PROBLÈMES

ET

THÉORÈMES DE PROBABILITÉS;

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 2 août 1884.)

PROBLÈMES

ET

THÉORÈMES DE PROBABILITÉS.

A la page 90 de ses *Recherches sur les probabilités des jugements,* Poisson donne la solution de ce problème :

On sait qu'une urne renfermait m *boules, blanches ou noires; on en a tiré une blanche; et l'on demande quelle est la probabilité de l'extraction d'une nouvelle boule blanche, la première n'ayant pas été remise dans l'urne;*

après quoi il ajoute :

« Cette probabilité est donc *indépendante du nombre* m, ... *et toujours* » *égale à* $\frac{2}{3}$. »

Ni l'illustre Géomètre, ni ses successeurs, n'ont songé, paraît-il, à généraliser ce remarquable résultat. On lira donc peut-être, avec intérêt, la solution d'un problème dont celui de Poisson est un cas fort particulier, et la démonstration d'un théorème nouveau, qui *supprime* les longs calculs nécessités par le *théorème de Bayes.*

I.

FORMULES PRÉLIMINAIRES.

1. Le coefficient de x^α, dans le développement de $(1-x)^{-(m+1)}$, est

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+\alpha)}{1 \quad 2 \quad \ldots \quad \alpha} = C_{m+\alpha,\alpha}.$$

Par conséquent, si l'on multiplie $(1-x)^{-(m+1)}$ par $(1-x)^{-(m'+1)}$, le coefficient de x^p, dans le produit, sera

$$\sum C_{m+\alpha,\alpha} \times C_{m'+\alpha',\alpha'},$$

pourvu que

$$\alpha + \alpha' = p.$$

Et comme ce coefficient égale aussi $C_{m+m'+p+1,p}$, on a

$$\sum C_{m+\alpha,\alpha} \times C_{m'+\alpha',\alpha'} = C_{m+m'+p+1,p}. \quad (\alpha+\alpha'=p) \quad \ldots\ldots \quad \text{(A)}$$

2. Plus généralement, considérons le produit

$$(1-x)^{-(m+1)} \times (1-x)^{-(m'+1)} \times (1-x)^{-(m''+1)} \times \cdots,$$

composé de f facteurs. Il est clair, sans nouveaux calculs, que

$$\sum C_{m+\alpha,\alpha} \times C_{m'+\alpha',\alpha'} \times C_{m''+\alpha'',\alpha''} \times \cdots = C_{s+p+f-1,p}. \quad \ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

$$(s = m + m' + m'' + \cdots, \quad p = \alpha + \alpha' + \alpha'' \cdots).$$

3. *Remarques*. I. Si la somme *donnée, s*, est décomposée en d'autres parties $n, n', n'', \ldots$, on aura

$$\sum C_{n+\alpha,\alpha} \times C_{n'+\alpha',\alpha'} \times C_{n''+\alpha'',\alpha''} \times \cdots = \sum C_{m+\alpha,\alpha} \times C_{m'+\alpha',\alpha'} \times C_{m''+\alpha'',\alpha''} \times \cdots = C_{s+p+f-1,p}.$$

II. Si, dans les formules (A), (B), on attribue, aux quantités $m, m', m'', \ldots, \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, des *valeurs positives quelconques,* on peut obtenir des formules de sommation, relatives aux intégrales eulériennes.

4. *Application au triangle arithmétique.* Écrivons ainsi la formule (A) :

$$\sum_{k=0}^{k=p} C_{m+k,\,m} \times C_{m'+p-k,\,m'} = C_{m+m'+p+1,\,p}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

et, pour plus de clarté, prenons un cas particulier; par exemple :

$$m = 3, \quad m' = 5, \quad p = 4.$$

La relation (1) devient

$$C_{3,3} \times C_{9,5} + C_{4,3} \times C_{8,5} + C_{5,3} \times C_{7,5} + C_{6,3} \times C_{6,5} + C_{7,3} \times C_{5,5} = C_{13,4};$$

ou

$$1 \times 126 + 4 \times 56 + 10 \times 21 + 20 \times 6 + 35 \times 1 = 715.$$

1	1												
1	2	1											
1	3	3	1										
1	4	6	4	1									
1	5	10	10	5	1								
1	6	15	20	15	6	1							
1	7	21	35	35	21	7	1						
1	8	28	56	70	56	28	8	1					
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1				
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1			
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1		
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1

Les premiers facteurs sont les *cinq* premiers termes de la *quatrième* colonne. Les seconds facteurs sont les *cinq* premiers termes de la *sixième* colonne, ceux-ci étant pris dans l'*ordre renversé*. Enfin, 715 est le *cinquième* terme de la *onzième* colonne, et $11 = 4 + 6 + 1$.

Ainsi :

Ayant pris, dans deux colonnes, un même nombre n *de termes, on renverse l'une des colonnes : la somme des produits des nouveaux termes correspondants est le* n^ième^ *terme d'une nouvelle colonne. Le rang de celle-ci surpasse, d'une unité, la somme des rangs donnés.*

5. *Suite.* Prenons *six* termes dans chacune des *huit* premières colonnes, et *renversons* les *quatre* dernières. Il résultera, de cette opération, le tableau suivant :

1	1	1	1	126	252	462	1716
1	2	3	4	70	126	210	792
1	3	6	10	35	56	84	330
1	4	10	20	15	21	28	120
1	5	15	35	5	6	7	8
1	6	21	56	1	1	1	1

Faisant les sommes et les produits indiqués, on trouve, conformément à l'une des remarques ci-dessus (3) :

$$1 \times 1716 + 1 \times 792 + 1 \times 330 + 1 \times 120 + 1 \times 8 + 1 \times 1 = 1\,287,$$
$$1 \times 462 + 2 \times 210 + 3 \times 84 + 4 \times 28 + 5 \times 7 + 6 \times 1 = 1\,287,$$
$$1 \times 252 + 3 \times 126 + 6 \times 56 + 10 \times 21 + 15 \times 6 + 21 \times 1 = 1\,287,$$
$$1 \times 126 + 4 \times 70 + 10 \times 35 + 20 \times 15 + 35 \times 5 + 56 \times 1 = 1\,287.$$

La première propriété est due à Pascal; les autres sont, peut-être, nouvelles (*).

(*) Dans le remarquable Mémoire intitulé : *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise,* M. Édouard Lucas s'énonce ainsi (p. 38) :

« On peut, par analogie, arriver à la formule générale

(A′) . . . . $C_m^n = C_{m-p}^{n-p}(C_{1+1})^p$. »

Le second membre, développé, devient

$$C_{m-p}^{n} + \frac{p}{1} C_{m-p}^{n-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} C_{m-p}^{n-2} + \cdots + C_{m-p}^{n-p}.$$

Donc, si l'on change de notation,

$$C_{m,n} = C_{m-p,n} + \frac{p}{1} C_{m-p,n-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} C_{m-p,n-2} + \cdots + C_{m-p,n-p}.$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=0}^{k=p} C_{p,k} \times C_{m-p,n-k} = C_{m,n};$$

et, en particulier,

$$1 \times C_{9,4} + 4 \times C_{9,3} + 6 \times C_{9,2} + 4 \times C_{9,1} + 1 \times 1 = C_{13,4},$$

ou

$$1 \times 126 + 4 \times 84 + 6 \times 36 + 4 \times 9 + 1 \times 1 = 715.$$

La formule (A′), de M. Lucas (formule bien connue), et les applications qu'il en fait, sont donc différentes des nôtres.

II.

PROBLÈMES ET THÉORÈMES.

6. PROBLÈME I. *Une urne* A *contenait, primitivement,* s *boules. On en a tiré, au hasard,* m *boules blanches,* m′ *boules non blanches. Quelle est la probabilité d'extraire, de l'urne modifiée, une nouvelle boule blanche* (*)?

1° On peut faire, sur le nombre de boules blanches contenues dans A, avant les tirages, $s-(m+m')+1$ hypothèses; savoir :

$$m,\quad m+1,\quad m+2,\ \ldots,\ m+k,\ \ldots,\ s-m'.$$

Suivant le *théorème de Bayes,* la probabilité, ϖ_k, que l'urne renfermait $m+k$ boules blanches, est proportionnelle à

$$C_{m+k,\,m}\times C_{s-m-k,\,m'};$$

donc

$$\varpi_k=\frac{C_{m+k,\,m}\times C_{s-m-k,\,m'}}{\sum\limits_{k=0}^{k=s-m-m'} C_{m+k,\,m}\times C_{s-m-k,\,m'}}\ (^{**});\quad\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

ou, si l'on pose

$$s-m-m'=p:\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

$$\varpi_k=\frac{C_{m+k,\,m}\times C_{m'+p-k,\,m'}}{\sum\limits_{k=0}^{k=p} C_{m+k,\,m}\times C_{m'+p-k,\,m'}};$$

ou encore, d'après la relation (1),

$$\varpi_k=\frac{C_{m+k,\,m}\times C_{m'+p-k,\,m'}}{C_{m+m'+p+1,\,p}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

(*) Nous supposons, une fois pour toutes, qu'une boule sortie de l'urne n'y est pas remise.

(**) Nous faisons abstraction du facteur *constant* $C_{m+m',\,m}$, qui entrerait aux deux termes de la fraction.

2° Si, parmi les p boules qui restent dans l'urne, k sont blanches, la probabilité de la sortie d'une de celles-ci est $\frac{k}{p}$· Conséquemment, la probabilité *totale* cherchée a pour expression :

$$P = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{k=p} k\varpi_k;$$

ou, par la formule (4),

$$P = \frac{1}{p\,C_{m+m'+p+1,\,p}} \sum_{k=0}^{k=p} kC_{m+k,\,m} \times C_{m'+p-k,\,m'};$$

ou plutôt, le premier produit étant nul :

$$P = \frac{1}{pC_{m+m'+p+1,\,p}} \sum_{k=1}^{k=p} kC_{m+k,\,m} \times C_{m'+p-k,\,m'}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

3° On a :

$$pC_{m+m'+p+1,\,p} = (m + m' + 2)\, C_{m+m'+p+1,\,p-1}, \quad kC_{m+k,\,m} = (m + 1)\, C_{m+k,\,m+1}.$$

Par suite, la formule (5) devient

$$P = \frac{m + 1}{(m + m' + 2)\, C_{m+m'+p+1,\,p-1}} \sum_{k=1}^{k=p} C_{m+k,\,m+1} \times C_{m'+p-k,\,m'};$$

puis, si l'on fait $k = h + 1$:

$$P = \frac{m + 1}{(m + m' + 2)\, C_{m+m'+p+1,\,p-1}} \sum_{h=0}^{h=p-1} C_{m+h+1,\,m+1} \times C_{m'+p-1-h,\,m'} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

4° Par la formule (1), dans laquelle je change p en $p - 1$, m en $m + 1$:

$$\sum_{h=0}^{h=p-1} C_{m+h+1,\,m+1} \times C_{m'+p-1-h,\,m'} = C_{m+m'+p+1,\,p-1}.$$

5° Finalement,

$$P = \frac{m + 1}{m + m' + 2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

quantité indépendante de s.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

7. Théorème I. *Si, d'une urne* A, *contenant* s *boules, il est sorti* m *boules blanches,* m' *boules non blanches ; la probabilité de l'extraction d'une nouvelle boule blanche est égale à la probabilité d'extraire une boule blanche d'une urne* B, *contenant* m + 1 *boules blanches et* m' + 1 *boules noires* (*).

8. Corollaires. I. *Ayant pris, au hasard, dans un tas de cartes,* n *cartes, parmi lesquelles se trouvent* c *carreaux, la probabilité de tirer un carreau, du reste, est* $\frac{c+1}{n+2}$.

II. *Un naufragé, abordant une île inconnue, rencontre deux Blancs et un Noir. Quelles sont les probabilités qu'il rencontrera, soit un troisième Blanc, soit un second Noir ?*

Réponse : $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}$.

III. *Lorsque* $m = m' + 1$, $P = \frac{2}{3}$ (**).

9. *Remarque.* En général : *si un long calcul amène un résultat simple, il est inutile.* Cet aphorisme, dont nous avons fait souvent usage (***), est applicable à la question actuelle.

Considérons, en effet, l'urne A, d'où sont sorties m boules blanches, m' boules non blanches. Après cet *événement observé,* l'urne renferme $s - m - m'$ boules, de diverses couleurs, en proportion inconnue. L'*événement attendu* est la sortie d'une boule blanche, de l'urne *modifiée.*

La probabilité P, *de cet événement, ne sera pas altérée, si les causes dont il dépend subissent des modifications inconnues* (IV).

Nous pouvons donc *mettre à part, sans les regarder,* 1 boule, 2 boules, 3 boules, ... et même $(s - m - m' - 1)$ boules : P n'aura pas changé.

(*) Le *Calcul des Probabilités,* de M. le général Liagre, renferme (p. 104) un énoncé dont la dernière phrase est identique à celle-ci. Mais mon savant Confrère et ami suppose que le nombre s est inconnu. Nos deux propositions sont donc distinctes.

(**) Dans le problème cité au commencement de la Note, $m' = 0$, $m = 1$.

(***) *Journal de Liouville,* t. VI, p. 78 ; *Un nouveau Principe de probabilités ;* etc.

(IV) *Un nouveau Principe de probabilités* (Bulletin de l'Académie, 1877).

Mais alors l'urne A est remplacée par une urne auxiliaire ou *fictive* B, *contenant, primitivement,* $m + m' + 1$ *boules, et d'où il est sorti* m *boules blanches,* m' *boules non blanches.*

On ne peut faire, sur la composition de B, que *deux* hypothèses :

m *blanches,* $m' + 1$ *non blanches ;*
$m + 1$ *blanches,* m' *non blanches.*

Les probabilités de ces hypothèses sont proportionnelles aux nombres

$$m(m-1)\ldots 1.(m'+1)m'\ldots 2,$$
$$(m+1)m\ldots 2.m'(m'-1)\ldots 1;$$

ou, plus simplement, proportionnelles à

$$m'+1, \quad m+1$$

Ainsi, ϖ_1, ϖ_2 étant ces probabilités :

$$\varpi_1 = \frac{m'+1}{m+m'+2}, \quad \varpi_2 = \frac{m+1}{m+m'+2}.$$

Mais, évidemment : *la première hypothèse est incompatible avec l'événement attendu ; la seconde le rend nécessaire.*

En conséquence, *la probabilité cherchée,* P, *est égale à la probabilité* ϖ_2 *de cette hypothèse principale.* Autrement dit,

$$P = \frac{m+1}{m+m'+2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

comme ci-dessus.

10. PROBLÈME II. *Une urne* A *contenait, primitivement,* s *boules. On en a tiré, au hasard,* b *blanches,* n *non blanches. Quelle est la probabilité* P *d'extraire* b' *blanches,* n' *non blanches, de l'urne modifiée?*

La méthode *classique* donne, au moyen d'un long calcul que nous supprimons,

$$P = \frac{C_{b+b',b'} \times C_{n+n',n'}}{C_{b+b'+n+n'+1,b'+n'}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D)$$

Pour vérifier cette formule, appliquons les considérations précédentes.

1° Soit $\sigma = b + b' + n + n'$. Nous pouvons, en vertu du *nouveau principe*, remplacer A par une urne B, auxiliaire ou *fictive*, renfermant σ boules, blanches ou non blanches.

2° De B, il a été extrait b blanches, n non blanches. On peut donc faire, sur la composition primitive de cette urne, les $\sigma - b - n + 1$ hypothèses suivantes :

$\sigma - n$ *blanches,*	$\sigma - n - 1$ *blanches,*		$\sigma - k$ *blanches,*		b *blanches,*
n *non blanches;*	$n + 1$ *non blanches;*	...	k *non blanches;*	...	$\sigma - b$ *non blanches.*

La probabilité ϖ_k, de l'hypothèse *quelconque*, est proportionnelle à

$$C_{\sigma-k,\, b} \times C_{k,\, n}.$$

Donc

$$\varpi_k = \frac{C_{\sigma-k,\, b} \times C_{k,\, n}}{\sum_{k=n}^{k=\sigma-b} C_{\sigma-k,\, b} \times C_{k,\, n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

3° Soient

$$k = n + g, \quad \sigma - b - n = b' + n' = p.$$

Le dénominateur devient

$$\sum_{g=0}^{g=p} C_{n+g,\, n} \times C_{b+p-g,\, b}.$$

D'après la formule (1), cette somme est

$$C_{b+n+p+1,\, p} = C_{b+b'+n+n'+1,\, b'+n'}.$$

Ainsi, au lieu de la formule (7), nous avons

$$\varpi_k = \frac{C_{\sigma-k,\, b} \times C_{k,\, n}}{C_{\sigma+1,\, b'+n'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

4° Parmi les $b' + n'$ hypothèses ci-dessus, une seule est compatible avec l'événement attendu : c'est celle qui répond à $k = n + n'$. Mais alors cet événement devient *certain*. Donc $P = \varpi_{n+n'}$, ou

$$P = \frac{C_{b+b',\, b'} \times C_{n+n',\, n'}}{C_{b+b'+n+n'+1,\, b'+n'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D)$$

11. *Cas particulier.* I. $b = b' = 1$, $n = n' = 0$ (*) :

$$P = \frac{C_{2,1}}{C_{3,1}} = \frac{2}{3}.$$

II. $b = n = 0$, $b' = n' = 1$:

$$P = \frac{1}{C_{3,2}} = \frac{1}{3}.$$

III. $b = b' = n = n' = 1$:

$$P = \frac{C_{2,1} \times C_{2,1}}{C_{5,2}} = \frac{2}{5}.$$

IV. $b = b' = n = n' = p$:

$$P = \frac{[C_{2p,p}]^2}{C_{4p+1,2p}} = \frac{[(p+1)(p+2)\dots 2p]^3}{1.2.3\dots p \times (2p+2)(2p+3)\dots(4p+1)} \quad (^{**}).$$

12. PROBLÈME III. *Une urne* A *contenait, primitivement,* s *boules blanches, noires et rouges. On en a tiré, au hasard,* a *de la première couleur,* b *de la deuxième,* c *de la troisième. Quelle est la probabilité d'extraire, de l'urne modifiée,* a' *blanches,* b' *noires,* c' *rouges?*

Appliquant le *nouveau principe,* je remplace s par

$$a + b + c + a' + b' + c' = \sigma.$$

Alors le problème revient à celui-ci :

D'une urne B, *contenant* σ *boules, on a extrait* a *blanches,* b *noires,* c *rouges. Quelle est la probabilité que l'urne contient encore* a' *blanches,* b' *noires,* c' *rouges?*

La probabilité que B renfermait, primitivement, λ *blanches,* μ *noires,* ν *rouges,* est proportionnelle à

$$C_{\lambda,a} \times C_{\mu,b} \times C_{\nu,c} = C_{\lambda,\lambda-a} \times C_{\mu,\mu-b} \times C_{\nu,\nu-c}. \quad \dots\dots \quad (9)$$

(*) Problème de Poisson.

(**) Si p croît indéfiniment, lim $P = 0$; conclusion évidente *a priori*.

Dans la formule (B), je fais

$$\begin{gathered}\alpha = \lambda - a, \quad \alpha' = \mu - b, \quad \alpha'' = \nu - c,\\ m = a, \qquad m' = b, \qquad m'' = c,\\ f = 3, \quad p = (\lambda + \mu + \nu) - (a + b + c) = a' + b' + c'.\end{gathered}$$

En vertu de cette formule, la somme des produits (9) est

$$C_{a+b+c+3+a'+b'+c'-1,\, a'+b'+c'} = C_{\sigma+2,\, a'+b'+c'}.$$

Donc, ϖ étant la probabilité de l'hypothèse,

$$\varpi = \frac{C_{\lambda,\lambda-a} \times C_{\mu,\mu-b} \times C_{\nu,\nu-c}}{C_{\sigma+2,\, a'+b'+c'}}.$$

D'ailleurs, la seule hypothèse compatible avec l'événement attendu est celle qui répond à

$$\lambda = a + a', \quad \mu = b + b', \quad \nu = c + c'.$$

En conséquence,

$$P = \frac{C_{a+a',a'} \times C_{b+b',b'} \times C_{c+c',c'}}{C_{\sigma+2,\, a'+b'+c'}} \quad \text{. . . . . (E)}$$

13. Problème IV. *Une urne* A *contenait, primitivement,* s *billets, portant les numéros* 1, 2, 3 ... f. *On en a tiré, au hasard,* α *numéros* 1, β *numéros* 2, ..., θ *numéros* f. *Quelle est la probabilité d'extraire, de l'urne modifiée,* α' *numéros* 1, β' *numéros* 2, ..., θ' *numéros* f?

Soient

$$\begin{gathered}(\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') + \cdots + (\theta + \theta') = \sigma, \quad \text{. . . . . . . (10)}\\ \alpha' + \beta' + \gamma' + \cdots = p.\end{gathered}$$

Sans nouveaux calculs, nous pouvons, de ce qui précède, conclure la *formule générale :*

$$P = \frac{C_{\alpha+\alpha',\alpha'} \times C_{\beta+\beta',\beta'} \times \cdots C_{\theta+\theta',\theta'}}{C_{\sigma+f-1,\,p}} \quad \text{. . . . . (F)}$$

puis la proposition suivante :

14. THÉORÈME II. *Un événement observé,* E, *peut toujours être assimilé à la sortie de* p *numéros, parmi lesquels* α *numéros* 1, β *numéros* 2, ..., θ *numéros* f, *d'une urne* A, *contenant* s *billets, numérotés* 1, 2, 3, ..., f.

De même, l'événement attendu, E', *peut être assimilé à l'extraction, de cette urne* A, *modifiée, de* α' *numéros* 1, β' *numéros* 2, ..., θ' *numéros* f. *Cela posé :*

1° *Le nombre* s, *connu ou inconnu, peut être remplacé par*

$$\sigma = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') + \cdots + (\theta + \theta');$$

2° *La probabilité* P, *de* E', *est égale à la probabilité qu'une urne fictive, d'où seraient sortis les* σ — p *premiers billets, en contient encore* p.

3° *Cette probabilité est donnée par la formule* (F).

Spa, juillet 1884.

ADDITION.

1. M. Mansion, mon jeune et savant Confrère, m'a fait observer que Poisson, non content d'avoir appliqué le *nouveau Principe*, l'a *formulé* et *démontré*. On lit en effet, dans les *Recherches sur la probabilité des jugements* (p. 231) :

« Une urne A renferme un nombre c de boules, dont a boules blanches
» et b boules noires, de sorte qu'on ait $a + b = c$. On en extrait d'abord
» au hasard un nombre l de boules, successivement et sans les remettre,
» ou toutes à la fois; ensuite, on en extrait de même un nombre μ ou $m+n$
» d'autres boules; je dis que dans cette seconde opération, la probabilité
» d'amener m boules blanches et n boules noires est indépendante du
» nombre et de la couleur des boules sorties dans la première, et la même
» que si l était zéro. »

Cet énoncé est suivi de *deux* démonstrations, assez peu claires. Du reste, l'illustre Géomètre ne semble pas s'être aperçu de l'importance du *Principe*, car il lui donne, simplement, le nom de *Lemme*.

2. On peut modifier une chose, soit en l'unissant à une chose de même nature, soit en supprimant quelqu'une de ses parties. Dans le premier cas, nous dirons que la modification est *additive;* dans le second, qu'elle est *soustractive.*

Ceci admis, le nouveau Principe n'est pas applicable *si les modifications* subies par les causes de l'événement attendu *sont additives* (*).

Soit une urne A contenant 3 boules blanches, de telle sorte que la probabilité de la sortie d'une boule de cette couleur égale 1.

Si l'on introduit, dans A, une nouvelle boule, dont on sache, seulement, qu'elle est *blanche* ou *noire;* la sortie d'une blanche, de l'urne modifiée, n'est plus certaine, et la probabilité de cet *événement* devient :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{4}{4}+\frac{3}{4}\right]=\frac{7}{8}\ (^{**}).$$

3. De même, si une urne contient 3 boules blanches et 8 boules noires, et que l'on y introduise une boule inconnue, mais *noire* ou *blanche;* les probabilités

$$P=\frac{3}{11},\quad Q=\frac{8}{11},$$

sont remplacées par

$$P'=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{12}+\frac{3}{12}\right)=\frac{7}{24},\quad Q'=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{12}+\frac{8}{12}\right)=\frac{17}{24}.$$

4. Problème V. *Une urne* A *contient* a *boules blanches,* b *boules noires,* c *boules rouges. On y introduit* n *boules, blanches, noires, rouges, en*

(*) *Un nouveau Principe de probabilités*, p. 1.

(**) La formule générale est

$$P=\frac{3n+1}{4n},$$

n représentant le nombre des couleurs données.

proportion inconnue. Quelle est la probabilité d'extraire, de l'urne modifiée, a *boules blanches,* b *boules noires,* c *boules rouges* (*)?

Posons

$$a + b + c + n = s, \quad \lambda + \mu + \nu = n.$$

Le nombre des systèmes de valeurs des inconnues λ, μ, ν est, comme l'on sait,

$$C_{n+2,2} = N.$$

Cela posé, un calcul fort simple donne cette expression de la probabilité cherchée :

$$P = \frac{1}{NC_{s,n}} \sum C_{a+\lambda,\lambda} \times C_{b+\mu,\mu} \times C_{c+\nu,\nu};$$

ou, par la formule (1),

$$P = \frac{1}{N} \frac{C_{s+n+2,n}}{C_{s,n}};$$

ou enfin, *si* n *surpasse zéro :*

$$P = \frac{1.2}{(n+1)(n+2)} \frac{(s+n+2)(s+n+1)\dots(s+3)}{s(s-1)\dots(s-n+1)}.$$

5. *Remarques.* I. Cette probabilité est indépendante des nombres a, b, c : elle est fonction, seulement, de leur somme et du nombre n.

II. Le problème peut donc être énoncé ainsi :

Une urne A *contient* μ *boules, de trois couleurs. On y introduit* n *boules, de mêmes couleurs que les premières; puis, de l'urne* A *modifiée, on tire* μ *boules, pour les placer dans une urne* B. *Quelle est la probabilité que* B *sera composée comme l'était* A?

$$P = \frac{1.2}{(n+1)(n+2)} \frac{(\mu+2n+2)(\mu+2n+1)\dots(\mu+n+3)}{(\mu+n)(\mu+n-1)\dots(n+1)}.$$

(*) Cette question complète la remarque sur les *modifications additives*.

Liége, octobre 1884.