conséquemment, le *plan asymptotique* Q a pour équation

$$(mn'-nm')(X-x)+(nl'-ln')(Y-y)+(lm'-ml')(Z-z)=0. \quad (62)$$

D'un autre côté, les équations (61) peuvent être remplacées par celles-ci :

$$l(X-x)+m(Y-y)+n(Z-z)=0,$$
$$l'(X-x)+m'(Y-y)+n'(Z-z)=0,$$

lesquelles se réduisent à

$$l(X-a)+m(Y-b)+n(Z-c)=v, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$
$$l'(X-a)+m'(Y-b)+n'(Z-c)=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

(*) *Journal de Liouville*, t. II, p 415.

(**) *Traité de Géométrie descriptive*, deuxième partie, p. 143.

(***) Chasles, *Journal de Liouville*, t. II, p. 415.

en vertu des formules :

$$x = a + lv, \quad y = b + mv, \quad r = c + nv.$$

Des équations (63), (64), la première représente le *plan binormal* R; la seconde, le *plan central* P.

45. *Remarque.* — Si l'on représente les coordonnées du point N par $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, on a, tout à la fois :

$$\delta x = da + l\delta v + vdl, \quad \delta y = db + m\delta v + vdm, \quad \delta z = dc + n\delta v + vdn, \qquad (a)$$

$$l\delta x + m\delta y + n\delta z = 0, \quad dl\,\delta x + dm\,\delta y + dn\,\delta z = 0; \quad . \quad . \qquad (b)$$

d'où l'on conclut, comme dans les n^{os} 15 et 27 :

$$\delta v = -\mathrm{U}du\ (c), \quad v = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (34)$$

Il résulte, des dernières valeurs :

$$\left.\begin{aligned}
\delta x &= \frac{du}{\mathrm{C}}\left[(a' - l\mathrm{U})\,\mathrm{C} - l'\mathrm{B}\right],\\
\delta y &= \frac{du}{\mathrm{C}}\left[(b' - m\mathrm{U})\,\mathrm{C} - m'\mathrm{B}\right],\\
\delta z &= \frac{du}{\mathrm{C}}\left[(c' - n\mathrm{U})\,\mathrm{C} - n'\mathrm{B}\right].
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (d)$$

Les cosinus des angles formés par MN avec les trois axes sont proportionnels à δx, δy, δz; donc, à cause des équations (61) :

$$\frac{(a' - l\mathrm{U})\mathrm{C} - l'\mathrm{B}}{mn' - nm'} = \frac{(b' - m\mathrm{U})\,\mathrm{C} - m'\mathrm{B}}{nl' - ln'} = \frac{(c' - n\mathrm{U})\mathrm{C} - n'\mathrm{B}}{lm' - mn'}. \qquad (65)$$

De plus, chacun de ces rapports est non-seulement égal à la fraction

$$\frac{(a'^2 + b'^2 + c'^2)\mathrm{C} - (la' + mb' + nc')\,\mathrm{UC} - (l'a' + m'b' + n'c')}{(mn' - nm')\,a' + (nl' - ln')\,b' + (lm' - ml')\,c'} = \frac{\mathrm{AC} - \mathrm{CU}^2 - \mathrm{B}^2}{\mathrm{M}}; (9, 10)$$

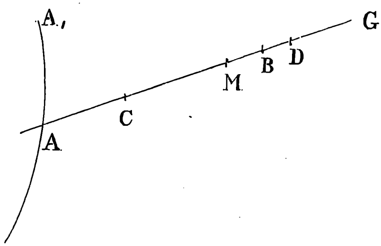
mais égal encore à la racine carrée de la fraction

$$\frac{C^2\Sigma\, a' - lU)^2 - 2BC\Sigma(a' - lU)\, l' + B^2C}{\Sigma\,(mn' - nm')^2} = AC - B^2 - CU^2.$$

Par suite,

$$M = \sqrt{AC - B^2 - CU^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

En outre, la valeur commune des trois rapports (65) est M.



46. Pour déterminer la valeur constante de MC . MD (44), il suffit évidemment de trouver la position du point B, *conjugué* du point A où la génératrice G coupe la directrice AA_1. Or, les normales en ces deux points font, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels aux quantités

$$ny' - mz', \quad lz' - nx', \quad mx' - ly',$$
$$nb' - mc', \quad lc' - na', \quad ma' - lb'.$$

Ces normales seront perpendiculaires si l'on a

$$(ny' - mz')\,(nb' - mc') + (lz' - nx')\,(lc' - na') + (mx' - ly')\,(ma' - lb') = 0,$$

ou

$$\Sigma[m(ma' - lb') - n(lc' - na')]\,x' = 0,$$

ou encore

$$(a' - lU)\,x' + (b' - mU)\,y' + (c' - nU)\,z' = 0,$$

ou enfin, à cause des valeurs de x', y', z' (21) ;

$$A - U^2 + Bv = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

On déduit, de cette équation,

$$v = \overline{AB} = \frac{U^2 - A}{B}.$$

D'ailleurs,

$$\overline{AM} = -\frac{B}{C}; \quad \dots\dots\dots\dots \quad (b)$$

donc

$$\overline{MB} = \frac{B^2 - AC + CU^2}{BC},$$

ou (24)

$$\overline{MB} = -\frac{M^2}{BC}. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (c)$$

En faisant le produit de $\overline{MA}$ par $\overline{MB}$, on obtient la relation cherchée :

$$\overline{MC} \,.\, \overline{MD} = \frac{M^2}{C^2}. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (66)$$

47. Afin de simplifier encore cette relation, reprenons les formules relatives à la courbure :

$$k = -\frac{M^2}{D^4}, \quad \dots \quad (21), \quad D^2 = A + 2Bv + Cv^2 - U^2. \quad \dots \quad (18)$$

Pour le *point central* M, $v = -\frac{B}{C}$; donc $D^2 = \frac{AC - B^2 - CU^2}{C} = \frac{M^2}{C}$. Autrement dit, *en tous les points de la ligne de striction, la valeur de la courbure est*

$$K = -\frac{C^2}{M^2}. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (67)$$

Conséquemment, si R_1, R_2 *sont les rayons de courbure principaux au point central*,

$$\overline{MC} \,.\, \overline{MD} = R_1 R_2. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (68)$$

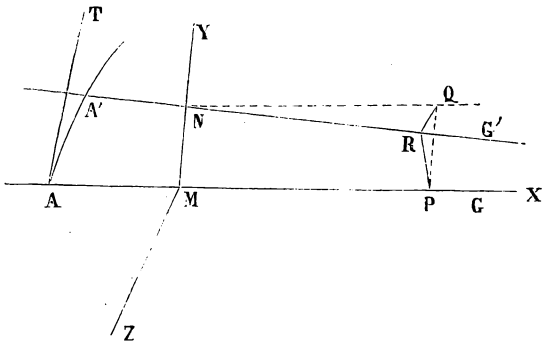
Ce curieux théorème est dû, je crois, à M. Lamarle (*).

48. *Remarque.* — Les distances conjuguées MC, MD peuvent être regardées comme les coordonnées des points d'une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes, et dont la *puissance*

(*) *Théorie géométrique des centres et axes instantanés de rotation*, p. 67.

serait R_1 R_2. Les points conjugués qui répondent au sommet de l'hyperbole sont situés à une distance du point central, moyenne proportionnelle entre R_1 et R_2. On sait qu'en ces points les plans tangents sont inclinés à 45° sur le plan central; etc. (*)

49. L'hyperbole dont on vient de parler peut être obtenue en coupant, par un plan parallèle au plan central NMG, le paraboloïde qui *raccorde* la surface suivant la génératrice MG, et dont les plans directeurs sont le plan binormal et le plan asymptotique : on sait que ce paraboloïde *droit* a pour sommet le point central.



Considérons, en effet, la génératrice A'G' infiniment voisine de AMG, et supposons que la droite PR, perpendiculaire à MG, rencontre constamment MG et M'G'; menons NQ parallèle à MG, PQ parallèle à la plus courte distance MN, et joignons le point Q au point R.

Si nous rapportons le paraboloïde aux trois axes MX, MY, MZ, les équations de la génératrice PR seront

$$x = \overline{MP},\ \frac{z}{y} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{MN}} \operatorname{tg} QNR. \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

(*) *Voyez*, sur ce sujet, les Mémoires de MM. Chasles, Bour et Lamarle, déjà cités.

Mais, par les formules (7) et suivantes :

$$\operatorname{tg} \text{QNR} = \operatorname{tg} \eta = \sqrt{\text{C}}du, \quad \overline{\text{MN}} = \delta = \frac{\text{M}}{\sqrt{\text{C}}} du ;$$

donc les équations (a) deviennent

$$x = \overline{\text{MP}}, \quad \frac{z}{y} = \overline{\text{MP}} \frac{\text{C}}{\text{M}} ; \quad \ldots \ldots \quad (b)$$

d'où l'on conclut l'équation du paraboloïde :

$$z = \frac{\text{C}}{\text{M}} xy. \quad \ldots \ldots \quad (69)$$

Si, dans cette équation, on suppose $z = \frac{\text{M}}{\text{C}}$, on obtient

$$xy = \frac{\text{M}^2}{\text{C}^2}. \quad \ldots \ldots \quad (70)$$

Ainsi, *les distances conjuguées* MC, MD *sont les coordonnées des points de l'hyperbole équilatère suivant laquelle le paraboloïde de raccordement est coupé par un plan parallèle au plan central, et situé à une distance de celui-ci égale à la moyenne proportionnelle entre les rayons principaux.* Cette hyperbole, qui a ses asymptotes parallèles à MX, MY, se projette en vraie grandeur sur le plan central ; etc.

50. *Remarque.* — On tire, de l'équation (69) :

$$p = \frac{\text{C}}{\text{M}} y, \quad q = \frac{\text{C}}{\text{M}} x, \quad r = o, \quad s = \frac{\text{C}}{\text{M}}, \ t = 0 ;$$

donc *la courbure au sommet du paraboloïde est donnée par la formule*

$$k = -\frac{\text{C}^2}{\text{M}^2} = \text{K} ;$$

d'après l'équation (67). Ainsi, *la surface gauche et le paraboloïde droit de raccordement ont même courbure au point central.*

51. *Détermination de l'indice.* — Dans la figure précédente, appelons φ l'angle RPQ, c'est-à-dire l'inclinaison du plan tangent en P sur le plan central. Nous aurons

$$\overline{RQ} = \overline{PQ}\,\mathrm{tg}\,\varphi = \overline{NQ}\,\mathrm{tg}\,\eta;$$

d'où, à cause de $i = \lim \frac{\delta}{\eta}$ (11) :

$$i = \overline{MP}\cot\varphi. \qquad (71)$$

Si l'angle $\varphi = 45°$, $\overline{MP} = i$: *l'indice est égal à la distance comprise entre le point central et le point de contact du plan incliné à 45° sur le plan central.*

52. *Remarque.* — D'après la formule

$$i = \frac{M}{C}, \qquad (20)$$

si la fonction M s'annule pour une certaine génératrice, la surface gauche présente, le long de cette droite, un *élément développable.* Cette circonstance singulière donne lieu à une discussion que l'on peut lire dans le beau Mémoire de Bour, déjà cité (*).

VI. — Ligne de striction. — Recherches nouvelles.

53. *Équation caractéristique.* — Si, au lieu de se donner les équations de la génératrice rectiligne, on prend l'équation de la surface gauche, sous la forme

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (72)$$

on peut se proposer d'en conclure une *définition analytique* de la ligne de striction. Pour atteindre ce but, j'observe d'abord que

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 39e cahier, p. 36.

la direction de la génératrice rectiligne G, en un point (x, y, x), est déterminée par l'équation

$$l^2r + 2lms + m^2t = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

ou plutôt par celle-ci :

$$t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\frac{dy}{dx} + r = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

que l'on déduit de la première en y remplaçant $\frac{m}{l}$ par $\frac{dy}{dx}$.

D'un autre côté, la comparaison des formules

$$k = -\frac{M^2}{D^4}\ (21), \quad D^2 = A + 2Bv + Cv^2 - U^2\ (17), \quad v = -\frac{B}{C}\ (34);$$

prouve que *le point central de la génératrice* G *est celui pour lequel la courbure* k *atteint son maximum* (*). Conséquemment, les coordonnées du point central doivent satisfaire à la condition

$$\frac{dk}{dx} + \frac{dk}{dy}\frac{dy}{dx} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

d'où l'on conclut, en éliminant $\frac{dy}{dx}$,

$$t\left(\frac{dk}{dx}\right)^2 - 2s\frac{dk}{dx}\cdot\frac{dk}{dy} + r\left(\frac{dk}{dy}\right)^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Telle est l'équation qui, jointe à l'équation de la surface, définit complétement la ligne de striction.

54. *Application à l'hyperboloïde.* — L'équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

(*) Bour, *Journal de l'École polytechnique*, 39e cahier, p. 36. On ne doit pas oublier que *la valeur de* M *est indépendante de v.*

donne (*) :

$$p = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\frac{x}{z}, \quad q = \frac{\gamma^2}{\beta^2}\frac{y}{z},$$

$$r = \frac{\gamma^4}{\alpha^2\beta^2 z^3}(y^2 - \beta^2), \quad s = -\frac{\gamma^4}{\alpha^2\beta^2 z^3}xy, \quad t = \frac{\gamma^4}{\alpha^2\beta^2 z^3}(x^2 - \alpha^2); \qquad (b)$$

puis

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{\gamma^4}{z^2}\left(\frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} + \frac{z^2}{\gamma^4}\right), \quad rt - s^2 = -\frac{\gamma^4}{\alpha^2\beta^2 z^4}. \quad . \qquad (c)$$

On conclut, de ces valeurs,

$$k = -\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} + \frac{z^2}{\gamma^4}\right)^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (d)$$

Les dérivées partielles, $\frac{dk}{dx}, \frac{dk}{dy}$ sont proportionnelles à

$$\frac{x}{\alpha^4} + \frac{z}{\gamma^4}p, \quad \frac{y}{\beta^4} + \frac{z}{\gamma^4}q;$$

ou, à cause des valeurs de p et de q, proportionnelles aux quantités

$$\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\alpha^4}x, \quad \frac{\gamma^2 + \beta^2}{\beta^4}y.$$

Conséquemment, l'équation (75) de la ligne de striction devient

$$\left.\begin{array}{c}\frac{(\gamma^2+\alpha^2)^2}{\alpha^8}(x^2-\alpha^2)x^2 + 2\frac{(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma^2+\beta^2)}{\alpha^4\beta^4}x^2y^2 + \frac{(\gamma^2+\beta^2)^2}{\beta^8}(y^2-\beta^2)y^2 \\ = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} (76)$$

Celle-ci ne diffère pas de l'équation (41).

55. *Lignes de courbure constante.* — La méthode précédente peut être simplifiée de manière qu'il en résulte une propriété

(*) Charles Dupin, *Développements de Géométrie*, p. 203.

caractéristique de la ligne de striction. Pour le faire voir, j'observe d'abord que, dans le cas d'une *surface quelconque, à courbures opposées,* l'équation

$$t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\,\frac{dy}{dx} + r = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (73)$$

appartient aux *lignes asymptotiques,* c'est-à-dire aux lignes tangentes, en chaque point, aux asymptotes de l'*indicatrice*, ou aux génératrices rectilignes de l'hyperboloïde osculateur (*).

En second lieu, l'équation

$$\frac{dk}{dx} + \frac{dk}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (74)$$

dans laquelle k est une fonction connue, est la dérivée de

$$k = \text{const}:$$

elle appartient donc à une série de courbes telles, qu'en tous les points de chacune d'elles, la courbure de la surface a une valeur donnée, constante pour chaque ligne. Pour abréger, nous dirons que ces courbes remarquables sont des *lignes de courbure constante* (**).

Enfin, comme l'équation (75) a été obtenue en exprimant que les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, tirées des équations (73) et (74), sont égales entre elles, il s'ensuit que :

La ligne de striction est le lieu des points de contact des lignes asymptotiques avec les lignes de courbure constante (***).

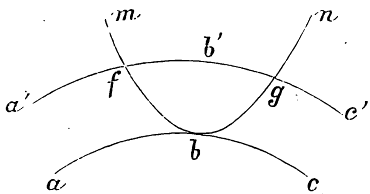
56. *Remarques.* — I. Ce théorème, qui caractérise géométriquement, et de la manière la plus simple, les lignes de striction

(*) *Développements de Géométrie*, p. 190.

(**) Il est bien entendu que le mot *courbure* se rapporte à la surface, et non à la ligne considérée. De plus, la courbure est toujours définie, d'après Gauss, par $k = \frac{1}{R_1 R_2}$.

(***) *Société Philomathique ;* juillet 1863.

des surfaces gauches, permet d'étendre la notion de ces lignes aux surfaces non réglées, mais à courbures opposées. A ce point de vue, l'énoncé précédent devient une *définition.*



II. Soient abc, $a'b'c'$ deux lignes de courbure constante: elles ne se rencontrent pas, sans quoi, au point d'intersection, la courbure de la surface aurait deux valeurs différentes. Soit mbn la ligne asymptotique qui touche abc en b. La courbure en b est moindre (ou plus grande) qu'aux points f, g; donc *le point de la ligne de striction, situé sur une ligne asymptotique donnée, est le point de cette dernière ligne pour lequel la courbure* k *atteint son maximum ou son minimum* (*), absolument comme si la surface était réglée (53).

57. *Application à l'hyperboloïde.* — D'après la formule (d) de l'article 54, l'équation des lignes de courbure constante est

$$\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}+\frac{z^2}{\gamma^4}=\frac{1}{\Delta^2}, \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Δ étant une constante. D'ailleurs les lignes asymptotiques, c'est-à-dire les génératrices, sont représentées par

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{z}{\gamma}\cos u+\sin u,\quad \frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\sin u-\cos u. \quad \ldots \quad (b)$$

L'élimination de x et de y, entre ces trois équations, conduit à

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{\cos^2 u}{\alpha^2}+\dfrac{\sin^2 u}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}\right)z^2+2\gamma\sin u\cos u\left(\dfrac{1}{\alpha^2}-\dfrac{1}{\beta^2}\right)z+\gamma^2\left(\dfrac{\sin^2 u}{\alpha^2}+\dfrac{\cos^2 u}{\beta^2}-\dfrac{1}{\Delta^2}\right)\\ \qquad = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}(c)$$

(*) *Société Philomathique;* juillet 1865.

La condition du contact entre les deux lignes donne ensuite

$$z = \frac{\gamma^3(\alpha^2 - \beta^2)\sin u \cos u}{\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 \sin^2 u + \beta^2 \cos^2 u)\gamma^2}; \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

puis

$$x = \frac{\alpha^3(\beta^2 + \gamma^2)\sin u}{\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 \sin^2 u + \beta^2 \cos^2 u)\gamma^2}, \quad y = \frac{-\beta^3(\alpha^2 + \gamma^2)\cos u}{\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 \sin^2 u + \beta^2 \cos^2 u)\gamma^2}. \quad (e)$$

Ces valeurs sont précisément celles que nous avons trouvées précédemment (28); par conséquent, l'élimination de u conduirait aux équations (40) et (41) de la ligne de striction.

58. *Remarques.* — Le paramètre Δ, qui figure dans l'équation (a) des lignes de courbure constante, représente la distance du centre de l'hyperboloïde au plan tangent. Conséquemment :

1° *Sur l'ellipsoïde et sur les deux hyperboloïdes, les lignes de courbure constante coïncident avec le lieu des points de contact des plans tangents dont la distance au centre est constante ;*

2° *Si un plan roule de manière à toucher constamment une sphère et une surface du second ordre, concentriques, le lieu des points de contact avec la surface est une ligne de courbure constante ;*

3° *Dans le cas où la surface est un hyperboloïde gauche, chaque ligne de courbure constante touche une certaine génératrice* (*) : le point de contact appartient à la ligne de striction.

59. *Application au paraboloïde hyperbolique.* — Cette surface étant représentée par

$$2z = \frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

on a :

$$p = \frac{x}{\alpha}, \quad q = -\frac{y}{\beta}, \quad r = \frac{1}{\alpha}, \quad s = 0, \quad t = -\frac{1}{\beta};$$

(*) *Société Philomathique;* juillet 1863. — Plus exactement, chaque ligne de courbure constante touche deux génératrices : l'une appartient au premier système, l'autre au second.

puis

$$k = -\frac{1}{\alpha\beta\left(1+\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)^2} \quad \ldots \ldots \quad (b)$$

1° Les *lignes de courbure constante* ont pour équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=h^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

Elles se projettent, sur le plan tangent au sommet du paraboloïde, suivant des ellipses homothétiques, dont les axes sont situés dans les plans principaux.

2° Les *lignes asymptotiques*, c'est-à-dire les génératrices, sont déterminées par l'équation

$$\frac{1}{\beta}dy^2 - \frac{1}{\alpha}dx^2 = 0,$$

qui donne

$$\frac{y}{\sqrt{\beta}}+\frac{x}{\sqrt{\alpha}}=\text{const.}, \quad \frac{y}{\sqrt{\beta}}-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}=\text{const.} \quad \ldots \quad (d)$$

3° En exprimant que les ellipses (c) sont tangentes aux droites (d), on trouve l'équation

$$\frac{x}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{y}{\beta^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (e)$$

qui appartient aux deux *lignes de striction* du paraboloïde. Elle ne diffère, que par la notation, de l'équation donnée à l'article 29.

60. *Application aux surfaces conoïdes.* — Considérons, en général, le conoïde représenté par

$$\frac{y}{x} = f(z). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (75)$$

On tire, de cette équation :

$$p = -\frac{y}{x^2 f'}, \quad q = \frac{1}{xf'}; \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

$$r = \frac{y(2xf'^2 - yf'')}{x^4 f'^3}, \quad s = \frac{yf'' - xf'^2}{x^3 f'^3}, \quad t = -\frac{f''}{x^2 f'^3}; \quad \ldots \quad (b)$$

$$rt - s^2 = -\frac{1}{x^4 f'^2}, \quad 1 + p^2 + q^2 = \frac{x^4 f'^2 + x^2 + y^2}{x^4 f'^2}; \quad \ldots \quad (c)$$

$$k = -\frac{x^4 f'^2}{[x^4 f'^2 + x^2 + y^2]^2}. \quad \ldots \ldots \quad (d)$$

1° L'équation différentielle des *lignes asymptotiques* est

$$y(2xf'^2 - yf'')\,dx^2 + 2x(yf'' - xf'^2)\,dx\,dy - x^2 f''.dy^2 = 0. \qquad (e)$$

On peut l'écrire ainsi :

$$2xf'^2(ydx - xdy)dx - f''(ydx - xdy)^2 = 0;$$

et alors on voit qu'elle se décompose en

$$ydx - xdy = 0 \quad \ldots \quad (f), \quad 2xf'^2 - f''(ydx - xdy) = 0. \quad \ldots \quad (g)$$

L'intégrale de l'équation (f) est $\frac{y}{x} =$ const., ou $z =$ const. Les lignes asymptotiques du premier système sont donc, ainsi qu'on s'y attendait, les génératrices rectilignes.

Quant à l'équation (g), il est visible qu'elle équivaut à celle-ci :

$$2f'\frac{dx}{x} + f''\,dz = 0,$$

dont l'intégrale est

$$x^2 f'(z) = h, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (76)$$

h étant une constante. Les lignes asymptotiques du second système sont donc représentées par l'ensemble des équations (75) et (76).

2° D'après la formule (d), la courbure de la surface, en un point quelconque d'une de ces lignes asymptotiques, a pour valeur :

$$k = -\frac{h^2}{(h^2 + x^2 + y^2)^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

ou, d'après l'équation (75) :

$$k = -\frac{h^2}{[h^2 + (1 + f^2)x^2]^2};$$

ou enfin

$$k = -\frac{1}{\left[h + \frac{1+f^2}{f'}\right]^2} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Le maximum de k est déterminé par l'équation

$$2ff'^2 - (1 + f^2)f'' = 0,$$

laquelle donne pour z des valeurs particulières, *indépendantes de h*. Par conséquent, *la seconde ligne de striction du conoïde se compose d'une ou de plusieurs génératrices rectilignes* (*).

3° Ce n'est pas tout. Soit

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} w = f(z).$$

On a

$$f'(z)\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\cos^2 w};$$

donc

$$\frac{1 + f^2}{f'} = \frac{dz}{dw}.$$

Par conséquent, si l'on considère le cylindre représenté par $x^2 + y^2 = 1$, puis la transformée de la courbe suivant laquelle il coupe le conoïde, la courbure de la surface, en tous les points de la même ligne asymptotique, a pour valeur

$$k = -\frac{1}{\left(h + \frac{dz}{dw}\right)^2}.$$

Le maximum de k répond au minimum de $\frac{dz}{dw}$, c'est-à-dire au *point d'inflexion de la transformée*. Conséquemment : *Si l'on*

(*) La première ligne de striction est évidemment la *directrice rectiligne*.

coupe un conoïde droit par un cylindre de révolution ayant pour axe la directrice rectiligne du conoïde, puis que l'on construise le développement du cylindre et la tranformée de la courbe d'intersection des deux surfaces; les points d'inflexion de cette transformée correspondent aux génératrices du conoïde, lignes de striction de cette surface.

4° On peut encore interpréter autrement les résultats qui précèdent. Si l'on suppose $x^2 + y^2 = R^2$, on a, par la formule (4) :

$$k = -\frac{h^2}{(h^2 + R^2)^2}.$$

Le maximum de k répond au minimum de R : *le point de la ligne de striction, situé sur une ligne asymptotique donnée, est le point de cette dernière ligne le plus voisin de la directrice rectiligne du conoïde.* Par conséquent, *la projection de la ligne de striction, sur le plan des xy, est le lieu des pieds des normales abaissées, de l'origine, sur les projections des lignes asymptotiques* (*). D'après ce que l'on a vu tout à l'heure (2°), ce lieu se compose d'une ou de plusieurs droites passant par l'origine. Donc enfin, *les lignes asymptotiques d'un conoïde coupent orthogonalement une ou plusieurs génératrices rectilignes, composant la seconde ligne de striction de la surface.*

61. *Autre application.* — Pour dernier exemple, je prendrai l'équation

$$5z = x^5 y^5. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (a)$$

1° Il en résulte :

$$p = x^4 y^5, \quad q = x^5 y^4,$$
$$r = 4x^3 y^5, \quad s = 5x^4 y^4, \quad t = 4x^5 y^3, \quad rt - s^2 = -9x^8 y^8;$$

puis, pour l'équation des lignes asymptotiques,

$$2x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 5xy \left(\frac{dy}{dx}\right) + 2y^2 = 0. \qquad \ldots\ldots \qquad (b)$$

(*) Cette proposition est générale : la première, au contraire, est soumise à quelques restrictions évidentes.

Celle-ci se décompose en

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x};$$

équations dont les intégrales sont

$$xy^2 = h, \quad x^2y = h_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Les lignes asymptotiques se projettent donc, sur le plan des xy, suivant des courbes hyperboliques, égales deux à deux, et dont les asymptotes sont les axes des x et des y.

2° La formule générale

$$k = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

devient, à cause des valeurs ci-dessus,

$$k = -9\frac{x^8 y^8}{[1 + (x^2 + y^2)x^8 y^8]^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

En combinant cette relation (d) avec l'équation de la surface, on reconnaît aisément que *les lignes de courbure constante sont situées sur des surfaces de révolution autour de l'axe de z.*

3° Les dérivées partielles $\frac{dk}{dx}, \frac{dk}{dy}$ sont proportionnelles aux quantités

$$2y - 3x^{10}y^9 - 2x^8 y^{11}, \quad 2x - 3x^9 y^{10} - 2x^{11} y^8,$$

dont le rapport est

$$\frac{y(2 - 3x^{10} y^8 - 2x^8 y^{10})}{x(2 - 3x^8 y^{10} - 2x^{10} y^8)}.$$

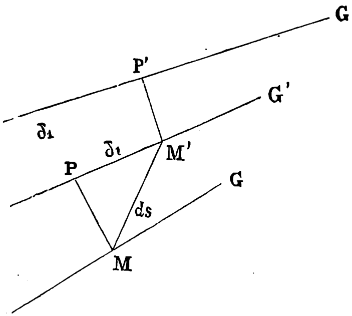
Pour obtenir les équations des *deux lignes de striction*, il suffit (55) d'égaler ce rapport à l'une ou à l'autre des racines de l'équation (b), prises en signe contraire. Il vient ainsi

$$4x^{10} y^8 + x^8 y^{10} = 2, \quad 4x^8 y^{10} + x^{10} y^8 = 2. \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

D'après ces équations, chacune des lignes de striction se projette, sur le plan des xy, suivant une courbe ayant l'aspect du système de deux hyperboles égales, dont les asymptotes sont les axes coordonnés.

VII. — Élément de la ligne de striction.

62. Soient G, G′, G″ trois génératrices consécutives d'une surface gauche. Soient MP la plus courte distance des deux premières droites, et M′P′ la plus courte distance des deux dernières : *l'élément* MM′ *de la ligne de striction* (27) *est l'hypothénuse d'un triangle ayant, pour côtés de l'angle droit, la plus courte distance* MP *des génératrices* G, G′ *et la plus courte distance* PM′ *des plus courtes distances* MP M′P (*).



Si l'on représente par δ et δ_1 ces deux côtés, on aura donc

$$ds^2 = \delta^2 + \delta_1{}^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

D'après les formules (9) et (10),

$$\delta = \frac{(mn' - nm')\,a' + (nl' - ln')\,b' + (lm' - ml')\,c'}{\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}\,du \quad \ldots \quad (b)$$

De même, en supposant que les équations de MP soient

$$\frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - b_1}{m_1} = \frac{z - c_1}{n_1},$$

(*) On lit, dans le grand Traité de Lacroix (t. III, p. 668) : « L'expression de la plus courte distance des droites consécutives ..... *qui est évidemment celle de la différentielle de l'arc de la ligne de striction.* » Cette proposition, au lieu d'être *évidente*, est inexacte. Il en est de même, par conséquent, pour la valeur de ds qui résulterait des formules données par Lacroix.

on aurait

$$\delta_1 = \frac{(m_1 n'_1 - n_1 m'_1) a_1 + (n_1 l'_1 - l_1 n'_1) b_1 + (l_1 m'_1 - m_1 l'_1) c_1}{\sqrt{l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2}} du \text{ (*)}. \quad (c)$$

On peut supposer que a_1, b_1, c_1 soient les coordonnées du point central M. Quant aux cosinus l_1, m_1, n_1, ils ont pour valeurs (6) :

$$l_1 = \frac{mn' - nm'}{\sqrt{C}}, \quad m_1 = \frac{nm' - mn'}{\sqrt{C}}, \quad n_1 = \frac{lm' - ml'}{\sqrt{C}}.$$

Il faudrait donc, après avoir effectué les calculs que supposent les formules (b), (c), substituer les valeurs de δ et de δ_1 dans la relation (a) : le résultat, si l'on y pouvait arriver, serait d'une complication excessive. Il vaut beaucoup mieux recourir aux équations (2), et employer ensuite la formule générale

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

63. En effet,

$$dx = (a' + vl')\,du + l\,dv,$$
$$dy = (b' + vm')\,du + m\,dv,$$
$$dz = (c' + vn')\,du + n\,dv;$$

donc, à cause de $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ et des formules (17) et (32) :

$$ds^2 = (A + 2Bv + Cv^2)\,du^2 + 2\,U\,du\,dv + dv^2. \quad . \quad . \quad (78)$$

Telle est la formule qui donne l'élément d'une courbe quelconque tracée sur la surface gauche (**). Si cette courbe est la ligne de striction,

$$v = -\frac{B}{C}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

donc

$$ds^2 = \left(A - \frac{B^2}{C}\right) du^2 + 2\,U\,du\,dv + dv^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

(*) Les accents désignent toujours des dérivées relatives au paramètre u.

(**) Elle ne diffère pas de la formule de Gauss :

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

64. *Remarques.* — I. Si la directrice est une trajectoire orthogonale, U = 0; donc

$$ds^2 = \left(A - \frac{B^2}{C}\right) du^2 + dv^2; \quad \ldots\ldots \quad (80)$$

ou, si l'on veut,

$$ds = \frac{du}{C^2} \sqrt{(AC - B^2)\,C^3 + (BC' - CB')^2}. \quad \ldots\ldots \quad (81)$$

II. D'après les formules

$$M = (mn' - nm')\,a' + (nl' - ln')\,b' + (lm' - ml')\,c', \quad \ldots \quad (13)$$

$$M^2 = AC - B^2 - CU^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

la valeur de δ (62) se réduit à

$$\delta = \sqrt{A - \frac{B^2}{C} - U^2}\, du. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

Mais

$$\delta^2 + \delta_1^2 = \left(A - \frac{B^2}{C}\right) du^2 + 2\,U du dv + dv^2;$$

donc

$$\delta_1 = U du + dv. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

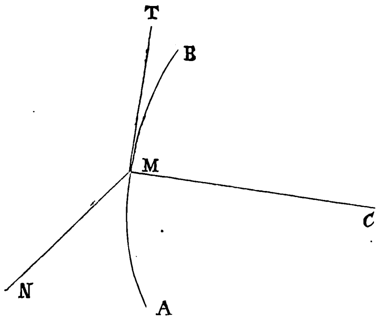
Il est facile de vérifier géométriquement cette expression très-simple de *la plus courte distance entre deux plus courtes distances.*

VIII. — Sur les lignes a double courbure.

65. Avant d'aller plus loin, et afin de pouvoir retrouver quelques propriétés de *la surface dont les génératrices sont les normales principales de deux courbes*, propriétés déjà démontrées par MM. Bertrand et Paul Serret (*), nous placerons ici un certain nombre de formules et de relations, la plupart peu connues,

(*) Bertrand, *Journal de Liouville*, t. XV; P. Serret, *Théorie nouvelle des lignes à double courbure*, pp. 109 et suiv.

relatives à la théorie des courbes à double courbure. Dans ces formules (*) l'arc s sera pris pour variable indépendante.



66. Soient donc x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M appartenant à la courbe AMB; MT la tangente; MC $=\rho$ le rayon de courbure, ou la *normale principale;* MN la perpendiculaire aux deux premières droites, ou la *binormale.* Soient encore α, β, γ; λ, μ, ν; a, b, c les angles formés, avec les axes, par ces diverses droites (**). On a d'abord :

$$x'^2+y'^2+z'^2=1, \qquad x'x''+y'y''+z'z''=0; \quad . \quad . \quad (84)$$

$$\cos\alpha = x', \quad \cos\beta = y', \quad \cos\gamma = z'; \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

$$\cos\lambda = \rho x'', \quad \cos\mu = \rho y'', \quad \cos\nu = \rho z''; \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

$$\rho^2 = \frac{1}{x''^2+y''^2+z''^2}, \quad x''x'''+y''y'''+z''z''' = -\frac{\rho'}{\rho^3}; \quad . \quad (87)$$

$$\cos a = \rho X, \quad \cos b = \rho Y, \quad \cos c = \rho Z : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

celles-ci supposent

$$X = y'z''-z'y'', \quad Y = z'x''-x'z'', \quad Z = x'y''-y'x''; \quad . \quad (89)$$

et, conséquemment,

$$X^2+Y^2+Z^2 = \frac{1}{\rho^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

(*) Elles sont, presque toutes, tirées d'un Mémoire de M. Saint-Venant, inséré au 30e cahier du *Journal de l'École polytechnique.* La publication de ce Mémoire a été, ce me semble, un véritable service rendu aux géomètres et aux calculateurs.

(**) Les relations rappelées ou démontrées dans ce chapitre formant, pour ainsi dire, une partie incidente de mon travail, j'ai cru pouvoir, sans inconvénient, employer des notations qui, dans les autres chapitres, ont une signification différente de celle que je leur attribue maintenant.

67. *Le rayon de torsion* est donné par l'une ou l'autre des deux formules (*) :

$$\frac{1}{r} = \rho^2 (Xx''' + Yy''' + Zz'''), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

$$\frac{1}{r^2} = [(\cos a)']^2 + [(\cos b)']^2 + [(\cos c)']^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

Pour développer celle-ci, remplaçons les trois cosinus par leurs valeurs (88); nous aurons d'abord

$$\frac{1}{r^2} = \rho^2 \Sigma X'^2 + 2\rho\rho' \Sigma XX' + \frac{\rho'^2}{\rho^2};$$

puis, en observant que l'équation (90) donne

$$\Sigma XX' = -\frac{\rho'}{\rho^3}: \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

$$\frac{1}{r^2} = \rho^2 \Sigma X'^2 - \frac{\rho'^2}{\rho^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

68. La fonction représentée par $\Sigma X'^2$ est

$$(y'z''' - z'y''')^2 + (z'x''' - x'z''')^2 + (x'y''' - y'x''')^2$$
$$= \Sigma(y'^2 + z'^2)x'''^2 - 2\Sigma x'x'''y'y''' = \Sigma x'''^2 - (x'x''' + y'y''' + z'z''')^2.$$

Mais, à cause des relations (84), (87) :

$$x'x''' + y'y''' + z'z''' = -\frac{1}{\rho^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

donc

$$\Sigma X'^2 = \Sigma x'''^2 - \frac{1}{\rho^4}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

et

$$\frac{1}{r^2} = \rho^2 \Sigma x'''^2 - \frac{1}{\rho^2} - \frac{\rho'^2}{\rho^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

(*) La première est démontrée à la page 12 du Mémoire de M. Saint-Venant; l'autre est tirée du *Cours d'analyse* de Sturm.

ou plutôt

$$\Sigma x'''^2 = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{\rho'^2}{\rho^4}, \qquad \ldots\ldots \quad (98)$$

et

$$\Sigma(y'z''' - z'y''')^2 = \frac{1}{r^2\rho^2} + \frac{\rho'^2}{\rho^4}. \qquad \ldots\ldots \quad (99)$$

69. *Remarque.* — Si, dans la dernière relation, on remplace r, ρ et ρ' par leurs valeurs tirées des formules (91) et (87), on arrive à l'*identité*

$$[\Sigma(y'z'' - z'y'')x''']^2 = [\Sigma x''^2][\Sigma x'''^2] - [\Sigma x''^2]^3 - [\Sigma x''x''']^2, \quad (100)$$

laquelle suppose seulement

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \; (*).$$

70. Introduisons les nouvelles notations

$$X_1 = y''z''' - z''y''', \quad Y_1 = z''x''' - x''z''', \quad Z_1 = x''y''' - y''x''', \quad (101)$$
$$T = x'y''z''' - x'z''y''' + z'x''y''' - y'x''z''' + y'z''x''' - z'y''x''' : \quad (102)$$

nous aurons

$$T = \Sigma Xx''' = \Sigma X_1 x' = \frac{1}{r\rho^2}. \qquad \ldots\ldots \quad (103)$$

De plus, il est visible que

$$\Sigma X_1 x'' = 0, \quad \Sigma X_1 x''' = 0; \qquad \ldots\ldots \quad (104)$$

(*) De là résulte que si, sur une sphère de rayon 1, on trace une courbe quelconque, on a, entre les coordonnées x, y, z de tout point de cette ligne, la relation

$$[\Sigma(yz' - zy')x'']^2 = [\Sigma x'^2][\Sigma x''^2] - [\Sigma x'^2]^3 - [\Sigma x'x'']^2,$$

dans laquelle les accents désignent des dérivées relatives à une variable indépendante u. Du reste, cette équation n'apprend rien de nouveau; car elle exprime que le rayon de courbure de la ligne considérée est égal au rayon du petit cercle situé dans le plan osculateur de cette même ligne.

et l'on trouve aisément, en ayant égard aux relations (87),

$$\Sigma X_1^2 = \frac{1}{\rho^4}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right) \cdot \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (105)$$

Ce n'est pas tout : à cause de

$$XX_1 = (y'z'' - z'y'')(y''z''' - z''y''') = y'y''z''z''' + z'z''y''y''' - y''^2 z'z''' - z''^2 y'y''',$$

on a

$$\Sigma XX_1 = \Sigma x'x''(y''y''' + z''z''') - \Sigma x''^2(y'y''' + z'z''');$$

ou, par les équations (84), (87) :

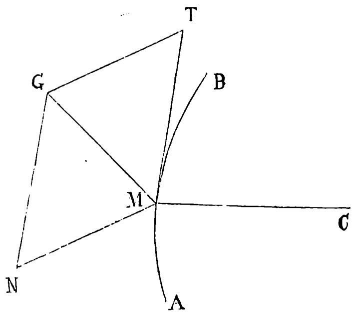
$$\Sigma XX_1 = \frac{1}{\rho^4} \cdot \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (106)$$

71. Les équations (103), (105), (106) doivent donner les valeurs de X_1, Y_1, Z_1, en fonctions des quantités X, Y, Z, x', y', z', ρ et r. Au lieu de résoudre ces équations, ce qui serait assez laborieux, nous allons recourir à des considérations géométriques.

Premièrement, les équations (104), qui équivalent à

$$\Sigma X_1 \cos\lambda = 0, \quad \Sigma X_1 (\cos\lambda)' = 0,$$

prouvent que *les quantités* X_1, Y_1, Z_1, *sont proportionnelles aux cosinus des angles formés, avec les trois axes, par une* certaine *droite* MG, *perpendiculaire au rayon de courbure* MC *et au rayon de courbure infiniment voisin :* cette droite MG est la *rectifiante* de Lancret. Soient donc a_1, b_1, c_1 ces angles; nous aurons, par la formule (105) :



$$\frac{X_1}{\cos a_1} = \frac{Y_1}{\cos b_1} = \frac{Z_1}{\cos c_1} = \frac{1}{\rho^2 L}; \quad . \; . \; . \; . \quad (107)$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{1}{L^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

En second lieu, la rectifiante MG, située dans le plan de la tangente MT et de la binormale MN, fait, avec ces droites, des angles déterminés par les formules :

$$\cos GMT = \rho^2 L \Sigma X_1 x', \quad \cos GMN = \rho^3 L \Sigma X_1 X,$$

lesquelles se réduisent à

$$\cos GMT = \frac{L}{r}, \quad \cos GMN = \frac{L}{\rho}, \quad \ldots\ldots \quad (109)$$

en vertu des relations (103), (106).

Prenons enfin, sur la rectifiante, $MG = \frac{\rho^2}{L}$, et achevons le rectangle MTGN; il en résulte

$$MT = \frac{\rho^2}{r}, \quad MN = \rho; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (110)$$

puis, en exprimant que la projection de MG est égale à la somme des projections de MT et de MN :

$$X_1 = \frac{1}{\rho^2}\left(X + \frac{x'}{r}\right), \quad Y_1 = \frac{1}{\rho^2}\left(Y + \frac{y'}{r}\right), \quad Z_1 = \frac{1}{\rho^2}\left(Z + \frac{z'}{r}\right) (*). (111)$$

72. Les valeurs de X_1, Y_1, Z_1 peuvent servir à évaluer d'autres fonctions, dont nous aurons besoin plus tard. Par exemple,

$$\Sigma X_1 x^{\text{IV}} = \frac{1}{\rho^2}\Sigma X x^{\text{IV}} + \frac{1}{\rho^2 r}\Sigma x' x^{\text{IV}}.$$

(*) Ces importantes formules, remarquables par la simplicité, sont dues, je crois, à M. de Saint-Venant (*Journal de l'École polytechnique*, 30e cahier, page 67).

Mais l'équation (103) donne

$$\Sigma X x^{\text{iv}} + \Sigma X' x''' = \left(\frac{1}{r\rho^2}\right)';$$

ou, à cause de $\Sigma X' x''' = 0$,

$$\Sigma X\, x^{\text{iv}} = \left(\frac{1}{r\rho^2}\right)'. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (112)$$

D'un autre côté, de la formule

$$\Sigma x' x''' = -\frac{1}{\rho^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

on tire

$$\Sigma x' x^{\text{iv}} = 2\,\frac{\rho'}{\rho^3} - \Sigma x'' x''',$$

ou

$$\Sigma x' x^{\text{iv}} = 3\,\frac{\rho'}{\rho^3}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (113)$$

Conséquemment,

$$\Sigma X_1 x^{\text{iv}} = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{r\rho^2}\right)' + 3\,\frac{\rho'}{\rho^3},$$

ou

$$\Sigma X_1 x^{\text{iv}} = \frac{1}{\rho^3}\left(\frac{\rho}{r}\right)'. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (114)$$

On trouve, avec la même facilité;

$$\Sigma X'_1 x' = \Sigma X x^{\text{iv}} = \left(\frac{1}{r\rho^2}\right)', \quad \ldots\ldots \quad (115)$$

$$\Sigma X'_1 x'' = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (116)$$

$$\Sigma X'_1 x''' = -\frac{1}{\rho^3}\left(\frac{\rho}{r}\right)'. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (117)$$

73. *Sphère osculatrice.* — Si, en trois points consécutifs d'une ligne à double courbure, on élève les plans normaux, le point où ils se coupent est le centre de la sphère osculatrice. Les coordon-

nées ξ, η, ζ de ce centre sont évidemment déterminées par les équations

$$(\xi - x)x' + (\eta - y)y' + (\zeta - z)z' = 0,$$
$$(\xi - x)x'' + (\eta - y)y'' + (\zeta - z)z'' = 1,$$
$$(\xi - x)x''' + (\eta - y)y''' + (\zeta - z)z''' = 0 \ (^*).$$

On conclut, de la première et de la troisième :

$$\frac{\xi - x}{-y'z''' + z'y'''} = \frac{\eta - y}{-z'x''' + x'z'''} = \frac{\zeta - z}{-x'y''' + y'x'''} = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\sum(-y'z''' + z'y''')^2}},$$

R étant le rayon inconnu. De plus, à cause de la dernière équation, la valeur commune des trois rapports est (103)

$$\frac{1}{\sum(z'y''' - y'z''')x''} = \frac{1}{\mathrm{T}} = r\rho^2;$$

donc

$$\mathrm{R} = r\rho^2 \sqrt{\sum(z'y''' - y'z''')^2};$$

ou, par la formule (99),

$$\mathrm{R} = \sqrt{\rho^2 + r^2\rho'^2}. \ (^{**}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

74. *Indicatrice sphérique.* — Si, par le centre d'une sphère de rayon 1, on mène des parallèles aux tangentes d'une courbe C, le lieu des extrémités de ces rayons est une courbe C_1, appelée *indicatrice sphérique* de C. Pour terminer ce chapitre, nous allons

(*) L'arc s est toujours pris pour variable indépendante. Quand cette variable est quelconque, les calculs deviennent très-pénibles, ainsi qu'on peut s'en assurer en jetant un coup d'œil sur la page 83 du Mémoire de M. Saint-Venant.

(**) Si la variable indépendante est quelconque, la formule devient

$$\mathrm{R} = \sqrt{\rho^2 + r^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}.$$

Dans le cas où la courbe est tracée sur une sphère, on a donc

$$\rho^2 + r^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = \text{const.}$$

Cette *relation entre les deux courbures d'une ligne sphérique* me paraît devoir être attribuée au géomètre que je viens de citer, contrairement à l'opinion de M. Paul Serret. (*Théorie nouvelle....*, p. 37).

rappeler les principales relations qui existent entre la *primitive* C et l'indicatrice C_1 (*).

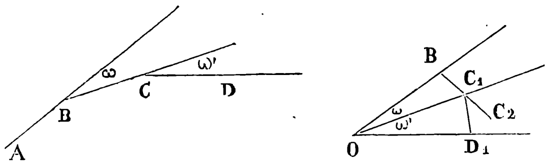
En premier lieu, si l'on prend pour origine le centre de la sphère, et que l'on désigne par x_1, y_1, z_1 les coordonnées rectangulaires du point M_1 de C_1, correspondant au point M (x, y, z) de C, on a

$$x_1 = x', \quad y_1 = y', \quad z_1 = z'. \quad \ldots\ldots \quad (119)$$

De plus, il est évident que l'élément de C_1 mesure l'angle de contingence de C; donc

$$ds_1 = \frac{ds}{\rho} = \omega. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (120)$$

75. Soient AB, BC, CD trois éléments consécutifs de C, et OB_1,



OC_1, OD_1, les rayons parallèles à ces droites. Les plans ABC, BCD étant respectivement parallèles aux plans B_1OC_1, C_1OD_1, il s'ensuit que l'*angle dièdre suivant* OC_1 *est égal à l'angle des deux plans osculateurs* ABC, BCD. Développons cette propriété.

On a, dans l'angle trièdre $OC_1C_2D_1$:

$$\cos D_1C_1C_2 = -\cos OC_1D_1 \cos OC_1B_1 + \sin OC_1B_1 \cos \varepsilon,$$

ou

$$\cos \omega_1 = -\sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega'}{2} + \cos\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega'}{2}\cos\varepsilon;$$

ou, en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre,

$$1 - \frac{\omega_1^2}{2} = -\frac{\omega^2}{4} + \left(1 - \frac{\omega^2}{4}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right).$$

Cette équation se réduit à

$$\omega_1^2 = \omega^2 + \varepsilon^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (121)$$

(*) La plupart de ces propriétés ont été élégamment démontrées par M. Paul Serret. (*Théorie nouvelle*...., p. 37.)

Mais

$$\omega_1 = \frac{ds_1}{\rho_1} = \frac{ds}{\rho\rho_1}, \quad \omega = \frac{ds}{\rho}, \quad \varepsilon = \frac{ds}{r};$$

donc enfin

$$\rho_1 = \frac{L}{\rho}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (122)$$

à cause de la formule (108).

76. La relation (118), appliquée à l'indicatrice, devient

$$\rho_1^2 + r_1^2 \left(\frac{d\rho_1}{ds_1}\right)^2 = 1. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (123)$$

En la combinant avec (122) et (120), on trouve aisément

$$\frac{1}{r_1^2} = (r^2 + \rho^2)\left(\frac{d\rho_1}{ds}\right)^2, \quad \ldots \ldots \quad (124)$$

$$r_1 = \pm \frac{\rho_1}{r} \frac{ds}{d\rho_1}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (125)$$

et encore

$$\frac{1}{r_1} = \rho \left(\text{arctg.}\ \frac{r}{\rho}\right)'. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (126)$$

77. Les formules (122) et (126) donnent, de la manière la plus simple, la courbure et la torsion de l'indicatrice, en fonction des éléments analogues, relatifs à la courbe primitive. On peut aller plus loin, et interpréter géométriquement ces mêmes formules. En effet, en désignant par H l'*angle de la tangente avec la rectifiante* (71), on a

$$\cos H = \frac{L}{r}, \quad \sin H = \frac{L}{\rho}; \quad \ldots \ldots \quad (109)$$

donc

$$\rho_1 = \sin H, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (127)$$

et

$$\frac{1}{r_1} = \rho \frac{dH}{ds}.$$

Celle-ci équivaut à $r_1 = \frac{d\omega}{dH}$. D'ailleurs $r_1 = \frac{ds_1}{\varepsilon_1}$, $ds_1 = d\omega$; donc enfin

$$\varepsilon_1 = dH. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (128)$$

Ainsi : 1° *Le rayon de courbure de l'indicatrice est égal au sinus de l'angle* H *formé par la tangente à la primitive et par la rectifiante de celle-ci ;* 2° L'*angle de torsion de l'indicatrice est égal à la variation de l'angle* H.

78. Soit θ_1 l'angle formé par le plan osculateur de l'indicatrice, au point M_1, avec le plan tangent de la sphère. Le Théorème de Meusnier donne $\rho_1 = \sin \theta_1 = \sin H$ (127). De là résulte

$$\theta_1 = H. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (129)$$

En d'autres termes : *L'angle du plan osculateur de l'indicatrice, avec le plan tangent, est égal à l'angle formé par la tangente à la primitive et par la droite rectifiante* (*).

79. Le *rayon de courbure géodésique* de l'indicatrice a pour valeur $\frac{\rho_1}{\cos \theta_1} = \operatorname{tg} \theta_1$. Conséquemment, *les seules courbes sphériques dont la courbure géodésique soit constante, sont des cercles* (**).

(*) Ce théorème ne diffère pas de l'un de ceux qui ont été démontrés par M. Paul Serret (*Théorie nouvelle* ....., p. 75).

(**) Désignons par ρ_g, comme l'a proposé M. Paul Serret, le rayon de courbure géodésique d'une ligne C, de façon que

$$\rho_g = \frac{\rho}{\cos \theta}.$$

D'un autre côté, supposons que l'on développe la surface lieu des tangentes à C, et soit R le rayon de courbure de la ligne C_1 suivant laquelle se transforme C. J'ai démontré, il y a vingt ans (*Comptes rendus*, tome XVII), que

$$R = \frac{\rho}{\cos \theta}.$$

Le rayon de courbure géodésique ne diffère donc pas du rayon de courbure de la ligne que l'on pourrait appeler *transformée par développement*. D'après ce rapprochement, la notion de la *courbure géodésique* est-elle aussi nouvelle qu'on le suppose aujourd'hui ? Quoi qu'il en soit, le théorème ci-dessus peut donc être énoncé ainsi : *Parmi toutes les courbures tracées sur une sphère, il n'y a que les petits cercles dont les transformées par développement soient des cercles.*

IX. — Ligne de courbure moyenne nulle. — Lieu des normales principales de deux courbes.

80. Problème. — *Trouver, sur une surface gauche donnée, le lieu des points pour lesquels les rayons de courbure de la surface sont égaux et de signes contraires* (*).

Si, en un point de la surface, les deux rayons de courbure principaux, R_1, R_2, sont égaux et de signes contraires, c'est-à-dire si la *courbure moyenne*, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ (**) est nulle, on a, comme l'on sait,

$$(1+p^2)\,t-2pqs+(1+q^2)\,r=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Pour développer cette équation, reprenons les valeurs trouvées dans le Chapitre I :

$$p=\frac{ny'-mz'}{ly'-mx'},\quad q=\frac{lz'-nx'}{ly'-mx'},$$

$$r=m\,\frac{2My'-Nm}{(ly'+mx')^3},\quad s=-\frac{M(ly'+mx')-Nlm}{(ly'-mx')^3},\quad t=l\,\frac{2Mx'-Nl}{(ly'-mx)^3}.$$

Il en résulte :

$$t+r=\frac{1}{(ly'-mx')^3}\left[2M(lx'+my')-N(l^2+m^2)\right],$$

$$p^2t-2pqs+q^2r=\frac{1}{(ly'-mx')^3}\left[2M(px'+qy')\,(pl+qm)-N(pl+qm)^2\right].$$

Mais (9)

$$px'+qy'=z',\quad pl+qm=n;$$

(*) Ce problème a été résolu par M. Bertrand. (*Journal de Liouville*, tome XV, p. 334). Antérieurement, M. Brasseur avait considéré le cas très-simple des surfaces gauches du second degré. (*Mémoires de la Société des sciences de Liége*, tome I).

(**) Cette dénomination de *courbure moyenne* a été proposée par M. Delaunay. (*Journal de Liouville*, tome VI).

donc l'équation (a) devient

$$2M(lx' + my' + nz') - N;$$

ou, à cause de

$$lx' + my' + nz' = la' + mb' + nc' = U:$$
$$2MU - N = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

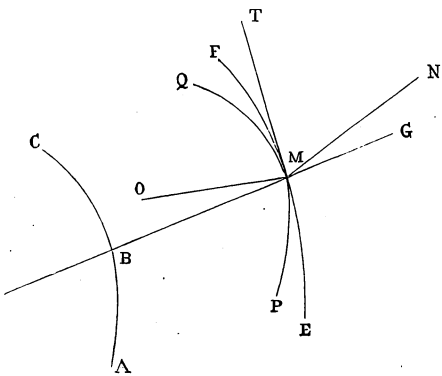
81. Si la directrice est une trajectoire orthogonale (ce que l'on peut toujours supposer), $U = 0$; et l'équation (b) se réduit à $N = 0$; c'est-à-dire (12) à

$$x''(ny' - mz') + y''(lz' - nx') + z''(mx' - ly') = 0. \quad . \quad (130)$$

Pour interpréter celle-ci, je la remplace d'abord par l'équation équivalente

$$(s'x'' - x's'')(ny' - mz') + (s'y'' - y's'')(lz' - nx') + (s'z'' - z's'')(mx' - ly') = 0. \quad (c)$$

Soit maintenant M un point de la courbe dont il s'agit. Soit EMF la trajectoire orthogonale passant en ce point, ou la *parallèle* à la directrice ABC. Soient enfin MT la tangente à EMF, MO le rayon de courbure de cette ligne, et MN la normale à la surface. Les droites MN, MO font, avec les axes, des angles dont les cosinus sont respectivement proportionnels aux quantités



$$ny' - mz', \quad lz' - nx', \quad mx' - ly',$$

et aux quantités

$$s'x'' - x's'', \quad s'y'' - y's'', \quad s'z'' - z's''.$$

L'équation (c) exprime que l'angle OMN est droit, ou que MO, *rayon de courbure de la trajectoire orthogonale* EMF, *est dirigé suivant la génératrice* MG. Autrement dit : *en chaque point* M *de la ligne de courbure moyenne nulle, le plan osculateur de la trajectoire orthogonale* EMF *se confond avec le plan tangent à la surface gauche* (*).

82. Remarques. — I. *Si la ligne de courbure moyenne nulle coupe à angle droit toutes les génératrices*, c'est-à-dire si elle est une trajectoire orthogonale, *la surface gauche proposée est le lieu des normales principales de cette ligne* (**).

II. Soit PMQ la section faite, dans la surface, par un plan perpendiculaire à MG. La courbure moyenne de la surface étant nulle au point M, et la *section normale* NMG ayant une courbure nulle, il en est de même pour la section normale PQ, perpendiculaire à la première : en M, le rayon de courbure de cette section est infini. Conséquemment, d'après le Théorème de Meusnier, *le rayon de courbure de toute ligne tracée sur la surface et tangente, en* M, *à la section* PQ, *est infini en ce même point* M. Il n'y a d'exception que pour les lignes dont le rayon de courbure est dirigé suivant la génératrice MG : ce rayon peut avoir une grandeur quelconque (***).

83. On a

$$x' = a' + l'v, \quad y' = b' + m'v, \quad z' = c' + n'v,$$
$$x'' = a'' + l''v, \quad y'' = b'' + m''v, \quad z'' = c'' + n''v;$$

(*) Pour éviter une longue périphrase, j'appelle *ligne de courbure moyenne nulle* la ligne telle, qu'en chacun de ses points, *la courbure moyenne de la surface est nulle.* — *Voyez* la seconde note de la page 43.

(**) Bertrand, *Journal de Liouville*, t. XV, p. 333 et suiv.

(***) Comme exemple de ce cas d'exception, il suffit de citer la surface de la vis à filet carré : les trajectoires orthogonales des génératrices sont des hélices, lignes de courbure moyenne nulle, dont les rayons de courbure, dirigés suivant les génératrices, ont des grandeurs finies.

conséquemment, l'équation (130) devient, étant développée :

$$Pv^2 + Qv + R = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

en supposant :

$$\left.\begin{aligned}
P &= l''(nm' - mn') + m''(ln' - nl') + n''(ml' - lm'),\\
Q &= a''(nm' - mn') + b''(ln' - nl') + c''(ml' - lm')\\
&\quad - a'(nm'' - mn'') - b'(ln'' - nl'') - c'(ml'' - lm''),\\
R &= a''(nb' - mc') + b''(lc' - na') + c''(ma' - lb').
\end{aligned}\right\} . \quad (132)$$

L'équation (131) étant du second degré, il en résulte qu' « *il y a, sur chaque génératrice, deux points, au plus, pour lesquels les rayons de courbure sont égaux et de signes contraires. Le lieu des points jouissant de cette propriété est donc composé de deux courbes distinctes* (*) *qui peuvent se confondre ou disparaître si les racines sont réelles ou imaginaires. Si l'équation* (131) *est identique, tous les points de la génératrice satisfont à la condition demandée.* » (Bertrand).

84. *Application à l'hyperboloïde.* — Si, dans l'équation,

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a$$

on substitue les valeurs suivantes, trouvées précédemment (55) :

$$p = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\frac{x}{z},\ q = \frac{\gamma^2}{\beta^2}\frac{y}{z},\ r = \frac{\gamma^4}{\alpha^2\beta^2 z^3}(y^2 - \beta^2),\ s = -\frac{\gamma^4}{\alpha^2\beta^2 z^3}xy,\ t = \frac{\gamma^4}{\alpha^2\beta^2 z^3}(x^2 - \alpha^2),$$

on trouve

$$z^2(x^2 + y^2 - \alpha^2 - \beta^2) + \gamma^4\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}\right)^2 - \gamma^4\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}\right) = 0. \qquad (b)$$

Mais

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{z^2}{\gamma^2} + 1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

(*) Ou plutôt de *deux branches*.

donc la relation (b) devient

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

Cette équation, donnée d'abord par M. Brasseur, représente ordinairement une sphère concentrique avec l'hyperboloïde. La courbe d'intersection des deux surfaces, c'est-à-dire la ligne de courbure moyenne nulle, est donc le système de deux *coniques sphériques.*

85. L'élimination de z, entre les équations (c) et (133), conduit à

$$\left(1 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)y^2 = \alpha^2 + \beta^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

1° Si l'ellipse représentée par cette équation est extérieure à l'*ellipse de gorge*, chaque génératrice contient deux points pour lesquels la courbure moyenne est nulle. Dans ce cas, les demi-axes α, β, γ satisfont aux deux inégalités

$$\gamma < \beta, \quad \gamma < \alpha;$$

ou seulement à celle-ci :

$$\gamma < \beta;$$

car on peut supposer $\beta < \alpha$.

2° Lorsque

$$\gamma = \beta,$$

l'ellipse (d) et l'ellipse de gorge ont même grand axe : la première courbe est tangente, extérieurement, à la seconde. En même temps, l'élimination de x, entre les équations (c) et (133), donne

$$(\alpha^2 - \beta^2)\, y^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\, z^2.$$

Cette équation représente deux plans menés par le grand axe de l'hyperboloïde. Conséquemment, *la ligne de courbure moyenne nulle se compose, dans ce cas, des deux sections circulaires passant par le centre de la surface.*

3° Si γ est compris entre α et β, les deux ellipses sont sécantes : une partie seulement des génératrices sont rencontrées par la ligne de courbure moyenne nulle.

4° Lorsque

$$\gamma = \alpha,$$

l'ellipse (d) est tangente, intérieurement, à l'ellipse de gorge. Les deux sommets communs sont les seuls points de l'hyperboloïde où la courbure moyenne soit nulle.

5° Enfin, lorsque γ surpasse α, la sphère, si elle existe, ne rencontre plus l'hyperboloïde : en aucun point de cette surface, la courbure moyenne n'est nulle.

86. *Remarques.* — D'après un théorème de Monge, la sphère (133) est le lieu du sommet d'un angle trièdre tri-rectangle, circonscrit à l'hyperboloïde. De là résulte, ainsi qu'on peut le vérifier directement (*), que *la ligne de courbure moyenne de l'hyperboloïde est le lieu des intersections de deux génératrices orthogonales.*

87. Ce théorème, à peu près évident pour les surfaces gauches du second degré, peut être étendu, non-seulement à toutes les surfaces gauches, mais encore à toutes les surfaces à courbures opposées.

Prenons, en effet, l'équation des lignes asymptotiques :

$$t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\,\frac{dy}{dx} + r = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

et représentons par θ_1, θ_2 les racines de cette équation, de manière que

$$\theta_1 + \theta_2 = -\frac{2s}{t}, \quad \theta_1\theta_2 = \frac{r}{t}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

En exprimant que les deux lignes asymptotiques qui passent au point (x, y, z) sont orthogonales, et en ayant égard à la relation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

(*) Bertrand, *Journal de Liouville*, t. XV ; p. 342.

on trouve

$$1+\theta_1\theta_2+(p+q\theta_1)(p+q\theta_2)=0;$$

c'est-à-dire

$$1+p^2+pq(\theta_1+\theta_2)+(1+q^2)\theta_1\theta_2=0; \quad \ldots \quad (b)$$

puis, à cause des valeurs (a) :

$$(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r=0.$$

Cette équation appartient à la ligne de courbure moyenne nulle. On a donc ce théorème :

Sur une surface quelconque, à courbures opposées, la ligne de courbure moyenne nulle coïncide avec le lieu des intersections de deux lignes asymptotiques orthogonales.

88. Problème. (*) — *Quelle est la courbe* C *dont les normales principales coïncides avec les normales principales d'une seconde courbe* C_1 ?

Si la ligne C est prise pour directrice de la surface gauche formée par les rayons de courbure, l'équation (131), qui représente C et C_1, doit être vérifiée par $v=0$; ce qui exige que R soit nul. En même temps, les lignes C et C_1 étant des trajectoires orthogonales de la surface, la seconde racine de l'équation (131) doit se réduire à une constante (16). Autrement dit, la courbe C est définie par la relation

$$\frac{Q}{P}=-v=\text{const.} \quad \ldots \ldots \quad (134)$$

Développons cette équation.

89. En premier lieu, si nous prenons l'arc de la courbe C pour variable indépendante, nous aurons (66) :

$$\begin{aligned}
l&=\rho a'', & m&=\rho b'', & n&=\rho c'',\\
l'&=\rho a'''+\rho' a'', & m'&=\rho b'''+\rho' b'', & n'&=\rho c'''+\rho' c'',\\
l''&=\rho a^{\text{iv}}+2\rho' a'''+\rho'' a'', & m''&=\rho b^{\text{iv}}+2\rho' b'''+\rho'' b'', & n''&=\rho c^{\text{iv}}+2\rho' c'''+\rho'' c''.
\end{aligned}$$

(*) Résolu par M. Bertrand (*Journal de Liouville*, t. XV, p. 345).

Ces valeurs, substituées dans les formules (132), donnent

$$
\begin{aligned}
P &= \rho^2\Sigma(\rho a^{\text{IV}} + 2\rho' a''' + \rho'' a'')(c''b''' - b''c'''),\\
Q &= \rho^2\Sigma a''(c''b''' - b''c''') + \rho\Sigma(\rho a^{\text{IV}} + 2\rho' a''' + \rho'' a'')(b'c'' - c'b''),\\
R &= \rho\,\Sigma a''(b'c'' - c'b'').
\end{aligned}
$$

La dernière quantité est nulle; ce qui devait être (88). Les deux premières se réduisent évidemment à

$$
\begin{aligned}
P &= \rho^3\Sigma(c''b''' - b''c''')a^{\text{IV}},\\
Q &= \rho^2\Sigma(b'c'' - c'b'')a^{\text{IV}} + 2\rho\rho'\Sigma(b'c'' - c'b'')a''',
\end{aligned}
$$

ou à

$$
\begin{aligned}
P &= -\rho^3\Sigma(a''b''' - b''a''')c^{\text{IV}},\\
Q &= \rho^2\Sigma(a'b'' - b'a'')c^{\text{IV}} + 2\rho\rho'\Sigma(a'b'' - b'a'')c'''.
\end{aligned}
$$

Mais, par les formules (114), (112) et (105) :

$$
\begin{aligned}
\Sigma(a''b''' - b''a''')c^{\text{IV}} &= \frac{1}{\rho^5}\left(\frac{\rho}{r}\right)',\\
\Sigma(a'b'' - b'a'')c^{\text{IV}} &= \left(\frac{1}{r\rho^2}\right)'\\
\Sigma(a'b'' - b'a'')c''' &= \frac{1}{r\rho^2};
\end{aligned}
$$

donc

$$
P = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)', \quad Q = \rho^2\left(\frac{1}{r\rho^2}\right)' + 2\frac{r'}{r\rho}. \quad . \quad . \quad . \quad (135)
$$

L'équation (134) équivaut donc à

$$
\frac{\rho^4\left(\frac{1}{r\rho^2}\right)' + 2\frac{\rho\rho'}{r}}{\left(\frac{\rho}{r}\right)'} = v.
$$

Celle-ci se réduit aisément à

$$
\frac{\rho r' - r\rho'}{\rho^2} = \frac{r'}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)
$$

90. L'intégrale de l'équation (136) est

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{v}\frac{g}{r}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (137)$$

g désignant la constante arbitraire.

« Telle est la relation fort simple qui doit exister entre les deux
» rayons de courbure d'une courbe pour que les normales prin-
» cipales soient en même temps normales principales d'une autre
» courbe. » (Bertrand).

91. M. Paul Serret, complétant le théorème de M. Bertrand, a prouvé que *la constante* g *représente la cotangente de l'angle* φ *formé par les tangentes aux deux courbes* C, C_1, *en deux points correspondants* (*).

Pour vérifier cette dernière propriété, j'observe que

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sigma' s'}(a'x' + b'y' + c'z');$$

ou, d'après les formules (31), (17) et (32) :

$$\cos\varphi = \frac{A + Bv}{\sqrt{A}\sqrt{A + 2Bv + Cv^2}}. \quad \ldots\ldots \quad (138)$$

L'arc σ étant pris pour variable indépendante, on a :

$$A = a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \ (a), \quad \Sigma a'a'' = 0, \quad \Sigma a'a''' = -\frac{1}{\rho^2}.$$

D'un autre côté, à cause de

$$l = \rho a'', \quad m = \rho b'', \quad n = \rho c'' : \quad \ldots\ldots \quad (86)$$

$$B = \Sigma a'l' = \rho\,\Sigma a'a''' + \rho'\Sigma a'a'' = -\frac{1}{\rho}, \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

$$C = \Sigma l'^2 = \rho^2\Sigma a'''^2 + 2\rho\rho'\Sigma a''a''' + \frac{\rho'^2}{\rho^2}.$$

(*) *Théorie nouvelle* ......, p. 110.

Pour simplifier cette expression, il suffit de recourir aux formules (87) et (98) : on trouve

$$C = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Au moyen des valeurs (a), (b), (c), l'équation (138) devient

$$\cos\varphi = \frac{1 - \frac{v}{\rho}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{\rho}\right)^2 + \frac{v^2}{r^2}}}.$$

Celle-ci donne

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{v}{r}}{1 - \frac{v}{\rho}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (139)$$

ou

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{v} - \frac{\cot\varphi}{r};$$

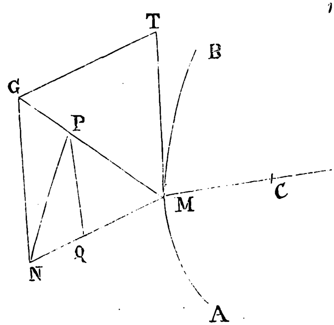
etc.

92. *Remarques.* — I. L'équation

$$v = -\frac{B}{C}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

qui représente généralement la ligne de striction, devient, dans le cas actuel :

$$v = \frac{r^2\rho}{r^2 + \rho^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (140)$$



Si l'on se reporte à la figure du n° 71, on voit aisément que, pour trouver le point central C, il suffit d'abaisser NP perpendiculaire à la rectifiante MG, de mener PQ perpendiculaire à MN, et de prendre, sur la normale principale, MC = MQ.

En effet, d'après cette construction,

$$\mathrm{MC} = \frac{\overline{\mathrm{MN}}^3}{\overline{\mathrm{MG}}^2} = \frac{\rho^3}{\frac{\rho^4}{r^2} + \rho^2} = v \text{ (*)}.$$

II. Les normales à la surface gauche, aux points M, C, font, avec les trois axes, des angles dont les cosinus sont respectivement proportionnels aux quantités

$$\begin{array}{lll} b'c'' - c'b'', & c'a'' - a'c'', & a'b'' - b'a'', \\ l', & m', & n'. \quad (^{**}) \end{array}$$

Par conséquent, l'angle θ des deux normales ou des deux plans tangents est donné par la formule

$$\cos\theta = \frac{\Sigma(b'c'' - c'b'')\,l'}{\sqrt{\Sigma(b'c'' - c'b'')^2}\,\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}.$$

Or,

$$\Sigma(b'c'' - c'b'')\,l' = \rho\,\Sigma(b'c'' - c'b'')\,a''' + \rho'\Sigma(b'c'' - c'b'')\,a'' = \frac{1}{r\rho^2} \quad (105),$$

$$\Sigma(b'c'' - c'b'')^2 = \frac{1}{\rho^2} \quad (90), \qquad l'^2 + m'^2 + n'^2 = \mathrm{C} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} \quad (91);$$

donc

$$\cos\theta = \frac{\rho}{\sqrt{r^2 + \rho^2}};$$

et, par suite,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r}{\rho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

III. Le plan tangent en C, c'est-à-dire le plan central (44), contient la perpendiculaire commune au rayon de courbure MC et au rayon de courbure infiniment voisin. La formule (141), comparée à la relation

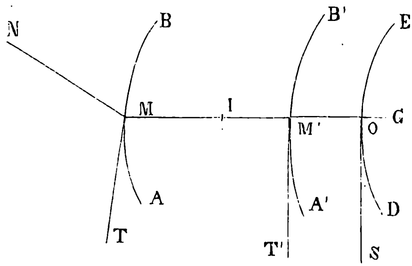
$$\operatorname{tg}\mathrm{H} = \frac{r}{\rho}$$

(*) Cette remarque sera complétée plus loin.

(**) *Voyez* la note de la page 32 et l'équation (64) du plan central.

trouvée précédemment (77), prouve que *le plan* GMC, *passant par le rayon de courbure* MC *et par la rectifiante* MG, *coïncide avec le plan central, relatif à la génératrice* MC. En d'autres termes, *la rectifiante* MG *est perpendiculaire au rayon de courbure* MC *et au rayon infiniment voisin ;* ce que l'on savait (71).

93. *Lieu des normales principales d'une courbe donnée.* — MG étant le rayon de courbure de la ligne donnée AMB, ou la génératrice de la surface, soit A′M′B′ une trajectoire orthogonale des génératrices, ou une *parallèle* à AMB. Soit enfin MM′ $= v$ la distance constante comprise entre ces deux courbes.



L'angle des tangentes en M et M′ est donné par la formule

$$\cos\varphi = \frac{A + Bv}{\sqrt{A}\sqrt{A + 2Bv + Cv^2}}, \quad \ldots\ldots \quad (138)$$

de laquelle on déduit

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{v}{r}}{1 - \dfrac{v}{\rho}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (139)$$

La discussion de cette dernière formule met en évidence les propriétés suivantes, qui n'avaient peut-être pas été remarquées :

1° DOE *etant la trajectoire orthogonale passant par le centre de courbure* O *relatif au point* M, *les tangentes* OS, MT *sont perpendiculaires entre elles.*

2° Conséquemment, *les points* M, O *sont conjugués* (46).

3° La rectifiante en M, perpendiculaire à MG, fait, avec MT, un angle H qui a pour tangente $\frac{r}{\rho}$ (77). Or, lorsque le point M′ s'éloigne indéfiniment de M, dans un sens ou dans l'autre, lim. tg $\varphi = -\frac{\rho}{r} = -$ cot H. Donc *la tangente* M′T′ *tend à devenir perpendiculaire à la rectifiante en* M (*).

4° *Le paraboloïde de raccordement, lieu des tangentes* MT, M′T′, *a l'un de ses plans directeurs perpendiculaire à la rectifiante.*

5° Le point central I est déterminé par la formule $v = -\frac{B}{C}$; c'est-à-dire par celle-ci :

$$v = \overline{MI} = \frac{r^2\rho}{r^2+\rho^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (140)$$

6° Il en résulte

$$\overline{IO} = \frac{\rho^3}{r^2+\rho^2},$$

puis

$$\overline{MI} \times \overline{IO} = \frac{M^2}{C^2} = \frac{r^2\rho^4}{(r^2+\rho^2)^2} \quad \ldots\ldots \quad (142)$$

7° On a trouvé (91),

$$C = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2};$$

donc, à cause de l'équation (142),

$$M = \pm \frac{1}{r}.$$

Pour déterminer le signe, il suffit de recourir à la définition de la quantité M (13). On a ainsi

$$M = \Sigma(mn' - nm')\,a' = \rho^2 \Sigma a'(b''c''' - b''c''').$$

Cette dernière somme égale $\frac{1}{r\rho^2}$ (103). Donc enfin

$$M = \frac{1}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (143)$$

(*) On arrive au même résultat en se rappelant que la rectifiante est perpendiculaire à deux génératrices consécutives, et en ayant égard à la définition du plan central (44).

8° La courbure de la surface, au point central I, est

$$K = -\frac{C^2}{M^2} = -\frac{(r^2 + \rho^2)^2}{r^2\rho^4}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (144)$$

9° Au point M, la courbure est (21)

$$k = -\frac{1}{r^2 D^4}.$$

Mais (18)

$$D^2 = A - U^2 = 1 - (la' + mb' + nc')^2 = 1;$$

donc

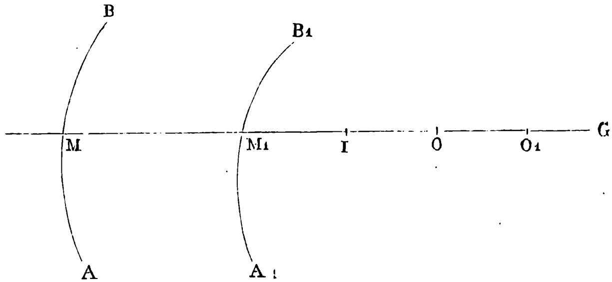
$$k = -\frac{1}{r^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

10° La directrice AMB est une ligne de courbure moyenne nulle (82). Conséquemment, les lignes asymptotiques sont orthogonales. Et comme l'une d'elles est la génératrice MG, l'autre est la section faite, dans la surface, par le plan NMT. De là résulte que *les rayons des sections principales sont dirigés suivant les bissectrices des angles droits formés par la normale principale* MG *et la tangente* MT. D'ailleurs, en vertu de l'équation (145), le rectangle de ces rayons est égal à $\frac{1}{r^2}$. On a donc ce théorème :

Les rayons principaux de la surface engendrée par les normales principales d'une courbe donnée sont, en chaque point de la directrice, égaux au rayon de torsion de cette directrice, ou, ce qui est équivalent :

Le rayon de torsion d'une courbe quelconque C, *en un point* M, *est égal aux rayons principaux de la surface lieu des rayons de courbure de* C : *ces rayons principaux sont d'ailleurs dirigés suivant les bissectrices des angles droits formés par la tangente et le rayon de courbure de* C, *relatifs au point* M.

94. Supposons que deux courbes AMB, $A_1M_1B_1$ aient mêmes



normales principales, et représentons par d la distance comprise entre deux points correspondants M, M_1 : cette quantité d est une constante. Soient encore, comme précédemment, I le point central de la génératrice MG, O et O_1 les centres de courbure de AMB et $A_1M_1B_1$. Les relations (140) et (142) donnent

$$d = \frac{r^2\rho}{r^2+\rho^2} - \frac{r_1^2\rho_1}{r_1^2+\rho_1^2} \quad (a), \qquad \frac{r^2\rho^4}{(r^2+\rho^2)^2} = \frac{r_1^2\rho_1^4}{(r_1^2+\rho_1^2)^2}. \quad . \quad (b)$$

La seconde équation peut être réduite à

$$\frac{r_1\rho_1^2}{r_1^2+\rho_1^2} = \frac{r\rho^2}{r^2+\rho^2} \text{ (*)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Par suite, l'équation (a) devient

$$r_1 = \rho_1 \frac{r^2(\rho - d) - d\rho^2}{r\rho^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Substituant cette valeur dans (c), on trouve

$$\rho_1 = \frac{r^2\rho^4 + [r^2(\rho - d) - d\rho^2]^2}{(r^2+\rho^2)\,[r^2(\rho - d) - d\rho^2]};$$

(*) En effet, à cause de $M = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}$ (143), on doit rejeter la solution

$$\frac{r_1\rho_1^2}{r_1^2+\rho_1^2} = -\frac{r\rho^2}{r^2+\rho^2}.$$

ou, plus simplement,

$$\rho_1 = \frac{r^2(\rho - d)^2 + d^2\rho^2}{r^2(\rho - d) - d\rho^2}. \quad \ldots \ldots \quad (146)$$

La formule (d) donne ensuite

$$r_1 = \frac{r^2(\rho - d)^2 + d^2\rho^2}{r\rho^2}. \quad \ldots \ldots \quad (147)$$

Ces diverses relations, beaucoup plus simples que celles qui sont indiquées dans le Mémoire de M. Bertrand, s'accordent cependant avec ces dernières.

95. *Lieu des binormales d'une courbe donnée.* — Si l'on continue à prendre l'arc de la directrice pour variable indépendante, on devra supposer, dans les équations (1) :

$$l = \rho(b'c'' - c'b''), \quad m = \rho(c'a'' - a'c''), \quad n = \rho(a'b'' - b'a''). \quad (88)$$

Il résulte, de ces hypothèses :

$$\left.\begin{aligned} l' &= \rho(b'c''' - c'b''') + \rho'(b'c'' - c'b''), \\ m' &= \rho(c'a''' - a'c''') + \rho'(c'a'' - a'c''), \\ n' &= \rho(a'b''' - b'a''') + \rho'(a'b'' - b'a''); \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

$$A = 1\ (b); \quad B = \Sigma a'l' = 0\ (c);$$

$$C = \Sigma l'^2 = \rho^2\Sigma(a'b''' - b'a''')^2 + 2\rho\rho'\Sigma(a'b'' - b'a'')(a'b''' - b'a''') + \rho'^2\Sigma(a'b'' - b'a'')^2.$$

D'après les formules (90), (95) et (99) :

$$\Sigma(a'b'' - b'a'')^2 = \frac{1}{\rho^2}, \quad \Sigma(a'b'' - b'a'')(a'b''' - b'a''') = -\frac{\rho'}{\rho^3},$$

$$\Sigma(a'b''' - b'a''')^2 = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\rho'^2}{\rho^2}\right);$$

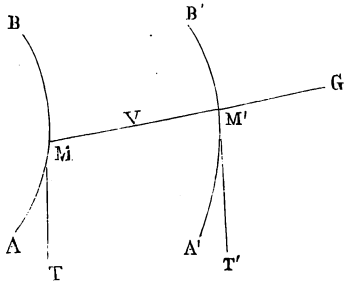
donc

$$C = \frac{1}{r^2}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (d)$$

La fonction B étant nulle, il s'ensuit, ce qui est assez visible, que *la surface engendrée par les binormales d'une courbe a, pour ligne de striction, la directrice* (*).

(*) Saint-Venant, *Mém. cité*, p. 47.

96. Soit, comme au n° 93, A'M'B' une trajectoire orthogonale des génératrices, ou une *parallèle* à la directrice AMB. Représentons par v la distance constante MM', et par φ l'angle des tangentes MT, M'T'. La formule (138) devient, par la substitution des valeurs (*b*), (*c*), (*d*) :



$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{r^2}}}.$$

Il résulte, de celle-ci,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{r}. \qquad (148)$$

Par conséquent, *la position du plan tangent en* M' *est*, pour ainsi dire, *indépendante de la courbure de la directrice.* Cette indépendance se conserve pour les autres éléments dont dépend la forme de la surface. Ainsi l'on trouve, en partant de la formule (148) :

$$\textit{Indice} = i = r, \quad \textit{courbure au point } \mathrm{M}' = k = -\frac{r^2}{(v^2+r^2)^2},$$

$$\textit{Courbure au point } \mathrm{M} = \mathrm{K} = -\frac{1}{r^2};$$

etc.

Enfin, la relation entre les distances du point central M à deux points conjugués est $vv_1 = r^2$ (*).

(*) Ce chapitre était rédigé au mois de décembre 1863. Depuis cette époque, M. Mannheim a trouvé de son côté, et par une voie complétement différente de celle que j'ai suivie, quelques-uns des théorèmes dont on vient de voir la démonstration.

FIN.