SUR

QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES,

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

Mémoire présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 10 octobre 1885.)

SUR
QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES.

I.

Soit

$$L_1 = \int_a^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)\sqrt{x^2-a^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

les constantes a, λ étant positives.

Faisons

$$x = \frac{at\sqrt{\lambda}}{\sqrt{a^2+\lambda-a^2t^2}} \text{ (*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nous aurons :

$$dx = a\sqrt{\lambda}\,\frac{a^2+\lambda}{(a^2+\lambda-a^2t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt, \qquad x^2+\lambda = \lambda\,\frac{a^2+\lambda}{a^2+\lambda-a^2t^2},$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\sqrt{\frac{a^2+\lambda}{a^2+\lambda-a^2t^2}}\sqrt{t^2-1}, \qquad \frac{dx}{(x^2+\lambda)\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda(a^2+\lambda)}}\,\frac{dt}{t^2-1}.$$

Aux limites a, $+\infty$ correspondent respectivement, $t=1$, $t=\frac{\sqrt{a^2+\lambda}}{a}$.

Donc

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda(a^2+\lambda)}}\int_1^{\frac{\sqrt{a^2+\lambda}}{a}} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(*) *Résultante* de deux transformations.

ou, par la formule connue,

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda(a^2+\lambda)}}\,\mathcal{L}.\frac{\sqrt{\lambda}+\sqrt{a^2+\lambda}}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(A)}$$

En particulier,

$$\int_a^\infty \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\,\mathcal{L}.\frac{1+\sqrt{a^2+1}}{a}; \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

et, si l'on suppose $a = \operatorname{tg}\alpha$:

$$\int_{\operatorname{tg}\alpha}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-\operatorname{tg}^2\alpha}} = \cos\alpha.\,\mathcal{L}.\left(\cot\frac{1}{2}\alpha\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

II.

Soit, généralement,

$$L_n = \int_a^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^n\sqrt{x^2-a^2}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Il est clair que :

$$\frac{dL_1}{d\lambda} = -\int_a^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^2\sqrt{x^2-a^2}} = -L_2, \quad \frac{d^2L_1}{d\lambda^2} = 1.2\int_a^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^3\sqrt{x^2-a^2}} = 1.2.L_3,$$

$$\ldots\ldots, \quad \frac{d^{n-1}L_1}{d\lambda^{n-1}} = (-1)^{n-1}\,1.2.3\ldots\overline{n-1}\;L_n,$$

$$L_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\Gamma(n)}\frac{d^{n-1}L_1}{d\lambda^{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(C)}$$

Ainsi, *les intégrales* L_2, L_3, ..., L_n, ... *peuvent être déduites, assez simplement, de l'intégrale* L_1 *donnée par la formule* (A). (*)

(*) Dans deux lettres qu'il m'a fait l'honneur de m'adresser, en juillet dernier, M. Hermite rattache l'intégrale L_n aux *fonctions* X_n, de Legendre. J'espère que l'illustre Géomètre publiera, prochainement, cette remarquable corrélation.

Supposons $\lambda = 1$, et appelons K_n la valeur correspondante de L_n, de manière que

$$K_n = \int_a^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n \sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{. . . . . (6)}$$

Si, avec $a = \operatorname{tg}\alpha$, on fait $x = \operatorname{tg}\varphi$, cette intégrale devient

$$K_n = \int^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n-1}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\alpha}}} \quad \text{. . . . . (7)}$$

III.

Pour rendre rationnelle la différentielle, et afin que les limites soient indépendantes de α, je pose

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha\cos\omega}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\sin^2\omega}} \quad \text{. . . . . (8)}$$

Cette transformation (*) donne, successivement :

$$\sin\varphi = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\sin^2\omega}}, \quad d\varphi = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\sin\omega d\omega}{1-\cos^2\alpha\sin^2\omega}, \quad \sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sin\alpha\sin\omega}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\sin^2\omega}}.$$

Les nouvelles limites sont 0 et $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent,

$$K_n = \cos^{2n}\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n-1}\omega d\omega}{(1-\cos^2\alpha\sin^2\omega)^n}; \quad \text{. . . . . (9)}$$

ou, si l'on fait $\cos^2\alpha = \mu$:

$$K_n = \mu^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n-1}\omega d\omega}{(1-\mu\sin^2\omega)^n} \quad \text{. . . . . (D)}$$

(*) Trouvée après quelques essais.

Lorsque $n=1$, cette expression se réduit à

$$K_1 = \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega d\omega}{1 - \mu \sin^2\omega}.$$

D'ailleurs, par la formule (4),

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \mathcal{L}.\frac{1+\sqrt{a^2+1}}{a};$$

ou, à cause de $\frac{1}{a^2+1} = \mu$:

$$K_1 = \sqrt{\mu}\, \mathcal{L}.\frac{1+\frac{1}{\sqrt{\mu}}}{\sqrt{\frac{1}{\mu}-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu}\, \mathcal{L}.\frac{1+\sqrt{\mu}}{1-\sqrt{\mu}}.$$

Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega d\omega}{1-\mu\sin^2\omega} = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \mathcal{L}.\frac{1+\sqrt{\mu}}{1-\sqrt{\mu}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

formule connue, presque évidente.

IV.

Représentons par G_n l'intégrale qui entre dans l'égalité (D); savoir:

$$G_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n-1}\omega d\omega}{(1-\mu\sin^2\omega)^n}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

La remarque faite (II) sur les intégrales L_n s'étend, naturellement, aux intégrales G_n. Mais la *loi de récurrence,* relative à celle-ci, est moins simple que la première (C). Pour trouver cette nouvelle relation, combinons l'égalité (14) avec ces deux-ci :

$$G_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+1}\omega d\omega}{(1-\mu\sin^2\omega)^{n+1}}, \quad \frac{dG_n}{d\mu} = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n-1}\omega \sin^2\omega d\omega}{(1-\mu\sin^2\omega)^{n+1}}.$$

Il en résulte

$$G_{n+1} = G_n + \frac{\mu - 1}{n}\frac{dG_n}{d\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(E)}$$

Par exemple,

$$G_2 = G_1 + (\mu - 1)\frac{dG_1}{d\mu}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\,\mathcal{L}.\frac{1+\sqrt{\mu}}{1-\sqrt{\mu}} + \frac{\mu-1}{2\sqrt{\mu}}\left[\frac{1}{2\sqrt{\mu}(1+\sqrt{\mu})} + \frac{1}{2\sqrt{\mu}(1-\sqrt{\mu})}\right] - \frac{\mu-1}{4\mu\sqrt{\mu}}\,\mathcal{L}.\frac{1+\sqrt{\mu}}{1-\sqrt{\mu}},$$

ou

$$G_2 = \frac{\mu+1}{4\mu\sqrt{\mu}}\,\mathcal{L}.\frac{1+\sqrt{\mu}}{1-\sqrt{\mu}} - \frac{1}{2\mu}\ (*).$$

V.

De la relation (E), on en conclut une autre, assez remarquable. En effet :

$$nG_{n+1} = nG_n + (\mu - 1)\frac{dG_n}{d\mu},$$

$$(n-1)G_n = (n-1)G_{n-1} + (\mu - 1)\frac{dG_{n-1}}{d\mu},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$G_2 = G_1 + (\mu - 1)\frac{dG_1}{d\mu};$$

puis, par addition,

$$nG_{n+1} = \left[G_n + G_{n-1} + \cdots + G_1\right] + (\mu - 1)\left[\frac{dG_n}{d\mu} + \cdots + \frac{dG_1}{d\mu}\right].$$

(*) Il est visible que

$$G_n = A_n\,\mathcal{L}.\frac{1+\sqrt{\mu}}{1-\sqrt{\mu}} + B_n;$$

A_n, B_n étant des fonctions rationnelles de $\sqrt{\mu}$.

Par conséquent, si l'on pose

$$G_1 + G_2 + \cdots + G_n = S_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

on a la relation annoncée :

$$G_{n+1} = \frac{1}{n} \frac{d[(\mu - 1)S_n]}{d\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F)$$

VI.

L'intégrale

$$H_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n-2}\omega d\omega}{(1 - \mu \sin^2\omega)^n}, \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

en quelque sorte *conjuguée* de G_n (11), a une expression fort simple.

Pour la déterminer, j'observe que

$$\frac{dH_n}{d\mu} = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\omega d\omega}{(1 - \mu \sin^2\omega)^{n+1}} = nH_{n+1}.$$

Ainsi

$$H_{n+1} = \frac{1}{n} \frac{dH_n}{d\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (G)$$

Or,

$$H_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{1 - \mu \sin^2\omega} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\cos^2\omega + (1 - \mu)\sin^2\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \mu}} \; (^*),$$

ou

$$H_1 = \frac{\pi}{2}(1 - \mu)^{-\frac{1}{2}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

(*) Formule connue.

La relation (G) donne ensuite, de proche en proche :

$$H_2 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}(1-\mu)^{-\frac{3}{2}},\quad H_3 = \frac{\pi}{2}\frac{1.3}{2.4}(1-\mu)^{-\frac{5}{2}},\quad H_4 = \frac{\pi}{2}\frac{1.3.5}{2.4.6}(1-\mu)^{-\frac{7}{2}},\quad \ldots\ldots,$$

$$H_{n+1} = \frac{\pi}{2}\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots 2n}(1-\mu)^{-\frac{2n+1}{2}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (H)$$

On sait que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\omega d\omega = \frac{\pi}{2}\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6..2n}.$$

Nous avons donc cette relation simple, entre deux intégrales d'espèces bien différentes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\omega d\omega}{(1-\mu\sin^2\omega)^{n+1}} = (1-\mu)^{-\frac{2n+1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\omega d\omega. \quad \ldots\ldots \quad (K)$$

VII.

L'intégrale H_n peut, comme l'intégrale L_n, être rattachée aux fonctions X_n.

Dans notre dernier *Mémoire* sur ces fonctions, nous avons démontré le théorème suivant :

On a :

$$X_{2n} - C_{2n,1}xX_{2n-1} + C_{2n,2}x^2X_{2n-2} - \cdots + x^{2n} = \frac{2}{\pi}(-1)^n x^{2n+1}\int_0^{\text{arc}\cos x} \frac{\sin^{2n}\varphi}{\cos^{2n+1}\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi - x^2}}; \quad (15)$$

ou bien, en appelant A_{2n} *le premier membre, et faisant* $x = \cos\alpha$:

$$A_{2n} = \frac{2}{\pi}(-1)^n\cos^{2n+1}\alpha\int_0^{\alpha} \frac{\sin^{2n}\varphi}{\cos^{2n+1}\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Soit ensuite $\sin\varphi = \sin\alpha\sin\theta$: un calcul fort simple donne

$$A_{2n} = \frac{2}{\pi}(-1)^n\cos^{2n+1}\alpha\sin^{2n}\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\theta d\theta}{(1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)^{n+1}},$$

ou, si l'on fait encore

$$\sin^2\alpha = 1 - x^2 = \mu :$$

$$A_{2n} = \frac{2}{\pi}(-1)^n (1-\mu)^{n+\frac{1}{2}} \mu^n H_{n+1} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Nous avons donc ces deux égalités remarquables (*) :

$$X_{2n} - C_{2n,1} x X_{2n-1} + C_{2n,2} x^2 X_{2n-2} - \cdots + x^{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{1.3.5\,..\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots 2n} (x^2-1)^n, \quad . \ . \quad (L)$$

$$\int_0^{\operatorname{arc}\cos x} \frac{\sin^{2n}\varphi}{\cos^{2n+1}\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - x^2}} = \frac{\pi}{2} \frac{1\ 3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots 2n} \frac{(1-x^2)^n}{x^{2n+1}} . \quad \ldots \quad (M)$$

VIII.

La relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\omega d\omega}{(1-\mu \sin^2\omega)^{n+1}} = (1-\mu)^{-\frac{2n+1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\omega d\omega. \quad \ldots \ldots \quad (K)$$

devient, si l'on remplace $\sin^2\omega$ par θ,

$$\int_0^1 \frac{\theta^{n-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta}{(1-\mu\theta)^{n+1}} = (1-\mu)^{-\frac{2n+1}{2}} \int_0^1 \theta^{n-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \quad \ldots \ldots \quad (N)$$

Celle-ci, aussi bien que la première, *est générale :* elles exigent, seulement, que $n + \frac{1}{2}$ soit positif (**).

En effet, le premier membre égale

$$\int_0^1 \theta^{n-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \left[1 + \frac{n+1}{1}\mu\theta + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\mu^2\theta^2 + \cdots\right],$$

(*) Énoncées dans le *Mémoire*.

(**) Condition connue par la théorie des intégrales eulériennes.

ou

$$\sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}+\frac{n+1}{1}\mu\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)}+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\mu^2\frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(n+3)}+\cdots\right];$$

ou, sous une forme plus simple,

$$\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}\left[1+\frac{n+\frac{1}{2}}{1}\mu+\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}{1.2}\mu^2+\cdots\right],$$

ou enfin,

$$\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}(1-\mu)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

Cette expression ne diffère pas du second membre de (N); donc la proposition est démontrée.

IX.

Si, dans l'égalité (K), on fait $\mu=\frac{b-a}{b}$, elle devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\omega d\omega}{(a\sin^2\omega+b\cos^2\omega)^{n+1}}=\frac{1}{a^{n+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\omega d\omega. \quad\ldots\ldots \quad (18)$$

Il y a une relation beaucoup plus générale, savoir :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2q}\omega\cos^{2p}\omega d\omega}{(a\sin^2\omega+b\cos^2\omega)^{n+1}}=\frac{1}{a^{n+\frac{1}{2}-p}b^{n+\frac{1}{2}-q}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^2\omega+b\cos^2\omega)^{n-p-q}\sin^{2p}\omega\cos^{2q}\omega d\omega\ (*). \quad (P)$$

Cette égalité est démontrée pour le cas de $p=0$, $q=0$ (**). Afin de

(*) Mon premier *Mémoire sur les fonctions* X_n contient (p. 24) un cas particulier de celle-ci. On en trouve un autre dans le *Calcul intégral* de M. Bertrand (p. 279).

(**) Voir le *Mémoire* cité.

l'étendre au cas de p, q *positifs et entiers,* il suffit de vérifier que, si elle a été reconnue vraie pour certaines valeurs de ces nombres, elle subsiste quand on augmente, d'une unité, l'un ou l'autre.

Cela posé, soit par exemple,

$$B_q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2q}\omega \cos^{2p}\omega d\omega}{D^{n+1}}, \quad B_{q-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2q-2}\omega \cos^{2p}\omega d\omega}{D^{n+1}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

D représentant $a\sin^2\omega + b\cos^2\omega$.

On conclut, de ces égalités,

$$(a-b)\, B_q + b\, B_{q-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2q-2}\omega \cos^{2p}\omega d\omega}{D^{n+1}} \left[(a-b)\sin^2\omega + b\right];$$

ou

$$(a-b)\, B_q = -\, b\, B_{q-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2q-2}\omega \cos^{2p}\omega d\omega}{D^{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Par hypothèse :

$$B_{q-1} = \frac{1}{a^{n+\frac{1}{2}-p}\, b^{n+\frac{1}{2}-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D^{n-p-q+1} \sin^{2p}\omega \cos^{2q-2}\omega d\omega,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2q-2}\omega \cos^{2p}\omega d\omega}{D^{n}} = \frac{1}{a^{n-\frac{1}{2}-p}\, b^{n+\frac{1}{2}-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D^{n-p-q} \sin^{2p}\omega \cos^{2q-2}\omega d\omega.$$

Au moyen de ces valeurs, l'égalité (20) se transforme en

$$(a-b)\, B_q = \frac{1}{a^{n+\frac{1}{2}-p}\, b^{n+\frac{1}{2}-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D^{n-p-q} \sin^{2p}\omega \cos^{2q-2}\omega \left[a - (a\sin^2\omega + b\cos^2\omega)\right] d\omega.$$

On tire, de celle-ci,

$$B_q = \frac{1}{a^{n+\frac{1}{2}-p}\, b^{n+\frac{1}{2}-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D^{n-p-q} \sin^{2p}\omega \cos^{2q}\omega d\omega;$$

ce qu'il fallait démontrer.

X.

Il n'est pas difficile d'aller plus loin, et de prouver que *la relation* (P) *subsiste pour toutes les valeurs positives des paramètres* p, q.

Comme $a = b(1 - \mu)$, on peut l'écrire ainsi :

$$\int_0^1 \frac{\theta^{q-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{p-\frac{1}{2}}d\theta}{(1-\mu\theta)^{n+1}} = (1-\mu)^{-(n+\frac{1}{2}-p)}\int_0^1 (1-\mu\theta)^{n-p-q}(1-\theta)^{q-\frac{1}{2}}\theta^{p-\frac{1}{2}} \quad . \quad (\mathrm{P}')$$

Le développement du premier membre est, par un calcul semblable au précédent,

$$\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+q+1)}\left[1+\frac{n+1}{1}\,\frac{q+\frac{1}{2}}{p+q+1}\mu+\frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}\,\frac{\left(q+\frac{1}{2}\right)\left(q+\frac{3}{2}\right)}{(p+q+1)(p+q+2)}\mu^2+\cdots\right].$$

De même, l'intégrale contenue dans le second membre équivaut à

$$\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+q+1)}\left[1+\frac{p+q+n}{1}\,\frac{p+\frac{1}{2}}{p+q-1}\mu+\frac{(p+q-n)(p+q-n+1)}{1\,.\,2}\,\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)p+\frac{3}{2})}{(p+q+1)(p+q+2)}\mu^2+\cdots\right].$$

Si nous représentons par S, S′ les sommes des deux séries (supposées convergentes, bien entendu), nous avons donc ces trois égalités :

$$\mathrm{S} = \frac{\Gamma(p+q+1)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 \frac{\theta^{q-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{p-\frac{1}{2}}\,d\theta}{(1-\mu\theta)^{n+1}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

$$\mathrm{S}' = \frac{\Gamma(p+q+1)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 (1-\mu\theta)^{n-p-q}\theta^{p-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{q-\frac{1}{2}}d\theta, \quad . \quad (22)$$

$$\mathrm{S} = (1-\mu)^{-(n+\frac{1}{2}-p)}\,\mathrm{S}'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Il s'agit d'établir la généralité de la troisième.

Or, si l'on suppose le second membre ordonné suivant les puissances de μ (*), et que l'on transpose, la *différence* δ, entre les deux membres, prendra la forme

$$A_0 + A_1\mu + \cdots + A_k\mu^k + \cdots$$

Dans cette série, le coefficient A_k, du terme général, est une *fonction rationnelle* de p, q, n.

D'après un paragraphe précédent, cette fonction est nulle pour une infinité de valeurs attribuées à ces paramètres; donc *elle est identiquement nulle* (**); et $\delta = 0$.

En résumé, *les relations* (P), (P'), (21), (22), (23) *sont générales.*

XI.

Posons :

$$p + q - n = \gamma - \beta, \quad p + \frac{1}{2} = \gamma - \alpha, \quad p + q + 1 = \gamma. \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Il résulte, de ces équations :

$$p = \gamma - \alpha - \frac{1}{2}, \quad n = \beta - 1, \quad q = \alpha - \frac{1}{2}, \quad n + \frac{1}{2} - p = \alpha + \beta - \gamma, \quad \text{etc.} \quad (25)$$

Les séries S, S' deviennent, en employant la notation de Gauss, et en remplaçant μ par x :

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \text{(***)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

$$F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\gamma-\alpha}{1}\frac{\gamma-\beta}{\gamma}x + \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)}{1.2}\frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \quad (27)$$

(*) Cette opération sera effectuée tout à l'heure.

(**) Contester cette proposition serait admettre qu'*une équation algébrique peut avoir une infinité de racines.*

(***) Cette égalité (26) est la *définition* même du symbole F. Elle prouve que l'on peut intervertir l'ordre des deux premiers paramètres; ce que nous avons fait.

Quant aux relations (21), (22), (23), elles prennent les formes suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\gamma-\alpha-1}d\theta}{(1-\theta x)^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad \ldots \quad (Q)$$

$$\int_0^1 (1-\theta x)^{\beta-\gamma}\theta^{\gamma-\alpha-1}(1-\theta)^{\alpha-1}d\theta = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x), \quad \ldots \quad (R)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x); \quad \ldots \quad (S)$$

ou bien celles-ci, un peu plus symétriques :

$$\int_0^1 \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\alpha'-1}d\theta}{(1-\theta x)^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha+\alpha')} F(\alpha, \beta, \alpha+\alpha', x), \quad \ldots \quad (Q')$$

$$\int_0^1 (1-\theta x)^{\beta-\alpha-\alpha'}\theta^{\alpha'-1}(1-\theta)^{\alpha-1}d\theta = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha+\alpha')} F(\alpha', \alpha+\alpha'-\beta, \alpha+\alpha', x), \quad (R')$$

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\alpha', x) = (1-x)^{\alpha'-\beta} F(\alpha', \alpha+\alpha'-\beta, \alpha+\alpha', x). \text{ (*)} \quad \ldots \quad (S')$$

De (S), on conclut :

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{F(\alpha+\delta, \beta-\delta, \gamma, x)} = \frac{F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)}{F(\gamma-\alpha-\delta, \gamma-\beta+\delta, \gamma, x)},$$

ou

$$\frac{F(\alpha+\delta, \beta-\delta, \gamma, x)}{F(\gamma-\alpha-\delta, \gamma-\beta+\delta, \gamma, x)} = \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)}. \quad \ldots \quad (28)$$

Ainsi, *le rapport des fonctions contenues dans le premier membre est indépendant de* δ.

(*) L'égalité (Q) a été donnée par Binet (*Journal de l'École polytechnique*, 27e Cahier, p. 314). Quant au beau théorème qu'exprime l'équation (S), on le trouve dans les *OEuvres de Gauss* (t. III, p. 209). Bien entendu, le grand Géomètre y est parvenu en suivant un procédé tout différent du nôtre.

XII.

Les égalités (26), (27) peuvent être écrites ainsi :

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_0^\infty \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{1.2\ldots n} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n, \quad (26')$$

$$F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) = \sum_0^\infty \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)\ldots(\gamma-\alpha+q-1)}{1.2\ldots q} \frac{(\gamma-\beta)\ldots(\gamma-\beta+q-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+q-1)} x^q. \quad (27')$$

D'autre part,

$$(1-x)^{-(\alpha+\beta-\gamma)} = \sum_0^\infty \frac{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma+1)\ldots(\alpha+\beta-\gamma+p-1)}{1.2\ldots p} x^p.$$

Par conséquent l'égalité (S) entraîne celle-ci :

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{1.2\ldots n} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}$$

$$= \sum \frac{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma+1)\ldots(\alpha+\beta-\gamma+p-1)}{1.2\ldots p} \times \frac{(\gamma-\alpha)\ldots(\gamma-\alpha+q-1)}{1.2\ldots q} \cdot \frac{(\gamma-\beta)\ldots(\gamma-\beta+q-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+q-1)}, \quad (29)$$

dans laquelle $p+q=n$.

Le premier membre, multiplié par $1.2.3\ldots n$, est la même chose que

$$\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}.$$

De même, le terme général du second membre peut être remplacé par

$$C_{n,p} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+p)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha+q)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma-\beta+q)}{\Gamma(\gamma-\beta)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+q)}.$$

Donc l'égalité (29) devient

$$\sum C_{n,p} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+p)\Gamma(\gamma-\alpha+q)\Gamma(\gamma-\beta+q)}{\Gamma(\gamma+q)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)}. \quad (p+q=n). \quad (T)$$

Cette *formule de sommation*, peut-être nouvelle, en donne une infinité d'autres.

Soit, par exemple, $\alpha = \beta = \gamma - 1$. Alors

$$\sum C_{n,p} \frac{\Gamma(\gamma - 2 + p)[\Gamma(1 + q)]^2}{\Gamma(\gamma + q)} = \frac{\Gamma(\gamma - 2)[\Gamma(\gamma - 1 + n)]^2}{[\Gamma(\gamma - 1)]^2\Gamma(\gamma + n)};$$

ou, plus simplement,

$$\sum_0^n C_{n,q} \frac{\Gamma(\gamma + n - q - 2)[\Gamma(1 + q)]^2}{\Gamma(\gamma + q)} = \frac{\Gamma(\gamma + n - 1)}{(\gamma - 2)(\gamma + n - 1)\,\Gamma(\gamma - 1)};$$

ou, si l'on remplace γ par $k + 3$:

$$\sum_0^n C_{n,q} \frac{\Gamma(k + n - q + 1)[\Gamma(1 + q)]^2}{\Gamma(k + 3 + q)} = \frac{\Gamma(k + n + 2)}{(k + 1)(k + n + 2)\Gamma(k + 2)};$$

ou enfin, par la suppression d'un facteur commun :

$$\sum_0^n C_{n,q} \frac{\Gamma(k + n + 1 - q)[\Gamma(1 + q)]^2}{(k + 2)(k + 3)\dots(k + q + 2)} = \frac{\Gamma(k + n + 2)}{(k + 1)(k + n - 2)}. \quad . \quad . \quad . \qquad (U)$$

Comme application, prenons $n = 4$, $k = 3$. Nous devons trouver :

$$\sum_0^4 C_{4,q} \frac{\Gamma(8 - q)[\Gamma(1 + q)]^2}{5.6\dots(5 + q)} = \frac{\Gamma(9)}{4.9},$$

ou

$$\frac{4.5.6.7}{5} + 4\cdot\frac{4.5.6.1^2}{5.6} + 6\,\frac{4.5.2^2}{5.6.7} + 4\cdot\frac{4.6^2}{5.6.7.8} = \frac{5.6.7.8}{9},$$

ou

$$168 + 16 + \frac{16}{7} + \frac{12}{35} + \frac{4}{105} = 186\,\frac{2}{3},$$

ou

$$\frac{1}{7} + \frac{6}{35} + \frac{2}{102} = \frac{1}{3};$$

ce qui est exact.

XIII.

La relation (U) peut être écrite ainsi :

$$\sum_{0}^{b-a-1} C_{b-a-1,q} \frac{\Gamma(b-1-q)[\Gamma(1+q)]^2}{(a+1)(a+2)\ldots(a+1+q)} = \frac{1.2.3\ldots\overline{b-1}}{ab} \quad \ldots\ldots \quad (U')$$

Si *le nombre entier* b *est décomposable, au moins de deux manières, en deux facteurs inégaux* (*), *le second membre est entier.*

Soit, en effet,

$$b = ff' = gg'.$$

Si f et f' sont différents de a, ces deux facteurs restent dans le numérateur, après suppression de a. Et si $f = a$, on prend $b = gg'$.

Considérons, dans le premier membre de (U′), le facteur *fractionnaire*

$$\frac{\Gamma(b-1-q)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+1+q)} = \frac{1.2.3\ldots(b-2-q)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+1+q)}.$$

Cette fraction se réduit à un nombre entier, si $(b-2-q)$ est égal ou supérieur à $(a+1+q)$; c'est-à-dire si l'on prend

$$q \leqq \frac{b-a-3}{2}.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

a, b *satisfaisant aux conditions indiquées ci-dessus, et* c *désignant le nombre entier immédiatement supérieur à* $\frac{b-a-3}{2}$,

$$\sum_{c}^{b-a-1} C_{b-a-1,q} \frac{\Gamma(b-1-q)[\Gamma(1+q)]^2}{(a+1)(a+2)\ldots(a+1+q)} = \textit{entier};$$

(*) Cette condition, *suffisante*, n'est pas nécessaire. Par exemple,

$$\frac{1.2.3.4.5}{4.6} = \textit{entier}.$$

ou, après suppression d'un facteur commun :

$$\sum_{c}^{b-a-1} \frac{(b-a-q)(b-a-q+1)\ldots(b-a-1)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+1+q)} \Gamma(b-1-q)\Gamma(1+q) = \textit{entier}. \quad \text{(V)}$$

Application. — Soient $a = 5$, $b = 12$. On doit trouver, à cause de $c = 3$:

$$\frac{4.5.6}{6.7.8.9}\Gamma(8)\Gamma(4) + \frac{3.4.5.6}{6.7.8.9.10}\Gamma(7)\Gamma(5) + \frac{2.3.4.5.6}{6.7.8.9.10.11}\Gamma(6)\Gamma(6)$$
$$+ \frac{1.2.3.4.5.6}{6.7.8.9.10.11.12}\Gamma(5)\Gamma(7) = \textit{entier}.$$

Le premier terme est un nombre entier. Il reste à vérifier que

$$\frac{1.2.3.4.3.4.5.6}{6.7.8.9.10}\left[50\,\Gamma(5) + \frac{10}{11}\Gamma(6) + \frac{1}{66}\Gamma(7)\right] = \textit{entier},$$

ou

$$\frac{480}{7}\left(3 + \frac{5}{11} + \frac{1}{22}\right) = \textit{entier};$$

ce qui a lieu (*).

XIV.

Svanberg et M. Hermite ont donné la formule

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx = 2\pi \cot p\pi, \quad (0 < p < 1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(W)}$$

(*) D'après cet exemple et quelques autres, *il semble* que *chacun des termes de* (V) *est réductible à la forme* $\frac{N}{p.q.r\ldots}$, p, q, $r\ldots$, *étant les nombres premiers* compris entre $a+1$ et $a+1+q$, *inclusivement.* Cette simple induction mérite d'être examinée.

Voici comment on peut la démontrer (*):

A étant la valeur de l'intégrale, on a

$$A = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx \text{ (**)}.$$

Si, dans la seconde intégrale, on remplace x par $\frac{1}{x}$, elle se change en la première. Ainsi déjà :

$$A = 2\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Développant, en séries, $\frac{x^{p-1}}{1-x}$ et $\frac{x^{-p}}{1-x}$ (***); intégrant, puis appliquant la formule

$$\cot p\pi = \frac{1}{p\pi} - \frac{2p}{\pi}\left[\frac{1}{1-p^2} + \frac{1}{4-p^2} + \frac{1}{9-p^2} + \cdots\right],$$

on trouve la relation (W), ou, ce qui est équivalent,

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx = \pi \cot p\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

XV.

On sait que

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \text{ (IV)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

(*) Méthode connue.

(**) Lorsque $x = 1$, la fraction prend la forme $\frac{0}{0}$; mais cette indétermination n'est qu'apparente : la limite est $1 - 2p$.

(***) Ces séries sont convergentes.

(IV) Même démonstration.

Il résulte, des deux dernières formules,

$$\int_0^1 \left(\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1+x} - \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\right) dx = \pi \operatorname{tg} \frac{1}{2} p\pi,$$

ou

$$\int_0^1 \frac{x^{-p}-x^{p}}{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} p\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Si l'on change p en $2p'$, et x^2 en x, cette égalité devient

$$\int_0^1 \frac{x^{-p'}-x^{p'}}{1-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \pi \operatorname{tg} p'\pi \ (^*). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (X)$$

XVI.

Multiplions par $d\varphi$ les deux membres de l'égalité (31); et, en supposant p plus grand que $\frac{1}{2}$, intégrons à partir de cette limite (**). Nous trouvons

$$\mathfrak{L}.\sin p\pi = \int_{\frac{1}{2}}^{p} dp \int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{1-x} \int_{\frac{1}{2}}^{p} (x^{p-1}-x^{-p})\, dp.$$

L'intégrale relative à p est

$$\frac{1}{\mathfrak{L}.x}\left[x^{p-1}+x^{-p}-2x^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{\left(x^{\frac{p-1}{2}} - x^{-\frac{p}{2}}\right)^2}{\mathfrak{L}.x}.$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{\left(x^{\frac{p-1}{2}} - x^{-\frac{p}{2}}\right)^2 dx}{(1-x)\,\mathfrak{L}.x} = \mathfrak{L}.\sin p\pi; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

(*) Dans celle-ci, p' doit être inférieur à $\frac{1}{2}$.

(**) Quand $p = \frac{1}{2}$, l'intégrale est nulle.

ou, par le changement de x en e^{-z} :

$$\int_0^\infty \frac{\left(e^{\frac{p}{2}z} - e^{-\frac{p-1}{2}z}\right)^2}{1-e^{-z}} \frac{dz}{z} = -\mathfrak{L}.\sin p\pi. \quad \ldots\ldots \quad \text{(Y)}$$

Remarque. — On a, simultanément :

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{tg} p\pi = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{-p}-x^{p}}{1-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}, & \cot p\pi = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx, \\ \operatorname{cos\acute{e}c} p\pi = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\,dx, & \operatorname{s\acute{e}c} p\pi = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{-p-\frac{1}{2}}+x^{p-\frac{1}{2}}}{1-x}\,dx. \end{array} \left(p < \frac{1}{2}\right) \right\} (^*)(35)$$

XVII.

Dans son célèbre *Mémoire sur les intégrales définies* (**), Poisson donne l'importante relation :

$$\frac{e^p - e^{-p}}{e^p + 2\cos\theta + e^{-p}} = 2\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{p}{[(2i-1)\pi-\theta]^2+p^2} + 2\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{p}{[(2i-1)\pi+\theta]^2+p^2}. \quad \text{(Z)}$$

Pour y parvenir, l'illustre Géomètre démontre d'abord la formule

$$\frac{e^p + 2\cos\theta + e^{-p}}{2(1+\cos\theta)} = \prod_{i=1}^{i=\infty} \left[1 + \frac{p^2}{[(2i-1)\pi-\theta]^2}\right]\left[1 + \frac{p^2}{[(2i-1)\pi+\theta]^2}\right], \quad (36)$$

due à Euler.

(*) La troisième formule est une transformation de celle-ci :

$$\mathrm{B}(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

La quatrième résulte de la troisième, par le changement de p en $\frac{1}{2} - p$.

(**) *Journal de l'École polytechnique*, 18e Cahier.

En opérant de la manière suivante, on évite de longues transformations, assez peu naturelles.

Des formules connues (*) :

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{9-a^2}+\cdots=\frac{1}{2a^2}[1-a\pi\cot a\pi]\ (^{**}),$$

$$\frac{1}{1-a^2}-\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{9-a^2}-\cdots=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{a\pi}{\sin a\pi}-1\right],$$

on déduit :

$$\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{(2i-1)^2-a^2}=\frac{\pi}{4a}\left[\frac{1}{\sin a\pi}-\cot a\pi\right],$$

ou

$$\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{(2i-1)^2-a^2}=\frac{\pi}{4a}\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\pi. \qquad (37)$$

De même,

$$\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{(2i-1)^2-b^2}=\frac{\pi}{4b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\pi \qquad (38)$$

Conséquemment,

$$\frac{\pi}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\pi-\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\pi\right)=\sum_{i=1}^{i=\infty}\left[\frac{2a}{(2i-1)^2-a^2}-\frac{2b}{(2i-1)^2-b^2}\right] \qquad (39)$$

Soient :

$$a\pi=\theta+p,\quad b\pi=\theta-p.$$

Le premier membre devient

$$\pi\frac{\sin p}{2\cos\frac{\theta+p}{2}\cos\frac{\theta-p}{2}}=\pi\frac{\sin p}{\cos\theta+\cos p}.$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 116.

(**) Celle-ci a été employée dans le paragraphe XIV.

Dans le second membre, la quantité entre parenthèses devient, par la décomposition de chacune des deux fractions :

$$\frac{\pi}{[(2i-1)\pi-\theta]-p}-\frac{\pi}{[(2i-1)\pi+\theta]+p}-\frac{\pi}{[(2i-1)\pi-\theta]+p}+\frac{\pi}{[(2i-1)\pi+\theta]-p},$$

ou

$$\frac{2p\pi}{[2i-1)\pi-\theta]^2-p^2}+\frac{2p\pi}{[(2i-1)\pi+\theta]^2-p^2}.$$

Nous avons donc, au lieu de l'égalité (39),

$$\frac{\sin p}{\cos\theta+\cos p}=2\sum_1^\infty\left[\frac{p}{[(2i-1)\pi-\theta]^2-p^2}+\frac{p}{[(2i-1)\pi+\theta)]^2-p^2}\right];$$

puis, par le changement de p en $p\sqrt{-1}$:

$$\frac{e^p-e^{-p}}{e^p+\cos\theta+e^{-p}}=2\sum_1^\infty\left[\frac{p}{[(2i-1)\pi-\theta]^2+p^2}+\frac{p}{[(2i-1)\pi+\theta]^2+p^2}\right]. \quad (Z)$$

Liège, 3 octobre 1885.