SUR UN DÉVELOPPEMENT

DE

L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE DE PREMIÈRE ESPÈCE,

ET

SUR UNE SUITE DE NOMBRES ENTIERS;

PAR

E. CATALAN,
ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Mémoire présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 10 octobre 1885.)

SUR UN DÉVELOPPEMENT

DE

L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE DE PREMIÈRE ESPÈCE,

ET

SUR UNE SUITE DE NOMBRES ENTIERS (*).

I.

Pour transformer

$$F_1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

je pose

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{tg}\theta.$$

Il résulte, de cette formule :

$$\sin^2\varphi = \frac{\sin^2\theta}{b\cos^2\theta + \sin^2\theta}, \quad \cos^2\varphi = \frac{b\cos^2\theta}{b\cos^2\theta + \sin^2\theta}, \quad 1 - c^2\sin^2\theta = b\,\frac{\cos^2\theta + b\sin^2\theta}{b\cos^2\theta + \sin^2\theta},$$

$$d\varphi = \sqrt{b}\,\frac{d\theta}{b\cos^2\theta + \sin^2\theta};$$

puis

$$F_1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{[1 - (1-b)\cos^2\theta][1 - (1-b)\sin^2\theta]}} \;(^{**}) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

(*) Un extrait de cette Note a été communiqué au Congrès du Havre, en 1877.

(**) A cause de :

$$\cos^2\theta + b\sin^2\theta = 1 - (1-b)\sin^2\theta, \quad b\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 - (1-b)\cos^2\theta.$$

On a, par la formule du binôme :

$$\left[1-(1-b)\cos^2\theta\right]^{-\frac{1}{2}}=\sum_0^\infty \frac{\Gamma(2n+1)}{4^n\left[\Gamma(n+1)\right]^2}(1-b)^n\cos^{2n}\theta,$$

$$\left[1-(1-b)\sin^2\theta\right]^{-\frac{1}{2}}=\sum_0^\infty \frac{\Gamma(2n'+1)}{4^{n'}\left[\Gamma(n'+1)\right]^2}(1-b)^{n'}\sin^{2n'}\theta;$$

donc

$$F_1(c)=\sum_0^\infty\sum_0^\infty \frac{\Gamma(2n+1)\,\Gamma(2n'+1)}{4^{n+n'}\left[\Gamma(n+1)\,\Gamma(n'+1)\right]^2}(1-b)^{n+n'}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\sin^{2n'}d\theta.$$

La valeur de l'intégrale est, comme on sait, $\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(n'+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+n'+1)}$. Conséquemment,

$$F_1(c)=\frac{1}{2}\sum_0^\infty\sum_0^\infty \frac{\Gamma(2n+1)\,\Gamma(2n'+1)\,\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(n'+\frac{1}{2})}{\left[\Gamma(n+1)\,\Gamma(n'+1)\right]^2\Gamma(n+n'+1)}\left(\frac{1-b}{4}\right)^{n+n'} \quad . \quad . \quad (3)$$

II.

La fraction

$$\frac{\Gamma(2n+1)\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\left[\Gamma(n+1)\right]^2}$$

égale

$$\frac{1.2.3\ldots 2n}{(1.2.3\ldots n)^2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2\ldots n}\sqrt{\pi}\,\frac{2.6.10\ldots \overline{4n-2}}{4^n}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{4^n}\,\frac{\left[(n+1)(n+2)\ldots 2n\right]^2}{1.2.3\ldots n}\ (^*).$$

De même,

$$\frac{\Gamma(2n'+1)\,\Gamma(n'+\frac{1}{2})}{\left[\Gamma(n'+1\right]^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4^{n'}}\,\frac{\left[(n'+1)(n'+2)\ldots 2n'\right]^2}{1.2.3\ldots n'}.$$

Donc, si l'on pose $n+n'=s$, et que l'on fasse

$$P_s=\frac{1}{1.2.3\ldots s}\sum\frac{\left[(n+1)(n+2)\ldots 2n.(n'+1)(n'+2)\ldots 2n'\right]^2}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots n'}, \quad . \quad . \quad (4)$$

(*) *Cours d'Analyse*, p. 56. La transformation précédente peut être effectuée de diverses manières ; par exemple, au moyen de la *formule de Legendre*.

on aura, au lieu de la formule (3),

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty P_s\left(\frac{1-b}{16}\right)^s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Nous montrerons, tout à l'heure, que P_s *est un nombre entier* (*).

III.

Le développement de $F_1(c)$, ordonné suivant les puissances du module, est

$$\frac{\pi}{2}\sum_0^\infty\left[\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 c^{2n};$$

ou

$$\frac{\pi}{2}\sum_0^\infty \frac{[1.2.3\ldots 2n]^2}{[2.4.6\ldots 2n]^4}c^{2n} = [C_{2n,n}]^2\left(\frac{c^2}{16}\right)^n.$$

Par conséquent, si l'on fait $1-b=2x$, ou $c^2=4x(1-x)$, on a

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty [C_{2n,n}]^2\left[\frac{x(1-x)}{4}\right]^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Dans le développement de $(1-x)^n$, le coefficient de $x^{n'}$ est $(-1)^{n'}C_{n,n'}$. Donc, si l'on suppose encore $n+n'=s$, et que l'on fasse

$$Q_s = \sum [C_{2s-2n',\,s-n'}]^2\, C_{s-n',\,n'}(-1)^{n'}\left(\frac{1}{4}\right)^{s-n'}, \quad \left(0 \overline{\overline{<}}\, n' \overline{\overline{<}}\, \frac{s}{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

la formule (6) devient

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty Q_s x^s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

(*) Cette propriété résulte, d'ailleurs, du théorème suivant :

$$\frac{(a+1)(a+2)\cdots 2a\,.\,(b+1)(b+2)\cdots 2b}{1.2.3\ldots(a+b)} = \textit{entier}.$$

(*Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques ;* seconde Note, p. 14.)

D'ailleurs, l'égalité (5) peut être écrite ainsi :

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty P_s \left(\frac{x}{8}\right)^s \qquad (9)$$

Conséquemment,

$$P_s = 8^s Q_s \qquad (10)$$

Et comme, d'après la formule (7), $4^s Q_s$ est un nombre entier, P_s *est* aussi *un nombre entier, divisible par* 2^s.

IV.

Soit, pour abréger,

$$F_1(c) = \sum_0^\infty A_n (1-b)^n. \qquad (11)$$

Alors :

$$\frac{dF_1(c)}{dc} = \frac{c}{b} \sum_0^\infty n A_n (1-b)^{n-1} \ (^*), \qquad (12)$$

$$\frac{d^2F_1(c)}{dc^2} = \frac{c^2}{b^2} \sum_0^\infty n(n-1) A_n (1-b)^{n-2} + \frac{1}{b^3} \sum_0^\infty n A_n (1-b)^{n-1} \ (^{**}). \qquad (13)$$

On sait que

$$b^2 \frac{d^2F_1}{dc^2} + \frac{1-3c^2}{c} \frac{dF_1}{dc} - F_1 = 0 \ (^{***}).$$

Cette relation devient, au moyen des valeurs précédentes,

$$bc^2 \sum_0^\infty n(n-1) A_n (1-b)^{n-2} + (2-3c^2) \sum_0^\infty n A_n (1-b)^{n-1} - b \sum_0^\infty A_n (1-b)^n = 0.$$

(*) A cause de $\frac{db}{dc} = -\frac{c}{b}$.

(**) La dérivée de $\frac{c}{b}$ est $\frac{b + \frac{c^2}{b}}{b^2} = \frac{1}{b^3}$.

(***) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, tome I, p. 63.

Soit encore $1 - b = t$; et, par conséquent :

$$b = 1 - t, \quad c^2 = (2 - t)t, \quad 2 - 3c^2 = 2 - 6t + 3t^2;$$

nous aurons :

$$\sum_0^\infty n(n-1)A_n t^{n-1} + (2 - 6t + 3t^2)\sum_0^\infty nA_n t^{n-1} - (1-t)\sum_0^\infty A_n t^n = 0. \quad . \quad (14)$$

V.

Dans le premier membre, qui doit être nul quelle que soit la valeur attribuée au nombre entier n, le coefficient de t^0 est $2A_1 - A_0$; le coefficient de t^1 est

$$4A_2 + 4A_2 - 6A_1 - A_1 + A_0 = 8A_2 - 7A_1 + A_0.$$

Donc

$$A_1 = \frac{1}{2}A_0, \quad A_2 = \frac{5}{16}A_0.$$

Dès que n surpasse 2, le coefficient A_n est déterminé par la *loi de récurrence :*

$$2n^2A_n - (3n^2 - 3n + 1)A_{n-1} + (n-1)^2A_{n-2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

La comparaison avec les formules (5), (11) donne

$$A_n = \frac{\pi}{2}\frac{P_n}{16^n} \; (*) ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

puis, au lieu de l'égalité (15),

$$n^2P_n - 8(3n^2 - 3n + 1)P_{n-1} + 128(n-1)^2P_{n-2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Par les formules (7), (10), on trouve

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 8;$$

après quoi la relation (17) donne, successivement :

$$P_2 = 80, \quad P_3 = 896, \quad P_4 = 10\,816, \quad \ldots$$

(*) Nous remplaçons P_s par P_n.

On a donc le théorème suivant, qu'il serait, croyons-nous, très difficile de démontrer *directement :*

Soient une suite de nombres, P_0, P_1, P_2, ..., *dont les deux premiers sont* 1 *et* 8, *et dont les autres, à partir de* $n = 2$, *sont déterminés par la formule :*

$$P_n = \frac{8}{n^2}\left[(3n^2 - 3n + 1)\,P_{n-1} - 16\,(n-1)^2\,P_{n-2}\right].$$

Tous ces nombres sont entiers (*).

VI.

La comparaison des formules

$$Q_n = \sum [C_{2n-2p,\,n-p}]^2 C_{n-p,\,p}(-1)^p\left(\frac{1}{4}\right)^{n-p}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

$$P_n = 8^n Q_n, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

prouve que

$$\frac{P_n}{2^n} = \sum (-4)^p\,[C_{2n-2p,\,n-p}]^2\,C_{n-p,\,p} \qquad \left(0 \overline{\gtrless} p \overline{\gtrless} \frac{n}{2}\right); \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

ou

$$\frac{P_n}{2^n} = [C_{2n,\,n}]^2 - 4\,[C_{2n-2,\,n-1}]^2\,C_{n-1,\,1} + 4^2\,[C_{2n-4,\,n-2}]^2\,C_{n-2,\,2} - \cdots \quad . \; . \; . \; . \quad (19)$$

(*) M. de Jonquières, à qui j'avais communiqué quelques-uns des résultats précédents, a eu la patience de calculer les valeurs de P_n, jusqu'à $n = 17$. Les voici :

$P_1 = 2^3$, $P_2 = 2^4.5$, $P_3 = 2^7.7$, $P_4 = 2^6.169$, $P_5 = 2^9.269$,
$P_6 = 2^{10}.1\,781$, $P_7 = 2^{13}.3\,035$, $P_8 = 2^{10}.338\,377$, $P_9 = 2^{13}.599\,569$,
$P_{10} = 2^{14}.4\,306\,645$, $P_{11} = 2^{17}.7\,816\,895$, $P_{12} = 2^{16}.229\,011\,025$, $P_{13} = 2^{19}.412\,401\,885$,
$P_{14} = 2^{20}.3\,135\,675\,605$, $P_{15} = 2^{23}.5\,850\,156\,227$, $P_{16} = 2^{18}.2\,806\,908\,617\,417$, $P_{17} = 2^{21}\,5\,281\,843\,126\,105$.

En outre, le savant Géomètre a découvert quelques propriétés des nombres P_n ; par exemple celle-ci, que *j'aurais dû* trouver :

Si l'on fait $P_n = 2^{k_n} R_n$, R_n *étant impair, on a*

$$k_n = 3n - 2\left[\left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{8}\right) + \cdots\right].$$

Les recherches de M. de Jonquières sont l'objet d'une Note communiquée à l'Académie des sciences, et publiée dans les *Comptes rendus* (séance du 10 août 1885).

Nous avons ainsi *l'intégrale particulière* de l'équation (17) (*), relative à $P_0 = 1$, $P_1 = 8$.

Dans la formule (18), on peut introduire les fonctions X_n. En effet,

$$[C_{2n-2p,\, n-p}]^2 = \frac{4^{2n-2p}}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n-2p}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \text{ (**)}.$$

Donc

$$\frac{P_n}{8^n} = \frac{1}{\pi}\sum_{p=0} (-1)^p 4^{n-p} C_{n-p,\,p} \int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n-2p}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

ou

$$P_n = \frac{8^n}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{X\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

en supposant

$$X = 4^n X_{2n} - 4^{n-1}\frac{n-1}{1} X_{2n-2} + 4^{n-2}\frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2} X_{2n-4} - \cdots \quad . \; . \quad (22)$$

VII.

Il ne serait pas difficile d'évaluer la quantité X; mais il est bien plus court de chercher une autre expression de P_n, contenant X_n.

A cet effet, reprenons l'égalité (2), ainsi écrite :

$$F_1(c) = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1-b)+\left(\frac{1-b}{2}\right)^2 \sin^2 2\theta}} \text{ (***)}.$$

(*) *Équation aux différences finies, du deuxième ordre, à coefficients variables.*

(**) *Sur les fonctions* X_n *de Legendre* (second Mémoire, p. 65).

(***) La fraction

$$\frac{1}{\sqrt{[1-(1-b)\cos^2\theta]\,[1-(1-b)\sin^2\theta]}}$$

est *symétrique* en $\sin^2\theta$ et $\cos^2\theta$; donc l'intégrale, prise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, a ses éléments égaux deux à deux; donc elle est double de l'intégrale prise entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.

Soient :

$$1 - b = 2z, \quad \sin 2\theta = \frac{1}{x}.$$

On trouve

$$F_1(c) = \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}\sqrt{1 - 2z + \frac{z^2}{x^2}}}. \qquad (23)$$

Il s'agit de développer, suivant les puissances de z,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2z + \frac{z^2}{x^2}}}.$$

Or, si dans la formule de *définition :*

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = \sum_0^\infty X_n z^n,$$

on change z en $\frac{z}{x}$, elle devient

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2z + \frac{z^2}{x^2}}} = \sum_0^\infty X_n \left(\frac{z}{x}\right)^n. \qquad (24)$$

Conséquemment,

$$F_1(c) = \sum_0^\infty z^n \int_1^\infty \frac{X_n dx}{x^{n+1}\sqrt{x^2-1}},$$

ou

$$F_1(c) = \sum_0^\infty \left(\frac{1-b}{2}\right)^n \int_1^\infty \frac{X_n dx}{x^{n+1}\sqrt{x^2-1}}. \qquad (25)$$

La comparaison avec

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty P_n \left(\frac{1-b}{16}\right)^n \qquad (5)$$

donne

$$\frac{P_n}{8^n} = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{X_n dx}{x^{n+1}\sqrt{x^2-1}}; \qquad (26)$$

après quoi l'on obtient, par les égalités (21) et (22) :

$$\int_0^1 \left[4^n X_{2n} - 4^{n-1}\frac{n-1}{1} X_{2n-2} + 4^{n-2}\frac{(n-2)(n-3)}{1.2} X_{2n-4} - \dots\right]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_1^\infty \frac{X_n dx}{x^{n+1}\sqrt{x^2-1}} \text{ (*)}. \quad (27)$$

VIII.

L'intégrale $\int_1^\infty \frac{X_n dx}{x^{n+1}\sqrt{x^2-1}}$ peut être remplacée par une autre, de forme plus simple. Posons, à l'ordinaire, $x = \frac{1}{y}$; et, pour éviter toute obscurité, appelons Y_n ce que l'on obtient en substituant cette valeur dans X_n, et en multipliant par y^n le résultat de la substitution (**). Il est clair que $\frac{X_n}{x^n}$ devient Y_n (***). Donc

$$\int_1^\infty \frac{X_n dx}{x^{n+1}\sqrt{x^2-1}} = \int_0^1 \frac{Y_n dy}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \dots\dots\dots \quad (28)$$

$$\frac{P_n}{8^n} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{Y_n . dy}{\sqrt{1-y^2}} \quad \dots\dots\dots \quad (29)$$

(*) Les fonctions X_{2n}, X_{2n-2}, X_{2n-4}, ... étant *paires*, on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^1 \frac{X dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(**) Si l'on considère les équations

$$X_n = 0, \quad Y_n = 0,$$

la seconde est *la transformée, en* $\frac{1}{x}$, de la première. Mais, si n est *impair*, la valeur infinie de y, répondant à $x = 0$, disparaît : elle n'est pas donnée par $Y_n = 0$.

(***) Si n est *pair*, X_n a la forme $ax^n + bx^{n-2} + \dots + fx^2 + g$; et alors

$$Y_n = a + by^2 + \dots + gy^n.$$

Si n est *impair*,

$$X_n = ax^n + bx^{n-2} + \dots + fx^3 + gx,$$
$$Y_n = a + by^2 + \dots + gy^{n-1}.$$

Le polynôme Y_n, qui se forme *à vue*, est donc, suivant les cas, du degré n ou du degré $n - 1$: *ce degré est toujours pair*.

IX. — *Remarques.*

1° Si, dans la relation connue :

$$\int_{-1}^{+1} X_n dx = 0,$$

ou

$$\int_{-1}^{0} X_n dx + \int_{0}^{+1} X_n dx = 0,$$

on change x en $\frac{1}{y}$, d'où $X_n = \frac{Y_n}{y^n}$, $dx = -\frac{dy}{y^2}$, elle devient

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{Y_n}{y^{n+2}} dy + \int_{+1}^{+\infty} \frac{Y_n}{y^{n+2}} dy = 0 \quad \text{. . . . . (30)}$$

Si n est *impair,* cette égalité est visible : les intégrales sont *égales et de signes contraires* (*).

Si n est *pair,* les intégrales sont *égales ;* et l'on a, simplement,

$$\int_{+1}^{+\infty} \frac{Y_n}{y^{n+2}} dy = 0 \text{ (**)} \quad \text{. . . . . (31)}$$

2° Y_n *est le coefficient de* z^n, *dans le développement de* $\frac{1}{\sqrt{1-2z+y^2z^2}}$ (***).

(*) On ne doit pas oublier que Y_n est une fonction *paire.*

(**) En effet, dans le second cas,

$$\int_{0}^{+1} X_n dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} X_n dx = 0.$$

(***) Pour le faire voir, il suffit de reprendre l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{1-2z+\frac{z^2}{x^2}}} = \sum_0^\infty X_n \left(\frac{z}{x}\right)^n \quad \text{. . . . . (24)}$$

et d'y remplacer x par $\frac{1}{y}$.

Autrement dit,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2z+y^2z^2}}=\sum_0^\infty Y_n z^n \quad \text{. . . . .} \quad (32)$$

3° Si, dans la dernière relation, on fait $y=\cos\varphi$, il en résulte

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2z+2^2\cos^2\varphi}}=\sum_0^\infty z^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} Y_n d\varphi\,;$$

ou, par la formule (29),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2z+z^2\cos^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\sum_0^\infty P_n\left(\frac{z}{8}\right)^n \quad \text{. . . . . . .} \quad (33)$$

4° D'après ce que l'on a vu dans le paragraphe II [formule (9)], le second membre est le développement de $F_1\left[2\sqrt{z(1-z)}\right]$. Le premier membre égale

$$\frac{1}{1-z}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{1-z}F_1\left(\frac{z}{1-z}\right).$$

Ainsi

$$F_1\left(\frac{z}{1-z}\right)=(1-z)\,F_1\left[2\sqrt{z(1-z)}\right];$$

relation connue, qui ne diffère pas de celle-ci :

$$F_1(c)=\frac{1}{1+c}F_1\left[\frac{2\sqrt{c}}{1+c}\right].$$

5° Ce n'est pas tout : l'égalité

$$F_1\left(\frac{z}{1-z}\right)=\frac{\pi}{2}(1-z)\sum_0^\infty P_n\left(\frac{z}{8}\right)^n \quad \text{. . . . .} \quad (34)$$

peut être écrite sous cette forme :

$$F_1\left(\frac{z}{1-z}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{z}\sum_0^\infty (P_n-8P_{n-1})\left(\frac{z}{8}\right)^n, \quad \text{. . . . . . .} \quad (35)$$

puis encore sous celle-ci :

$$F_1\left(\frac{z}{1-z}\right)=\frac{\pi}{2}+\sum_0^\infty z^n\int_0^1\frac{(Y_n-Y_{n-1})}{\sqrt{1-y^2}}dy; \qquad (36)$$

à cause de la formule

$$P_n=\frac{2}{\pi}8^n\int_0^1\frac{Y_n dy}{\sqrt{1-y^2}}. \qquad (29)$$

X.

On a

$$\left[1-z(2-z\cos^2\varphi)\right]^{-\frac{1}{2}}=\sum_0^\infty\frac{1.3.5\ldots\overline{2p-1}}{2.4.6\ldots 2p}(2-z\cos^2\varphi)^p z^p,$$

$$(2-z\cos^2\varphi)^p=\sum_{n=p}^{n=2p}(-1)^{n-p}2^{2p-n}\frac{p(p-1)\ldots(2p-n+1)}{1.2.3\ldots\overline{n-p}}\cos^{2n-2p}\varphi.z^{n-p}.$$

Donc, dans le développement du radical, le coefficient de z^n est (IX, 2°)

$$Y_n=\sum_{p=0}(-1)^{n-p}2^{2p-n}\frac{1.3.5\ldots\overline{2p-1}}{2.4.6\, 2p}\,\frac{p(p-1)\ldots(2p-n+1)}{1.2\ldots\overline{n-p}}\cos^{2n-2p}\varphi.$$

On tire ensuite, de la formule (29),

$$\frac{\pi}{2}\frac{P_n}{8^n}=\sum_{p=0}(-1)^{n-p}2^{2p-n}\frac{1.3.5\ldots\overline{2p-1}}{2.4.6\ldots 2p}\cdot\frac{p(p-1)\ldots(2p-n+1)}{1.2.3\ldots\overline{n-p}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2p}\varphi d\varphi,$$

ou

$$\frac{P_n}{8^n}=\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^{n-p}2^{2p-n}\frac{1.3.5\ldots\overline{2p-n}}{2.4.6\ldots 2p}\cdot\frac{p(p-1)\ldots(2p-n+1)}{1.2.3\ldots\overline{n-p}}\,\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-2p-1}}{2.4.6\ldots\overline{2n-2p}}.$$

Un calcul facile donne enfin

$$P_n=\sum_{p=0}(-1)^p 4^{n-p}C_{2n-2p,\,n-p}\,.\,C_{2p,\,p}\,.\,C_{n-p,\,p}\,. \qquad (37)$$

Cette expression ne diffère pas, au fond, de celle qui résulte de l'égalité (19). L'une et l'autre exigent des *additions* et des *soustractions :* elles sont moins commodes, par conséquent, que celle-ci :

$$P_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \sum \frac{[(p+1)(p+2)\ldots 2p.(q+1)(q+2)\ldots 2q]^2}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}, \quad (p+q=n) \quad (4)$$

laquelle peut être écrite de ces deux autres manières :

$$P_n = \sum_{p=0} \frac{[(C_{2n-2p,n-p}\cdot C_{2p,p}]^2}{C_{n,p}}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

$$P_n = \sum_{p=0} C_{n,p}\left[\frac{1.2.3\ldots 2p.1.2.3\ldots 2q}{1.2.3\ldots p.1.2.3q.1.2.3\ldots n}\right]^2 \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

En outre, *chacun des termes de* P_n *a la forme* $N^2C_{n,p}$, N *étant un nombre entier*.

Soit, en effet,

$$T_p = C_{n,p}\cdot\left[\frac{1.2.3\ldots 2p \times 1.2.3\ldots 2q}{1.2.3\ldots p \times 1.2\ldots q \times 1.2\ldots n}\right]^2 \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

La fraction entre parenthèses est réductible à un nombre entier (*); donc $T_p = N^2C_{n,p}$ (**).

(*) *Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques* (seconde Note, p. 14).

(**) De la formule (4), on conclut

$$T_p = \frac{[1.2.3\ldots 2p \times 1.2\ldots 2q]^2}{1.2.3\ldots n.[1.2\ldots p \times 1.2\ldots q]^3}.$$

Soit λ un nombre premier quelconque. Puisque T_p est entier, on a cette relation :

$$2\left[\left(\frac{2p}{\lambda}\right)+\left(\frac{2p}{\lambda^2}\right)+\cdots+\left(\frac{2q}{\lambda}\right)+\left(\frac{2q}{\lambda^2}\right)+\cdots\right]+\cdots$$
$$\geqslant \left(\frac{p+q}{\lambda}\right)+\left(\frac{p+q}{\lambda^2}\right)+\cdots+3\left[\left(\frac{p}{\lambda}\right)+\left(\frac{p}{\lambda^2}\right)+\cdots+\left(\frac{q}{\lambda}\right)+\left(\frac{q}{\lambda^2}\right)+\cdots\right];$$

assez difficile, croyons-nous, à vérifier directement.

D'après un théorème démontré dans le *Mémoire sur certaines décompositions en carrés* (p. 63), *l'exposant de la plus haute puissance de* 2, *qui divise* N, *égale le nombre des puissances de* 2 (inégales) *en lesquelles se décompose* p + q.

XI.

Je reprends la relation

$$F_1\left(\frac{z}{1-z}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty (P_n-8P_{n-1})\left(\frac{z}{8}\right)^n. \qquad (35)$$

Le développement du premier membre, suivant les puissances paires du module, est

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2p-1}}{2.4.6\ldots 2p}\right)^2\left(\frac{z}{1-z}\right)^{2p}.$$

De plus,

$$(1-z)^{-2p}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2p(2p+1)\ldots\overline{n-1}}{1.2.3\ldots\overline{n-2p}}z^{n-2p}.$$

Conséquemment, dans le premier membre de l'égalité (35), le coefficient de z^n est

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{1.3.5\ldots\overline{2p-1}}{2.4.6\ldots 2p}\right]^2\frac{2p(2p+1)\ldots\overline{n-1}}{1.2\ldots\overline{n-2p}}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2^{2p}}C_{2p,p}\right]^2C_{n-1,n-2p}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^p[C_{2p,p}]^2C_{n-1,2p-1}.$$

On a donc cette formule de sommation :

$$\sum_{p=1}\left(\frac{1}{16}\right)^p[C_{2p,p}]^2C_{n-1,2p-1}=\left(\frac{1}{8}\right)^n[P_n-8P_{n-1}]. \qquad (41)$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons une remarque touchant le binôme P_n-8P_{n-1}.

Dans le paragraphe V, on a vu qu'en supposant

$$P_n=2^{k_n}R_n,$$

on a, d'après M. de Jonquières,

$$k_n=3n-2\left[\left(\frac{n}{2}\right)+\left(\frac{n}{4}\right)+\left(\frac{n}{8}\right)+\cdots\right].$$

De même :

$$P_{n-1} = 2^{k_{n-1}} R_{n-1},$$

$$k_{n-1} = 3(n-1) - 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right) + \left(\frac{n-1}{4}\right) + \left(\frac{n-1}{8}\right) + \cdots\right].$$

Il y a, maintenant, deux cas à distinguer :

1° n *impair*. Il est visible que

$$\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right), \quad \left(\frac{n}{4}\right) = \left(\frac{n-1}{4}\right), \quad \left(\frac{n}{8}\right) = \left(\frac{n-1}{8}\right), \ldots\ldots;$$

et, par conséquent,

$$k_n = k_{n-1} + 3\ (^*); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

puis

$$P_n - 8P_{n-1} = 2^{k_n}(R_n - R_{n-1}). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

2° Supposons n *pair*, et égal à $2^q.n'$, n' étant *impair*, bien entendu. Nous aurons :

$$k_n = 3n - 2\left[(2^{q-1} + 2^{q-2} + \cdots + 1)\,n' + \left(\frac{n'}{2}\right) + \left(\frac{n'}{4}\right) + \cdots\right],$$

$$k_{n-1} = 3(n-1) - 2\left[\left(\frac{2^q.n'-1}{2}\right) + \left(\frac{2^q n'-1}{4}\right) + \left(\frac{2^q n'-1}{8}\right) + \cdots\right].$$

Mais :

$$\left(\frac{2^q n'-1}{2}\right) = 2^{q-1}n' - 1, \quad \left(\frac{2^q n'-1}{4}\right) = 2^{q-2}n' - 1, \ \cdots$$

$$\left(\frac{2^q n'-1}{2^q}\right) = n' - 1, \quad \left(\frac{2^q n'-1}{2^{q+1}}\right) = \left(\frac{n'}{2}\right), \ \ldots (^{**}).$$

Donc

$$k_{n-1} = 3(n-1) - 2\left[(2^{q-1} + 2^{q-2} + \cdots + 1)\,n' - q + \left(\frac{n'}{2}\right) + \left(\frac{n'}{4}\right) + \cdots\right];$$

(*) Cette loi, que j'ai rencontrée par *induction*, s'observe sur les valeurs de P_n, calculées par M. de Jonquières.

(**) En effet, si aucune des fractions $\frac{A-1}{B}$, $\frac{A}{B}$ n'est réductible à un nombre entier, elles ont même partie entière.

puis

$$k_n - k_{n-1} = 5 - 2^q;$$

et, finalement,

$$P_n - 8P_{n-1} = 2^{k_n}[R_n - 4^q R_{n-1}]\ (^*) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

XII.

La relation

$$\frac{P_n}{8^n} - \frac{P_{n-1}}{8^{n-1}} = \sum_{p=1} \left(\frac{1}{16}\right)^p [C_{2p,\,p}]^2 C_{n-1,\,2p-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

conduit, aisément, à une expression de P_n, plus simple que toutes les précédentes.

Soit, pour abréger,

$$\sum_{p=1} \left(\frac{1}{16}\right)^p [C_{2p,\,p}]^2 C_{n-1,\,2p-1} = S_n;$$

de manière que

$$\frac{P_n}{8^n} - \frac{P_{n-1}}{8^{n-1}} = S_n.$$

Changeant n en $n - 1$, $n - 2$, ... 1, on a, par addition :

$$\frac{P_n}{8^n} - 1 = S_n + S_{n-1} + \cdots + S_1.$$

Pour simplifier le second membre, j'observe que, d'après une propriété connue (**),

$$C_{n-1,\,2p-1} + C_{n-2,\,2p-1} + \cdots + C_{2p-1,\,2p-1} = C_{n,\,2p}.$$

Par conséquent,

$$P_n = 8^n \sum_{p=0} \left(\frac{1}{16}\right)^p [C_{2p,\,p}]^2 C_{n,\,2p}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

(*) L'égalité (43) est un cas particulier de celle-ci : celui qui répond à $q = 0$.
(**) *Cours d'Analyse*, p. 46.

puis, à cause de la formule

$$P_n = \sum_{p=0} \frac{[C_{2n-2p,\,n-1} \cdot C_{2p,\,p}]^2}{C_{n,\,p}} : \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

$$8^n \sum_{p=0} \left(\frac{1}{16}\right)^p [C_{2p,\,p}]^2 \, C_{n,\,2p} = \sum_{p=0} \frac{[C_{2p-2p,\,n-p} \cdot C_{2p,\,p}]^2}{C_{n,\,p}} \quad \ldots \ldots \quad (46)$$

Si, par exemple, $n = 5$, on doit avoir :

$$8^5 \left[1 + \frac{1}{16} 2^2 . 10 + \frac{1}{16^2} . 6^2 . 5\right]$$

$$= 252^2 + \frac{1}{5}(70.2)^2 + \frac{1}{10}(20.6)^2 + \frac{1}{10}.(6.20)^2 + \frac{1}{5}(2.70)^2 + 252^2,$$

ou

$$8^3(64 + 160 + 45) = (252^2 + 140.28 + 120.12).2 = (63^2 + 245 + 90)\,32,$$

ou enfin

$$8.269 = 2152,$$

ce qui est exact.

XIII.

La formule de M. de Jonquières :

$$k_n = 3n - 2\left[\left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{8}\right) + \cdots\right]$$

peut, au moyen d'une propriété rappelée ci-dessus, être écrite sous une forme plus simple.

Supposons

$$n = 2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma + \cdots + 2^\lambda,$$

les exposants allant en décroissant. Si s est le nombre des termes du second membre, on a (*)

$$\left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{8}\right) + \cdots = n - s;$$

(*) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 64.

et, par conséquent,

$$k_n = n + 2s; \quad \ldots \ldots \quad (47)$$

puis

$$P_n = 2^{n+2s} R_n. \quad \ldots \ldots \quad (48)$$

Si l'on substitue cette valeur dans la formule (46), on trouve

$$R_n = \sum_{p=0} 4^{n-2p-s} [C_{2p,p}]^2 C_{n,2p}. \quad \ldots \ldots \quad (49)$$

Le calcul des nombres *impairs* R_n est donc rendu fort simple.

XIV.

Dans les paragraphes VI et VII, nous avons transformé P_n en intégrales définies. La formule (49) se prête, très facilement, à une transformation semblable. En effet, à cause de

$$[C_{2p,p}]^2 = \frac{16^p}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{X_{2p}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

on a

$$R_n = \frac{4^{n-s}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{p=0} X_{2p} C_{n,2p},$$

ou

$$R_n = \frac{4^{n-s}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{S_n dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \ldots \ldots \quad (50)$$

en posant, pour abréger,

$$S_n = 1 + C_{n,2}X_2 + C_{n,4}X_4 + \cdots \quad \ldots \ldots \quad (51)$$

De là résulte, à cause des formules (29) et (48), cette *relation entre les fonctions* X_n :

$$\int_0^1 \frac{S_n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{Y_n dy}{\sqrt{1-y^2}} \quad \ldots \ldots \quad (52)$$

Soit, par exemple, $n = 5$. Alors

$$S_n = 1 + 10 . X_2 + 5X_4 = \frac{1}{8}(175x^4 - 30x^2 - 17),$$

$$Y_n = \frac{1}{8}(15y^4 - 70y^2 + 63).$$

L'équation (52) se réduit à

$$\int_0^1 \frac{(175x^4 - 30x^2 - 17)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{(15y^4 - 70y^2 + 63)dy}{\sqrt{1-y^2}};$$

ou, par le changement de y en x, à

$$\int_0^1 \frac{(4x^4 + x^2 - 2)dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0;$$

ou enfin, à

$$4 \cdot \frac{1.3}{2.4} + \frac{1}{2} - 2 = 0.$$

XV.

Les nombres P_n peuvent être rattachés aux *Nombres de Segner*, donnés par la formule

$$T_{n+2} = \frac{2.6.10 \ldots \overline{4n-2}}{2.3.4 \ldots \overline{n+1}} \ (*).$$

Effectivement, en vertu de la transformation que nous avons plusieurs fois employée :

$$C_{2n,n} = (n+1) T_{n+2}.$$

Cela posé, la formule

$$P_n = 2^n \sum_{p=0} (-4)^p \left[C_{2n-2p,\, n-p}\right]^2 C_{n-p,\, p} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (18)$$

(*) Voir la Note intitulée : *Sur les Nombres de Segner.*

devient, par un calcul facile,

$$P_n = 2^{n+2}\left[(2n-1)^2 T_{n+1}^2 - 4\frac{n-1}{1}(2n-3)^2 T_n^2 + 4^2\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}(4n-10)^2 T_{n-1}^2 - \cdots\right]. \quad (53)$$

Si, par exemple, $n = 5$:

$$P_5 = 2^7\,[81 . T_6^2 - 4.4.49 T_5^2 + 4^2.3.25 T_4^2].$$

Or :

$$T_4 = 2, \quad T_5 = 5, \quad T_6 = 14\ (^*).$$

Donc

$$P_5 = 2^7\,[81 . 14^2 - 16.49.5^2 + 16.75.2^2],$$

ou

$$P_5 = 2^9\,[81.49 - 100.49 + 1\,200] = 2^9 . 269;$$

valeur connue.

Liège, septembre 1885.

(*) *Loc. cit.*

QUELQUES IDENTITÉS (*).

I. $$(x+y)^2+(x+2y)^2+(x+3y)^2+(x+4y)^2=(2x+5y)^2+4y^2+y^2\ . \quad (1)$$

Ainsi, *dans toute progression arithmétique, la somme* S_4, *des carrés de quatre termes consécutifs, égale le carré de la somme des termes extrêmes, augmenté de cinq fois le carré de la raison.*

II. Si l'on change x en $x+4y$, on trouve, au moyen de la relation précédente :

$$(x+y)^2+(x+2y)^2+\cdots+(x+16y)^2=(2x+5y)^2+(2x+13y)^2+(2x+21y)^2+(2x+29y)^2+20y^2.$$

La somme des quatre premiers termes du second membre est réductible à

$$(4x+34y)^2+5.(8y)^2.$$

Donc, S_{16} représentant le premier membre :

$$S_{16}=(4x+34y)^2+(18y)^2+(4y)^2 \ldots\ldots \quad (2)$$

Cette égalité exprime que :

Dans toute progression arithmétique, la somme S_{16}, *des carrés de seize termes consécutifs, égale le carré du double de la somme des termes extrêmes, augmenté de la somme de deux carrés.*

III. Le même calcul donne l'identité

$$S_{64}=(8x+260y)^2+(100y)^2+(104y)^2+(32y)^2\ , \ldots\ldots \quad (3)$$

dans laquelle le second membre n'est pas, généralement, réductible à une somme de trois carrés.

(*) Elles sont destinées, simplement, à *remplir la feuille.* Peut-être y reviendrai-je.

IV. Semblablement,

$$S_{256} = (16x + 2\,056y)^2 + (24.31y)^2 + (24.37y)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (4)$$

Ainsi :

Dans toute progression arithmétique, la somme S_{256}, *des carrés de deux cent cinquante-six termes consécutifs, égale le carré de l'octuple de la somme des termes extrêmes, augmenté de la somme de deux carrés.*

V. A l'égard des multiples de 5, j'indiquerai les identités :

$$(x+y)^2 + (x+2y)^2 + (x+3y)^2 + (x+4y)^2 + (x+5y)^2 = (2x+6y)^2 + (x+3y)^2 + (3y)^2 + y^2, \quad (5)$$

$$(x + y)^2 + \cdots + (x + 25y)^2 = (5x + 65y)^2 + (30y)^2 + (20y)^2. \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Il en résulte que :

Dans toute progression arithmétique, la somme des carrés de cinq termes consécutifs égale une somme de quatre carrés ; la somme des carrés de vingt-cinq termes consécutifs égale une somme de trois carrés.

En outre, *la dernière somme est divisible par* 25 (*).

Par exemple,

$$19^2 + 20^2 + \cdots + 43^2 = 155^2 + 30^2 + 20^2 = 25\,325 = \mathfrak{M}.25.$$

En effet, la valeur du premier membre est, par la formule connue,

$$\frac{1}{6}[43.44.87 - 18.19.37] = 27\,434 - 2\,109 = 25\,325.$$

VI. Les considérations précédentes s'appliquent aux *carrés magiques.*

Liège, décembre 1885.

(*) On suppose x et y *entiers*. En général, *si* n *est premier avec* 6, *la somme des carrés de* n² *termes consécutifs est divisible par* n².