SUR

LES FONCTIONS X_n DE LEGENDRE;

PAR

E. CATALAN.

(SECOND MÉMOIRE.)

(Mémoire présenté à la Classe des Sciences, dans la séance du 6 août 1881.)

AVANT-PROPOS.

En commençant ce nouveau *Mémoire sur les fonctions* X_n, j'avais pensé qu'il se composerait de quelques pages : il en contient plus de cent! Les Géomètres qui, après avoir lu mon premier travail, auront encore la patience de lire celui-ci, reconnaîtront (je l'espère du moins) que la théorie créée par Legendre est, pour ainsi dire, inépuisable. S'ils veulent en perfectionner les diverses parties, ils rencontreront, certainement, des formules et des théorèmes remarquables, souvent inattendus. Pour ma part, je suis tenté de croire que, malgré les travaux de Legendre, Laplace, Poisson, Jacobi, Bauer, Heine, Laurent, Ascoli, ... *ce qu'il reste à trouver l'emporte sur ce qui est connu.*

Parmi les résultats, très nombreux, contenus dans le Mémoire suivant, je mentionnerai ceux-ci :

$$\int_0^\pi \frac{A + B\sqrt{-1}\cos x}{(B - A\sqrt{-1}\cos x)^2}\,dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} dx \int_0^\pi d\omega \cos\left[\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}\cos\omega}\right] = 2\pi,$$

Si a, b *sont deux racines de* $\frac{dX_n}{dx} = 0$, *on a*

$$\int_a^b X_n dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d(X_n + X_{n+1})}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = 2\,\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zx + z^2} + 1 - zx} = \sum_1^\infty \frac{dX_n}{dx}\,\frac{z^{n-1}}{n(n+1)},$$

$$\log \frac{z - x + \sqrt{1 - 2zx + z^2}}{1 - x} = \sum_0^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x}} \log \frac{z^2 - x + \sqrt{1 - 2z^2x + z^4}}{1 - x} = 2\sqrt{2} \log \left\{ (1 + z)^{1+z} (1 - 2)^{1-z} \right\},$$

$$X_n = \sum (-1)^{\frac{n-q}{2}} \frac{1.3.5\ldots\overline{n-q-1}.1.3.5\ldots\overline{n+q-1}}{1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots\overline{n-q}}\,x^n,$$

$$2^n X_n = \sum_0 \frac{1.2.3\ldots n}{(1.2\ldots\lambda)^2\,1.2.3\ldots\overline{n-2\lambda}}(x^2 - 1)^\lambda (2x)^{n-2\lambda},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\log(1 + x)\,dx}{(1 - 2zx + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1 - z^2}\left[\log.2 - (1 - z)\log(1 + z)\right],$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \sum_0^\infty X_n x^n = \sum_0^\infty (n + 1) X_n x^n,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2\theta}} = \frac{1}{2}\sum_0^\infty z^{2n} \int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n}dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\text{arc} \sin x = \frac{\pi}{2} \sum_0^\infty \left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 (X_{2n+1} - X_{2n-1}).$$

. . . .

Liége, 19 avril 1882.

SUR

LES FONCTIONS X_n DE LEGENDRE.

I. — Discussion de quelques séries.

1. Dans un premier Mémoire, j'ai démontré, au moyen de la formule de Jacobi, que la *série*

$$1 + X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 + \cdots \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

est divergente (*).

Cette proposition, évidente lorsque $x = \pm 1$, se vérifie, de la manière la plus simple, quand $x = 0$.

En effet, dans ce cas :

$$X_1 = 0, \quad X_2 = -\frac{1}{2}, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = \frac{1.3}{2.4}, \quad X_5 = 0 \ (^{**}).$$

Donc la série proposée devient

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \cdots \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

(*) *Mémoire de l'Académie royale de Belgique*, collection in-8°, t. XXXI, année 1879, p. 63. Dans les notes ultérieures, la lettre *M.* renverra au même Mémoire.

(**) *M.*, p. 10.

D'un autre côté (*) :

$$F_1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 c^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 c^6 + \cdots\right]. \quad (3)$$

Ainsi, la série (2) représente $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$. Et comme cette intégrale est infinie, la *série est divergente.*

2. *Remarque.* Les termes de la série (1) sont, en général, respectivement moindres que les *modules* (**) des termes de la série

$$1 + X_1 + X_2 + \cdots + X_n + \cdots, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

laquelle est *convergente* (***). Par conséquent, la convergence de celle-ci doit provenir, surtout, de l'*ordre* dans lequel se présentent les signes des termes. Il paraît difficile de le déterminer *a priori*, même quand x est positif (IV).

3. *Exemple.* La série

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \cdots$$

est *divergente*, tandis que la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \cdots$$

est *convergente*, et a pour limite $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (V).

(*) Legendre, *Fonctions elliptiques*, t. I, p. 65.

(**) J'appelle *module* de X_n, la valeur *absolue* de ce terme.

(***) *M.*, p. 6.

(IV) Cependant voici un *indice*, tiré de la relation

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0:$$

pour toute valeur positive de x, *une variation est suivie d'une permanence.*

(V) *M.*, p. 60. Ces deux propositions résultent, d'ailleurs, d'un théorème sur la formule du binôme, que j'ai démontré autrefois (*Comptes rendus*, t. XLV).

4. *Autre remarque.* Si, dans la formule (3), on suppose $c^2 = -1$, elle devient

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \cdots = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}};$$

ou, par une transformation simple,

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \cdots = \frac{\sqrt{2}}{\pi} F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

Et comme

$$F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \frac{1}{2^3}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \cdots\right],$$

on a cette relation entre deux séries :

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{1^2}\left(\frac{1.5}{2.4}\right)^2 + \frac{1}{2^3}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \cdots\right]. \quad (5)$$

5. *Généralisation.* Le même calcul donne

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{1.5}{2.4}\right)^2 c^4 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 c^6 + \cdots = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{c^2}{1+c^2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{c^2}{1+c^2}\right)^2 + \cdots\right]. \quad (6)$$

6. *Une série numérique.* En général (*),

$$E_1(c) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 - 3\left(\frac{1}{2.4}\right)^2 c^4 - 5\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 c^6 - \cdots\right].$$

Donc, à cause de

$$E_1(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = 1 :$$

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2.4}\right)^2 - 5\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 - \cdots \quad (7)$$

(*) Legendre, t. I, p. 65.

D'un autre côté (*),

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 + \cdots \quad (8)$$

Éliminant $\frac{1}{\pi}$, on trouve

$$1 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{2.4}\right)^2 + 11\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 + 15\left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2 + \cdots; \quad (9)$$

résultat curieux.

7. *Remarque.* On déduit encore, des égalités (7), (8) :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \cdots \quad (10)$$

Ce développement, peut-être connu, a quelque analogie avec une remarquable expression de $\frac{2}{\pi}$, due à M. Bauer (**), et sur laquelle nous reviendrons.

8. *Série trigonométrique.* Plus tard, nous emploierons la somme de la série

$$1 + 3q\cos\varphi + 5q^2\cos^2\varphi + \cdots + (2n+1)q^n\cos n\varphi + \cdots : \quad (11)$$

commençons donc par déterminer cette somme ou *limite* S (***).

On peut écrire

$$S = \sum_0^\infty (2n+1)q^n e^{n\varphi\sqrt{-1}} = 2\sum_0^\infty (n+1)q^n e^{n\varphi\sqrt{-1}} - \sum_0^\infty q^n e^{n\varphi\sqrt{-1}},$$

pourvu que, dans le résultat, on supprime la partie imaginaire.

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 157.

(**) *Journal de Crelle*, t. XLVI, p. 110; *Nouvelle Correspondance mathématique*, tome II, page 271.

(***) La condition nécessaire et suffisante, pour la convergence, est que *le module de* q *soit inférieur à l'unité.*

Or, par la formule du binôme :

$$\sum_0^\infty q^n e^{n\varphi\sqrt{-1}} = \frac{1}{1 - qe^{\varphi\sqrt{-1}}}, \quad \sum_0^\infty (n+1) q^n e^{n\varphi\sqrt{-1}} = \frac{1}{\left(1 - qe^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^2};$$

donc

$$S = \frac{2}{\left(1 - qe^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^2} - \frac{1}{1 - qe^{\varphi\sqrt{-1}}} = \frac{1 + qe^{\varphi\sqrt{-1}}}{\left(1 - qe^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^2};$$

ou, par une transformation usuelle,

$$S = \frac{\left(1 + qe^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1 - qe^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^2}{(1 - 2q\cos\varphi + q^2)^2}.$$

Le numérateur, développé, devient

$$1 + \left(e^{\varphi\sqrt{-1}} - 2e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)q + \left(e^{-2\varphi\sqrt{-1}} - 2\right)q^2 + e^{-\varphi\sqrt{-1}} q^3.$$

La partie réelle de cette expression étant

$$1 - q\cos\varphi + q^2(\cos^2\varphi - 2) + q^3\cos\varphi;$$

on a, finalement,

$$S = \sum_0^\infty (2n+1) q^n \cos^n\varphi = \frac{1 - q\cos\varphi - q^2(3 - 2\cos^2\varphi) + q^3\cos\varphi}{(1 - 2q\cos\varphi + q^2)^2} \text{ (*)}. \quad . \quad . \quad (12)$$

9. *Limite d'une autre série.* Considérons la suite indéfinie

$$(x - X_1) + (xX_1 - X_2) + \cdots + (xX_n - X_{n+1}) + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

dont plusieurs Géomètres se sont occupés.

A cause de (**)

$$\sum_0^\infty X_n = \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}},$$

(*) Une marche de calcul, différente de la précédente, m'a conduit au même résultat.

(**) *M.*, p. 60.

on a, immédiatement,

$$\sum_0^\infty (xX_n - X_{n+1}) = \frac{x}{\sqrt{2(1-x)}} - \left[\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} - 1\right],$$

ou

$$\sum_0^\infty (xX_n - X_{n+1}) = 1 - \sqrt{\frac{1-x}{2}}. \quad \quad (14)$$

10. *Remarques*. — I. Il est visible que le même procédé doit réussir pour toute série dont le terme général est

$$u_n = A_0X_n + A_1X_{n+1} + \cdots + A_kX_{n+k};$$

k étant une *constante*, et A_0, A_1, ... A_k des quantités indépendantes de n. Soit, par exemple,

$$u_n = X_n - 2xX_{n+1} + X_{n+2}.$$

La limite de la série est

$$S = \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} - 2x\left[\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} - 1\right] + \left[\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} - 1 - x\right];$$

c'est-à-dire

$$S = \sqrt{2(1-x)} - (1-x) \text{ (*)}.$$

II. En particulier,

$$\sum_0^\infty (xX_{n+1} - X_n) = -\sqrt{\frac{1-x}{2}} - x. \quad \quad (15)$$

III. On verra, plus loin, que

$$xX_{n+1} - X_n = (n+2)\int_{-1}^x X_{n+1}\,dx.$$

(*) Si $x = \frac{1}{2}$, S se réduit à $\frac{1}{2}$.

En admettant ce résultat (*), nous avons donc

$$\sum_0^\infty (n+2)\int_{-1}^x X_{n+1}dx = -\sqrt{\frac{1-x}{2}} - x;$$

ou, sous une forme plus simple,

$$\sum_0^\infty (n+2)\int_{-1}^x X_{n+1}dx = 1 - \sqrt{\frac{1-x}{2}}. \quad \text{. . . . . (16)}$$

IV. D'après les formules (14), (16), *les séries*

$$(x - X_1) + (xX_1 - X_2) + (xX_2 - X_3) + \cdots + (xX_n - X_{n+1}) + \cdots,$$

$$\int_{-1}^x dx + 2\int_{-1}^x X_1dx + 3\int_{-1}^x X_2dx + \cdots + (n+1)\int_{-1}^x X_ndx + \cdots,$$

composées de termes respectivement inégaux, ont même limite.

11. *Autre méthode.* Il ne sera peut-être pas inutile, au moins comme *vérification,* d'appliquer, à la série (13), une méthode moins élémentaire que la précédente.

La formule de Jacobi (**) :

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n d\omega, \quad \text{. . . . . (17)}$$

donne

$$xX_n - X_{n+1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\pi}\int_0^\pi (x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n \cos\omega d\omega.$$

Conséquemment

$$S = \sum_0^\infty (xX_n - X_{n+1}) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\pi}\int_0^\pi \cos\omega d\omega \sum_0^\infty (x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n.$$

(*) Facile à vérifier.

(**) *M.*, p. 16.

Le module de $x-\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\cos\omega$, égal à $+\sqrt{x^2+(1-x^2)\cos^2\omega}$, est moindre que 1, excepté pour $x=\pm 1$. Donc, ces deux cas étant exclus,

$$\sum_0^\infty (x-\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\cos\omega)^n = \frac{1}{1-x+\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\cos\omega};$$

puis, par la suppression du facteur $1-x$:

$$S=\frac{\sqrt{-1}}{\pi}\sqrt{1+x}\int_0^\pi \frac{\cos\omega d\omega}{\sqrt{1-x}+\sqrt{-1}\sqrt{1+x}\cos\omega}.$$

En général (*),

$$\int_0^\pi \frac{\cos\omega d\omega}{A+B\sqrt{-1}\cos\omega}=\frac{\pi}{B\sqrt{-1}}\left(1-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right).$$

Dans le cas actuel :

$$A=\sqrt{1-x},\quad B=\sqrt{1+x};$$

donc l'expression précédente se réduit à

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+x}\sqrt{-1}}\left[1-\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right].$$

Substituant dans la formule qui donne S, on trouve :

$$S=1-\sqrt{\frac{1-x}{2}};$$

comme ci-dessus.

(*) Voir plus loin (**32**).

II. — Intégrales définies.

12. *Préliminaires.* Nous prenons, comme point de départ, la relation

$$z^n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{X_n dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (A)$$

démontrée à la fin du premier Mémoire.

Changeant z en z^2, on a

$$\frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{z}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{X_n dx}{\sqrt{1-2z^2x+z^4}}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

puis, en prenant les dérivées des deux membres :

$$z^{2n} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left[(1-2z^2x+z^4)^{-\frac{1}{2}} + 2z^2(x-z^2)(1-2z^2x+z^4)^{-\frac{3}{2}}\right]X_n dx,$$

ou

$$z^{2n} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{1-z^4}{(1-2z^2x+z^4)^{\frac{3}{2}}}X_n dx;$$

ou enfin, par le changement de z^2 en z,

$$\frac{z^n}{1-z^2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{X_n dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (B)$$

13. *Applications.* — I. La formule (18) donne

$$2\sum_0^\infty \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-2z^2x+z^4}}\sum_0^\infty X_n,$$

ou (9)

$$\log\frac{1+z}{1-z} = z\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-2z^2x+z^4}}\,\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}},$$

ou encore

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1-2z^2x+z^4)}} = \frac{\sqrt{2}}{z} \log \frac{1+z}{1-z};$$

formule dont la vérification est facile.

II. Par un calcul tout semblable, on obtient

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(1-2z^2x+z^4)}} = \frac{2\sqrt{2}}{z} \operatorname{arc\,tg} z; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (19)$$

et, si $z = 1$:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

valeur connue.

III. Soit encore, dans la formule (19),

$$z = \sqrt{2} - 1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{8}$$

Il résulte, de cette hypothèse :

$$z^2 = 3 - 2\sqrt{2}, \quad z^4 = 17 - 12\sqrt{2}, \quad 1 - 2z^2x + z^4 = 2(\sqrt{2}-1)^2(3-x);$$

puis

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(3-x)}} = \frac{\pi}{2} \,(*).$$

(*) Pour vérifier ce résultat, il suffit d'employer la transformation connue :

$$\frac{1+x}{3-x} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

L'intégrale devient

$$2 \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = 1) = \frac{\pi}{2}.$$

IV. De la formule (B), on déduit, par exemple,

$$\frac{1}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}[X_0 + X_2 + X_4 + \cdots].$$

Or,

$$X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \cdots = \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}},$$

$$X_0 - X_1 + X_2 - X_3 + \cdots\cdots = \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}};$$

donc l'égalité précédente se réduit à

$$\frac{1}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right],$$

puis à

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{(1-z^2)^2}. \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Il est clair que l'on pourrait multiplier ces applications.

14. *Fonction de Bessel.* De la formule de Jacobi (17), on conclut

$$\sum_0^\infty \frac{X_n}{1.2.3\ldots n} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\omega \sum_0^\infty \frac{(x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n}{1.2.3\ldots n}.$$

La seconde somme a pour valeur

$$e^{x-\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\cos\omega} = e^x\left[\cos(\sqrt{1-x^2}\cos\omega) - \sqrt{-1}\sin(\sqrt{1-x^2}\cos\omega)\right].$$

De plus, il est visible que

$$\int_0^\pi \cos(\sqrt{1-x^2}\cos\omega)d\omega = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sqrt{1-x^2}\cos\omega)d\omega, \quad \int_0^\pi \sin(\sqrt{1-x^2}\cos\omega)d\omega = 0.$$

Conséquemment, l'égalité ci-dessus devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sqrt{1-x^2}\cos\omega)d\omega = \frac{\pi}{2}e^{-x}\sum_0^{\infty}\frac{X_n}{1.2.3\ldots n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

L'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sqrt{1-x^2}\cos\omega)d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin\alpha\cos\omega)d\omega,$$

considérée par Fourier (*), l'avait été antérieurement, paraît-il, par Bessel (**), dont elle porte le nom.

15. *Suite.* En général :

$$\cos\gamma = \sum_0^{\infty}(-1)^p\frac{\gamma^{2p}}{1.2.3\ldots 2p}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p}\omega d\omega = \frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\ldots\overline{2p-1}}{2.4.6\ldots 2p}.$$

Si donc $\gamma = \sqrt{1-x^2}\cos\omega$, le premier membre de l'égalité (21) se transforme en

$$\frac{\pi}{2}\sum_0^{\infty}\frac{1.3.5\ldots\overline{2p-1}}{1.2.3\ldots 2p.2.4.6\ldots 2p}(-1)^p(1-x^2)^p;$$

et, après une réduction visible, cette même égalité se réduit à

$$\sum_0^{\infty}\frac{X_n}{1.2.3\ldots n} = e^x\sum_0^{\infty}(-1)^p\frac{(1-x^2)^p}{(2.4.6\ldots 2p)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

16. *Remarques.* — I. Si l'on fait $1-x^2=t^2$, la combinaison des formules (21), (22) donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t\cos\omega)d\omega = \frac{\pi}{2}\sum_0^{\infty}(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2.4.6\ldots 2p)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Ce résultat s'accorde avec celui que donne Fourier (***).

(*) *Théorie de la chaleur,* p. 378.
(**) Voir, dans le *Journal de Borchardt* (1859), un Mémoire de M. Lipschitz.
(***) *Loc. cit.* Le facteur π a été omis.

II. Le changement de x en $-x$, dans la relation (22), conduit à celle-ci :

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{X_n}{1.2.3\ldots n} = e^{-x}\sum_0^\infty (-1)^p \frac{(1-x^2)^p}{(2.4.6\ldots 2p)^2} \quad \ldots\ldots \tag{24}$$

III. Par suite,

$$\left.\begin{aligned} e^{-x}\sum_0^\infty \frac{X_n}{1.2.3\ldots n} &= e^x\sum_0^\infty \frac{(-1)^n X_n}{1.2.3\ldots n} = \sum_0^\infty (-1)^p \frac{(1-x^2)^p}{(2.4.6\ldots 2p)^2} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sqrt{1-x^2}\cos\omega)\,d\omega. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \tag{25}$$

IV. On peut encore observer que

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{X_1}{1}+\frac{X_2}{1.2}+\frac{X_3}{1.2.3}+\cdots\right)\left(1-\frac{X_1}{1}+\frac{X_2}{1.2}-\frac{X_3}{1.2.3}+\cdots\right) \\ &\qquad = \left\{\sum_0^\infty (-1)^p \frac{(1-x^2)^p}{(2.4.6\ldots 2p)^2}\right\}^2, \end{aligned}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{X_1}{1}+\frac{X_3}{1.2.3}+\frac{X_5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]^2+\left[1-\frac{1-x^2}{2^2}+\frac{(1-x^2)^2}{(2.4)^2}-\cdots\right]^2 \\ &\qquad = \left[1+\frac{X_2}{1.2}+\frac{X_4}{1.2.3.4}+\frac{X_6}{1.2\ldots 6}+\cdots\right]^2; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \tag{26}$$

identité d'où l'on pourra, peut-être, tirer des propriétés numériques.

17. Théorème. A, B *étant des constantes quelconques* (*), *on a*

$$\int_0^\pi \frac{A+B\sqrt{-1}\cos x}{(B-A\sqrt{-1}\cos x)^2}\,dx = 0. \quad \ldots\ldots \tag{C}$$

La formule connue

$$\int_0^\pi \frac{dx}{B-A\sqrt{-1}\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \ldots\ldots \tag{27}$$

(*) Néanmoins, B ne doit pas être nulle : l'hypothèse $B=0$ rendrait indéterminée l'intégrale.

donne, si l'on prend les dérivées relativement aux paramètres A, B :

$$\sqrt{-1}\int_0^\pi \frac{\cos x\,dx}{(B - A\sqrt{-1}\cos x)^2} = -\pi\frac{A}{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(B - A\sqrt{-1}\cos x)^2} = \pi\frac{B}{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

Multipliant par B, par A, et ajoutant, on a le résultat énoncé.

18. *Remarques.* — I. Des mêmes formules (28), (29), on conclut encore, par le changement de A en $-$A :

$$\int_0^\pi \frac{A + B\sqrt{-1}\cos x}{(B + A\sqrt{-1}\cos x)^2}\,dx = 2\pi\frac{AB}{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

II. Le second membre est une fonction symétrique; par conséquent

$$\int_0^\pi \left[\frac{A + B\sqrt{-1}\cos x}{(B + A\sqrt{-1}\cos x)^2} - \frac{B + A\sqrt{-1}\cos x}{(A + B\sqrt{-1}\cos x)^2}\right]dx = 0; \quad \ldots \quad (31)$$

pourvu que A et B soient *différents de zéro.*

III. On a

$$\int_0^\pi \frac{\cos x\,dx}{A + B\sqrt{-1}\cos x} = \frac{1}{B\sqrt{-1}}\int_0^\pi \frac{A + B\sqrt{-1}\cos x - A}{A + B\sqrt{-1}\cos x}\,dx$$

$$= \frac{1}{B\sqrt{-1}}\left[\pi - A\int_0^\pi \frac{dx}{A + B\sqrt{-1}\cos x}\right].$$

Donc, par la formule (27) :

$$\int_0^\pi \frac{\cos x\,dx}{A + B\sqrt{-1}\cos x} = \frac{\pi}{B\sqrt{-1}}\left[1 - \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right]. \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

19. Théorème. *Si* S *est la limite de la série*

$$1 + (x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega) + (x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)^2 + \cdots + (x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n + \cdots,$$

on a

$$\int_0^\pi S d\omega = \frac{\pi}{\sqrt{2(1-x)}} \quad \text{(D)}$$

La série étant une progression,

$$S = \frac{1}{1 - x + \sqrt{x^2-1}\cos\omega} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x} - \sqrt{-1}\sqrt{1+x}\cos\omega}.$$

Donc, par la formule (27),

$$\int_0^\pi S d\omega = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

20. Théorème. *Si* S_1 *est la limite de la série*

$$1 + 2(x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega) + 3(x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)^2 + \cdots + (n+1)(x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n + \cdots,$$

on a

$$\int_0^\pi S_1 d\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{2(1-x)}} \quad \text{(E)}$$

D'après une formule connue, dont nous avons déjà fait usage (8),

$$S_1 = \frac{1}{(1 - x + \sqrt{x^2-1}\cos\omega)^2},$$

ou

$$S_1 = \frac{1}{(1-x)\left[\sqrt{1-x} - \sqrt{-1}\sqrt{1+x}\cos\omega\right]^2} \quad (33)$$

Donc,

$$\int_0^\pi S_1 d\omega = \frac{1}{1-x}\int_0^\pi \frac{d\omega}{\left[\sqrt{1-x} - \sqrt{-1}\sqrt{1+x}\cos\omega\right]^2}.$$

Si, dans la formule (29), on fait $B = \sqrt{1-x}$, $A = \sqrt{1+x}$, le second membre devient $\pi \frac{\sqrt{1-x}}{2^{\frac{3}{2}}}$. Par conséquent,

$$\int_0^\pi S_1 d\omega = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

21. *Remarque.* D'après les formules (D), (E),

$$\int_0^\pi S_1 d\omega = \frac{1}{2} \int_0^\pi S d\omega,$$

ou

$$\int_0^\pi (2S_1 - S) d\omega = 0.$$

Par conséquent :

Si S_2 *est la limite de la série*

$$1 + 3(x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega) + 5(x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)^2 + \cdots + (2n+1)(x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n + \cdots,$$

on a

$$\int_0^\pi S_2 d\omega = 0. \quad \text{. . . . .} \quad (34)$$

22. Théorème. *Si* S *est la limite de la série*

$$1 + 3\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}\right)\cos\varphi + 5\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}\right)^2\cos 2\varphi + 7\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}\right)^3\cos 3\varphi + \cdots,$$

on a

$$\int_0^\alpha \frac{S d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}} = 0\,(^*). \quad \text{. . . . .} \quad (F)$$

Nous avons trouvé

$$S = \sum_0^\infty (2n+1) q^n \cos n\varphi = \frac{1 - q\cos\varphi - q^2(3 - 2\cos^2\varphi) + q^3\cos\varphi}{(1 - 2q\cos\varphi + q^2)^2}. \quad \text{. . .} \quad (12)$$

(*) On suppose α compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, *exclusivement.*

Donc, si l'on prend $q = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}$ (*),

$$S = \frac{1 - \cos\alpha - (3 - 2\cos^2\varphi)\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\varphi} + \dfrac{\cos^3\alpha}{\cos^3\varphi}}{\left[1 - 2\cos\alpha + \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\varphi}\right]^2};$$

ou, moyennant quelques réductions simples,

$$S = \cos^2\varphi \frac{-3\cos^2\alpha + \cos^3\alpha + (1 - \cos\alpha + 2\cos^2\alpha)\cos^2\varphi}{\left[(1-\cos\alpha)^2 - (1 - 2\cos\alpha)\sin^2\varphi\right]^2}.$$

Le numérateur égale

$$\begin{aligned} &1 - \cos\alpha - \cos^2\alpha + \cos^3\alpha - (1 - \cos\alpha + 2\cos^2\alpha)\sin^2\varphi \\ &= (1 - \cos\alpha)\sin^2\alpha - (1 - \cos\alpha + 2\cos^2\alpha)\sin^2\varphi. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'égalité (F) devient

$$\int_0^\alpha \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}} \frac{(1 - \cos\alpha)\sin^2\alpha - (1 - \cos\alpha + 2\cos^2\alpha)\sin^2\varphi}{\left[(1 - \cos\alpha)^2 - (1 - 2\cos\alpha)\sin^2\varphi\right]^2} = 0. \quad (35)$$

Soit

$$\sin\varphi = \sin\alpha\sin\theta.$$

Il résulte, de cette transformation bien connue :

$$\frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}} = d\theta,$$

$$\begin{aligned} (1 - \cos\alpha)\sin^2\alpha - (1 - \cos\alpha + 2\cos^2\alpha)\sin^2\varphi &= \sin^2\alpha\left[1 - \cos\alpha - (1 - \cos\alpha + 2\cos^2\alpha)\sin^2\theta\right] \\ &= \sin^2\alpha\left[(1 - \cos\alpha)\cos^2\theta - 2\cos^2\alpha\sin^2\theta\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(1 - \cos\alpha)^2 - (1 - 2\cos\alpha)\sin^2\varphi = (1 - \cos\alpha)^2 - (1 - 2\cos\alpha)\sin^2\alpha\sin^2\theta \\ &= (1 - \cos\alpha)\left[1 - \cos\alpha - (1 - 2\cos\alpha)(1 + \cos\alpha)\sin^2\theta\right] = (1 - \cos\alpha)\left[(1 - \cos\alpha)\cos^2\theta + 2\cos^2\alpha\sin^2\theta\right]. \end{aligned}$$

(*) D'après les hypothèses faites sur α, la quantité q est une fraction proprement dite; et l'on peut appliquer la formule (12).

L'intégrale précédente se réduit donc à

$$\frac{\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos\alpha)\cos^2\theta - 2\cos^2\alpha\sin^2\theta}{[(1-\cos\alpha)\cos^2\theta + 2\cos^2\alpha\sin^2\theta]^2}\,d\theta.$$

Celle-ci a la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q^2\cos^2\theta - p^2\sin^2\theta}{(q^2\cos^2\theta + p^2\sin^2\theta)^2}\,d\theta.$$

Or (*) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\,d\theta}{(p^2\sin^2\theta + q^2\cos^2\theta)^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{p^3q}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\,d\theta}{(p^2\sin^2\theta + q^2\cos^2\theta)^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{pq^3}.$$

Conséquemment,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q^2\cos^2\theta - p^2\sin^2\theta}{(q^2\cos^2\theta + p^2\sin^2\theta)^2}\,d\theta = 0;$$

et la relation (F) est démontrée.

23. *Autre intégrale définie.* Soit

$$A_{p,q} = \int_0^{\pi} \cos^p x \cos qx\,dx;$$

p, q étant des *nombres entiers* (**).

De

$$\cos qx = \cos\overline{q-1}x\cos x - \sin\overline{q-1}x\sin x,$$

(*) Bierens de Haan, t. LXVII.

(**) Plusieurs Géomètres ont trouvé l'expression de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos qx\,dx$; mais, si l'on s'en rapporte au savant Recueil de M. Bierens de Haan, aucun d'eux ne s'est occupé du cas où la limite supérieure est π, ce qui est assez extraordinaire. La méthode suivante, bien connue, est celle dont nous avons fait usage en 1840. (*Journal de Liouville*, t. V, p. 115.)

on déduit

$$A_{p,q} = A_{p+1,q-1} - \int_0^\pi \cos^p x \sin^{\overline{q-1}} x \sin x dx.$$

L'intégration par parties donne

$$\int_0^\pi \cos^p x \sin^{\overline{q-1}} x \sin x dx = -\frac{1}{p+1}\left[\cos^{p+1} x \sin^{\overline{q-1}} x\right]_0^\pi + \frac{q-1}{p+1} A_{p+1,q-1}.$$

Et comme le terme intégré est nul, l'équation ci-dessus devient

$$A_{p,q} = \frac{p-q+2}{p+1} A_{p+1,q-1}.$$

Il résulte de celle-ci, par un calcul fort simple,

$$A_{p,q} = \frac{p-q+2}{p+1}\,\frac{p-q+4}{p+2}\cdots\frac{p+q}{p+q}\int_0^\pi \cos^{p+q} x dx.$$

La nouvelle intégrale est nulle, évidemment, si $p+q$ est *impair*. En outre, le second membre est nul, encore, dans les cas suivants :

$$q = p+2, \quad q = p+4, \quad q = p+6, \quad \ldots\ldots$$

Donc, *pour que l'intégrale représentée par* $A_{p,q}$ *ne soit pas nulle, on doit avoir*

$$p - q = \mathcal{M}\, 2.$$

Quand il en est ainsi,

$$\int_0^\pi \cos^{p+q} x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q} x dx = \pi\,\frac{1.3.5\ldots\overline{p+q-1}}{2.4.6\ldots\overline{p+q}};$$

et, en conséquence,

$$A_{p,q} = \pi\,\frac{(p-q+2)(p-q+4)\ldots(p+q)}{(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+q)}\cdot\frac{1.3.5\ldots\overline{p+q-1}}{2.4.6\ldots\ldots\overline{p+q}}.$$

Le second membre peut être considérablement simplifié.

En premier lieu, la fraction

$$\frac{(p-q+2)(p-q+4)\dots(p+q)}{2.4.6\dots(p+q)} = \frac{1}{2.4.6\dots(p-q)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-q}{2}} \frac{1}{1.2.3\dots\frac{p-q}{2}}.$$

D'autre part,

$$1.3.5\dots(p+q-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p+q}{2}} .2.6.10\dots\overline{2p+2q-2};$$

puis, par une transformation bien connue (*),

$$1.3.5\dots(p+q-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p+q}{2}} \left(\frac{p+q}{2}+1\right)\left(\frac{p+q}{2}+2\right)\dots(p+q).$$

Enfin,

$$\frac{\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\left(\frac{p+q}{2}+2\right)\dots(p+q)}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)} = \left(\frac{p+q}{2}+1\right)\left(\frac{p+q}{2}+2\right)\dots p.$$

On a donc

$$\frac{(p-q+2)(p-q+4)\dots(p+q)}{(p+1)(p+2)\dots\ (p+q)} \cdot \frac{1.3.5\dots\overline{p+q-1}}{2.4.6\dots\overline{p+q}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\left(\frac{p+q}{2}+2\right)\dots p'}{1.2.3\dots\frac{p-q}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^p C_{p,\frac{p-q}{2}};$$

puis

$$A_{p,q} = \frac{\pi}{2^p} C_{p,\frac{p-q}{2}},$$

ou

$$\int_0^\pi \cos^p x \cos qx dx = \frac{\pi}{2^p} C_{p,\frac{p-q}{2}}. \qquad (36)$$

(*) *M.*, p. 11.

24. *Remarques.* — I. Lorsque $p = q$, la dernière formule, ou le calcul direct, donne

$$\int_0^\pi \cos^p x \cos px\,dx = \frac{\pi}{2^p}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

résultat connu.

II. Il résulte, de cette valeur,

$$\sum_0^\infty \int_0^\pi \cos^p x \cos px\,dx = 2\pi, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

mais non

$$\int_0^\pi dx \sum_0^\infty \cos^p x \cos px = 2\pi.$$

En effet, la série

$$1 + \cos x \cos x + \cos^2 x \cos 2x + \cos^3 x \cos 3x + \cdots,$$

convergente tant que x est compris entre 0 et π (exclusivement), devient divergente pour ces valeurs extrêmes. Le mot *somme* n'ayant plus de sens, on ne peut, légitimement, intervertir les signes $\int$ et $\sum$.

III. Cette même série, peut-être trop peu remarquée, offre une particularité assez curieuse.

Considérée comme un développement de la fraction

$$\frac{1 - q\cos x}{1 - 2q\cos x + q^2},$$

dans laquelle on prendrait $q = \cos x$, elle a pour *somme*, tant qu'elle est convergente,

$$\frac{1 - \cos^2 x}{1 - 2\cos^2 x + \cos^2 x} = 1.$$

Ainsi, pour $0 < x < \pi$,

$$1 + \cos x \cos x + \cos^2 x \cos 2x + \cos^3 x \cos 3x + \cdots + \cos^n x \cos nx + \cdots = 1 \text{ (*)}: \quad (39)$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 77.

la somme est constante. Mais, quand on prend $\cos x = \pm 1$, cette somme devient, brusquement, infinie. C'est à cause de cette discontinuité que l'équation

$$\sum_0^\infty \int_0^\pi f_p(x)dx = \int_0^\pi dx \sum_0^\infty f_p(x)$$

n'est pas applicable (*).

III. — Propriétés d'une intégrale.

25. La formule

$$\frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{z}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{\sqrt{1 - 2z^2x + z^4}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

peut être écrite ainsi :

$$\frac{2}{z}\,\frac{z^{2n+1}}{1.2.3\ldots\overline{2n+1}} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2z^2x + z^4}}\,\frac{X_n}{1.2.3\ldots 2n};$$

et la formule de Jacobi, de cette manière :

$$\frac{X_n}{1.2.3\ldots 2n} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\left[\sqrt{x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega}\right]^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}\,d\omega.$$

Par conséquent (les séries formées étant toujours convergentes),

$$\frac{2}{z}\sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n+1} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2z^2x + z^4}} \sum_0^\infty (-1)\frac{X_n}{1.2.3\ldots 2n},$$

$$\sum_0^\infty (-1)\frac{X_n}{1.2.3\ldots 2n} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\omega \cos\left[\sqrt{x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega}\right]; \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

(*) *Note sur les fonctions* X_n, p. 5.

puis,

$$2\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-2z^2x+z^4}}\int_0^\pi d\omega\cos\left[\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega}\right],$$

ou

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-2z^2x+z^4}}\int_0^\pi d\omega\cos\left[\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega}\right] = 2\pi\frac{\sin z}{z}; \quad . \quad (41)$$

et, si l'on suppose $z=0$:

$$\int_{-1}^{+1}dx\int_0^\pi d\omega\cos\left[\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega}\right] = 2\pi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

26. *Suite.* Soit

$$\int_0^\pi d\omega\cos\left[\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega}\right] = \mathrm{X}: \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

la relation (41) devient

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{X}dx}{\sqrt{1-2z^2x+z^4}} = 2\pi\frac{\sin z}{z}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{X}dx\sum_0^\infty \mathrm{X}_n z^{2n} = 2\pi\sum_0^\infty(-1)^n\frac{z^{2n}}{1.2.3\ldots\overline{2n+1}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Identifiant les deux membres, on trouve l'égalité suivante, à laquelle satisfait *l'intégrale* X :

$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{X}\mathrm{X}_n dx = (-1)^n\frac{2\pi}{1.2.3\ldots\overline{2n+1}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

27. *Remarque.* Si $z=1$, l'équation (45) devient

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{X}dx}{\sqrt{1-x}} = 2\pi\sqrt{2}\sin(\mathrm{arc} = 1); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

ou, approximativement (*),

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X\,dx}{\sqrt{1-x}} = 7,476\,64.$$

28. *Suite.* Afin de simplifier la formule (43), je pose (**)

$$x = \rho\cos\varphi, \quad \sqrt{1-x^2}\cos\omega = \rho\sin\varphi.$$

J'obtiens ainsi :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\cos\omega, \quad \rho = \frac{x}{\cos\varphi},$$

$$\sqrt{x-\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\cos\omega} = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right), \quad d\omega = -\frac{x\,d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi - x^2}};$$

puis, en supposant toujours $x = \cos\alpha$ (***),

$$X = \cos\alpha \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}} \cos\left[\sqrt{\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

En général,

$$\begin{aligned}\cos(a - b\sqrt{-1}) &= \cos a\cos(b\sqrt{-1}) + \sin a\sin(b\sqrt{-1}) \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(e^b + e^{-b})\cos a + \sqrt{-1}\,(e^b - e^{-b})\sin a\right].\end{aligned}$$

(*) On trouve, par les *Tables de Callet*,

log. sin(arc = 1) =	log. sin 57°17′24″,8	= $\bar{1}$,925 011 2
	$\frac{3}{2}$ log. 2	= 0,451 545 0
	log. π	= 0,497 149 9
		0,873 706 1
	nombre corresp.	= 7,476 64.

(**) *M.*, p. 30.

(***) *M.*, p. 14.

La formule précédente devient donc

$$X = \cos\alpha \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}}(e^b + e^{-b})\cos a; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (48)$$

pourvu que l'on fasse

$$a = \sqrt{\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}}\cos\frac{\varphi}{2}, \quad b = \sqrt{\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}}\sin\frac{\varphi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (49)$$

Telle est, sous forme d'intégrale définie *réelle*, la somme de la série

$$\pi\left[1 - \frac{X_1}{1.2} + \frac{X_2}{1.2.3.4} - \cdots \pm \frac{X_n}{1.2.3\ldots 2n} \mp \cdots\right].$$

29. *Remarques*. — I. Si, dans la relation (46), on remplace X par ce développement, on trouve

$$\int_{-1}^{+1} X_n dx \sum_0^\infty (-1)^p \frac{X_p}{1.2.3\ldots 2p} = (-1)^n \frac{1}{1.2.3\ldots\overline{2n+1}} \int_{-1}^{+1} dx \sum_0^\infty (-1)^p \frac{X_p}{1.2.3\ldots 2p}.$$

Or :

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_{n'} dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}, \quad \int_{-1}^{+1} dx = 2, \quad \int_{-1}^{+1} X_p dx = 0 \quad (p > 0).$$

Donc l'égalité précédente est vérifiée.

II. La formule (48) devient illusoire lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Mais, si l'on reprend l'équation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sqrt{1-x^2}\cos\omega)d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x} \sum_0^\infty \frac{X_n}{1.2.3\ldots n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (21)$$

et que l'on y introduise cette hypothèse, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos\omega)d\omega = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2.4.6\ldots 2n)^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (50)$$

résultat compris dans celui de Fourier, dont nous avons parlé.

30. *Suite.* Multiplions par dz les deux membres de l'équation

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X dx}{\sqrt{1 - 2z^2 x + z^4}} = 2\pi \frac{\sin z}{z}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

et intégrons entre $z = 0$ et $z = +\infty$. A cause de la formule connue

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2},$$

nous aurons, en intervertissant l'ordre,

$$\int_{-1}^{+1} X dx \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{1 - 2z^2 x + z^4}} = \pi^2.$$

Si l'on fait

$$z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta, \quad \frac{1+x}{2} = c^2 \text{ (*)},$$

l'intégrale relative à z se transforme en

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \theta}} = F_1(c).$$

Par conséquent, on a ce résultat simple :

$$\int_{-1}^{+1} X F_1(c) dx = \pi^2 \text{ (**)}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

IV. — Propriétés des fonctions X_n.

31. *Considérations géométriques.* Regardons $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ comme les ordonnées d'une suite de courbes $C_1, C_2, \ldots C_n, \ldots$ (***). Ces courbes

(*) LEGENDRE, t. I, p. 9.

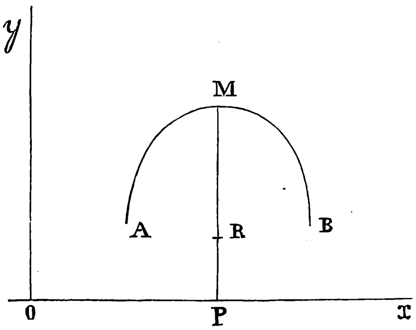
(**) On ne doit pas oublier que

$$c = \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \cos \frac{1}{2} \alpha.$$

(***) A cause de $X_1 = x$, C_1 est une *ligne droite*.

paraboliques rencontrent l'axe Ox en des points dont les abscisses sont comprises entre -1 et $+1$; après quoi chacune des courbes s'éloigne indéfiniment des deux axes. Dans l'intervalle considéré, *chaque ordonnée varie entre* $+1$ *et* -1 (*).

32. *Suite.* AMB étant un arc de la courbe C_n, supposons que l'ordonnée MP soit maximum ou minimum. Les relations (**)



$$(1-x^2)\frac{dX_n}{dx} = n(X_{n-1} - xX_n),$$

$$(1-x^2)\frac{dX_n}{dx} = (n+1)(xX_n - X_{n+1}),$$

jointes à la condition $\frac{dX_n}{dx} = 0$, donnent

$$X_{n-1} = X_{n+1} = xX_n.$$

Ainsi, *quand* X_n *est maximum ou minimum, les courbes* C_{n-1}, C_{n+1} *se*

(*) Propriété connue. Dans son célèbre *Mémoire sur les intégrales définies* (JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, XIXe Cahier, p, 146), Poisson se borne à dire : « *on démontre aisément* ». La proposition énoncée résulte, par exemple, de l'égalité

$$4^n X_n = C_{2n,n} \cos n\alpha + C_{2n-2,n-1} \cdot C_{2,1} \cdot \cos(n-2)\alpha + \cdots + C_{2n,n} \cos n\alpha,$$

démontrée dans notre premier Mémoire (p. 15). Effectivement, le maximum du second membre, dont les *coefficients sont positifs*, répond à

$$\cos n\alpha = \cos(n-2)\alpha = \cdots = +1;$$

auquel cas $\alpha = 0$, ou $x = 1$; d'où résulte $X_n = 1$.

En outre, on voit que

$$C_{2n,n} + C_{2n-2,n-1} \cdot C_{2,1} + C_{2n-4,n-2} \cdot C_{4,2} + \cdots + C_{2n,n} = 4^n;$$

relation connue (*Journal de Liouville*, t. IV, p. 95).

(**) *M.*, p. 4.

coupent (*) *en un point* R, *situé entre le point* M *et le pied de l'ordonnée* MP.

33. Théorème. *Si* a *est une racine de* $\frac{dX_n}{dx}=0$ (**), *on a*

$$\int_{-1}^{a} X_n dx = 0. \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

On sait (***) que

$$\int_{-1}^{x} X_n dx = \frac{x^2-1}{n(n+1)} \frac{dX_n}{dx}.$$

Si donc $\frac{dX_n}{dx}=0$, l'intégrale est nulle.

34. Corollaire. *Si* a, b *sont deux racines de* $\frac{dX_n}{dx}=0$, *on a*

$$\int_{a}^{b} X_n dx = 0. \quad \ldots\ldots \quad (53)$$

(*) Si ces lignes se touchaient, on aurait, simultanément :

$$\frac{dX_{n-1}}{dx}=\frac{n(xX_{n-1}-X_n)}{1-x^2}, \quad \frac{dX_{n+1}}{dx}=\frac{(n+1)(X_n-xX_{n+1})}{1-x^2}, \quad \frac{dX_{n-1}}{dx}=\frac{dX_{n+1}}{dx};$$

puis

$$n(xX_{n-1}-X_n)=(n+1)(X_n-xX_{n+1}),$$

ou

$$(2n+1)X_n=\left[(n+1)X_{n+1}+nX_{n-1}\right]x;$$

condition contradictoire avec la relation générale

$$(2n+1)xX_n=(n+1)X_{n+1}+nX_{n-1},$$

sauf pour $x=\pm 1$.

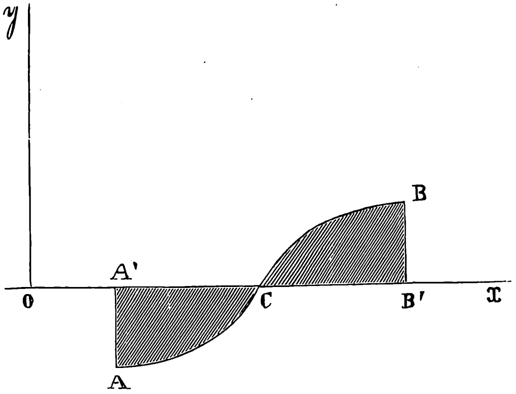
(**) D'après le théorème de Rolle, chacune des équations

$$\frac{dX_n}{dx}=0, \quad \frac{d^2X_n}{dx^2}=0, \quad \ldots\ldots$$

a toutes ses racines réelles. De plus, ces racines sont comprises entre -1 et $+1$.

(***) *Note sur les fonctions* X_n, p. 6.

35. *Remarques.* — I. Supposons, pour plus de simplicité, que a, b soient deux racines *consécutives*. Considérons, comme précédemment, la courbe C_n, dont l'équation est $y = X_n$. Soient A, B les points déterminés par $x = a$, $x = b$, points pour lesquels les tangentes sont parallèles à Ox. L'intégrale $\int_a^b X_n dx$ représente la somme des aires des *triangles* AA'C, BB'C, la première étant regardée comme *négative*. Cette somme étant nulle, il s'ensuit que *les triangles* AA'C, BB'C *sont équivalents*.



II. La dernière proposition (34) est, en quelque sorte, conjuguée de celle-ci :

a', b' *étant deux racines de* $X_n = 0$, *on a*

$$\int_{a'}^{b'} \frac{dX_{n-1}}{x^{n+1}} = 0 \text{ (*)}.$$

36. Théorème. *Si l'on suppose*

$$F(x) = \int_{-1}^{x} X_n dx,$$

on a

$$n(n+1)F(x) = (x^2 - 1)\frac{dX_n}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

Ce théorème est celui que nous avons rappelé tout à l'heure (33), énoncé d'une manière différente.

37. Ce même théorème, auquel nous avions peu fait attention l'année dernière, nous paraît intéressant. Il permet, en particulier, de former X_n par

(*) *M.*, p. 44.

la *méthode des coefficients indéterminés*. D'ailleurs il résulte, tout naturellement, de la formule de Rodrigues.

38. *Application.* En négligeant un facteur numérique, on peut prendre

$$F(x) = \frac{d^4(x^2-1)^5}{dx^4} = (x^{10} - 5x^8 + 10x^6 - 10x^4 + 5x^2 - 1)'''',$$

ou

$$F(x) = 5\,040x^6 - 8\,400x^4 + 3\,600x^2 - 240.$$

Donc

$$\frac{dX_5}{dx} = \frac{d^2F}{dx^2} = 151\,200x^4 - 100\,800x^2 + 7\,200,$$

$$(x^2-1)\frac{dX_5}{dx} = 151\,200x^6 - 252\,000x^4 + 108\,000x^2 - 7\,200.$$

Or, conformément à l'énoncé, ce polynôme égale $30F(x)$.

39. *Intégration d'une équation linéaire.* $v = F(x)$ est une intégrale de l'équation

$$(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2} + n(n+1)v = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (55)$$

plus simple que celle-ci :

$$\frac{d\left[(1-x^2)\dfrac{dX_n}{dx}\right]}{dx} + n(n+1)X_n = 0,$$

à laquelle satisfait X_n (*).

Appliquant les principes connus, on trouve, comme intégrale générale,

$$v = F(x)\left[h + k\int \frac{dx}{[F(x)]^2}\right]. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

(*) *M.*, p. 7.

Soit, par exemple, $n = 3$. L'équation (55) se réduit à

$$(1 - x^2)\frac{d^2v}{dx^2} + 12v = 0.$$

En même temps,

$$F(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1.$$

Donc, par la dernière formule,

$$v = (5x^4 - 6x^2 + 1)\left[h + k\int\frac{dx}{(5x^4 - 6x^2 + 1)^2}\right].$$

40. Théorème. *Deux fonctions consécutives satisfont à la relation*

$$\int_{-1}^{+1}\frac{d(X_n + X_{n+1})}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = 2\,\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(G)}$$

De la formule

$$z^n = \frac{2n + 1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{X_n dx}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(A)}$$

on conclut

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{1 + 3X_1 + 5X_2 + \cdots + (2n + 1)X_n}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}}\,dx.$$

Le numérateur peut être remplacé (*) par

$$(1 + x)\frac{dX_{n+1}}{dx} - (n + 1)X_{n+1},$$

ou par

$$\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx} \text{ (**)}.$$

La formule (G) est donc démontrée.

(*) *M.*, p. 7.

(**) En vertu de la relation

$$x\frac{dX_{n+1}}{dx} - (n + 1)X_{n+1} = \frac{dX_n}{dx};$$

conséquence des égalités (8), (9). (*M.*, p. 5.)

41. THÉORÈME. *Trois fonctions,* X_n, X_{n+1}, X_p, *satisfont à l'une ou à l'autre des égalités*

$$\int_{-1}^{+1} X_p d(X_n + X_{n+1}) = 2, \quad (p < n + 1) \quad \ldots \ldots \quad (57)$$

$$\int_{-1}^{+1} X_p d(X_n + X_{n+1}) = 0. \quad (p \overline{>} n + 1) \quad \ldots \ldots \quad (58)$$

La relation (G) étant écrite ainsi :

$$\int_{-1}^{+1} d(X_n + X_{n+1}) \sum_0^\infty X_p z^p = 2(1 + z + z^2 + \cdots + z^n),$$

il suffit, pour vérifier le théorème, d'identifier les deux membres.

42. *Remarques.* — I. La formule (58) est comprise dans celle-ci :

$$\int_{-1}^{+1} X_p X_{p'} dx = 0.$$

II. Si n et p sont *de même parité*, tous les termes de $X_p \frac{dX_n}{dx}$ sont de degré *impair*. Par conséquent, l'intégrale correspondante est nulle, et l'équation (57) se réduit à

$$\int_{-1}^{+1} X_p dX_{n+1} = 2. \qquad (p < n + 1)$$

III. Semblablement, si n et p sont de *parités contraires*,

$$\int_{-1}^{+1} X_p dX_n = 2. \qquad (p < n + 1)$$

IV. Dans le second cas, le nombre p, moindre que $n + 1$, est inférieur à n; car la différence $(n + 1) - p$ est, au moins, égale à 2. On peut donc résumer ainsi les résultats précédents :

Si $n - p = \mathfrak{M}.2 + 1$, *on a*

$$\int_{-1}^{+1} X_p dX_n = 2. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (H)$$

43. *Exemples.* — I. $n = 5,\ p = 2.$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\cdot\frac{1}{8}(315x^4 - 210x^2 + 15)dx = \frac{15}{16}\int_{-1}^{+1}(3x^2 - 1)(21x^4 - 14x^2 + 1)dx$$

$$= \frac{15}{8}\left(9 - \frac{42}{5} + 1 - \frac{21}{5} + \frac{14}{3} - 1\right) = 2.$$

II. $n = 5,\ p = 4.$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\cdot\frac{1}{8}(315x^4 - 210x^2 + 15)dx = \frac{15}{32}\int_0^1 (35x^4 - 30x^2 + 3)(21x^4 - 14x^2 + 1)dx$$

$$= \frac{15}{32}\int_0^1 (735x^8 - 1\,120x^6 + 518x^4 - 72x^2 + 3)dx$$

$$= \frac{15}{32}\left(\frac{245}{3} - 160 + \frac{518}{5} - 24 + 3\right) = 2.$$

III. $n = 6,\ p = 1.$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{16}(1\,386x^5 - 1\,260x^3 + 210x)x\,dx = \frac{1}{8}(198 - 252 + 70) = 2.$$

44. THÉORÈME. *La fonction* X_n *satisfait à la relation*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{n - (2n+1)xz + (n+1)z^2}{(1 - 2zx + z^2)^{\frac{3}{2}}} X_n dx = 0. \qquad \text{(K)}$$

On a

$$z^n = \frac{1}{2}(1 - z^2)\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{(1 - 2zx + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad \text{(B)}$$

Cette expression doit être identique avec celle-ci :

$$z^n = \frac{1}{2}(2n + 1)\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} \qquad \text{(A)}$$

Donc

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1 - z^2 - (2n+1)(1 - 2zx + z^2)}{(1 - 2zx + z^2)^{\frac{3}{2}}} X_n dx = 0\,;$$

etc.

45. Corollaire

$$\int_{-1}^{+1}\left[n\frac{dX_{p+1}}{dx}-(2n+1)x\frac{dX_p}{dx}+(n+1)\frac{dX_{p-1}}{dx}\right]X_n dx=0. \quad . \quad . \quad . \qquad (59)$$

Le premier membre de l'égalité (K) peut être mis sous la forme

$$\int_{-1}^{+1}[n-(2n+1)xz+(n+1)z^2]X_n dx\sum_0^\infty\frac{dX_{p+1}}{dx}z^p.$$

Le coefficient de z^p, dans l'intégrale, est donc

$$\int_{-1}^{+1}\left[n\frac{dX_{p+1}}{dx}-(2n+1)x\frac{dX_p}{dx}+(n+1)\frac{dX_{p-1}}{dx}\right]X_n dx.$$

46. *Remarques.* — I. Si p est inférieur à n, la formule (59) est comprise dans un théorème de Jacobi (*).

II. Soit $p=n$. Alors $\frac{dX_p}{dx}$ est du degré $n-1$, et

$$\int_{-1}^{+1}X_n\frac{dX_{p-1}}{dx}dx=0.$$

Par conséquent, l'équation (59) devient

$$\int_{-1}^{+1}\left[n\frac{dX_{p+1}}{dx}-(2n+1)x\frac{dX_p}{dx}\right]X_n dx=0;$$

mais celle-ci est encore réductible.

En effet :

$$n\int_{-1}^{+1}X_n dX_{n+1}=n\Big[X_nX_{n+1}\Big]_{-1}^{+1}-n\int_{-1}^{+1}X_{n+1}dX_n=2n,$$

$$(2n+1)\int_{-1}^{+1}xX_n dX_n=\frac{1}{2}(2n+1)\Big[xX_n^2\Big]_{-1}^{+1}-\frac{1}{2}(2n+1)\int_{-1}^{+1}X_n^2dx=(2n+1)-\frac{1}{2}(2n+1)\int_{-1}^{+1}X_n^2dx.$$

(*) *Journal de Liouville*, t. II, p. 106.

Donc, finalement,

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1};$$

formule de Jacobi.

III. Il en résulte, en particulier,

$$\int_{-1}^{+1} (1 - X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + \cdots) dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{. . . . . (60)}$$

47. Théorème. *On a, entre deux fonctions consécutives, la relation*

$$\int_{-1}^{x} X_n dx = \frac{xX_n - X_{n-1}}{n+1} \quad \text{. . . . . (61)}$$

Cette égalité, dont nous avons déjà fait usage (**10**, III), résulte, par exemple, de celle-ci :

$$\int_{-1}^{x} X_n dx = \frac{x^2 - 1}{n(n+1)} \frac{dX_n}{dx} \text{ (*)}, \quad \text{. . . . . (62)}$$

combinée avec cette autre :

$$(1 - x^2) \frac{dX_n}{dx} = n(X_{n-1} - xX_n) \text{ (**)} \quad \text{. . . . . (63)}$$

48. *Remarques*. — I. Dans la *Note*, j'ai démontré la formule

$$\sum_1^{\infty} z^{n+1} \int_{-1}^{x} X_n dx = 1 - zx - \sqrt{1 - 2zx + z^2}. \quad \text{. . . . . (64)}$$

Au moyen du théorème précédent, nous pouvons la simplifier. En effet, le premier membre se transforme en

$$\frac{z^2}{2}(xX_1 - 1) + \frac{z^3}{3}(xX_2 - X_1) + \cdots + \frac{z^{n+1}}{n+1}(xX_n - X_{n-1}) + \cdots$$

(*) *Note sur les fonctions* X_n, p. 6.
(**) *M.*, p. 4.

Par conséquent,

$$\sqrt{1-2zx+z^2} = 1 - zx - \sum_1^\infty (xX_n - X_{n-1}) \frac{z^{n+1}}{n+1},$$

ou

$$\sqrt{1-2zx+z^2} = 1 - zx - \sum_0^\infty (xX_{n+1} - X_n) \frac{z^{n+2}}{n+2} \quad \ldots\ldots \quad (65)$$

II. On peut encore, pour développer le radical, employer la relation (62). On trouve ainsi :

$$\sqrt{1-2zx+z^2} = 1 - zx + (1-x^2) \sum_1^\infty \frac{dX_n}{dx} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)} \quad \ldots\ldots \quad (66)$$

III. D'après l'égalité (63), ces deux développements sont *identiques ;* ce qui devait être.

IV. Pour démontrer la formule (65), il suffit de prendre les dérivées des deux membres, par rapport à z (*). L'équation *dérivée* est

$$\frac{z-x}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = -x + \sum_0^\infty (X_n - xX_{n+1}) z^{n+1},$$

ou

$$(z-x) \sum_0^\infty X_n z^n = -x + \sum_0^\infty (X_n - xX_{n+1}) z^{n+1};$$

elle est vérifiée par $z=0$; et dans les deux membres, les coefficients de z^{n+1} sont égaux.

V. Dans l'égalité (66), transposons $1-zx$: le premier membre devient

$$\sqrt{1-2zx+z^2} - (1-zx) = \frac{z^2(1-x^2)}{\sqrt{1-2zx+z^2}+1-zx}.$$

(*) En effet, cette équation a lieu pour $z=0$.

Nous trouvons donc cette formule simple, qui n'avait peut-être pas été remarquée :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}+1-zx}=\sum_1^\infty \frac{dX_n}{dx}\frac{z^{n-1}}{n(n+1)}. \quad \ldots\ldots \quad \text{(L)}$$

49. Théorème. *On a, entre* n *fonctions consécutives, la relation*

$$\frac{n-1}{n(n+1)}\frac{dX_n}{dx}=\frac{X_1\frac{dX_{n-1}}{dx}}{(n-1)n}+\frac{X_2\frac{dX_{n-2}}{dx}}{(n-2)(n-1)}+\cdots+\frac{X_{n-1}\frac{dX_1}{dx}}{1.2} \quad \ldots \quad (67)$$

Dans la *Note* (*), nous avons donné la formule

$$X_n+X_{n+1}=X_0\int_{-1}^x X_n dx+X_1\int_{-1}^x X_{n-1}dx+\cdots+X_n\int_{-1}^x X_0 dx.$$

Or,

$$\int_{-1}^x X_p dx=\frac{x^2-1}{p(p+1)}\frac{dX_p}{dx}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

Au moyen de cette valeur, on trouve, toutes réductions faites, l'égalité (67).

50. *Exemple.* Soit $n=4$. On doit avoir

$$\frac{3}{4.5}\frac{dX_4}{dx}=\frac{1}{3.4}X_1\frac{dX_3}{dx}+\frac{1}{2.3}X_2\frac{dX_2}{dx}+\frac{1}{1.2}X_3\frac{dX_1}{dx},$$

ou

$$\frac{3}{40}(35x^3-15x)=\frac{1}{24}(15x^3-3x)+\frac{1}{4}(3x^3-x)+\frac{1}{4}(5x^3-3x);$$

ce qui est exact.

(*) P. 4.

V. — Intégrales et séries.

51. *Intégrales définies.* Reprenons encore la formule

$$\frac{z^n}{1-z^2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

Si, comme précédemment (13), on la combine avec les égalités

$$1 + X_1 + X_2 + X_3 + \cdots\cdots = \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}},$$

$$1 - X_1 + X_2 - X_3 + \cdots\cdots = \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}},$$

on obtient ces deux intégrales (*) :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}\,(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{(1-z^2)(1-z)}, \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\,(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{(1-z^2)(1+z)}. \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

52. *Suite.* Développons, suivant les puissances de z, les deux membres de l'équation (68). Elle devient

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \sum_1^\infty \frac{dX_n}{dx} z^{n-1} = 2\sqrt{2}(1+z) \sum_1^\infty p z^{2p-2}.$$

(*) Elles n'en font qu'une : on passe de la première formule à la seconde, en changeant, simultanément, x en $-x$, z en $-z$.

Donc :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dX_n}{\sqrt{1-x}} = n\sqrt{2}, \qquad (n \text{ pair}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dX_n}{\sqrt{1-x}} = (n+1)\sqrt{2}. \qquad (n \text{ impair}) \ (*) \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

53. *Remarques.* — **I.** Si n est *pair*, la dernière formule donne

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dX_{n+1}}{\sqrt{1-x}} = (n+2)\sqrt{2};$$

de sorte que

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d(X_{n+1}-X_n)}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{2}. \qquad (n \text{ pair}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Si, au contraire, n est *impair*, on a, par la formule (70),

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dX_{n+1}}{\sqrt{1-x}} = (n+1)\sqrt{2};$$

et, en conséquence,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d(X_{n+1}-X_n)}{\sqrt{1-x}} = 0. \qquad (n \text{ impair}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

II. *Les intégrales*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d(X_1-X_0)}{\sqrt{1-x}}, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{d(X_2-X_1)}{\sqrt{1-x}}, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{d(X_3-X_2)}{\sqrt{1-x}}, \quad \ldots\ldots$$

(*) On peut comparer ces expressions avec celle-ci :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_n}{\sqrt{1-x}}\, dx = \frac{2\sqrt{2}}{n+1},$$

démontrée dans le premier Mémoire.

constituent la suite périodique

$$2\sqrt{2}, \quad 0, \quad 2\sqrt{2}, \quad 0, \quad \ldots\ldots$$

54. *Vérifications.*

$$X_1 - X_0 = x, \quad X_2 - X_1 = \frac{1}{2}(3x^2 - 2x - 1), \quad X_3 - X_2 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x^2 - 3x + 1), \ \ldots;$$

$$d(X_1 - X_0) = dx, \ d(X_2 - X_1) = (3x - 1)dx, \qquad d(X_3 - X_2) = \frac{3}{2}(5x^2 - 2x - 1)dx, \ \ldots\ldots;$$

puis, si l'on fait $x = 1 - t^2$:

$$d(X_1 - X_0) = -2tdt, \ d(X_2 - X_1) = 2(3t^2 - 2)tdt, \ d(X_3 - X_2) = -3(5t^4 - 8t^2 + 2)tdt, \ \ldots$$

Les intégrales deviennent :

$$2\int_0^{\sqrt{2}} dt, \quad -2\int_0^{\sqrt{2}}(3t^2 - 2)dt, \quad 3\int_0^{\sqrt{2}}(5t^4 - 8t^2 + 2)dt, \quad \ldots\ldots;$$

c'est-à-dire :

$$2\sqrt{2}, \quad -2(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) = 0, \quad 3\left(4\sqrt{2} - \frac{16}{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}, \quad \ldots\ldots$$

55. THÉORÈME.

$$\int_{-1}^{+1} X_n x^n dx = 2 \cdot \frac{1.2.3\ldots n}{3.5.7\ldots\overline{2n+1}} \qquad (74)$$

En général,

$$\int_{-1}^{+1} yX_n dx = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}\int_{-1}^{+1}(1 - x^2)^n \frac{d^n y}{dx^n}dx \ (*),$$

pourvu que *la fonction* y, *et chacune de ses* n *premières dérivées, reste continue entre* x = − 1 *et* x = + 1.

(*) JACOBI, *Journal de Liouville*, t. II, p. 106.

Si l'on suppose $y = x^n$, le second membre se réduit à

$$\frac{1}{2^n}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n dx;$$

ou, si l'on fait $x = \cos\alpha$, à

$$\frac{2}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\alpha d\alpha = \frac{2}{2^n}\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots\overline{2n+1}};$$

etc.

56. Théorème. *Si* n *et* p *sont de même parité, et que* p *ne soit pas inférieur à* n (*), *on a*

$$\int_{-1}^{+1} X_n x^p dx = 2\,\frac{p(p-1)\,\ldots\ldots\,(p-n+1)}{(p-n+1)(p-n+3)\ldots(p+n+1)} \quad \ldots\ldots \quad (75)$$

Ce théorème, généralisation du précédent, se démontre presque aussi facilement.

D'abord, par la proposition de Jacobi,

$$\int_{-1}^{+1} X_n x^p dx = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\ldots n.2^n}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n x^p dx.$$

En second lieu, la nouvelle intégrale équivaut à

$$\int_0^1 (1-\theta)^n \theta^{\frac{p-n-1}{2}} d\theta = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{p-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+n+3}{2}\right)} = 1.2.3\ldots n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-n}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p+n}{2}+1}}\,\frac{1.3.5\ldots(p-n-1)}{1.3.5\ldots(p+n+1)}$$

$$= \frac{1.2.3\ldots n.2^{n+1}}{(p-n+1)(p-n+3)\ldots(p+n+1)} (^{**}).$$

Substituant, on trouve le résultat énoncé.

(*) Si ces conditions ne sont pas remplies, l'intégrale est nulle.

(**) Pour éviter ce petit calcul, j'avais pris, dans le *Traité* de M. Bertrand, la valeur de

57. Théorème.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi \frac{2n-1}{2n} \left(\frac{1.3.5 \ldots \overline{2n-3}}{2.4.6 \ldots \overline{2n-2}} \right)^2 \quad \ldots \ldots \quad (76)$$

Si, dans la relation

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0,$$

on change n en $2n-1$, on a

$$(2n-1)X_{2n-2} + 2nX_{2n} = (4n-1)xX_{2n-1};$$

l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \cos^{p-n} \alpha d\alpha;$$

mais, n'arrivant pas à un résultat simple, j'en conclus l'inexactitude de la formule donnée par ce savant Géomètre. En effet, d'après cette formule (15) (p. 133),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{1.2.4}{3.5.6} = \frac{4}{45}.$$

Or, si l'on fait le calcul directement, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{8}{105}.$$

Du reste, un exemple encore plus simple suffit. Si, dans la formule de M. Bertrand :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \cos^{2n} x dx = \frac{1.3.5 \ldots \overline{2n-1}.2.4.6 \ldots 2m}{1.3.5 \ldots \overline{2m+1}.(2m+2)(2m+4) \ldots (2m+2n)},$$

on fait $m=0$, $n=1$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx = \frac{1}{2};$$

et il est visible que le premier membre égale

$$\left[-\frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

et, par conséquent,

$$(2n-1)\int_{-1}^{+1}\frac{X_{2n-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}+2n\int_{-1}^{+1}\frac{X_{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}=(4n-1)\int_{-1}^{+1}\frac{X_{2n-1}xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or,

$$\int_{-1}^{+1}\frac{X_{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \text{ (*)}, \quad \ldots\ldots \quad (77)$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{X_{2n-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-3}}{2.4.6\ldots\overline{2n-2}}\right)^2;$$

donc le premier membre de l'égalité ci-dessus devient

$$\pi\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-3}}{2.4.6\ldots\overline{2n-2}}\right)^2\left[2n-1+2n\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2\right],$$

ou

$$\pi\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-3}}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2\frac{2n-1}{2n}(4n-1).$$

Supprimant le facteur $4n-1$, on a l'égalité (76).

58. Corollaire :

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}\,d.X_{2n-1}=\pi\frac{2n-1}{2n}\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-3}}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2. \quad \ldots\ldots \quad (78)$$

On le déduit du théorème, soit en intégrant par parties, soit en différenciant l'expression

$$X_{2n-1}\sqrt{1-x^2}.$$

59. *Sommation de séries.* La formule de définition :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}}=\sum_0^\infty X_n z^n$$

(*) Bauer, *Journal de Crelle,* t. LVI, p. 110. Cette remarquable formule sera démontrée plus loin.

donne

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = \sum_0^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1},$$

ou

$$\log \frac{z-x+\sqrt{1-2zx+z^2}}{1-x} = \sum_0^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad \ldots\ldots \quad (79)$$

Ainsi déjà, l'on connaît la limite de la série

$$z + X_1 \frac{z^2}{2} + X_2 \frac{z^3}{3} + \cdots.$$

Mais, si l'on remplace le radical par son développement, on arrive à un résultat plus intéressant. En effet, la formule

$$\sqrt{1-2zx+z^2} = 1 - zx + (1-x^2) \sum_1^\infty \frac{dX_n}{dx} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)}, \quad \ldots\ldots \quad (66)$$

étant écrite ainsi :

$$\frac{z-x+\sqrt{1-2zx+z^2}}{1-x} = 1 + z + (1+x) \sum_0^\infty \frac{dX_{n+1}}{dx} \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)},$$

il en résulte, au lieu de l'égalité (74),

$$\log \left\{ 1 + z + (1+x) \sum_0^\infty \frac{dX_{n+1}}{dx} \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \right\} = \sum_0^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1}. \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{M})$$

60. *Suite.* Cette relation générale en donne d'autres, si l'on attribue à x des valeurs particulières.

Soit, par exemple, $x = 1$. On a (*)

$$\left(\frac{dX_{n+1}}{dx}\right)_1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

(*) *M.*, p. 9

Par conséquent,

$$\log\left\{1+z+\sum_0^\infty z^{n+2}\right\}=\sum_0^\infty \frac{z^{n+1}}{n+1},$$

ou

$$\log\frac{1}{1-z}=\sum_0^\infty \frac{z^{n+1}}{n+1};$$

formule connue.

61. *Autre développement.* Dans l'équation

$$\log\frac{z-x+\sqrt{1-2zx+z^2}}{1-x}=\sum_0^\infty X_n\frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad \ldots\ldots \quad (79)$$

prenons $x=0$. Le premier membre se réduit à $\log(z+\sqrt{1+z^2})$; le second membre, développé, devient (*)

$$\frac{z}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{1.3}{2\ 4}\frac{z^5}{5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^7}{7}+\cdots$$

Ainsi

$$\log(z+\sqrt{1+z^2})=\frac{z}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{1.5}{2.4}\frac{z^5}{5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^7}{7}+\cdots \quad \ldots\ldots \quad (80)$$

62. *Remarque.* $z=\sqrt{-1}\sin\varphi$ change cette formule en

$$\varphi=\frac{\sin\varphi}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3\varphi}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5\varphi}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin^7\varphi}{7}+\cdots;$$

développement connu.

63. *Suite.* De l'égalité (79), on conclut encore, en prenant les dérivées par rapport à x :

$$-\frac{+1+\dfrac{z}{\sqrt{1-2zx+z^2}}}{z-x+\sqrt{1-2zx+z^2}}+\frac{1}{1-x}=\sum_0^\infty\frac{dX_n}{dx}\frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

(*) *M.*, p. 10.

R représentant le radical, le premier membre se transforme en

$$\frac{R(z-x+R)-(1-x)(z+R)}{R(1-x)(z-x+R)}=\frac{1-z-zx+z^2+(z-1)R}{R(1-x)(z-x+R)}$$
$$=\frac{[1-z-zx+z^2+(z-1)R][z-x-R]}{R(1-x)(x^2-1)}=\frac{1-zx-R}{R(x^2-1)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1-zx}{\sqrt{1-2zx+z^2}}-1=(x^2-1)\sum_0^\infty \frac{dX_n}{dx}\frac{z^{n+1}}{n+1}. \quad \ldots\ldots \quad (81)$$

64. *Remarque.* L'équation (79) est la même chose que

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-2zx+z^2}}=\sum_0^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Il résulte, de celle-ci :

$$\int_0^z \frac{zdz}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_0^\infty \frac{dX_n}{dx}\frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Donc, à cause de la formule (76) :

$$(x^2-1)\int_0^z \frac{zdz}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1-zx}{\sqrt{1-2zx+z^2}}-1.$$

Ainsi, l'intégrale contenue dans le premier membre est *algébrique.* Ce résultat ne nous paraît pas évident *a priori.*

65. *Une identité.* Si, dans la formule

$$\log\frac{z-x+\sqrt{1-2zx+z^2}}{1-x}=\sum_0^\infty X_n\frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad \ldots\ldots \quad (79)$$

on fait $z=x$, elle se réduit à

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\sum_0^\infty X_n\frac{x^{n+1}}{n+1};$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\sum_0^\infty \frac{x^{2p+1}}{2p+1} = \sum_0^\infty X_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

Cette égalité est *identique : les coefficients des mêmes puissances de* x, dans les deux membres, *sont égaux entre eux.* En effet, ces deux membres sont les développements d'une même fonction.

Cette simple identité fait découvrir de nouvelles propriétés des polynômes X_n.

66. *Suite.* Soit, en effet,

$$X_n = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^{2p-n} + \cdots;$$

et, par conséquent,

$$k = \frac{1}{1.2.3\ldots\overline{2p-n}}\left[\frac{d^{2p-n}X_n}{dx^{2p-n}}\right]_0.$$

D'après cette expression, le coefficient de x^{2p+1}, dans le second membre de l'identité (82), est

$$\sum_{n=0} \frac{1}{(n+1)1.2.3\ldots\overline{2p-n}}\left[\frac{d^{2p-n}X_n}{dx^{2p-n}}\right]_0.$$

Au moyen de la formule de Rodrigues, le dernier facteur se transforme en

$$\frac{1}{2^n.1.2.3\ldots n}\left[\frac{d^{2p}(x^2-1)^n}{dx^{2p}}\right]_0.$$

Donc, finalement,

$$\frac{1}{2p+1} = \sum_{n=p}^{n=2p} \frac{1}{2^n.1.2.3\ldots\overline{n+1}.1.2.3\ldots\overline{2p-n}}\left[\frac{d^{2p}(x^2-1)^n}{dx^{2p}}\right]_0 (^*). \quad . \ . \ . \quad (83)$$

(*) Pour les valeurs de n inférieures à p, les dérivées sont nulles : on doit donc les négliger.

67. *Remarque.* Cette nouvelle identité équivaut à

$$2^p C_{2p+1,p} - 2^{p-1} C_{p+1,1} . C_{2p+1,p-1} + 2^{p-2} C_{p+2,2} . C_{2p+1,p-2} - \cdots \pm C_{2p,p} = 2^{2p}. \quad . \quad . \quad (84)$$

Dans celle-ci, les fonctions X_n ont complètement disparu.

68. *Intégrales définies.* La formule *fondamentale*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = \frac{2}{2n+1} z^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

donne, par intégration,

$$\int_{-1}^{+1} X_n dx \log \frac{z - x + \sqrt{1 - 2zx + z^2}}{1 - x} = \frac{2}{(n+1)(2n+1)} z^{n+1}; \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

puis

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \log \frac{z - x + \sqrt{1 - 2zx + z^2}}{1 - x} = 2\sqrt{2} \sum_0^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)(2n+1)} \cdot \quad . \quad . \quad (86)$$

La fraction $\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ égale $\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$. Donc le second membre se transforme, successivement, en

$$-2\sqrt{2} \sum_0^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} + 4\sqrt{2} \sum_0^{\infty} \frac{z^{n+1}}{2n+1},$$

$$-2\sqrt{2} \sum_0^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} + 4\sqrt{2z} \sum_0^{\infty} \frac{\left(\sqrt{z}\right)^{2n+1}}{2n+1},$$

$$2\sqrt{2} \log(1 - z) + 2\sqrt{2z} \log \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - z}.$$

Cette dernière quantité égale

$$2\sqrt{2} \log \left\{ (1 + \sqrt{z})^{1+\sqrt{z}} (1 - \sqrt{z})^{1-\sqrt{z}} \right\};$$

en sorte que notre formule (86) devient

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \log \frac{z - x + \sqrt{1 - 2zx + z^2}}{1 - x} = 2\sqrt{2} \log \left\{ (1 + \sqrt{z})^{1+\sqrt{z}} (1 - \sqrt{z})^{1-\sqrt{z}} \right\}; \quad (N)$$

ou, par le changement de z en z^2 :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \log \frac{z^2 - x + \sqrt{1 - 2z^2x + z^4}}{1-x} = 2\sqrt{2} \log \left\{ (1+z)^{1+z} (1-z)^{1-z} \right\} \ldots \quad (87)$$

69. *Remarque.* Si z tend vers 1, la quantité $(1-z)^{1-z}$ tend aussi vers 1. Donc

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \log \left(1 + \sqrt{\frac{2}{1-x}}\right) = 4\sqrt{2} \log . 2. \quad \ldots \ldots \quad (88)$$

70. *Suite.* Dans (M), attribuons à z la valeur $\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$, qui annule le radical. Nous trouvons

$$\log \frac{\sqrt{-1}\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \sum_0^\infty \frac{X_n}{n+1} \left[\cos(n+1)\alpha + \sqrt{-1}\sin(n+1)\alpha\right].$$

Le premier membre égale $\log(\sqrt{-1}) + \log.\cot\frac{1}{2}\alpha$. Par suite :

$$\frac{\pi}{2} = \sin\alpha + \frac{1}{2} X_1 \sin 2\alpha + \frac{1}{3} X_2 \sin 3\alpha + \cdots, \quad \ldots \ldots \quad (89)$$

$$\log.\cot\frac{1}{2}\alpha = \cos\alpha + \frac{1}{2} X_1 \cos 2\alpha + \frac{1}{3} X_2 \cos 3\alpha + \cdots. \quad \ldots \ldots \quad (90)$$

La première formule, peut-être nouvelle, a de l'analogie avec l'une de celles qui ont été données par Fourier :

$$\frac{\pi}{4} = \sin\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha + \frac{1}{5}\sin 5\alpha + \cdots$$

Comme celle-ci, la nôtre est en défaut pour $\alpha = 0$.

71. *Remarque.* On sait que

$$\log\left(2\cos\frac{1}{2}\alpha\right) = \cos\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{3}\cos 3\alpha - \frac{1}{4}\cos 4\alpha + \cdots \text{ (*)}.$$

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 224.

De cette formule, combinée avec la relation (85), on conclut

$$-\log\left(2\sin\frac{1}{2}\alpha\right)=\frac{1}{2}(X_1+1)\cos 2\alpha+\frac{1}{3}(X_2-1)\cos 3\alpha+\frac{1}{4}(X_3+1)\cos 4\alpha+\cdots \quad (91)$$

72. *Autres relations.* En combinant les formules

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}}=\sum_0^\infty X_n z^n,\qquad \frac{1}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_0^\infty \frac{dX_{n+1}}{dx}z^n,$$

$$\frac{1-zx}{1-2zx+z^2}=\sum_0^\infty z^n\cos n\alpha,$$

on trouverait d'autres relations, la plupart connues (*).

Par exemple, il est clair que

$$(1-zx)\sum_0^\infty\frac{dX_{n+1}}{dx}z^n=\sum_0^\infty X_n z^n.\sum_0^\infty z^n\cos n\alpha.$$

Dans le premier membre, le coefficient de z^n est

$$\frac{dX_{n+1}}{dx}-x\frac{dX_n}{dx}=(n+1)X_n.$$

Dans le second membre, ce coefficient égale

$$X_0\cos n\alpha+X_1\cos\overline{n-1}\,\alpha+\cdots+X_{n-1}\cos\alpha+X_n.$$

Par conséquent,

$$(n+1)X_n=\sum_0^n X_p\cos(n-p)\alpha,$$

ou

$$nX_n=\sum_1^{n-1}X_p\cos(n-p)\alpha \text{ (**)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

(*) Dans le premier Mémoire (p. 8), nous avons indiqué une conséquence des deux premières formules.

(**) On ne doit pas oublier que $x=\cos\alpha$.

73. *Vérification.* Soit $n=4$. On doit avoir

$$4X_4 = \cos 4\alpha + X_1 \cos 3\alpha + X_2 \cos 2\alpha + X_3 \cos\alpha,$$

ou

$$\frac{1}{2}(35x^4 - 30x^2 + 3) = (8x^4 - 8x^2 + 1) + x(4x^3 - 3x) + \frac{1}{2}(3x^2-1)(2x^2-1) + \frac{1}{2}(5x^3-3x)x,$$

ou

$$11x^4 - 8x^2 + 1 = (3x^2-1)(2x^2-1) + 5x^4 - 3x^2;$$

ce qui est exact.

74. *Suite.* Si l'on suppose

$$\frac{1}{1-2zx+z^2} = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_n z^n + \cdots, \quad \quad (93)$$

on trouve, à cause de

$$\frac{1}{1-2zx+z^2} = [1 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots + X_n z^n + \cdots]^2:$$

$$A_n = X_0 X_n + X_1 X_{n-1} + \cdots + X_{n-1} X_1 + X_n X_0 \quad \quad (94)$$

D'un autre côté (72),

$$(1-zx)\sum_0^\infty A_n z^n = \sum_0^\infty z^n \cos n\alpha. \quad \quad (95)$$

Identifiant, on a donc

$$\cos n\alpha = A_n - xA_{n-1}. \quad \quad (96)$$

Ainsi, le cosinus de $n\alpha$ s'exprime, assez simplement, au moyen des fonctions X_n.

75. *Remarques.* — I. D'après les formules (94), (96) :

$$\cos n\alpha = X_0(X_n - xX_{n-1}) + X_1(X_{n-1} - xX_{n-2}) + \cdots + X_{n-1}(X_1 - xX_0) + X_n;$$

ou, en vertu de la relation

$$X_n - xX_{n-1} = \frac{1}{n}(x^2-1)\frac{dX_{n-1}}{dx}:$$

$$\cos n\alpha = (x^2-1)\left[\frac{1}{n}\frac{dX_{n-1}}{dx} + \frac{1}{n-1}X_1\frac{dX_{n-2}}{dx} + \cdots + \frac{1}{2}X_{n-2}\right] + X_n. \quad . \quad . \quad (97)$$

Par exemple,

$$\cos 5\alpha = (x^2-1)\left[\frac{1}{5.8}(140x^3-60x) + \frac{1}{4.2}x(15x^2-3) + \frac{1}{3.4}(3x^2-1)6x + \frac{1}{4}(5x^3-3x)\right]$$
$$+ \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),$$

ou

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = (x^2-1)\left[\frac{1}{2}(7x^3-3x) + \frac{3}{8}(5x^3-x) + \frac{1}{2}(3x^3-x) + \frac{1}{4}(5x^3-3x)\right]$$
$$+ \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),$$

ou

$$65x^2 - 25 = 4(7x^2-3) + 3(5x^2-1) + 4(3x^2-1) + 2(5x^2-3);$$

etc.

II. Si, dans l'équation (96), on change n en $n-1$, $n-2$, ..., 1, on obtient

$$A_n = \cos n\alpha + \cos\overline{n-1}\,\alpha\cos\alpha + \cos\overline{n-2}\,\alpha\cos^2\alpha + \cdots + \cos^n\alpha; \quad . \quad . \quad (98)$$

et, par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} &X_0X_n + X_1X_{n-1} + \cdots + X_{n-1}X_1 + X_nX_0 \\ &= \cos n\alpha + \cos\overline{n-1}\,\alpha\cos\alpha + \cos\overline{n-2}\,\alpha\cos^2\alpha + \cdots + \cos\alpha.\cos^{n-1}\alpha + \cos^n\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (99)$$

76. *Intégrales définies.* On a $dx = -\sin\alpha d\alpha$. Donc

$$\int_{-1}^{+1}(X_0X_n + X_1X_{n-1} + \cdots + X_nX_0)dx$$
$$= \int_0^{\pi}\left[\cos n\alpha + \cos\overline{n-1}\,\alpha\cos\alpha + \cdots + \cos\alpha.\cos^{n-1}\alpha + \cos^n\alpha\right]\sin\alpha d\alpha.$$

Il y a deux cas à considérer :

1°. Si n est *impair*, toutes les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} X_0 X_n dx, \quad \int_{-1}^{+1} X_1 X_{n-1} dx, \quad \ldots\ldots$$

sont nulles; et l'égalité précédente se réduit à

$$\int_0^{\pi} [\cos n\alpha + \cos \overline{n-1}\,\alpha \cos\alpha + \cdots + \cos^n\alpha] \sin\alpha d\alpha = 0. \quad (n \text{ impair}) \;.\;. \quad (100)$$

2°. Si $n = 2n'$, la seule intégrale qui ne soit pas nulle est

$$\int_{-1}^{+1} X_{n'}^2 dx = \frac{2}{n+1}.$$

Ainsi

$$\int_0^{\pi} [\cos n\alpha + \cos \overline{n-1}\,\alpha \cos\alpha + \cdots + \cos^n\alpha] \sin\alpha d\alpha = \frac{2}{n+1}. \quad (n \text{ pair}). \;. \quad (101)$$

77. *Remarque.* L'avant-dernière formule est une simple identité : à cause de n *impair*, chacune des intégrales

$$\int_0^{\pi} \cos n\alpha . \sin\alpha d\alpha, \quad \int_0^{\pi} \cos \overline{n-1}\,\alpha \cos\alpha \sin\alpha d\alpha, \quad \ldots\ldots \quad \int_0^{\pi} \cos^n\alpha \sin\alpha d\alpha$$

est nulle (*).

Mais, si n est *pair*, il n'en est plus de même; et la formule (101) en donne une autre, assez curieuse.

78. *Une sommation.* Écrivons d'abord ainsi cette formule (101) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos n\alpha + \cos \overline{n-1}\,\alpha \cos\alpha + \cdots + \cos\alpha . \cos^{n-1}\alpha + \cos^n\alpha] \sin\alpha d\alpha = \frac{1}{n+1} \text{ (**)};$$

(*) On a

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha, \quad \cos n(\pi-\alpha) = -\cos n\alpha, \quad \cos\overline{n-1}(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha) = -\cos\overline{n-1}\,\alpha . \cos\alpha, \ldots$$

Ainsi, les éléments de chacune des intégrales sont, deux à deux, *égaux et de signes contraires*.

(**) En reprenant la discussion précédente, on voit que, n étant *pair*, les éléments de chacune des intégrales sont, deux à deux, *égaux et de même signe*.

puis sous la forme abrégée :

$$\sum_0^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos p\alpha . \cos^{n-p}\alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{1}{n+1},$$

puis encore sous celle-ci :

$$\sum_0^n \int_0^1 \cos p\alpha . x^{n-p}dx = \frac{1}{n+1}.$$

Par une formule de Lagrange (*) :

$$\cos p\alpha = a_0 x^p + a_2 x^{p-2} + a_4 x^{p-4} + \cdots$$

Donc

$$\int_0^1 \cos p\alpha . x^{n-p}dx = \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_2}{n-1} + \frac{a_4}{n-3} + \cdots;$$

et, au lieu de la formule (101) :

$$\sum_{p=0}^{p=n}\left[\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_2}{n-1} + \frac{a_4}{n-3} + \cdots\right] = 0 \text{ (**)},$$

ou enfin

$$\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{p=n} a_0 + \frac{1}{n-1}\sum_{p=0}^{p=n} a_2 + \frac{1}{n-3}\sum_{p=0}^{p=n} a_4 + \cdots = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

79. *Exemple.* $n = 6$.

Les valeurs de a_0 sont (***) :	1,	2,	4,	8,	16,	32;
» a_2 »		—1,	—3,	—8,	—20,	—48;
» a_4 »			1,	5,	18;	
» a_6 »				—1.		

(*) *M.*, pp. 21 et 27. Les coefficients désignés par a_0, a_2, a_4, ... sont *fonctions de* p.
(**) L'intégrale $\int_0^1 x^n dx$, égale à $\frac{1}{n+1}$, détruit le second membre.
(***) *M.*, p. 28.

L'identité (102) devient donc

$$-\frac{80}{5}+\frac{24}{3}-1=0;$$

ce qui est exact (*).

VI. — Nouveaux développements de X_n.

80. Pour ordonner, suivant les puissances croissantes de x, le polynôme X_n, on peut employer, soit la formule de Rodrigues, soit celle-ci :

$$X_n=\frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\varphi(x\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n d\varphi\ (^{**}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

1°. On a :

$$(x^2-1)^n=(-1)^n(1-x^2)^n=(-1)^n\sum_0^n(-1)^p\frac{n(n-1)\ldots\overline{n-p+1}}{1.2.3\ldots p}x^{2p},$$

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}=(-1)^n\sum(-1)^p\frac{n(n-1)\ldots\overline{n-p+1}}{1.2\ldots p}2p(2p-1)\ldots(2p-n+1)x^{2p-n},$$

pourvu que $2p$ soit *égal ou supérieur à* n.

Par suite,

$$X_n=\frac{1}{2^n}\sum(-1)^{n+p}C_{n,p}.C_{2p,n}.x^{2p-n}. \quad \left(n\overline{\overline{>}}p\overline{\overline{>}}\frac{n}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

(*) D'après cette application, *il semblerait* que les quantités

$$\Sigma a_0,\ \Sigma a_2,\ \Sigma a_4,\ \ldots\ldots$$

sont divisibles, respectivement, par les *nombres impairs*

$$n+1,\ n-1,\ n-3,\ \ldots\ldots;$$

mais cette propriété n'est pas générale. Les valeurs de a_0, a_2, a_4, ... ont été mises sous une forme *simple*, par MM. Baher, Villarceau et Ronkar. (*N. C. M.*, t. VI, pp. 100 et 226.)

(**) *M.*, p. 12.

2°. De

$$(\sqrt{-1}\sin\varphi + x\cos\varphi)^n = \sum_0^n C_{n,q}(\sqrt{-1})^{n-q}\sin^{n-q}\varphi\cos^q\varphi x^q,$$

nous déduisons, au lieu de la formule (103),

$$X_n = \frac{2^{n+1}}{\pi}\sum_0^\infty C_{n,q}(\sqrt{-1})^{n-q}x^q\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-q}\varphi\cos^{n+q}\varphi d\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(P)}$$

$n - q$ étant *pair*.

D'après une formule connue,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-q}\varphi\cos^{n+q}\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1.3.5\ldots\overline{n-q-1}.1.3.5\ldots\overline{n+q-1}}{1.2.3\ldots n};$$

donc

$$X_n = \sum(-1)^{\frac{n-q}{2}}\frac{1.3.5\ldots\overline{n-q-1}.1.3.5\ldots\overline{n+q-1}}{1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots\overline{n-q}}x^q. \quad . \quad . \quad . \qquad (105)$$

81. *Application.* Soit $n = 6$. La dernière formule donne

$$X_6 = -\frac{1.3.5.1.3.5}{1.2.3.4.5.6} + \frac{1.3.1.3.5.7}{1.2.1.2.3.4}x^2 - \frac{1.1.3.5.7.9}{1.2.3.4.1.2}x^4 + \frac{1.3.5.7.9.11}{1.2.3.4.5.6}x^6$$
$$= -\frac{5}{16} + \frac{105}{16}x^2 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{231}{16}x^6;$$

résultat exact (*).

82. *Remarques.* I. La comparaison des valeurs (104) et (105) montre que *la fraction*

$$\frac{1.3.5\ldots\overline{n-q-1}.1.3.5\ldots\overline{n+q-1}}{1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots\overline{n-q}}$$

est réductible à

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n C_{n,\frac{n+q}{2}}.C_{n+q,n} \text{ (**)}.$$

(*) *M.*, p. 10.
(**) Cette propriété n'est pas nouvelle.

II. Par conséquent,

$$\frac{1.3.5\ldots\overline{n-q-1}.1.3.5\ldots\overline{n+q-1}}{1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots\overline{n-q}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1.2.3\ldots\overline{n+q}}{1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots\frac{n-q}{2}.1.2.3\ldots\frac{n+q}{2}}.$$

La nouvelle fraction représente *le nombre des permutations, avec répétition, de* q *lettres* a, *de* $\frac{n-q}{2}$ *lettres* b, *et de* $\frac{n+q}{2}$ *lettres* c. Soit $\varphi(n,q)$ ce nombre de permutations. Alors la formule (105) prend la forme abrégée

$$X_n=\frac{1}{2^n}\sum(-1)^{\frac{n-q}{2}}\varphi(n,q)x^q. \qquad (106)$$

III. Comme $x=1$ donne $X_n=1$, on a *l'identité :*

$$\sum(-1)^{\frac{n-q}{2}}\varphi(n,q)=2^n. \qquad (107)$$

Soit, par exemple, $n=6$, auquel cas :

$$\varphi(n,0)=\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.3}=20, \qquad \varphi(n,2)=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.1.2.1.2.3.4}=420,$$

$$\varphi(n,4)=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.1.1.2.3.4.5}=460, \quad \varphi(n,6)=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}{1.2.3.4.5.6.1.2.3.4.5.6}=924.$$

On doit trouver

$$-20+420-460+924=64;$$

ce qui a lieu.

IV. Entre $\varphi(n,q)$ et $\varphi(n,q+2)$, existe la relation

$$\varphi(n,q+2)=\varphi(n,q)\frac{(n+q+1)(n-q)}{(q+1)(q+2)}, \qquad (108)$$

qui facilite le calcul des nombres φ.

V. Le polynôme

$$\sum(-1)^{\frac{n-q}{2}}\varphi(n, q)x^q$$

est celui que, dans le premier Mémoire (*), nous avons représenté par P_n. Conséquemment,

$$\left.\begin{aligned}(1+x)^n - \left[\frac{n}{1}\right]^2(1+x)^{n-1}(1-x) + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2(1+x)^{n-2}(1-x)^2 - \cdots \pm (1-x)^n \\ = \sum(-1)^{\frac{n-q}{2}}\varphi(n, q)x^q.\end{aligned}\right\} \quad (109)$$

Au moyen de cette *identité*, le premier membre est *développé suivant les puissances croissantes de* x.

83. *Autre développement de* X_n. Reprenons la formule

$$2^n X_n = (x+1)^n + \left[\frac{n}{1}\right]^2(x+1)^{n-1}(x-1) + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2(x+1)^{n-2}(x-1)^2 + \cdots + (x-1)^n \text{ (**)}. \quad (110)$$

Le second membre est le coefficient de t^n, soit dans le produit de

$$(x+1)^n t^n + \frac{n}{1}(x+1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(x+1)^{n-2}t^{n-2} + \cdots$$

par

$$1 + \frac{n}{1}(x-1)t + \frac{n(n-1)}{1.2}(x-1)^2t^2 + \cdots,$$

soit dans le produit de

$$(x+1)^n t^n + \frac{n}{1}(x+1)^{n-1}(x-1)t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(x+1)^{n-2}(x-1)^2t^{n-2} + \cdots$$

(*) Pages 6 et 13.
(**) *M.*, p. 13.

par

$$1 + \frac{n}{1}t + \frac{n(n-1)}{1.2}t^2 + \cdots$$

Le premier produit égale

$$\left[(x+1)t+1\right]^n\left[1+(x-1)t\right]^n = \left[(x^2-1)t^2+2xt+1\right]^n;$$

et le second :

$$\left[(x+1)t+(x-1)\right]^n(1+t)^n = \left[(x+1)t^2+2xt+(x-1)\right]^n.$$

Si l'on se rappelle la formule

$$(a+b+c)^n = \sum \frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma}a^\alpha b^\beta c^\gamma, \qquad (\alpha+\beta+\gamma=n)$$

on trouve, comme terme général de chacun des deux développements,

$$\frac{1.2.3\ldots n}{(1.2\ldots\lambda)^2 1.2.3\ldots\overline{n-2\lambda}}(x^2-1)^\lambda(2x)^{n-2\lambda}.$$

En conséquence,

$$2^n X_n = \sum_0 \frac{1.2.3\ldots n}{(1.2\ldots\lambda)^2 1.2.3\ldots\overline{n-2\lambda}}(x^2-1)^\lambda(2x)^{n-2\lambda}. \quad \ldots\ldots \quad (111)$$

Pour les applications numériques, cette nouvelle formule est préférable à la première.

84. *Exemples.* — I. $x=\frac{1}{2}$:

$$2^n X_n = 1 - \frac{1.2.3\ldots n}{1.1.1.2.3\ldots\overline{n-2}}\frac{3}{4} + \frac{1.2.3.\ldots n}{1.2.1.2.1.2.3\ldots\overline{n-4}}\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \cdots,$$

ou

$$4^n X_n = 2^n - \frac{1.2.3\ldots n}{1.1.1.2.3\ldots\overline{n-2}}2^{n-2}3 + \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.1.2.1.2.3\ldots\overline{n-4}}2^{n-4}3^2 - \cdots \qquad (112)$$

II. $x = 3$:

$$2^n X_n = 6^n + \frac{1.2.3\ldots n}{1.1.1.2.3\ldots\overline{n-2}} 6^{n-2}8 + \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.1.2.1.2.3\ldots\overline{n-4}} 6^{n-4}8^2 + \cdots,$$

ou, plus simplement,

$$X_n = 3^n + \frac{1.2.3\ldots n}{1.1.1.2.3\ldots\overline{n-2}} 3^{n-2}2 + \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.1.2.1.2.3\ldots\overline{n-4}} 3^{n-4}2^2 + \cdots \quad . \quad (113)$$

III. $x = \sqrt{-\frac{1}{3}}$. Cette valeur, déterminée par la condition $\sqrt{x^2-1} = 2x$, donne

$$X_n = \left(\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)^n \sum \frac{1.2.3\ldots n}{(1.2\ldots\lambda)^2 1.2\ldots\overline{n-2\lambda}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (114)$$

85. *Vérifications.* 1° Soit $n = 5$. Par la formule (112) :

$$4^5 X_5 = 2^5 - 20.2^3.3 + 30.2.3^2 = 92.$$

Or, la formule (26), du premier Mémoire, donne

$$4^5 X_5 = 3^5 - 25\, 3^4 + 100.3^3 - 100.3^2 + 25.3 - 1 = 343 - 2025 + 2700 - 900 + 75 - 1 = 92.$$

2° De la formule (114), on tire

$$X_5 = \frac{1}{9}\sqrt{-\frac{1}{3}}[1 + 20 + 30] = \frac{17}{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}.$$

D'un autre côté :

$$X_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

donc, pour $x = \sqrt{-\frac{1}{3}}$:

$$X_5 = \frac{1}{8}\sqrt{-\frac{1}{3}}\left[\frac{21}{3} + \frac{70}{3} + 15\right] = \frac{17}{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}.$$

86. *Remarques.* — I. On a, *identiquement*,

$$\left.\begin{aligned}&3^n - \left[\frac{n}{1}\right]^2 3^{n-1} + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 3^{n-2} - \dots \pm \left[\frac{n}{1}\right]^2 3 \mp 1\\ &= 2^n - \frac{1.2.3\dots n}{1.1.1.2\dots \overline{n-2}} 2^{n-2}3 + \frac{1.2.3\dots n}{1.2.1.2.1.2.3\dots\dots \overline{n-4}} 2^{n-4}3^2\\ &\quad - \frac{1.2.3\dots n}{1.2.3.1.2.3.1.2\dots n-6} 2^{n-6}3^2 + \dots\dots\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (115)$$

II. Comme on vient de le voir (85, 1°), la formule (112) est plus commode que la formule (26) du premier Mémoire.

III. Lorsque $x = \frac{1}{2}$, la relation

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0$$

devient, si l'on y fait $X_n = \frac{B_n}{4^n}$:

$$(n+1)B_{n+1} - 2(2n+1)B_n + 16nB_{n-1} = 0. \quad \dots\dots\dots (116)$$

Les valeurs initiales étant $B_0 = 1$, $B_1 = 2$, on trouve

$$B_2 = -2,\quad B_3 = -28,\quad B_4 = -74,\quad B_5 = 92,\quad B_6 = 1\,324,\quad B_7 = 3\,656,$$
$$B_8 = -4\,826,\quad \dots\dots$$

Toutes ces valeurs sont entières, attendu que

$$B_n = 3^n - \left[\frac{n}{1}\right]^2 3^{n-1} + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 3^{n-2} - \dots \pm \left[\frac{n}{1}\right]^2 3 \mp 1.$$

87. *Autre développement de* X_n. Nous avons trouvé, ci-dessus (75), les formules

$$\cos n\alpha = X_0(X_n - xX_{n-1}) + X_1(X_{n-1} - xX_{n-2}) + \dots + X_{n-1}(X_1 - xX_0) + X_n,$$

$$\cos n\alpha = (x^2-1)\left[\frac{1}{n}\frac{dX_{n-1}}{dx} + \frac{1}{n-1}X_1\frac{dX_{n-2}}{dx} + \dots + \frac{1}{2}X_{n-2}\right] + X_n,$$

et d'autres semblables. Ainsi, $\cos n\alpha$ *est développable suivant les fonctions* X_n, X_{n-1}, ..., X_1, X_0. Réciproquement, *la fonction* X_n *est développable suivant les cosinus des multiples de* α. En effet, la formule

$$4^n X_n = C_{2n,n}.\cos n\alpha + C_{2n-2,n-1}.C_{2,1}\cos(n-2)\alpha + C_{2n-4,n-2}.C_{4,2}\cos(n-4)\alpha + \cdots + C_{2n,n}\cos n\alpha \text{ (*)}$$

peut être écrite sous la forme abrégée

$$X_n = G_n \cos n\alpha + G_{n-2}\cos(n-2)\alpha + G_{n-4}\cos(n-4)\alpha + \cdots; \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

le dernier terme étant G_0 ou $G_1 \cos\alpha$, suivant que n est *pair* ou *impair*.

88. *Expression des coefficients*. Il est visible que :

$$\left.\begin{array}{l} G_n = \dfrac{2}{4^n} C_{2n,n} = \dfrac{1}{2^{2n-1}} \dfrac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}, \\ G_{n-2} = \dfrac{1}{2^{2n-1}} C_{2n-2,n-1}.C_{2,1} = \dfrac{1}{2^{2n-1}} \dfrac{(2n-2)(2n-3)\ldots n}{1.2\ldots(n-1)} \dfrac{2}{1}, \\ G_{n-4} = \dfrac{1}{2^{2n-1}} C_{2n-4,n-2}.C_{4,2} = \dfrac{1}{2^{2n-1}} \dfrac{(2n-4)(2n-5)\ldots(n-1)}{1.2\ldots(n-2)} \dfrac{4.3}{1.2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad . \quad (118)$$

Si n est *pair*, le second membre de l'égalité ci-dessus a un *terme du milieu*, égal à $C_{n,\frac{n}{2}}.C_{n,\frac{n}{2}}$; donc

$$G_0 = \frac{1}{4^n}\left[C_{n,\frac{n}{2}}\right]^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

Si n est *impair*, il y a *deux termes du milieu*, égaux entre eux, et dont la valeur commune est

$$C_{n+1,\frac{n+1}{2}}.C_{n-1,\frac{n-1}{2}}\cos\alpha.$$

Conséquemment,

$$G_1 = \frac{1}{2^{2n-1}} C_{n+1,\frac{n+1}{2}}.C_{n-1,\frac{n-1}{2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

(*) *M.*, p. 15.

89. *Remarque.* D'après les valeurs précédentes, et la condition $X_n = 1$ pour $\alpha = 0$:

1° *Chacun des coefficients* G_n, G_{n-2}, G_{n-4}, ..., *est une fraction proprement dite ;*

2° *La somme de ces fractions égale l'unité.*

90. *Intégrales définies.* Si, dans l'égalité (117), les coefficients étaient inconnus, on les déterminerait par les formules

$$G_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi X_n \cos n\alpha d\alpha, \quad G_{n-2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi X_n \cos \overline{n-2}\,\alpha d\alpha, \quad G_{n-4} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi X_n \cos \overline{n-4}\,\alpha d\alpha, \ \ldots$$

ou plutôt par celles-ci :

$$G_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{\sqrt{1-x^2}} \cos n\alpha, \quad G_{n-2} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{\sqrt{1-x^2}} \cos \overline{n-2}\,\alpha,$$

$$G_{n-4} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{\sqrt{1-x^2}} \cos \overline{n-4}\,\alpha, \quad \ldots \text{(*)}.$$

91. Remarque. *Si* n *est pair :*

$$G_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ou

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4^n}\left[C_{n,\frac{n}{2}}\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (121)$$

Cette formule ne diffère, qu'en apparence, de celle de M. Bauer, dont nous avons déjà parlé (57) (**).

(*) $x = \cos\alpha$ donne

$$dx = -\sin\alpha d\alpha,$$

ou

$$d\alpha = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(**) Si l'on change n en $2n$, on a, en effet :

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2\ldots n} = 4^n \cdot \frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots 2n} = \frac{2.6.10\ldots\overline{4n-2}}{1.2.3\ldots n}.$$

92. *Suite.* Supposons *n impair,* et représentons par Θ_n ce que devient X_n quand on y remplace x par $\cos\theta$. Nous aurons

$$G_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Theta_n \cos n\theta d\theta,\quad G_{n-2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Theta_n \cos(n-2)\theta d\theta,\ \ldots,\quad G_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Theta_n \cos\theta d\theta;$$

puis, au lieu de la formule (117) :

$$X_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Theta_n d\theta \left[\cos n\alpha \cos n\theta + \cos \overline{n-2}\,\alpha \cos \overline{n-2}\,\theta + \cdots + \cos\alpha\cos\theta\right].$$

Par des relations connues :

$$\cos n\alpha \cos n\theta + \cos \overline{n-2}\,\alpha \cos \overline{n-2}\,\theta + \cdots + \cos\alpha\cos\theta$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(n+1)(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)} + \frac{\sin(n+1)(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}\right].$$

Nous avons donc ce théorème curieux, mais peu *pratique :*

$$X_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \Theta_n \left[\frac{\sin(n+1)(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)} + \frac{\sin(n+1)(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}\right] d\theta \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

VII. — Sur une autre fonction.

93. Soit

$$V_n = \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

D'après les valeurs de X_0, X_1, X_2, ... :

$$\left.\begin{array}{l} V_0 = 1,\quad V_1 = 3x+1,\quad V_2 = \frac{3}{2}(5x^2+2x-1),\quad V_3 = \frac{1}{2}(35x^3+15x^2-15x-3), \\ \qquad V_4 = \frac{1}{8}(315x^4+140x^3-210x^2-60x+15),\ \ldots \end{array}\right\} \quad (124)$$

Divisant chacun de ces polynômes par celui qui le précède, on trouve :

$$V_1 = (3x + 1)V_0,\quad V_2 = \frac{1}{2}\left(5x + \frac{1}{3}\right)V_1 - \frac{5}{3}V_0,\quad V_3 = \frac{1}{3}\left(7x + \frac{1}{5}\right)V_2 - \frac{7}{5}V_1,$$

$$V_4 = \frac{1}{4}\left(9x + \frac{1}{7}\right)V_3 - \frac{9}{7}V_2,\quad \ldots$$

Nous sommes donc conduit à la proposition suivante :

94. Théorème. *On a, entre trois fonctions consécutives, la relation*

$$V_n = \frac{1}{n}\left[(2n+1)x + \frac{1}{2n-1}\right]V_{n-1} - \frac{2n+1}{2n-1}V_{n-2} \quad \ldots\ldots \quad (Q)$$

Pour la vérifier, j'observe, d'abord, que

$$V_n = (n+1)\frac{X_n - X_{n+1}}{1-x}\ (^*).$$

Par conséquent, l'égalité (Q) devient

$$(2n-1)(n+1)(X_n - X_{n+1})$$
$$= \left[(2n+1)(2n-1)x + 1\right](X_{n-1} - X_n) - (2n+1)(n-1)(X_{n-2} - X_{n-1});$$

ou, par un convenable groupement des termes,

$$(2n-1)\left[(n+1)X_{n+1} - (\overline{2n+1}\,x - n)X_{n-1}\right] = (2n+1)\left[(\overline{2n-1}\,x - n)X_n - (n-1)X_{n-2}\right].$$

Or :

$$(n+1)X_{n+1} + nX_{n-1} = (2n+1)xX_n,\quad nX_n + (n-1)X_{n-2} = (2n-1)xX_{n-1}.$$

Donc

$$(2n-1)\left[(2n+1)xX_n - (2n+1)xX_{n-1}\right] = (2n+1)\left[(2n-1)xX_n - (2n-1)xX_{n-1}\right];$$

ce qui est identique.

(*) *M.*, p. 5

95. *Remarques.* — I. D'après l'équation (Q), si l'on divise V_n par V_{n-1}, le reste de la division (abstraction faite d'un facteur positif) est $-V_{n-2}$. De même, en divisant V_{n-1} par V_{n-2}, on obtient, comme reste, $-V_{n-3}$; et ainsi de suite. D'ailleurs $V_0 = 1$. Conséquemment, *deux polynômes consécutifs sont premiers entre eux.*

II. On peut appliquer, aux polynômes $V_n, V_{n-1}, \ldots, V_1, V_0$, le théorème de Sturm.

III. La relation (40)

$$1 + 3X_1 + 5X_2 + \cdots + (2n+1)X_n = \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx}$$

donne

$$V_n = \sum_0^n (2p+1)X_p \quad \ldots \ldots \ldots \quad (125)$$

IV. En conséquence :
pour $x = -1$,

$$V_n = \pm(n+1)\ (^*);$$

pour $x = +1$,

$$V_n = (n+1)^2.$$

V. *Les quantités*

$$V_0,\quad V_1,\quad V_2,\quad \ldots,\quad V_{n-1},\quad V_n$$

produisent ces deux suites de signes :

$$\begin{array}{llll} x = -1, & + - + & \pm \mp \\ x = +1, & + + + & + +. \end{array}$$

VI. *L'équation* $V_n = 0$ *a* n *racines réelles, inégales, comprises entre* -1 *et* $+1$ (**).

(*) *M.*, p. 39.
(**) Voir, dans le premier Mémoire, la discussion de $X_n = 0$.

96. *Une intégration.* Quand $x = 1$, l'équation (Q) se réduit à

$$(2n - 1)V_n - 4nV_{n-1} + (2n + 1)V_{n-2} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (126)$$

Celle-ci admet, comme *intégrale particulière*, $V_n = (n + 1)^2$. Pour former l'intégrale générale, il suffit d'observer que

$$\frac{V_n - V_{n-1}}{2n + 1} = \frac{V_{n-1} - V_{n-2}}{2n - 1} = \frac{V_{n-2} - V_{n-3}}{2n - 3} = \cdots = const.$$

On trouve ainsi

$$V_n = a(n + 1)^2 + b.$$

97. *Remarque.* La relation

$$(n + 1)X_{n+1} - (2n + 1)xX_n + nX_{n-1} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (127)$$

devient, si $x = 1$:

$$(n + 1)(X_{n+1} - X_n) = n(X_n - X_{n-1}) = const.$$

L'intégrale générale de celle-ci est

$$X_n = a'\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + b'.$$

Donc, au moins dans le cas de $x = 1$, l'intégrale générale de l'équation (127) est plus compliquée que celle de l'équation (Q) (*).

98. *Fonction génératrice de* V_n. Soit l'égalité connue :

$$\frac{1}{(1 - 2zx + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dX_1}{dx} + \frac{dX_2}{dx}z + \cdots + \frac{dX_n}{dx}z^{n-1} + \cdots$$

(*) Dans son *Mémoire sur les fonctions* X_n, M. H. Laurent a donné l'intégrale générale de l'équation (127). *Journal de Resal*, t. I.

Si l'on multiplie par $1+z$, elle devient (123)

$$\frac{1+z}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}} = V_0 + V_1 z + \cdots + V_n z^n + \cdots \quad (128)$$

La fonction demandée est donc $\frac{1+z}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

99. *Expressions de* V_n. Elles résultent de la *définition* (123), combinée avec les expressions de X_n. Prenons, par exemple, la formule de Rodrigues :

$$X_n = \frac{1}{2^n.1.2.3\ldots n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Elle donne

$$V_n = \frac{1}{2^{n+1}.1.2.3\ldots n(n+1)}\left[2(n+1\ \frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}} + \frac{d^{n+2}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+2}}\right].$$

La quantité entre parenthèses est la même chose que

$$2(n+1)\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}} + \frac{d^{n+1}[2(n+1)x(x^2-1)^n]}{dx^{n+1}} = 2(n+1)\frac{d^{n+1}[(x^2-1)^n(x+1)]}{dx^{n+1}}.$$

Conséquemment,

$$V_n = \frac{1}{2^n.1.2.3\ldots n}\frac{d^{n+1}[(x^2-1)^n(x+1)]}{dx^{n+1}} \quad (129)$$

100. *Application.* On doit avoir

$$V_3 = \frac{1}{8.6}\frac{d^4[(x^2-1)^3(x+1)]}{dx^4}.$$

Or,

$$(x^2-1)^3(x+1) = x^7 + x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 1.$$

La dérivée *quatrième* est

$$7.6.5.4x^3 + 6.5.4.3x^2 - 3.5.4.3.2x - 3.4.3.2.1,$$

ou

$$24(35x^3 + 15x^2 - 15x - 3).$$

Donc

$$V_3 = \frac{1}{2}(35x^3 + 15x^2 - 15x - 3);$$

comme ci-dessus.

101. Théorème.

$$\int_{-1}^{+1} V_n dx = 2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (130)$$

En effet, le premier membre égale $[X_n + X_{n+1}]_{-1}^{+1}$.

102. Théorème.

$$\int_{-1}^{+1} V_n^2 dx = 2(n+1)^2. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (131)$$

On a

$$\int_{-1}^{+1} V_n^2 dx = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx}\right)(dX_n + dX_{n+1})$$

$$= \left[(X_n + X_{n+1})\left(\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx}\right)\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} (X_n + X_{n+1})\left(\frac{d^2X_n}{dx^2} + \frac{d^2X_{n+1}}{dx}\right) dx.$$

Pour $x = +1$, le terme intégré égale $2V_n = 2(n+1)^2$ (95, IV); pour $x = -1$, ce terme est nul. En outre, d'après le théorème de Jacobi, la seconde intégrale est nulle. La proposition est donc vérifiée.

103. Théorème.

$$\int_{-1}^{+1} V_n V_{n'} dx = 2(n'+1)^2. \qquad (n' \overline{\overline{<}}\, n). \quad \ldots \ldots \quad (132)$$

Cette propriété se démontre comme la précédente.

104. *Application.* Soient $n = 4$, $n' = 2$; et, par conséquent,

$$V_4 V_2 = \frac{3}{16}(315x^4 + 140x^3 - 210x^2 - 60x + 15)(5x^2 + 2x - 1).$$

Si l'on néglige les termes de degré *impair*, qui donneraient des intégrales nulles, on peut écrire

$$V_4 V_2 = \frac{15}{16}(315x^6 - 217x^4 + 35x^2 - 3).$$

Donc

$$\int_{-1}^{+1} V_1 V_2 dx = \frac{15}{8}\left(45 - \frac{217}{5} + 11 - 3\right) = \frac{3}{8}(265 - 217) = 18 = 2.3^2.$$

105. *Remarque.* D'après les deux derniers théorèmes,

$$\int_{-1}^{+1} (V_n - V_{n'}) V_{n'} dx = 0. \qquad (n' \gtreqless n). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

106. Théorème.

$$\int_{-1}^{+1} V_n x^p dx = 2\ (^*). \qquad (p \gtreqless n). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

D'après la définition (123), le premier membre égale

$$\int_{-1}^{+1} x^p d(X_n + X_{n+1}) = \left[x^p (X_n + X_{n+1})\right]_{-1}^{+1} - p \int_{-1}^{+1} (X_n + X_{n+1}) x^{p-1} dx.$$

Le terme intégré se réduit à 2; la nouvelle intégrale est nulle; donc, etc.

107. Théorème. *Si* f(x) *est un polynôme entier, dont le degré ne surpasse pas* n, *on a*

$$\int_{-1}^{+1} V_n f(x) dx = 2f(1)\ (^{**}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (R)$$

Soit

$$f(x) = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \cdots + A_p.$$

D'après la proposition précédente,

$$\int_{-1}^{+1} V_n f(x) dx = 2(A_0 + A_1 + \cdots + A_p) = 2f(1).$$

(*) Un cas particulier de cette formule a été donné par M. H. Laurent (*Journal de Resal*, t. I, p. 385). La fonction $\Phi(x,z)$, de M. L. (ou de M. Heine), se réduit, pour $z = 1$, à notre fonction V_n.

(**) Ce théorème, qui comprend ceux qu'on vient de voir, nous semble remarquable. Du reste, il devient *évident* si l'on remplace V_n par $\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx}$, et que l'on intègre par parties.

108. Corollaires. — I. *Si* f(x) *est un polynôme entier, du degré* n :

$$\int_{-1}^{+1} (V_n z^n + V_{n+1} z^{n+1} + \cdots) f(x)\,dx = 2\frac{z^n}{1-z} f(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

II.

$$\int_{-1}^{+1} \left[\frac{1+z}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}} - V_0 - V_1 z - \cdots - V_{n-1} z^{n-1}\right] f(x)\,dx = 2\frac{z^n}{1-z} f(1) \quad (136)$$

Le premier corollaire résulte, tout de suite, du théorème. Pour démontrer le second, il suffit de se rappeler que

$$\frac{1+z}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_0^{\infty} V_p z^p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

109. *Remarques.* — I. La formule (136) détermine, fort simplement, l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

II. Si $f(x)$ se réduit à une constante, l'égalité (135) devient, en vertu de la relation (128),

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1-z^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (137)$$

110. *Liaison avec une autre théorie.* De la formule

$$\int_{-1}^{+1} V_n^2 dx = 2(n+1)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

on conclut

$$\int_{-1}^{+1} dx \sum_0^{\infty} V_n^2 z^n = 2\sum_0^{\infty} (n+1)^2 z^n,$$

pourvu que les deux séries soient convergentes.

La seconde somme a pour valeur $\frac{1+z}{(1-z)^3}$ (*). Par conséquent,

$$\int_{-1}^{+1} dx \sum_0^\infty V_n^2 z^n = 2\frac{1+z}{(1-z)^3} \quad \text{. . . . . (158)}$$

Voilà donc un rapprochement, assez inattendu, entre deux questions bien différentes. Ce n'est pas tout : la fraction $\frac{1+z}{(1-z)^3}$ égale

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(\sin\varphi)\sin 2\varphi d\varphi}{e^{-\cos\varphi} - 2z\cos(\sin\varphi) + z^2 e^{\cos\varphi}} \text{ (**)}.$$

Donc

$$\int_{-1}^{+1} dx \sum_0^\infty V_n^2 z^n = \frac{4}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(\sin\varphi)\sin 2\varphi d\varphi}{e^{-\cos\varphi} - 2z\cos(\sin\varphi) + z^2 e^{\cos\varphi}} \quad \text{. . . . (159)}$$

111. *Remarques.* — I. La formule (132) est en défaut si $z = -1$, bien que le second membre s'annule pour cette valeur extrême de z. En effet, la série

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$$

est divergente.

II. Cette même formule peut en donner d'autres qui exigent, comme celle-ci, une attention sérieuse. Par exemple, multiplions les deux membres par dz, et intégrons entre -1 et 0. Nous trouvons

$$\int_{-1}^{+1} dx \sum_0^\infty (-1)^n \frac{V_n^2}{n+1} = \frac{1}{2} \text{ (***)}.$$

Or, ce résultat est *absurde*, pour la raison indiquée à l'instant. Si, effecti-

(*) *Mémoire sur une suite de polynômes entiers*, p. 1.

(**) *Ibid.*, p. 17.

(***) $$\int_{-1}^{0} \frac{1+z}{(1-z)^3} dz = \int_1^2 \frac{(2-u)du}{u^3} = \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right]_1^2 = \frac{1}{4}; \text{ etc.}$$

vement, on remonte à l'égalité (131), on trouve

$$\int_{-1}^{+1}\left[V_0^2-\frac{1}{2}V_1^2+\frac{1}{3}V_2^2-\cdots\pm\frac{1}{n+1}V_n^2\right]dx=2(1-2+3-\cdots\pm\overline{n+1}).$$

112. *Une intégrale définie.* Dans la formule

$$\int_{-1}^{+1}\left[\frac{1+z}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}-V_0-V_1z-\cdots-V_{n-1}z^{n-1}\right]f(x)\,dx=2\,\frac{z^n}{1-z}f(1),\quad(136)$$

supposons $f(x)=V_n$. Nous avons

$$(1+z)\int_{-1}^{+1}\frac{V_n dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{p=0}^{p=n-1}z^p\int_{-1}^{+1}V_nV_pdx+2(n+1)^2\frac{z^n}{1-z}.$$

La première somme est (132)

$$2[1+2^2.z+3^2z^2+\cdots n^2z^{n-1}],$$

ou

$$2\,\frac{1+z-(n+1)^2z^n+(2n^2+2n-1)z^{n+1}-n^2z^{n+2}}{(1-z)^3}\ (^*).$$

Le second membre de l'équation précédente égale donc

$$2\left[\frac{1+z-(n+1)^2z^n+(2n^2+2n-1)z^{n+1}-n^2z^{n+2}}{(1-z)^3}+(n+1)^2\frac{z^n}{1-z}\right],$$

ou

$$\frac{2}{(1-z)^3}[1+z-(2n+3)z^{n+1}+(2n+1)z^{n+2}].$$

Par suite,

$$\int_{-1}^{+1}\frac{V_n dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{(1+z)(1-z)^3}[1+z-(2n+3)z^{n+1}+(2n+1)z^{n+2}].\quad(140)$$

(*) Valeur connue, aisée à vérifier.

113. *Remarque.* Le second membre, infini pour $z = \pm 1$, se réduit à 2 lorsque $z = 0$; ce qui devait être (130).

114. *Autre intégrale.* Nous la déduirons de la formule

$$\int_{-1}^{+1} X_n \log.(1+x)dx = (-1)^{n-1}\frac{2}{n(n+1)} \text{ (*)},$$

laquelle suppose $n > 0$.

Pour $n = 0$, le premier membre devient

$$\int_{-1}^{+1} \log.(1+x)\,dx = 2(\log.2 - 1) \text{ (**)}.$$

Ainsi :

$$\int_{-1}^{+1} X_0 \log.(1+x)dx = 2(\log.2 - 1), \quad \int_{-1}^{+1} X_1 \log.(1+x)dx = \frac{2}{1.2},$$

$$\int_{-1}^{+1} X_2 \log.(1+x)dx = -\frac{2}{2.3}, \quad \ldots$$

Si l'on multiplie par 1, 3, 5, ..., et que l'on fasse la somme, on a (95, II),

$$\int_{-1}^{+1} V_n \log.(1+x)dx = 2\log.2 - 2\left[1 - \frac{3}{1.2} + \frac{5}{2.3} - \cdots + (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}\right].$$

La fraction

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1};$$

donc la quantité entre parenthèses se transforme en

$$1 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

Conséquemment

$$\int_{-1}^{+1} V_n \log.(1+x)\,dx = 2\left[\log.2 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}\right] \quad \ldots\ldots \quad (141)$$

(*) *M.*, p. 58.
(**) Vérification facile.

115. *Remarques.* — I. Si n augmente indéfiniment,

$$lim. \int_{-1}^{+1} V_n \log(1+x)dx = 2\log.2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

II.

$$\int_{-1}^{+1} (V_n - V_0)\log.(1+x)dx = 2\left[(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}+1\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

Par exemple,

$$\int_{-1}^{+1} (V_3 - V_0)\log.(1+x)dx = \frac{5}{2}.$$

III. De même,

$$\int_{-1}^{+1} (V_{n+1} - V_n)\log.(1+x)dx = (-1)^n \frac{2(2n+3)}{(n+1)(n+2)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (144)$$

116. *Autre intégrale.* La formule (141) donne encore

$$\int_{-1}^{+1} \log.(1+x)dx \sum_0^\infty V_n z^n = \frac{2\log.2}{1-z} - 2\left[1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \cdots\right].$$

La première somme égale $\frac{1+z}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}$; la série est le développement de $\log.(1+z)$; donc

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\log.(1+x)\,dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1-z^2}[\log.2 - (1-z)\log(1+z)]. \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

En particulier,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\log.(1+x)dx}{(5+x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{10}{3}\sqrt{2}\log.2.$$

Il est clair que l'on pourrait, indéfiniment, multiplier ces applications.

VIII. — Fonctions circulaires ou elliptiques.

117. *Développement de* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Si, dans l'équation de définition :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = \sum_0^\infty X_n z^n,$$

on suppose $z = x$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_0^\infty X_n x^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (146)$$

Ainsi, la quantité $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en une série dans laquelle *le coefficient de* x^n *est* X_n.

118. *Remarque.* Si l'on remplace le premier membre par

$$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots,$$

l'équation devient *identique;* en ce sens que les coefficients des mêmes puissances de x, dans les deux membres, doivent être égaux entre eux (*). Par exemple, le coefficient de x^6, dans

$$X_1 x + X_2 x^2 + X_3 x^3 + X_4 x^4 + X_5 x^5 + X_6 x^6,$$

égale $\frac{5}{16}$. En effet, ce coefficient se compose de

$$\frac{5}{2} - \frac{30}{8} + \frac{15}{8} - \frac{5}{16} = \frac{40-30-5}{16}.$$

119. *Autre développement.* De

$$\frac{z}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = \sum_0^\infty X_n z^{n+1},$$

on conclut, en prenant les dérivées,

$$\frac{1-zx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_0^\infty (n+1) X_n z^n; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

(*) Voir ci-dessus (**65**).

puis, en supposant $z = x$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_0^\infty (n+1) X_n x^n. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (148)$$

120. *Remarques.* — I. Les deux sommes

$$\sum_0^\infty X_n x^n, \quad \sum_0^\infty (n+1) X_n x^n,$$

sont *identiques*. Ainsi, le coefficient de x^6, égal à

$$\frac{5}{2} - \frac{30}{8} + \frac{15}{8} - \frac{5}{16},$$

est égal, aussi, à

$$4 . \frac{5}{2} - 5 . \frac{30}{8} + 6 . \frac{15}{8} - 7 . \frac{5}{16}.$$

En effet, cette seconde quantité se réduit à $\frac{5}{16}$.

II. Les formules (147), (148) donnent, par soustraction, *l'identité*

$$\sum_0^\infty n X_n x^n = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (149)$$

assez curieuse.

III. Pour la vérifier, remplaçons X_n par

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{-1} \sqrt{1-x^2} \cos \omega)^n d\omega.$$

Nous devons trouver

$$\sum_1^\infty \int_0^\pi n (x^2 + x \sqrt{-1} \sqrt{1-x^2} \cos \omega)^n d\omega = 0,$$

ou

$$\int_0^\pi d\omega \sum_1^\infty n (x^2 + x \sqrt{-1} \sqrt{1-x^2} \cos \omega)^n = 0.$$

La nouvelle somme est

$$\frac{x^2 + x\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\cos\omega}{(1 - x^2 - x\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\cos\omega)^2} = \frac{x}{1-x^2}\,\frac{x + \sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\cos\omega}{(\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{-1}\cos\omega)^2}.$$

Ainsi, x étant compris entre 0 et 1, l'égalité précédente devient

$$\int_0^\pi \frac{x + \sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\cos\omega}{(\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{-1}\cos\omega)^2}\,d\omega = 0;$$

ou, sous forme abrégée :

$$\int_0^\pi \frac{A + B\sqrt{-1}\cos\omega}{(B - A\sqrt{-1}\cos\omega)^2}\,d\omega = 0;$$

ce qui est exact (17).

IV. Nous avons trouvé

$$X_n = \frac{1}{2^n}\sum(-1)^{\frac{n-q}{2}}\varphi(n,q)x^q. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (106)$$

Au moyen de cette expression, on déduit, de l'identité (149) :

$$n\varphi(n,0) - 2(n-1)\varphi(n-1,1) + 2^2(n-2)\varphi(n-2,2) - \cdots$$
$$\pm 2^{\frac{n}{2}}\frac{n}{2}\varphi\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right) = 0\ (*) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

121. *Un développement de $\frac{\pi}{2}$.* La formule (146) donne

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_0^\infty \int_{-1}^{+1} X_n x^n dx;$$

ou (55)

$$\pi = 2\sum_0^\infty \frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5.7\ldots\overline{2n+1}}.$$

(*) Dans celle-ci, n est *pair*.

Donc

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \cdots \text{ (*)} \qquad (151)$$

122. *Intégrale elliptique.* De

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = \sum_0^\infty X_n z^n,$$

on conclut

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-2zx+z^2}} = \sum_0^\infty z^{2n} \int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ (**)} \qquad (152)$$

Le premier membre se transforme, aisément, en intégrale elliptique. A cet effet, posons $x = -\cos 2\theta$; d'où

$$dx = 2\sin 2\theta d\theta, \quad 1 - 2zx + z^2 = (1+z)^2 - 4z\sin^2\theta, \quad \text{etc.};$$

puis

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-2zx+z^2)}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1+z)^2 - 4z\sin^2\theta}} = \frac{2}{1+z}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}},$$

en supposant $c^2 = \frac{4z}{(1+z)^2}$. Ainsi déjà, l'égalité (152) devient

$$\frac{2}{1+z}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}} = \sum_0^\infty z^{2n} \int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (153)$$

Il semble nécessaire, pour aller plus loin, de développer $\left[1 - \frac{4z\sin^2\theta}{(1+z)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$.

(*) Très probablement, cette expression n'est pas nouvelle : on ne compte plus les développements de π et de $\frac{1}{\pi}$. Dans les *Mélanges mathématiques*, j'ai indiqué le moyen d'en former *des infinités.*

(**) L'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

est nulle.

Mais, par un hasard heureux, ce calcul prolixe est inutile. En effet, *l'échelle de Lagrange* donne, immédiatement (*),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}} = (1+z)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-z^2\sin^2\theta}}.$$

Nous avons donc ce résultat remarquable :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-z^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{2}\sum_0^{\infty} z^{2n}\int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \text{(S)}$$

123. *Suite.* Le développement du premier membre étant (1)

$$\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 z^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 z^4+\cdots+\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 z^{2n}+\cdots\right],$$

il s'ensuit que

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2, \quad (154)$$

formule due à M. Bauer, et qu'il a trouvée par une méthode complètement différente de la nôtre (57).

124. *Développement de* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Supposons

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_0^{\infty} C_{2n}X_{2n}. \quad (155)$$

Le procédé habituel donne

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n}}{\sqrt{1-x^2}}dx = C_{2n}\int_{-1}^{+1} X_{2n}^2 dx = C_{2n}\,\frac{2}{4n+1},$$

(*) Legendre, t. I, p. 80.

ou

$$C_{2n} = \frac{4n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

c'est-à-dire,

$$C_{2n} = \frac{\pi}{2}(4n+1)\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \ldots\ldots\ldots \quad (156)$$

Ainsi,

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_0^\infty (4n+1)\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 X_{2n}; \ldots\ldots \quad (157)$$

et, si $x = 0$:

$$\frac{2}{\pi} = 1 - 5.\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 - 13\left(\frac{1.3.5}{2.4\,6}\right)^3 + \cdots$$

Ce développement, très remarquable, est dû aussi à M. Bauer (*).

125. *Développement de* arc sin x. L'égalité (155) donne, tout de suite,

$$\text{arc} \sin x = \sum_0^\infty B_{2n} \int_0^x X_{2n} dx.$$

Pour simplifier le second membre, j'emploie la relation

$$(4n+1)X_{2n} = \frac{dX_{2n+1}}{dx} - \frac{dX_{2n-1}}{dx} \text{ (**)}.$$

Il en résulte

$$\int_0^x X_{2n} dx = \frac{1}{4n+1}[X_{2n+1} - X_{2n-1}];$$

car les fonctions X_{2n+1}, X_{2n-1} s'annulent avec x.

(*) *Journal de Crelle*, t. LVI. Je n'en connais pas qui soit plus convergent.
(**) *M.*, p. 6.

On a donc cette formule, que nous croyons nouvelle :

$$\arc\sin x = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty \left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 (X_{2n+1} - X_{2n-1}) \text{ (*)}. \quad \ldots\ldots \quad \text{(T)}$$

126. *Remarques.* — I. Le second membre peut être écrit sous cette forme :

$$\frac{\pi}{2}\left[X_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (X_3 - X_1) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 (X_5 - X_3) + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \cdots\right],$$

puis encore sous celle-ci :

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{3}{2^2}X_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{7}{4^2}X_3 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{11}{6^2}X_5 + \left(\frac{1.5.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{15}{8^2}X_7 + \cdots\right].$$

En conséquence, la formule (T) devient

$$\arc\sin x = \frac{\pi}{2}\left[\frac{3}{2^2}X_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{7}{4^2}X_3 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{11}{6^2}X_5 + \cdots\right] \quad \ldots\ldots \quad (158)$$

II. Lorsque $x = 1$, cette égalité se réduit à

$$1 = \frac{3}{2^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{7}{4^2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{11}{6^2} + \left(\frac{1.5.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{15}{8^2} + \cdots \quad \ldots\ldots \quad (159)$$

III. Si l'on transpose $\frac{3}{2^2}$, et que l'on supprime un facteur commun, on trouve

$$1 = \frac{7}{4^2} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \frac{11}{6^2} + \left(\frac{3.5}{4.6}\right)^2 \frac{15}{8^2} + \cdots;$$

puis, de la même manière :

$$1 = \frac{11}{6^2} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{15}{8^2} + \left(\frac{5.7}{6.8}\right)^2 \frac{19}{10^2} + \cdots,$$

$$1 = \frac{15}{8^2} + \left(\frac{7}{8}\right)^2 \frac{19}{10^2} + \left(\frac{7.8}{8.10}\right)^2 \frac{23}{12^2} + \cdots,$$

. . . .

(*) Pour l'appliquer, on doit supposer $X_{-1} = 0$.

127. *Intégrales elliptiques.* — *Suite.* De la formule

$$\sqrt{1-2zx+z^2} = 1 - zx + \sum_0^\infty (X_n - xX_{n+1}) \frac{z^{n+2}}{n+2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

il résulte

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-2zx+z^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1-zx}{\sqrt{1-x^2}} dx + \sum_0^\infty \frac{z^{n+2}}{n+2} \int_{-1}^{+1} \frac{X_n - xX_{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

La première partie du second membre égale π. De plus, si n est *impair*,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_n - xX_{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0;$$

et, si n est *pair*, cette intégrale égale

$$2\int_0^1 \frac{X_n - xX_{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Remplaçant n par $2n$, nous avons donc, au lieu du second membre,

$$\pi + \sum_0^\infty \frac{z^{2n+2}}{n+1} \int_0^1 \frac{X_{2n} - xX_{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Si, dans le premier membre, on fait $x = -\cos 2\theta$, il devient

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1+z^2+2z\cos 2\theta} = 2(1+z)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1 - \frac{4z}{(1+z)^2}\sin^2\theta}.$$

Pour simplifier la nouvelle intégrale, j'emploie la relation connue (*) :

$$b^2 F_1(c) = 2E_1(c) - (1+c)E_1(c').$$

(*) *Fonctions elliptiques* (t. I, p. 84). Legendre l'écrit ainsi, pour le cas général :

$$b^2 F(c,\varphi) = 2E(c,\varphi) - 2(1+c)E(c',\varphi') + 2c\sin\varphi,$$

En y faisant

$$c = z, \quad c' = \frac{2\sqrt{z}}{1+z},$$

j'obtiens

$$(1+z)E_1(c') = 2E_1(z) - (1-z^2)F_1(z);$$

puis

$$2E_1(z) - (1-z^2)F_1(z) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{z^{2n+2}}{n+1}\int_0^1 \frac{X_{2n} - xX_{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \quad . \quad . \quad (160)$$

128. *Intégrale de deuxième espèce.* La dernière formule, combinée avec celle-ci :

$$F_1(z) = \sum_0^\infty z^{2n}\int_0^1 \frac{X_{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (S)$$

donnerait le développement de $E_1(z)$. Mais nous aurons un résultat plus simple en procédant comme il suit.

On déduit, de l'équation (160) :

$$2\frac{dE_1}{dz} + 2zF_1 - (1-z^2)\frac{dF_1}{dz} = \sum_0^\infty z^{2n+1}\int_0^1 \frac{X_{2n} - xX_{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Or :

$$\frac{dE_1}{dz} = \frac{1}{z}(E_1 - F_1), \quad \frac{dF_1}{dz} = \frac{1}{z(1-z^2)}[E_1 - (1-z^2)F_1] \ (*).$$

Le premier membre de notre équation devient donc

$$\frac{2}{z}(E_1 - F_1) + 2zF_1 - \frac{1}{z}[E_1 - (1-z^2)F_1] = \frac{1}{z}[E_1 - (1-z^2)F_1].$$

avec la condition :

$$\cos 2\varphi' = \Delta\cos\varphi - c\sin^2\varphi.$$

Si l'on suppose $\varphi = \pi$, on a $\varphi' = \frac{\pi}{2}$; et l'équation précédente devient

$$2b^2F_1(c) = 4E_1(c) - 2(1+c)E_1(c');$$

etc.

(*) LEGENDRE, t. I, p. 62. Il résulte, de la seconde formule, que l'on peut développer E_1 sans passer par les calculs effectués dans le numéro précédent. Néanmoins, ces calculs ne nous paraissent pas inutiles.

Par suite,

$$E_1 = (1 - z^2)F_1 + \sum_0^\infty z^{2n+2} \int_0^1 \frac{X_{2n} - xX_{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Il est visible que

$$(1 - z^2)F_1 = \frac{\pi}{2} + \sum_0^\infty z^{2n+2} \int_0^1 \frac{X_{2n+2} - X_{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$$

donc, finalement,

$$E_1(z) = \frac{\pi}{2} + \sum_0^\infty z^{2n+2} \int_0^1 \frac{X_{2n+2} - xX_{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \quad \ldots\ldots \quad (T)$$

129. *Intégrale définie.* Le développement du premier membre étant

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty (2n+1)\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots\overline{2n+2}}\right)^2 z^{2n+2},$$

on trouve, en identifiant,

$$\int_0^1 \frac{xX_{2n+1} - X_{2n+2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (2n+1)\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots\overline{2n+2}}\right)^2 \frac{\pi}{2};$$

ou

$$\int_0^1 \frac{xX_{2n-1} - X_{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (2n-1)\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-3}}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots \quad (161)$$

130. *Remarque.* Cette formule est une conséquence de ces deux-ci :

$$\int_0^1 \frac{X_{2n-1}x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n-1}{2n}\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-3}}{2.4.6\ldots\overline{2n-2}}\right)^2 \frac{\pi}{2}, \quad \ldots\ldots \quad (76)$$

$$\int_0^1 \frac{X_{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \frac{\pi}{2}. \quad \ldots\ldots \quad (77)$$

IX. — Développements des fonctions (*).

131. Théorème. $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *étant des coefficients quelconques, on a*

$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_n$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}}\left[(2n+1)A_0X_n + (2n-1)A_1X_{n-1} + \cdots + A_n\right] \quad . \quad . \quad (162)$$

En effet, d'après la formule

$$z^p = \frac{2p+1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{X_p}{\sqrt{1-2zx+z^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

les deux membres sont identiques.

132. Corollaire I.

$$z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{V_n dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} \text{(**)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (163)$$

133. Corollaire II.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{V_n dx}{\sqrt{1-x}} = 2(n+1)\sqrt{2} \text{ (***)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (164)$$

(*) A la fin du premier Mémoire, on lit :

« *Une puissance entière de* z (et par suite une fonction quelconque de cette variable) *est* » *égale à une intégrale définie, de la forme*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(X)dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}}. \text{ »}$$

Le présent paragraphe est destiné à justifier cette sorte de prévision.

(**) Voir, ci-dessus, la relation (130).

(***) On peut comparer cette formule avec celle-ci :

$$\int_{-1}^{+1} X_n dx = \frac{2\sqrt{2}}{2n+1},$$

donnée dans le premier Mémoire (p. 62)

134. THÉORÈME. *Si* a *est une racine de l'équation*

$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_n = 0,$$

on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2ax + a^2}} \left[(2n+1) A_0 X_n + (2n-1) A_1 X_{n-1} + \cdots + A_n\right] = 0. \quad . \quad (165)$$

135. COROLLAIRE I. *L'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} \left[(2n+1) A_0 X_n + (2n-1) A_1 X_{n-1} + \cdots + A_n\right]$$

s'annule pour n *valeurs de* z.

136. *Application.* Soit, pour abréger,

$$\varphi(z) = z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z-1)(z-2)(z-3);$$

de manière que

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -6, \quad A_2 = 11, \quad A_3 = -6,$$

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3.$$

On a (162)

$$\varphi(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} \left[7X_3 - 30X_2 + 33X_1 - 6\right],$$

ou

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} (35x^3 - 90x^2 + 45x + 18);$$

puis, en faisant $z = a, b, c$:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x}} (35x^3 - 90x^2 + 45x + 18) = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x}} (35x^3 - 90x^2 + 45x + 18) = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{5 - 3x}} (35x^3 - 90x^2 + 45x + 18) = 0.$$

137. Corollaire II. *L'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{V_n dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (163)$$

s'annule quand z *est une racine de l'équation*

$$z^{n+1} - 1 = 0,$$

autre que l'unité positive.

138. *Application.* Soit $n = 3$. On a trouvé (93)

$$V_3 = 35x^3 + 15x^2 - 15x - 3.$$

De plus, l'équation $z^4 - 1 = 0$ a pour racines : ± 1, $\pm\sqrt{-1}$. Par conséquent :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1+x}} (35x^3 + 15x^2 - 15x - 3) = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} (35x^3 + 15x^2 - 15x - 3) = 0.$$

139. *Suite.* Les propositions précédentes peuvent être énoncées d'une autre manière.

Le polynôme

$$(2n+1)A_0X_n + (2n-1)A_1X_{n-1} + \cdots + A_n$$

est une fonction entière de x, du degré n. Réciproquement, *toute fonction entière de* x, f(x), *dont le degré est* n, peut être mise sous cette forme (*). Ainsi déjà, *l'équation*

$$\lambda f(x) = (2n+1)A_0X_n + (2n-1)A_1X_{n-1} + \cdots + A_n \quad \ldots\ldots \quad (166)$$

(*) Proposition connue, presque évidente (voir, par exemple, le *Calcul intégral* de Bertrand).

est identique, si le facteur λ *est convenablement choisi* (*). Cela posé :

1° *L'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-2zx+z^2}}\,dx$$

est

$$\frac{2}{\lambda}\varphi(z) = \frac{2}{\lambda}(A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (167)$$

2° *Les coefficients de* $\varphi(z)$ *sont rationnels ou irrationnels, en même temps que ceux de* $f(x)$.

3° *Cette intégrale s'annule pour* n *valeurs de* z.

140. *Remarque.* On a, par le développement du radical,

$$\frac{2}{\lambda}\varphi(z) = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx\,[1 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots + X_n z^n] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (168)$$

Il est donc inutile de mettre $f(x)$ sous la forme (166).

141. *Application.* Soit

$$f(x) = 35x^3 - 90x^2 + 45x + 18.$$

La dernière formule donne

$$\frac{2}{\lambda}\varphi(z) = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \left[1 + xz + \frac{1}{2}(3x^2-1)z^2 + \frac{1}{2}(5x^3-3x)z^3\right].$$

(*) Dans X_n, le coefficient de x^n est $\frac{1}{2^n}C_{2n,n}$. Si donc $f(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n$,

$$\lambda = (2n+1)\frac{C_{2n,n}}{2^n}\cdot\frac{A_0}{a_0}.$$

Ce facteur λ se réduit à l'unité lorsqu'on prend

$$A_0 = \frac{2^n}{(2n+1)C_{2n,n}}\,a_0.$$

Les intégrales successives étant (après suppression des termes nuls) :

$$\int_{-1}^{+1}(-90x^2+18)\,dx=-24,\qquad \int_{-1}^{+1}(55x^4+45x^2)\,dx=44,$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(-270x^4+144x^2-18)\,dx=-24,$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(175x^6+120x^4-135x^2)\,dx=4;$$

il vient donc, en supposant $\lambda=1$:

$$\varphi(z)=2(z^3-6z^2+11z-6);$$

etc.

142. *Autre expression de* $\varphi(z)$. Supposons

$$\varphi(z)=B_0z^n+B_1z^{n-1}+\cdots+B_n.$$

En appliquant, à chacun des termes de ce polynôme, la relation

$$\frac{2z^p}{1-z^2}=\int_{-1}^{+1}\frac{X_p\,dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \text{(B)}$$

nous avons

$$2\frac{\varphi(z)}{1-z^2}=\int_{-1}^{+1}\frac{B_0X_n+B_1X_{n-1}+\cdots+B_n}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx;$$

ou, sous forme symbolique,

$$2\frac{\varphi(z)}{1-z^2}=\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(X)}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx: \qquad \text{(U)}$$

$\varphi(X)$ représente ce que devient $\varphi(z)$, quand on y remplace z^p par X_p.

143. *Remarques.* — I. Si l'on prend $\varphi(z) = 1 - z^2$, on a

$$2 = \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \frac{1}{2}(3x^2 - 1)}{(1 - 2zx + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

ou

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1 - x^2}{(1 - 2zx + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{4}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (169)$$

Ainsi, cette intégrale est *indépendante du paramètre contenu dans la différentielle.*

II. De

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{(1 - 2zx + z^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\varphi(z)\ (^*), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (167)$$

on déduit

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(x - z) f(x)\,dx}{(1 - 2zx + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\varphi'(z);$$

puis

$$\int_{-1}^{+1} \frac{[2zx - 2z^2 + (1 - 2zx + z^2)]}{(1 - 2zx + z^2)^{\frac{3}{2}}} f(x)\,dx = 2\,[2z\varphi'(z) + \varphi(z)];$$

ou, plus simplement,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{(1 - 2zx + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\,\frac{\varphi(z) + 2z\varphi'(z)}{1 - z^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (170)$$

Donc, *l'intégrale est une fraction rationnelle,* facile à déterminer.

144. PROBLÈME. *Sommer la série*

$$\varphi(0) + \frac{X_1}{1}\varphi'(0) + \frac{X_2}{1.2}\varphi''(0) + \cdots + \frac{X_n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(0) + \cdots, \quad \ldots \quad (171)$$

$\varphi(x)$ *étant une fonction donnée.*

(*) Nous supposons $\lambda = 1$.

Soit $F(x)$ la somme cherchée. On a, par la formule de Jacobi,

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\varphi^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}\int_0^\pi (x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n\,d\omega;$$

puis, en intervertissant l'ordre des opérations,

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\omega \sum_0^\infty \frac{(x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(0).$$

La nouvelle somme représente le développement de $\varphi(x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)$. Donc enfin

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)\,d\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{V})$$

145. *Application.* Soit $\varphi(x) = e^x$. La série proposée est

$$1 + \frac{X_1}{1} + \frac{X_2}{1.2} + \frac{X_3}{1.2.3} + \cdots$$

Par suite,

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x-\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\cos\omega}\,d\omega,$$

ou

$$F(x) = \frac{1}{\pi}e^x\int_0^\pi \cos\left[\sqrt{1-x^2}\cos\omega\right]d\omega;$$

résultat connu (21).

146. *Autre application.* Prenons

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}.$$

Alors

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 1, \quad \varphi''(0) = 1.2, \quad \varphi'''(0) = 1.2.3, \quad \ldots;$$

puis

$$F(x) = 1 + X_1 + X_2 + X_3 + \cdots$$

La formule (V) donne

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\omega}{1 - x + \sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\cos\omega},$$

ou (27)

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + (1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}};$$

ce qui est exact.

147. *Intégrales doubles.* Soit la formule de Mac-Laurin :

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \frac{z}{1}\varphi'(0) + \frac{z^2}{1.2}\varphi''(0) + \cdots$$

La relation

$$z^n = \frac{1-z^2}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

appliquée à chacun des termes du second membre, donne

$$2\frac{\varphi(z)}{1-z^2} = \sum_0^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

ou, *en admettant* toujours *que les signes puissent être intervertis :*

$$2\frac{\varphi(z)}{1-z^2} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}} \sum_0^{\infty} \frac{X_n\varphi^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}.$$

On vient de voir que

$$\sum_0^{\infty} \frac{X_n\varphi^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)\,d\omega \quad \ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

Conséquemment :

$$\frac{\varphi(z)}{1-z^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\pi} \varphi(x - \sqrt{x^2-1}\cos\omega)\,d\omega \quad \ldots \quad \text{(W)}$$

Ainsi, *toute fonction d'une variable* z *peut être représentée par une intégrale* *définie double.* Sous ce rapport, notre formule rappelle donc, jusqu'à un certain point, la célèbre *formule de Fourier* (*).

148. *Intégrales simples.* Soit encore

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \frac{z}{1}\varphi'(0) + \frac{z^2}{1.2}\varphi''(0) + \cdots$$

Prenons la formule

$$z^n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n}{\sqrt{1-2zx+z^2}}\,dx. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Il en résulte, immédiatement,

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{f(X)\,dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (X)$$

en posant

$$f(X) = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(0)\,X_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (171)$$

Ainsi, comme nous l'avions supposé (**), *toute fonction est exprimable par une intégrale définie,* de la forme indiquée.

(*) Bien entendu, je ne prétends, en aucune façon, assimiler la relation (W) (plus curieuse qu'utile) à l'une des plus belles découvertes de l'Analyse moderne.

(**) *M.*, p. 63.

ADDITIONS.

Sur l'équation (23).

On lit, dans la *Théorie de la Chaleur* (p. 378) :

$$\int_0^{\pi} \cos(t \sin u)\, du = \pi \left[1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{(2 \,.\, 4)^2} - \frac{t^6}{(2 \,.\, 4 \,.\, 6)^2} + \cdots\right] (^*) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Par conséquent, les deux formules s'accorderont, si l'on a

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(t \sin u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t \cos \omega) d\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Soit

$$u = \frac{\pi}{2} - \omega.$$

Le premier membre devient

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(t \cos \omega) d\omega.$$

Or, $\cos(-\omega) = \cos\omega$; donc

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(t \cos\omega) d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t \cos \omega) d\omega;$$

et l'égalité (2) est démontrée.

(*) Afin de rendre la comparaison plus facile, nous effectuons un changement de lettres. En outre, nous corrigeons des fautes typographiques.

Dans un *Rapport sur une Note de M. Le Paige* (*); et, postérieurement, dans les *Notes d'Algèbre et d'Analyse* (**), nous avons considéré la série

$$1+\frac{x^2}{1^2}+\frac{x^4}{(1\,.\,2)^2}+\frac{x^6}{(1\,.\,2\,.\,3)^2}+\cdots$$

D'après la formule (23), si la limite de cette série est désignée par S, on a

$$S=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(2x\sqrt{-1}\cos\omega\right)d\omega;$$

ou, sous forme réelle,

$$S=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[e^{2x\cos\omega}+e^{-2x\cos\omega}\right]d\omega.$$

Sur la relation (102).

Pour l'obtenir directement, on peut procéder comme il suit.

D'après une formule connue, dont la vérification est facile,

$$\cos^n\alpha+\cos\alpha\,.\cos^{n-1}\alpha+\cos 2\alpha\,.\cos^{n-2}\alpha+\cdots\cos(n-1)\alpha\cos\alpha+\cos^n\alpha=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\ (^{***}),$$

ou

$$\sum_{k=0}^{k=n}\cos k\alpha\cos^{n-k}\alpha=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

(*) *Bulletin*, mai 1876.
(**) Mémoires *in-quarto*, tome XLII, p. 12.
(***) Le premier membre ne diffère pas de

$$X_0X_n+X_1X_{n-1}+\cdots+X_{n-1}X_1+X_nX_0$$

(99); ainsi

$$X_0X_n+X_1X_{n-1}+\cdots+X_{n-1}X_1+X_nX_0=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha};$$

relation connue, qui résulte de la *définition* des polynômes X_n.

D'ailleurs,

$$\cos k\alpha = a_0 \cos^k\alpha + a_2 \cos^{k-2}\alpha + a_4 \cos^{k-4}\alpha + \cdots \text{ (*)}.$$

Substituant, on a, au lieu de l'égalité (1),

$$\cos^n\alpha \sum a_0 + \cos^{n-2}\alpha \sum a_2 + \cos^{n-4}\alpha \sum a_4 + \cdots = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Multiplions par $\sin\alpha d\alpha$; puis intégrons entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Nous aurons, si n est *pair* :

$$\frac{1}{n+1}\sum a_0 + \frac{1}{n-1}\sum a_2 + \frac{1}{n-3}\sum a_4 + \cdots = 0.$$

Cette démonstration, fort simple, m'a été communiquée par M. Van de Berg, professeur à l'École polytechnique de Delft.

Sur la formule (S).

Au développement de la fonction F_1, donné par cette formule, on en peut substituer d'autres, qui dépendent, plus immédiatement, des polynômes X_n.

Première méthode. Si, dans l'équation de définition, on change z en z^2, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz^2+z^4}} = \sum_0^\infty X_n z^{2n};$$

et, par conséquent,

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-2xz^2+z^4}} = \sum_0^\infty X_n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Prenons la transformation connue :

$$z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

(*) *M.*, p. 27.

Il en résulte :

$$z^2 = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}, \quad 1+z^4 = 2\frac{1+\cos^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}, \quad dz = \frac{d\varphi}{1+\cos\varphi}, \quad \dots$$

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-2xz^2+z^4}} = \frac{1}{2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1+x}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Si donc, comme nous l'avons supposé constamment,

$$x = \cos\alpha, \quad \dots \dots \quad (3)$$

l'égalité (1) devient

$$F(\cos\tfrac{1}{2}\alpha, \varphi) = 2\sum_0^\infty X_n \frac{\operatorname{tg}^{2n+1}\frac{1}{2}\varphi}{2n+1}; \quad \dots \dots \quad (4)$$

et, lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$F_1(\cos\tfrac{1}{2}\alpha) = 2\sum_0^\infty \frac{X_n}{2n+1}. \quad \dots \dots \quad (5)$$

En d'autres termes (*) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\varphi}} = 2\left\{1+\frac{1}{3}\cos\alpha+\frac{1}{2.5}(3\cos^2\alpha-1)+\frac{1}{2.7}(5\cos^3\alpha-3\cos\alpha)+\cdots\right\}. \quad (6)$$

Remarque. Lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, cette relation se réduit à (**)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = 2\left[1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2.4}-\frac{1}{13}\,\frac{1.3.5}{2.4.6}+\cdots\right]. \quad \dots \quad (7)$$

Le développement est bien plus convergent que celui-ci :

$$\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2^2}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2+\frac{1}{2^3}\left(\frac{1\,3.5}{2.4.6}\right)^2+\cdots\right].$$

(*) *M.*, p. 10.
(**) *M.*, p. 10.

Seconde méthode. De la formule

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2z)(1-z)}}=\frac{2}{\pi}\sum_0^\infty z^p\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^2\theta+\cos^2\theta)^p d\theta \text{ (*)}, \quad \ldots \quad (8)$$

on conclut

$$\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-x^2z^2)(1-z^2)}}=\frac{2}{\pi}\sum_0^\infty\frac{z^{2p+1}}{2p+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^2\theta+\cos^2\theta)^p d\theta; \quad \ldots \quad (9)$$

ou, en posant

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^2\theta+\cos^2\theta)^p d\theta=\frac{N_p}{2^p\Gamma(p+1)}:$$

$$\int_0^x\frac{dz}{\sqrt{(1-x^2z^2)(1-z^2)}}=z+\frac{N_1}{2.3}z^3+\frac{N_2}{2.4.5}z^5+\frac{N_3}{2.4.6.7}z^7+\cdots \quad \ldots \quad (10)$$

On sait que (**)

$$N_1=1+x^2,\quad N_2=3+2x^2+3x^4,\quad N_3=15+9x^2+9x^4+15x^6,$$
$$N_4=105+60x^2+54x^4+60x^6+105x^8,\quad \ldots\ldots$$

Par conséquent

$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}=\sin\varphi+\frac{1+x^2}{2.3}\sin^3\varphi+\frac{3+2x^2+3x^4}{2.4.5}\sin^5\varphi+\cdots; \quad . \quad (11)$$

et, en particulier :

$$F_1(x)=1+\frac{1+x^2}{2.3}+\frac{3+2x^2+3x^4}{2.4.5}+\frac{15+9x^2+9x^4+15x^6}{2.4.6.7}+\cdots \quad \ldots \quad (12)$$

Remarque. D'après la formule (9) :

$$F_1(x)=\frac{2}{\pi}\sum_0^\infty\frac{1}{2p+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta)^p d\theta. \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

(*) *M.*, p. 31. Elle est presque évidente.

(**) *M.*, p. 27. Nous avons changé N_{p+1} en N_p.

Dans l'intégrale, le coefficient de x^{2k} est

$$C_{p,k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-2k}\theta\sin^{2k}\theta d\theta=\frac{1.2.3\ldots p}{1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots\overline{p-k}}\frac{\pi}{2}\frac{1.3.5\ldots(\overline{2p-2k-1}).1.3.5\ldots\overline{2k-1}}{2.4.6\ldots 2p}$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{1.3.5\ldots\overline{2p-2k-1}}{2.4.6\ldots 2p-2k}\cdot\frac{1.3.5\ldots\overline{2k-1}}{2.4.6\ldots 2k}.$$

Si donc le second membre de l'égalité (13) est développé sous la forme

$$A_0+A_1x^2+\cdots+A_kx^{2k}+\cdots,$$

on a

$$A_k=\sum_{p=k}^{p=\infty}\frac{1}{2p+1}\cdot\frac{1.3.5\ldots\overline{2p-2k-1}}{2.4.6\ldots\overline{2p-2k}}\cdot\frac{1.3.5\ldots\overline{2k-1}}{2.4.6\ldots 2k}.$$

Et comme

$$F_1(x)=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2x^2+\cdots+\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2k-1}}{2.4.6\ldots 2k}\right)^2x^{2k}+\cdots\right],$$

l'*identification* donne

$$\frac{1.3.5\ldots\overline{2k-1}}{2.4.6\ldots 2k}\frac{\pi}{2}=\sum_{p=k}^{p=\infty}\frac{1}{2p+1}\cdot\frac{1.3.5\ldots\overline{2p-2k-1}}{2.4.6\ldots\overline{2p-2k}}. \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Si, par exemple, $k=3$:

$$\frac{15}{96}\pi=\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\frac{1}{2}+\frac{1}{11}\frac{1.3}{2.4}+\frac{1}{13}\frac{1.3.5}{2.4.6}+\cdots$$

Nous trouvons donc, sans les avoir cherchés, une infinité de développements de π (*).

(*) Ces développements résultent, au fond, de la relation

$$\int_0^1\theta^{k-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta=\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)},$$

combinée avec la formule du binôme.

Séries logarithmiques. La relation (8) équivaut à

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2z)(1-z)}} = \sum_0^\infty \frac{N_p z^p}{2^p\Gamma(p+1)}.$$

Il résulte, de celle-ci :

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-(1+x^2)z+x^2z^2}} = \sum_0^\infty \frac{N_p z^{p+1}}{2^p\Gamma(p+2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

On trouve, aisément, que le premier membre a pour valeur

$$\frac{1}{x}\log\frac{(1+x)^2}{1+x^2-2x^2z+2x\sqrt{(1-x^2z)(1-z)}}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{x}\log\frac{(1+x)^2}{1+x^2-2x^2z+2x\sqrt{(1-x^2z)(1-z)}} = \sum_0^\infty \frac{N_p z^{p+1}}{2^p\Gamma(p+2)} \ldots\ldots \quad (16)$$

Remarque. Lorsque $x = 1$, cette formule générale se réduit à

$$-\log(1-z) = \sum_0^\infty \frac{z^{p+1}}{p+1}\ (^*);$$

et, quand $z = 1$, à :

$$\frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1+x^2}{2.2} + \frac{3+2x^2+3x^4}{2.4.3} + \frac{15+9x^2+9x^4+15x^6}{2.4.6.4} + \cdots \quad (17)$$

Enfin, si $z = x$, on trouve

$$\log(-x+\sqrt{1+x+x^2}) = \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{N_p(x^{p+2}-x)}{2^p\Gamma(p+2)} \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

(*) La somme des coefficients de N_p égale $2^p\Gamma(p+1)$.

ERRATA.

Page 59, lignes 11 et 13. *Au lieu de :* 460, *lisez :* 1260.

— 83, ligne 11. *Au lieu de :* $\sum_0^\infty B_{2n} \int_0^x X_{2n}dx$, *lisez :* $\sum_0^\infty C_{2n} \int_0^x X_{2n}dx$.

ERRATA POUR LE PREMIER MÉMOIRE.

Page 13, équat. (26). *Au lieu de :* $\left[\frac{n}{1}\right]^2$, *lisez :* $\left[\frac{n}{1}\right]^2 3$.

— 29, parag. **44**. — $(1-\sqrt{1-x^2}\cos\omega)$, *lisez :* $(1-\sqrt{1-x^2}\cos\omega)^n$.

— 46, parag. **68**. — $(x^2-1)^3\frac{1}{8}(63x^{11}-\cdots)$, *lisez :* $(x^2-1)^3X_5=\frac{1}{8}(63x^{11}-\cdots)$.

— 58, équat. (147). *Après :* $\frac{2}{n(n+1)}$, *ajoutez :* $(n>0)$.

— 63, ligne 10. *Au lieu de :* formule est, *lisez :* série est.