SUR

LES FONCTIONS X_n, DE LEGENDRE,

(TROISIÈME MÉMOIRE)

PAR

E. CATALAN,
ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Mémoire présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 10 octobre 1885.)

SUR

LES FONCTIONS X_n, DE LEGENDRE.

I

RAPPEL D'ANCIENNES FORMULES (*).

1. *Relations entre les fonctions* X_n *et leurs dérivées.*

$$(1 - x^2)\frac{dX_{n-1}}{dx} = n(xX_{n-1} - X_n), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$(1 - x^2)\frac{dX_n}{dx} = n(X_{n-1} - xX_n), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$X_{n-1} - X_{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)}(1 - x^2)\frac{dX_n}{dx}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

$$X_0X_n + X_1X_{n-1} + X_2X_{n-2} + \cdots + X_nX_0 = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}, \quad (\cos\alpha = x) \ldots \quad (5)$$

$$\int_{-1}^{x} X_n dx = -\frac{1 - x^2}{n(n+1)}\frac{dX_n}{dx} = \frac{xX_n - X_{n-1}}{n+1}, \quad (n > 0) \ldots \quad (6)$$

$$X_n + X_{n+1} = X_0\int_{-1}^{x} X_n dx + X_1\int_{-1}^{x} X_{n-1}dx + \cdots + X_n\int_{-1}^{x} X_0 dx, \ldots \quad (7)$$

(*) Afin d'épargner, au lecteur, l'ennui de compulser les deux premiers *Mémoires* et la première *Note,* nous transcrivons, dans ce paragraphe, les relations dont nous aurons besoin.

2. *Valeurs de* X_0, X_1, ...

$$X_0 = 1, \quad X_1 = x, \quad X_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad X_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad X_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$X_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \quad X_6 = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),$$

$$X_7 = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x),$$

$$X_8 = \frac{1}{128}\; 6\,435x^8 - 12\,012x^6 + 6\,930x^4 - 1\,260x^2 + 35),$$

. . . .

$$\left.\begin{array}{l} \left[X_n\right]_{x=1} = 1, \quad \left[X_n\right]_{x=-1} = (-1)^n, \quad \left[X_n\right]_{x=0} = 0 \text{ (n } impair\text{)}, \\ \left[X_n\right]_{x=0} = \pm \dfrac{1.3.5\ldots\overline{n-1}}{2.4.6\ldots n} \quad (n\, pair)\ (^*) \quad . \; . \; . \; . \; . \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

3. *Expressions diverses de* X_n.

$$X_n = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

$$X_n = \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi (x\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n d\varphi \ (^{**}), \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \sqrt{x^2-1}\,\cos\omega)^n d\omega, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

$$X_n = \frac{2}{\pi} x^{n+1} \int_0^{\arccos x} \frac{\cos n\varphi}{\cos^{n+1}\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - x^2}}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

(*) Le signe + si $n = \mathfrak{M}(4)$.

(**) Dans cette formule, et dans toutes celles du même genre, on fait abstraction de la partie imaginaire.

4. *Intégrales définies.*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \frac{2}{2n+1} z^n, \qquad (14)$$

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_{n'} dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{n+1}, \qquad (15)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n} dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi \left[\frac{1.3.5 \ldots \overline{2n-1}}{2.4.6 \ldots 2n}\right]^2 = \frac{\pi}{16^n} [C_{2n,\,n}]^2. \qquad (15)$$

5. *Développements en séries.*

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_0^\infty X_n z^n, \qquad (16)$$

$$\sqrt{1 - 2xz + z^2} = 1 - xz + (1 - x^2) \sum_1^\infty \frac{dX_n}{dx} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)}, \qquad (17)$$

$$\sqrt{1 - 2xz + z^2} = 1 - xz + \sum_1^\infty (X_{n-1} - xX_n) \frac{z^{n+1}}{n+1}, \qquad (18)$$

$$\frac{1}{1 - 2xz + z^2} = \sum_0^\infty \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} z^n, \qquad (19)$$

$$\frac{1 - xz}{(1 - 2xz + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_0^\infty (n+1) X_n z^n, \qquad (20)$$

$$\frac{1 - xz}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = 1 + \sum_0^\infty (X_{n+1} - xX_n) z^{n+1}, \qquad (21)$$

$$\mathcal{L}.\frac{z - x + \sqrt{1 - 2xz + z^2}}{1 - x} = \sum_0^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad (22)$$

II

RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS X_n.

6. La combinaison des formules

$$\int_{-1}^{x} X_n dx = \frac{xX_n - X_{n-1}}{n+1}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$X_n + X_{n+1} = X_0 \int_{-1}^{x} X_n dx + X_1 \int_{-1}^{x} X_{n-1} dx + \cdots + X_{n-1} \int_{-1}^{x} X_1 dx + X_n (1 + x) \quad . \quad . \quad (7)$$

donne, au lieu de la seconde,

$$X_0 \frac{xX_n - X_{n-1}}{n+1} + X_1 \frac{xX_{n-1} - X_{n-2}}{n} + \cdots + X_{n-1} \frac{xX_1 - X_0}{2} = X_{n+1} - xX_n \quad . \quad . \quad (A)$$

7. *Remarques.* — I. Chacun des binômes est divisible par $x^2 - 1$ (1). Donc les deux membres admettent ce même diviseur.

II. Si n est *pair*, les deux membres sont divisibles par x (*).

III. Si n est *impair*, et que l'on fasse $x = 0$, l'égalité (A) devient

$$\left[\frac{X_0 X_{n-1}}{n+1} + \frac{X_2 X_{n-3}}{n-1} + \frac{X_4 X_{n-5}}{n-3} + \cdots + \frac{X_{n-1} X_0}{2}\right]_0 = -[X_{n+1}]_0 .$$

Or,

$$[X_{n+1}]_0 = \pm \frac{1.3.5 \ldots n}{2.4.6 \ldots \overline{n+1}}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

ou, par une transformation bien connue,

$$[X_{n+1}]_0 = \pm \frac{1.2.3 \cdots \overline{n+1}}{[2.4.6 \cdots \overline{n+1}]^2} = \pm \frac{1}{2^{n+1}} C_{n+1, \frac{n+1}{2}} \text{ (**)}.$$

(*) En effet, X_{n+1} s'annule avec x (8).

(**) Cette fois, on doit prendre le signe supérieur si $n + 1 = \mathfrak{M}$ (4).

Remplaçant n par $2n+1$, on a donc cette relation *combinatoire :*

$$\frac{1}{n+1}C_{2n,n}+\frac{1}{n}C_{2,1}.C_{2n-2,n-1}+\frac{1}{n-1}C_{4,2}.C_{2n-4,n-2}+\cdots+C_{2n,n}=\frac{1}{2}C_{2n+2,n+1}(*)\quad.\quad\text{(B)}$$

Exemple :

$$\frac{1}{4}C_{6,3}+\frac{1}{3}C_{2,1}.C_{4,2}+\frac{1}{2}C_{4,2}.C_{2,1}+C_{6,3}=\frac{1}{2}C_{8,4},$$

ou

$$\frac{5}{4}\cdot 20+\frac{5}{6}.2.6=\frac{1}{2}\cdot 70,$$

ou

$$25+10=35.$$

8. Théorème. — *Le nombre* n *étant impair :*

$$X_n-C_{n,1}xX_{n-1}+C_{n,2}x^2X_{n-2}-\cdots-x^n=0\,.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad\text{(C)}$$

Soit $F_n(x)$ le premier membre. D'après la formule

$$X_n=\frac{2}{\pi}x^{n+1}\int_0^{\text{arc}\cos x}\frac{\cos n\varphi}{\cos^{n+1}\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi-x^2}},\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(12)$$

on a

$$F_n(x)=\frac{2}{\pi}x^{n+1}\int_0^{\text{arc}\cos x}\frac{S_n}{\cos^{n+1}\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi-x^2}},$$

en posant

$$S_n=\cos n\varphi-\frac{n}{1}\cos\overline{n-1}\varphi\cos\varphi+\frac{n(n-1}{1.2}\cos\overline{n-2}\varphi\cos^2\varphi-\cdots-\cos^n\varphi.$$

(*) D'après un théorème connu (*Cours d'Analyse*, p. 48), *chacun des termes du premier membre est un nombre entier*. De plus, la somme des coefficients de deux termes semblables est une fraction dont le numérateur est $n+2$.

Il est clair que S_n est la partie *réelle* de

$$e^{n\varphi\sqrt{-1}} - \frac{n}{1} e^{(n-1)\varphi\sqrt{-1}} \cos\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{(n-2)\varphi\sqrt{-1}} \cos^2\varphi - \cdots - \cos^n\varphi = \left(e^{\varphi\sqrt{-1}} - \cos\varphi\right)^n,$$

ou la partie *réelle* de $\left(\sqrt{-1}\sin\varphi\right)^n$.

Or, n étant *impair*, cette quantité est nulle.

9. Théorème. — *Le nombre* n *étant pair :*

$$X_n - C_{n,1}xX_{n-1} + C_{n,2}x^2X_{n-2} - \cdots + x^n = \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{-1}\right)^n x^{n+1} \int_0^{\arccos x} \frac{\sin^n\varphi}{\cos^{n+1}\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - x^2}} . \quad \text{(D)}$$

Même démonstration.

10. *Remarques.* — I. On peut prouver que la valeur de l'intégrale est

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{n+1}}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^{\frac{n}{2}} C_{n,\frac{n}{2}} \text{ (*)}.$$

Donc la dernière égalité se réduit à

$$X_n - C_{n,1}xX_{n-1} + C_{n,2}x^2X_{n-2} - \cdots + x^n = \left(\frac{x^2-1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} C_{n,\frac{n}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(E)}$$

II. Toujours dans le cas de n *pair, l'équation* $F_n(x) = 0$ *a* n *racines égales à* $+1$, n *racines égales à* -1.

III. Si l'on néglige un facteur numérique,

$$\frac{d^{\frac{n}{2}} F_n(x)}{(dx)^{\frac{n}{2}}} = X_{\frac{n}{2}}.$$

(*) Voir la *Note sur quelques intégrales définies.*

11. THÉORÈME. — *On a, identiquement,*

$$X_0X_n + X_1X_{n-1} + \cdots + X_nX_0 = (2x)^n - C_{n-1,1}(2x)^{n-2} + C_{n-2,2}(2x)^{n-4} - \cdots \quad \text{(F)}$$

On sait que

$$X_0X_n + X_1X_{n-1} + \cdots + X_nX_0 = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} \quad (5)$$

D'un autre côté, d'après une formule attribuée à Viète :

$$\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} = (2x)^n - C_{n-1,1}(2x)^{n-2} + C_{n-2,2}(2x)^{n-4} - \cdots (*) \quad (23)$$

La relation (F) est donc démontrée.

12. *Remarques.* — I. Bien que les polynômes $X_2, X_3, \ldots, X_n$ aient des coefficients fractionnaires, la quantité

$$X_0X_n + X_1X_{n-1} + \cdots + X_nX_0$$

est un *polynôme à coefficients entiers.*

(*) *Sur quelques développements de* $\sin nx$ *et de* $\cos nx$. (NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, 1883.)

De cette formule de Viète, trop peu étudiée, on conclut encore les propositions suivantes:

1° *Si l'on fait* $x + \frac{1}{x} = z$, *la* RÉDUITE *de*

$$x^{2n} + x^{2n-2} + \cdots + x^2 + 1 = 0$$

est

$$z^n - \frac{n-1}{1} z^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} z^{n-4} - \cdots = 0.$$

2° On a, *identiquement,*

$$1 - \frac{n-1}{1}\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\sin^4\varphi\cos^4\varphi - \cdots = \sin^{2n}\varphi + \sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi + \cdots + \cos^{2n}\varphi.$$

II. Soit $\alpha = \frac{\pi}{3}$, auquel cas $x = \frac{1}{2}$. Nous avons cette *triple* égalité :

$$\left.\begin{aligned} [X_0X_n + X_1X_{n-1} + \cdots + X_nX_0]_{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{n-1}{1} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3} + \cdots \\ &= \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = +1, \quad -1 \quad \text{ou} \quad 0\ (^*). \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

13. *Discussion d'une équation.* — L'égalité (23), à laquelle on n'a pas fait suffisamment attention, croyons-nous, permet de décomposer, en facteurs, la quantité

$$f(x) = X_0X_n + X_1X_{n-1} + \cdots + X_nX_0.$$

Mais, préalablement, discutons l'équation

$$(2x)^n - C_{n-1,1}(2x)^{n-2} + C_{n-2,2}(2x)^{n-4} - \cdots = 0. \quad (25)$$

1° Si n est *impair*, elle a une racine *nulle*.

2° Cette racine étant *mise de côté*, pour ainsi dire, les autres racines sont, deux à deux, égales et de signes contraires.

3° A cause de la relation (23) ces racines sont données par la formule

$$x = \pm\cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad (26)$$

(*) Le résultat est $+1$ lorsque $n = 6n'$ ou $6n'+1$; il est -1 quand $n = 6n'+3$ ou $6n'+4$; il est nul, enfin, si $n = 6n'+2$ ou $6n'+5$. Dans la Note citée, nous avons considéré le cas de $\alpha = 0$. Si l'on se rappelle que, pour $x = \frac{1}{2}$,

$$X_n = \frac{1}{4^n}\left\{3^n - \left(\frac{n}{1}\right)^2 3^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2 3^{n-2} - \cdots \pm \left(\frac{n}{1}\right)^2 3 \mp 1\right\}$$

(premier *Mémoire*, p. 13), on trouvera remarquable, peut-être, la formule

$$[X_0X_n + X_1X_{n-1} + \cdots + X_nX_0]_{\frac{1}{2}} = \left\{\begin{matrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}\right\}.$$

dans laquelle k doit recevoir $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ valeurs consécutives, suivant que n est *pair* ou *impair* (*).

4° Pour abréger et simplifier, supposons n *pair*. Alors le premier membre de l'équation (25) est égal à

$$2^n\left(x^2-\cos^2\frac{\pi}{n+1}\right)\left(x^2-\cos^2\frac{2\pi}{n+1}\right)\cdots\left(x^2-\cos^2\frac{\frac{n}{2}\pi}{n+1}\right).$$

5° Changeant x en $\frac{x}{2}$, on a donc, *identiquement*, lorsque n est *pair* :

$$x^n-C_{n-1,1}x^{n-2}+C_{n-2,2}x^{n-4}-\cdots=\left(x^2-4\cos^2\frac{\pi}{n+1}\right)\left(x^2-4\cos^2\frac{2\pi}{n+1}\right)\cdots\left(x^2-4\cos^2\frac{\frac{n}{2}\pi}{n+1}\right).\quad(27)$$

6° Posons

$$a=2\cos\frac{\pi}{n+1};\quad b=2\cos\frac{2\pi}{n+1},\quad\ldots\quad h=2\cos\frac{\frac{n}{2}\pi}{n+1};$$

et nous aurons, entre les *fonctions circulaires* $a, b, c, \ldots, h$, les relations suivantes :

$$\sum a^2=\frac{n-1}{1},\quad \sum a^2b^2=\frac{(n-2)(n-3)}{1.2},\quad \sum a^2b^2c^2=\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3},\ \ldots\quad(28)$$

A coup sûr, ces relations ne sont pas nouvelles ; mais je les crois peu connues.

Si, par exemple, $n=6$, on doit trouver :

$$4\left[\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{2\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}\right]=5,$$

$$4\left[\cos^2\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{2\pi}{7}+\cos^2\frac{2\pi}{7}\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}\cos^2\frac{\pi}{7}\right]=6,$$

$$8\cos^2\frac{\pi}{7}\cdot\cos^2\frac{2\pi}{7}\cos^2\frac{3\pi}{7}=1.$$

(*) Lorsque α est nul, le premier membre de l'égalité (23) se réduit à $n+1$. On ne peut donc point faire $k=0$.

En effet, ces valeurs s'accordent avec celles-ci :

$$2\left[\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right]=-1,$$

$$4\left[\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\right]=-2,$$

$$8\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=1,$$

auxquelles conduit la théorie des *équations binômes* (*).

14. THÉORÈME (**). — 1° *Si* n *est pair,*

$$X_0X_n+X_1X_{n-1}+\cdots+X_nX_0=2^n\left(x^2-\cos^2\frac{\pi}{n+1}\right)\left(x^2-\cos^2\frac{2\pi}{n+1}\right)\cdots\left(x^2-\cos^2\frac{\frac{n}{2}\pi}{n+1}\right); \quad (G)$$

2° *Si* n *est impair,*

$$X_0X_n+X_1X_{n-1}+\cdots+X_nX_0=2^nx\left(x^2-\cos^2\frac{\pi}{n+1}\right)\left(x^2-\cos^2\frac{2\pi}{n+1}\right)\cdots\left(x^2-\cos^2\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n+1}\right). \quad (H)$$

15. *Application.* — Soit $n = 7$. (H) devient

$$2(X_0X_7+X_1X_6+X_2X_5+X_3X_4)=2^7x\left(x^2-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)\left(x^2-\cos^2\frac{2\pi}{8}\right)\left(x^2-\cos^2\frac{3\pi}{8}\right).$$

Or :

$$X_0X_7=\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x),$$

$$X_1X_6=\frac{1}{16}(231x^7-315x^5+105x^3-5x),$$

$$X_2X_5=\frac{1}{16}(3x^2-1)(63x^5-70x^3+15x)=\frac{1}{16}(189x^7-273x^5+115x^3-15x),$$

$$X_3X_4=\frac{1}{16}(5x^3-5x)(35x^4-30x^2+3)=\frac{1}{16}(175x^7-255x^5+105x^3-9x).$$

(*) *Cours d'Analyse*, pp. 276 et 285.
(**) Évident par ce qui précède.

Le premier membre de l'égalité à vérifier est, en conséquence,

$$\frac{1}{8}(1\,024x^7 - 1\,536x^5 + 640x^3 - 64x) = 8x(16x^6 - 24x^4 + 10x^2 - 1).$$

D'un autre côté :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}, \quad \cos^2\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}, \quad \cos^2\frac{4\pi}{8} = \frac{1}{2}.$$

Donc le second membre égale

$$2^7x\left(x^4 - x^2 + \frac{1}{8}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 8x(8x^4 - 8x^2 + 1)(2x^2 - 1) = 8x(16x^6 - 24x^4 + 10x^2 - 1),$$

comme le premier.

16. Théorème. — *On a, entre* n + 1 *fonctions consécutives, la relation*

$$\left.\begin{aligned} &X_{n+1} + \frac{1}{2}X_0X_{n-1} + \frac{1}{3}X_1X_{n-2} + \cdots + \frac{1}{n+1}X_{n-1}X_0 \\ &= x\left[X_0X_n + \frac{1}{2}X_1X_{n-1} + \frac{1}{3}X_2X_{n-2} + \cdots + \frac{1}{n+1}X_nX_0\right]. \end{aligned}\right\} \quad \text{(K)}$$

Si l'on combine, par multiplication, les égalités

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = 1 + X_1z + X_2z^2 + \cdots + X_{n+1}z^{n+1} + \cdots, \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{1-2xz+z^2} = 1 - xz + \frac{1}{2}(X_0 - xX_1)z^2 + \frac{1}{3}(X_1 - xX_2)z^3 + \cdots \\ + \frac{1}{n+1}(X_{n-1} - xX_n)z^{n+1} + \cdots \end{aligned}\right\}, \quad (18)$$

et qu'on égale à zéro le coefficient de z^{n+1}, dans le produit, on trouve la relation indiquée.

17. *Remarques*. — I. Si n est *pair*, tous les termes du premier membre sont divisibles par x.

II. Quand n est *impair*, le premier membre est encore divisible par x, bien que les termes

$$X_{n+1},\quad \frac{1}{2}X_0X_{n-1},\quad \frac{1}{4}X_2X_{n-3},\quad \dots,\quad \frac{1}{n+1}X_{n-1}X_0$$

n'admettent pas ce diviseur (*).

18. *Suite.* — Essayons d'évaluer chacun des polynômes

$$X_0X_n + \frac{1}{2}X_1X_{n-1} + \frac{1}{3}X_2X_{n-2} + \dots + \frac{1}{n+1}X_nX_0 = S_n, \quad \dots\dots \quad (29)$$

$$\frac{1}{2}X_0X_n + \frac{1}{3}X_1X_{n-1} + \dots + \frac{1}{n+1}X_nX_0 = S'_n; \quad \dots\dots \quad (30)$$

ou, du moins, de former les équations auxquelles ils satisfont.

En premier lieu, il est clair que la fonction *génératrice* de S_n est le produit des quantités

$$u = X_0 + X_1z + \dots + X_nz^n + \dots, \quad \dots\dots \quad (31)$$

$$\int_0^z udz = X_0z + \frac{1}{2}X_1z^2 + \dots + \frac{1}{n+1}X_nz^{n+1} + \dots, \quad \dots\dots \quad (32)$$

u représentant $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$. Autrement dit,

$$u\int_0^z udz = \sum_1^\infty S_{n-1}z^n. \quad \dots\dots \quad (33)$$

On déduit, de cette égalité,

$$u^2 + \frac{du}{dz}\int_0^z udz = \sum_1^\infty nS_{n-1}z^{n-1};$$

(*) Si l'on exprime que la somme de ces termes s'annule avec x, on retrouve la relation

$$\frac{1}{n+1}C_{2n,n} + \frac{1}{n}C_{2,1}\cdot C_{2n-2,n-1} + \frac{1}{n-1}C_{4,2}\,.\,C_{2n-4,n-2} + \dots + C_{2n,n} = \frac{1}{2}C_{2n+2,n+1}, \quad \dots \quad (B)$$

dans laquelle, on doit se le rappeler, n est un nombre entier quelconque.

puis, par élimination de l'intégrale :

$$u^2 + \frac{1}{u}\frac{du}{dz}\sum_1^\infty S_{n-1}z^n = \sum_1^\infty nS_{n-1}z^{n-1},$$

ou

$$1 + \frac{1}{u^3}\frac{du}{dz}\sum_1^\infty S_{n-1}z^n = (1 - 2xz + z^2)\sum_1^\infty nS_{n-1}z^{n-1}.$$

D'ailleurs,

$$\frac{du}{dz} = -u^3(z-x);$$

donc enfin

$$1 - (z-x)\sum_1^\infty S_{n-1}z^n = (1 - 2xz + z^2)\sum_1^\infty nS_{n-1}z^{n-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Identifiant les coefficients de z^n, on trouve cette *équation aux différences :*

$$(n+1)S_n - (2n+1)x\,S_{n-1} + nS_{n-2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (L)$$

Si l'on part de $S_0 = 1$, $S_1 = \frac{3}{2}x$, elle donnera, de proche en proche, les valeurs de S_2, S_3, . . .

Considérons, en second lieu, la quantité

$$S'_n = \frac{1}{2}X_0X_n + \frac{1}{3}X_1X_{n-1} + \cdots + \frac{1}{n+2}X_nX_0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

En opérant comme ci-dessus, nous trouvons, successivement :

$$u\int_0^z uz\,dz = \sum_0^\infty S'_n z^{n+2},$$

$$u^2z - u^3(z-x)\int_0^z uz\,dz = \sum_0^\infty (n+2)S'_n z^{n+1},$$

$$z - (z-x)\sum_0^\infty S'_n z^{n+2} = (1 - 2xz + z^2)\sum_0^\infty (n+2)S'_n z^{n+1};$$

puis l'équation aux différences :

$$(n+2)S'_{n+1}-(2n+3)xS'_{n+1}+(n+1)S'_{n-1}=0,$$

ou

$$(n+1)S'_n-(2n+1)xS'_{n-1}+nS'_{n-2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{M})$$

Cette fois, les valeurs initiales sont

$$S'_1=\frac{1}{2}, \quad S'_2=\frac{5}{6}x.$$

19. *Remarques.* — I. Les relations (L), (M) sont semblables à celle-ci :

$$(n+1)X_{n+1}-(2n+1)xX_n+nX_{n-1}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

II. Si, dans cette égalité (3), on remplace X_{n+1}, X_n, X_{n-1} par leurs valeurs, déduites de l'équation (K), on obtient la relation

$$x\left[(n+1)S_n-(2n+1)xS_{n-1}+nS_{n-2}\right]-\left[(n+1)S'_n-(2n+1)xS'_{n-1}+nS'_{n-2}\right]=0,$$

conséquence de (L), (M). Nous ne pensons pas que la réciproque soit admissible.

III

INTÉGRALES ET SÉRIES.

20. Théorème. — *On a, entre deux fonctions consécutives, la relation*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{n+2}\sqrt{x^2-1}}\left[nxX_n+(n+1-2nx^2)X_{n-1}\right]=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{N})$$

Dans le Mémoire intitulé : *Sur un développement de l'intégrale elliptique,* nous avons démontré les relations suivantes :

$$n^2P_n-8(3n^2-3n+1)P_{n-1}+128(n-1)^2P_{n-2}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

$$\frac{P_n}{8^n}=\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{X_n dx}{2^{n+1}\sqrt{x^2-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Il en résulte, immédiatement,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{n+1}\sqrt{x^2-1}}\left[n^2X_n-(3n^2-3n+1)xX_{n-1}+2(n-1)^2x^2X_{n-2}\right]=0.$$

Mais, par la relation (3),

$$n^2X_n=(2n^2-n)\,xX_{n-1}-n(n-1)\,X_{n-2}.$$

Donc

$$(n-1)\int_1^\infty \frac{dx}{x^{n+1}\sqrt{x^2-1}}\left\{-(n-1)\,xX_{n-1}+\left[(2n-2)\,x^2-n\right]X_{n-2}\right\}=0;$$

etc.

21. Théorème. — *En supposant*

$$X=4^nX_{2n}-4^{n-1}\frac{n-1}{1}X_{2n-2}+4^{n-2}\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}X_{2n-4}-\cdots,$$

on a

$$\int_0^1 \frac{Xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_1^\infty \frac{X_ndx}{x^{n+1}\sqrt{x^2-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(P)}$$

En effet (*) :

$$P_n=\frac{2}{\pi}8^n\int_1^\infty \frac{X_ndx}{x^{n+1}\sqrt{x^2-1}},$$

$$P_n=\frac{2}{\pi}8^n\int_0^1 \frac{Xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

22. *Remarque.* — Pour simplifier la relation (P), il suffit d'employer celle-ci :

$$\int_1^\infty \frac{X_ndx}{x^{n+1}\sqrt{x^2-1}}=\int_0^1 \frac{Y_ndy}{\sqrt{1-y^2}}\ (^{**}).$$

(*) *Sur un développement de l'intégrale elliptique* ..., formules (21) et (26).
(**) *Loc. cit.*, formule (28).

Si l'on appelle V_n ce que devient Y_n par le changement de y en x, (P) se transforme ainsi :

$$\int_0^1 \frac{(X - V_n)\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (Q)$$

23. *Application.* — Soit $n = 2$, auquel cas

$$X = 16X_4 - 4.X_2 = 2(35x^4 - 33x^2 + 4).$$

De plus,

$$Y_2 = \frac{1}{2}(3 - y^2),$$

ou

$$V_2 = \frac{1}{2}(3 - x^2).$$

On doit trouver

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}(140x^4 - 131x^2 + 13) = 0.$$

Or, si l'on fait $x = \sin\varphi$, cette intégrale se réduit à

$$140 \cdot \frac{1.3}{2.4} - 131 \cdot \frac{1}{2} + 13 = \frac{105}{2} - \frac{131}{2} + 13 = 0.$$

24. Problème. — *Développer* $\sqrt{1 - 2xz + z^2}$.

Aux solutions exprimées par les formules

$$\sqrt{1 - 2xz + z^2} = 1 - xz + (1 - x^2)\sum_1^\infty \frac{dX_n}{dx}\,\frac{z^{n+1}}{n(n+1)}, \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

$$\sqrt{1 - 2xz + z^2} = 1 - xz + \sum_1^\infty (X_{n-1} - xX_n)\frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

nous pouvons en ajouter une troisième, *transformée* de la première.

En effet,

$$(1 - x^2)\frac{dX_n}{dx} = -\frac{n(n+1)}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1}). \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Par conséquent,

$$\sqrt{1-2xz+z^2} = 1 - xz - \sum_1^{\infty} (X_{n+1} - X_{n-1}) \frac{z^{n+1}}{2n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{R})$$

25. *Remarque.* — Si, dans les séries (18), (R), on identifie les coefficients de z^{n+1}, on retrouve la relation connue :

$$(n+1) X_{n+1} - (2n+1) x X_n + n X_{n-1} = 0 \, ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ce qui devait être.

26. *Cas particulier.* — Soit $z = 1$. La formule (18) devient

$$\sqrt{2(1-x)} = 1 + \frac{1}{2} X_0 + \frac{1}{3} X_1 + \frac{1}{4} X_2 + \cdots - x \left[X_0 + \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{3} X_2 + \cdots \right], \quad . \quad (37)$$

et la formule (R) :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \sqrt{2(1-x)} = \frac{1}{1.5} X_1 + \frac{1}{3.7} X_2 + \frac{1}{5.9} X_3 + \cdots (^*) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

27. *Suite.* — Comme vérification, cherchons les deux sommes :

$$A = X_0 + \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{3} X_2 + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

$$B = \frac{1}{2} X_0 + \frac{1}{3} X_1 + \frac{1}{4} X_2 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

1° La formule

$$\mathcal{L} . \frac{z - x + \sqrt{1 - 2xz + z^2}}{1 - x} = \sum_0^{\infty} X_n \frac{z^{n+1}}{n+1} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

(*) A propos de ces développements, il n'est peut-être pas inutile de rappeler que, d'après la *formule de définition*,

$$\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} = 1 + X_1 + X_2 + X_3 + \cdots$$

(Premier *Mémoire*, p. 60.)

donne, tout de suite,

$$A = \mathcal{L}.\left[1+\sqrt{\frac{2}{1-x}}\right]. \qquad (41)$$

2° Il est clair que

$$\int_0^1 \frac{zdz}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{1}{2}X_0 + \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \cdots,$$

ou

$$B = \int_0^1 \frac{zdz}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

L'intégrale indéfinie se décompose en

$$\sqrt{1-2xz+z^2} + x\int \frac{dz}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sqrt{1-2xz+z^2} + x\,\mathcal{L}.(z-x+\sqrt{1-2xz+z^2}).$$

Donc

$$B = \sqrt{2(1-x)} - 1 + x\,\mathcal{L}.\left[1+\sqrt{\frac{2}{1-x}}\right] \qquad (42)$$

Ces valeurs (41), (42) rendent identique l'égalité (37).

28. Problème. — *Développer, suivant les puissances de* z, *la fonction*

$$\frac{1}{2\sqrt{1-2xz+z^2}}\,\mathcal{L}.\frac{-x+z+\sqrt{1-2xz+z^2}}{x-z+\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

Lorsque $z=0$, la fonction se réduit à $\frac{1}{2}\mathcal{L}.\frac{1-x}{1+x}$. Soit donc

$$\mathcal{L}.\frac{1-(x-z)u}{1+(x-z)u} = \frac{2}{u}\sum_0^\infty A_n z^n; \qquad (43)$$

avec la condition

$$A_0 = \frac{1}{2}\mathcal{L}.\frac{1-x}{1+x}.$$

Prenant les dérivées, on a

$$\frac{-(x-z)\dfrac{du}{dz}+u}{1+(x-z)u} - \frac{(x-z)\dfrac{du}{dz}-u}{1+(x-z)u} = \frac{2}{u}\sum_1^\infty nA_nz^{n-1} - \frac{2}{u^2}\frac{du}{dz}\sum_0^\infty A_nz^n \text{ (*)}. \quad (44)$$

Le premier membre égale

$$\left[u-(x-z)\frac{du}{dz}\right]\left[\frac{1}{1-(x-z)u}+\frac{1}{1+(x-z)u}\right]$$
$$=\left[u-(x-z)^2u^3\right]\left[\frac{2}{1-(x-z)^2u^2}\right]=2u.$$

Ainsi l'égalité (44) devient

$$u=\frac{1}{u}\sum_1^\infty nA_nz^{n-1}-u(x-z)\sum_0^\infty A_nz^n,$$

ou

$$1=(1-2xz+z^2)\sum_1^\infty nA_nz^{n-1}-(x-z)\sum_0^\infty A_nz^n. \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

Il en résulte $A_1 = 1 + A_0x$, puis la *loi de récurrence :*

$$(n+1)A_{n+1}-(2n+1)xA_n+nA_{n-1}=0, \quad \ldots\ldots \quad \text{(S)}$$

semblable à celles que nous avons déjà rencontrées (**).

(*) La dérivée de

$$A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots$$

est

$$A_1+2A_2z+3A_3z^2+\cdots,$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^\infty nA_nz^{n-1}.$$

(**) Dans son *Mémoire sur les fonctions de Legendre* (JOURNAL DE RESAL, t. I) M. H. Laurent considère la quantité

$$\Xi_n = X_n\left[\mathcal{L}.\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+Q_n(x)\right],$$

« $Q_n(x)$ désignant un polynôme *entier en* x *de degré* n *en plus* ». Après avoir démontré

29. *Suite.* — Soit, comme ci-dessus,

$$\frac{1}{2\sqrt{1-2xz+z^2}}\,\mathcal{L}.\frac{-x+z+\sqrt{1-2xz+z^2}}{x-z+\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum_1^\infty A_n z^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

La fraction égale

$$\frac{(-x+z+\sqrt{1-2xz+z^2})^2}{1-x^2}=\left[\frac{-x+z+\sqrt{1-2xz+z^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right]^2 \text{ (*)};$$

donc l'égalité précédente peut être écrite ainsi :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\,\mathcal{L}.\frac{-x+z+\sqrt{1-2xz+z^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_0^\infty A_n z^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Posons

$$y=\mathcal{L}.\frac{-x+z+\sqrt{1-2xz+z^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

ou

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

qu'elle satisfait à l'égalité (S) (A étant remplacé par Ξ), M. Laurent cherche la *fonction génératrice* de Ξ_n. Il trouve

$$F=\frac{1}{2\sqrt{1-2xz+z^2}}\,\mathcal{L}.\frac{x-z-\sqrt{1-2xz+z^2}}{x-z+\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

Cette conclusion me semble inadmissible, pour deux motifs principaux :

1° Lorsque $z=0$, F doit se réduire à Ξ_0. Or,

$$F=\frac{1}{2}\,\mathcal{L}.\frac{x-1}{x+1},\quad \Xi_0=\frac{1}{2}\,\mathcal{L}.\frac{1-x}{1+x}.$$

2° Si $z=1$, la fraction devient

$$\frac{x-1-\sqrt{2(1-x)}}{x-1+\sqrt{2(1-x)}}=\frac{-\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{-\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}.$$

Le radical est réel quand x est moindre que l'unité. Mais alors la fraction, étant négative, n'a pas de logarithme réel.

(*) Ce calcul, bien usuel, est plus simple que le précédent (§ 28); mais j'ai voulu me rapprocher, le plus possible, de l'exemple traité par M. H. Laurent.

L'équation (46) prend la forme

$$y\frac{dy}{dz}=\sum_1^\infty A_n z^n.$$

Intégrant, nous avons

$$\frac{1}{2}y^2+C=\sum_0^\infty A_n\frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Pour $z=0$,

$$y^2=\left[\mathfrak{L}.\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]^2;$$

donc

$$C=-\frac{1}{2}\left[\mathfrak{L}.\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]^2;$$

et, finalement,

$$\mathfrak{L}.\frac{-x+z+\sqrt{1-2xz+z^2}}{1+x}\times\mathfrak{L}.\frac{-x+z+\sqrt{1-2xz+z^2}}{1-x}=2\sum_0^\infty A_n\frac{z^{n+1}}{n+1}; \qquad \text{(T)}$$

formule remarquable.

30. *Autre développement.* — On tire, de l'égalité (46),

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\mathfrak{L}.\left[-x+z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\mathfrak{L}.\left(\sqrt{1-x^2}\right)+\sum_0^\infty A_n z^n.$$

Le premier terme du second membre, étant développé, devient

$$\mathfrak{L}.\left(\sqrt{1-x^2}\right)\sum_0^\infty X_n z^n.$$

Ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\mathfrak{L}.\left[-x+z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right)=\sum_0^\infty\left[A_n+X_n\mathfrak{L}.\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right]z^n \quad . \qquad \text{(U)}$$

31. *Remarque.* — D'après la formule

$$\mathfrak{L}.\frac{-x+z+\sqrt{1-2xz+z^2}}{1-x}=\sum_0^\infty X_n\frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (22)$$

le premier membre de l'égalité (U) est

$$\sum_0^\infty X_n z^n \left[\mathcal{L}.(1-x) + \sum_0^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \right] = \mathcal{L}.(1-x) \sum_0^\infty X_n z^n + \sum_0^\infty X_n z^n . \sum_0^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1} .$$

Posons, comme ci-dessus (§ 18) :

$$S_n = X_0 X_n + \frac{1}{2} X_1 X_{n-1} + \frac{1}{3} X_2 X_{n-2} + \cdots + \frac{1}{n+1} X_n X_0 ; \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

nous avons, au lieu de (U) :

$$\mathcal{L}.(1-x) \sum_0^\infty X_n z^n + \sum_1^\infty S_{n-1} z^n = \sum_0^\infty \left[A_n + X_n \mathcal{L}.(\sqrt{1-x^2}) \right] z^n ;$$

puis

$$A_n = X_n \mathcal{L}. \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) + S_{n-1} \ (^*) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

32. *Cas particuliers.* — Si l'on suppose $x = 0$, les relations (T), (U) sont remplacées par

$$\left[\mathcal{L}. \left(z + \sqrt{1+z^2} \right) \right]^2 = 2 \sum_0^\infty A'_n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad \ldots \ldots \quad (T')$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \mathcal{L}.\left(z + \sqrt{1+z^2} \right) = \sum_0^\infty A'_n z^n ; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (U')$$

A'_n représentant ce que devient A_n pour $x = 0$. Un calcul fort simple (**) donne

$$A'_0 = 0, \quad A'_1 = 1, \quad A'_2 = 0, \quad A'_3 = -\frac{2}{3}, \quad A'_4 = 0, \quad A'_5 = +\frac{2.4}{3.5}, \ \cdot$$

Ainsi

$$\left[\mathcal{L}.\left(z + \sqrt{1+z^2} \right) \right]^2 = z^2 - \frac{2}{3} \frac{z^2}{2} + \frac{2.4}{3.5} \frac{z^3}{3} - \frac{2.4.6}{3.5.7} \frac{z^4}{4} + \cdots, \quad \ldots \quad (T'')$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \mathcal{L}.\left(z + \sqrt{1+z^2} \right) = z - \frac{2}{3} z^3 + \frac{2.4}{3.5} z^5 - \frac{2.4.6}{3.5.7} z^5 + \cdots \quad \ldots \quad (U'')$$

(*) On trouve $S_0 = 1$.

(**) Déduit de la *loi de récurrence :*

$$(n+1) A_{n+1} + n A_{n-1} = 0.$$

Ce n'est pas tout : on sait que

$$\mathcal{L}(z+\sqrt{1+z^2}) = z - \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^7}{7} + \cdots \quad (48)$$

Donc :

1° *La série* (T'') *est le carré de la série* (48) (*);

2° *La série* (U'') *est le produit de la série* (48) *par la série*

$$1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1.3}{2.4}z^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}z^6 + \cdots,$$

développement de $(1+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ (**).

23. Problème. — *Développer la fonction*

$$y = -\mathcal{L}.\frac{1-xz+\sqrt{1-2xz+z^2}}{2} \quad (49)$$

Cette fonction s'annulant avec z, on peut supposer

$$y = \sum_1^\infty B_n z^n.$$

D'ailleurs,

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{-x+\dfrac{z-x}{\sqrt{1-2xz+z^2}}}{1-xz+\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\,\frac{x-z+x\sqrt{1-2xz+z^2}}{1-xz+\sqrt{1-2xz+z^2}};$$

ou, après quelques réductions faciles,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} - 1\right] \quad (50)$$

Le second membre est la somme de la série

$$X_1 + X_2 z + \cdots + X_n z^{n-1} + \cdots$$

(*) Cette propriété ne diffère pas, au fond, de celle qui a été découverte par Clausen (*Traité élémentaire des séries*, p. 203).

(**) De là résulte une identité numérique, inutile à rapporter.

Donc $B_n = \frac{1}{n} X_n$; puis

$$-\mathcal{L}\,\frac{1 - xz + \sqrt{1 - 2xz + z^2}}{2} = \sum_1^\infty X_n \frac{z^n}{n}. \quad \ldots \ldots \quad \text{(V)}$$

34. *Autre développement.* — La combinaison de cette égalité avec

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_0^\infty X_n z^n \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

donne

$$-\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}\,\mathcal{L}\,\frac{1 - xz + \sqrt{1 - 2xz + z^2}}{2} = \sum_0^\infty X_n z^n \sum_1^\infty X_n \frac{z^n}{n}.$$

Dans le second membre, le coefficient de z^n est

$$S''_n = X_1 X_{n-1} + \frac{1}{2} X_2 X_{n-2} + \cdots + \frac{1}{n} X_n X_0 \quad \ldots \ldots \quad (49)$$

Par conséquent,

$$-\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}\,\mathcal{L}\,\frac{1 - xz + \sqrt{1 - 2xz + z^2}}{2} = \sum_1^\infty S''_n z^n; \quad \ldots \quad \text{(V')}$$

ou, ce qui est équivalent (50) :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \int_0^z \frac{dz}{z} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} - 1 \right] = \sum_1^\infty S''_n z^n \quad \ldots \quad \text{(V'')}$$

Autrement dit :

Si l'on suppose la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \int_0^z \frac{dz}{z} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} - 1 \right]$$

développée suivant les puissances de z, le coefficient de z^n est la quantité S''_n (*).

(*) Cette proposition m'a été communiquée par M. Hermite, dans une lettre dont j'ai déjà parlé (*Sur quelques intégrales définies*, p. 4).

35. *Suite.* — Cherchons, comme nous l'avons fait pour les quantités S_n, S'_n (§ 18), l'équation à laquelle satisfait S''_n.

La relation (V'') étant écrite ainsi :

$$u\int_0^z \frac{dz}{z}(u-1)=\sum_0^\infty S''_n z^n, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

il en résulte

$$\frac{du}{dz}\int_0^z \frac{dz}{z}(u-1)+\frac{u}{z}(u-1)=\sum_1^\infty nS''_n z^{n-1};$$

puis, par l'élimination de l'intégrale,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dz}\sum_1^\infty S''_n z^n+\frac{u}{z}(u-1)=\sum_1^\infty nS''_n z^{n-1}.$$

Le calcul effectué plusieurs fois donne ensuite

$$1-\frac{1}{u}=(1-2xz+z^2)\sum_1^\infty nS''_n z^n+(z-x)\sum_1^\infty S''_n z^{n+1}.$$

Remplaçant le premier membre par

$$xz+\sum_1^\infty (X_{n+1}-X_{n-1})\frac{z^{n+1}}{2n+1}$$

et identifiant, on trouve enfin

$$(n+1)S''_{n+1}-(2n+1)xS''_n+nS''_{n-1}=\frac{X_{n+1}-X_{n-1}}{2n+1}. \quad \ldots \ldots \quad (W)$$

Cette *loi de récurrence* est, on le voit, moins simple que celle qui se rapporte aux quantités S_n, S'_n.

Liège, 21 septembre 1885.

UNE RECTIFICATION.

Dans mon Rapport sur le *Mémoire* de M. J. Deruyts (*), par suite d'une incompréhensible distraction, j'ai écrit

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+x^2}} = \sum_0^\infty X_n z^n \text{ (**)}.$$

De là résulte que *la formule*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}\left[nX_n + (n-1)X_{n-1}\right] \mathcal{L}.\frac{1+x}{2} = \frac{2}{n}(-1)^n$$

est fausse.

Voici comment ce passage doit être corrigé :

On a

$$\frac{1}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1-xz}\sum_0^\infty (n+1)X_n z^n. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Donc la formule de M. Deruyts :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathcal{L}.\frac{1+x}{2} = -\frac{2}{z(1+z)}\,\mathcal{L}(1+z)$$

devient

$$z(1+z)\int_{-1}^{+1}(1+xz+x^2z^2+\cdots)\,\mathcal{L}\frac{1+x}{2}\,dx\sum_0^\infty (n+1)X_n z^n = -2\,\mathcal{L}(1+z). \quad \ldots \quad (a)$$

Dans le produit des séries

$$1 + xz + x^2z^2 + \cdots + x^n z^n + \cdots,$$

$$X_0 + 2X_1 z + 2X_2 z^2 + \cdots + (n+1)X_n z^n + \cdots,$$

le coefficient de z^n est le polynôme

$$A_n = X_0 x^n + 2X_1 x^{n-1} + \cdots + (n+1)X_n \text{ (***)}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

L'égalité (a) est donc transformée en

$$\int_{-1}^{+1} \mathcal{L}.\frac{1+x}{2}\,dx\left[A_0 z + (A_0 + A_1)z^2 + \cdots + (A_{n-1} + A_{n-2})z^n + \cdots\right] = -2\left[z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots \pm \frac{z^n}{n} \mp \cdots\right].$$

Par suite,

$$\int_{-1}^{+1}(A_{n-1} + A_{n-2})\,\mathcal{L}.\frac{1+x}{2}\,dx = \frac{2}{n}(-1)^n. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

Telle est la formule qui doit remplacer celle de la p. 525 du *Bulletin*.

(*) *Bulletin* n° 6, p. 524 (1885).

(**) A l'impression, le radical a été omis. En outre, dans l'intégrale citée, l'exposant doit être $\frac{3}{2}$ et non $\frac{2}{3}$.

(***) Il est visible que

$$A_n = xA_{n-1} + (n+1)X_n.$$