NOTE

SUR

LA QUADRATURE DES COURBES PARABOLIQUES

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

(Présenté à la Classe des sciences le 7 octobre 1880.)

NOTE

SUR

LA QUADRATURE DES COURBES PARABOLIQUES (*).

1. Soit la parabole représentée par

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots + a_{2n-1} x^{2n-1}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

n étant *impair* (**).

Si l'on suppose que les ordonnées extrêmes répondent à $x = x_0$, $x = x_n$, l'aire de la courbe sera

$$A = \int_{x_0}^{x_n} y\,dx. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Il s'agit de mettre cette expression sous la forme

$$A = \sum_0^n \lambda_k y_k; \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

(*) Ce petit travail, dont un extrait a été communiqué au Congrès de Reims, a pour origine : 1° une Note du général Parmentier; 2° une correspondance avec M. Lucien Lévy, professeur au Lycée de Rennes. En cherchant à simplifier une formule trouvée par M. Lévy, j'ai rencontré un théorème de Gauss, et quelques propositions que je crois nouvelles.

(**) Cette hypothèse simplifie un peu la formule finale.

$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ étant des *constantes inconnues*, et $y_0, y_1, \ldots, y_n$ des ordonnées *arbitraires*, répondant à des abscisses *convenablement choisies* (*).

2. Si l'on fait

$$a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} = \mathrm{X}, \qquad (4)$$

de manière que

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = y - \mathrm{X}, \qquad (5)$$

on a, par la formule d'interpolation de Lagrange :

$$y - \mathrm{X} = \sum_0^n (y_k - \mathrm{X}_k)\frac{\mathrm{F}(x)}{(x - x_k)\mathrm{F}'(x_k)}, \qquad (6)$$

$$\mathrm{A} = \int_{x_0}^{x_n}\left[\mathrm{X} + \sum_0^n (y_k - \mathrm{X}_k)\frac{\mathrm{F}(x)}{(x - x_k)\mathrm{F}'(x_k)}\right]dx, \qquad (7)$$

en posant

$$\mathrm{F}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n). \qquad (8)$$

3. D'après les égalités (3), (7), les valeurs des *constantes* sont données par la formule

$$\lambda_k = \int_{x_0}^{x_n}\frac{\mathrm{F}(x)}{(x - x_k)\mathrm{F}'(x_k)}dx. \qquad (9)$$

En outre, *la fonction* F(x) *doit satisfaire à la condition*

$$\int_{x_0}^{x_n}\left[\mathrm{X} - \sum_0^n \frac{\mathrm{X}_k\mathrm{F}(x)}{(x - x_k)\mathrm{F}'(x_k)}\right]dx = 0. \qquad (10)$$

4. Soit $\varphi(x)$ le polynôme entre parenthèses. Il est visible que si l'on fait $x = x_0$, $x = x_1$, ..., $x = x_n$, ce polynôme s'annule. Ainsi, 1° :

$$\varphi(x) = \mathrm{F}(x)\psi(x), \qquad (11)$$

(*) Problème résolu par Gauss (Bertrand, *Calcul intégral*, p. 340).

$\psi(x)$ *désignant un polynôme entier*. Divisant par $F(x)$, on trouve

$$\psi(x) = \frac{X}{F(x)} - \sum_0^n \frac{X_k}{(x - x_k)F'(x_k)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Q étant le quotient entier de X par $F(x)$, et R le reste de la division, on peut supposer la fraction $\frac{R}{F(x)}$ décomposée en fractions simples, de la forme $\frac{A_k}{x - x_k}$. On doit avoir, *identiquement*,

$$\psi(x) = Q + \sum_0^n \frac{1}{x - x_k}\left[A_k - \frac{X_k}{F'(x_k)}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Donc, 2° : *le polynôme* $\psi(x)$ *est le quotient entier de* X *par* $F(x)$.

De plus,

$$A_k = \frac{X_k}{F'(x_k)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

5. Remarques. — I. D'après la dernière formule, si X est divisible par $x - k$, on aura $A_k = X_k = 0$; ce qui doit être.

II. D'après les hypothèses faites sur X et $F(x)$, le degré de $\psi(x)$ est $(2n - 1) - (n + 1)$, c'est-à-dire $n - 2$.

III. Au moyen des simplifications précédentes, *l'équation de condition* (10) devient

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\psi(x)dx = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

6. Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse sur les limites x_0, x_n. Afin d'obtenir des résultats et des règles simples, nous supposerons, désormais,

$$x_0 = -1, \quad x_n = +1\ (*).$$

(*) Ceci n'altère en rien la généralité des résultats; car on peut toujours prendre, pour unité, la moitié de la distance comprise entre les ordonnées extrêmes.

Les formules (8), (9), (15) sont remplacées par

$$\lambda_k = \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{(x - x_k)F'(x_k)} dx, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$F(x) = (x^2 - 1)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\psi(x)dx = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Les conditions (17) et (18) seront remplies si l'on prend

$$F(x) = \theta \frac{d^{n-1}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

θ étant un coefficient numérique ; ou, ce qui est équivalent,

$$F(x) = \theta_1 \int_{-1}^{x} X_n dx \;(^*), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

X_n désignant, cette fois, la *fonction de Legendre*.

En effet, toutes les dérivées de $(x^2 - 1)^n$, jusqu'à l'ordre $n - 1$, inclusivement, contiennent $x^2 - 1$ en facteur ; donc, si l'on intègre par parties, on aura

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\psi(x)dx = -\theta \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-2}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-2}} \psi'(x)dx ;$$

et ainsi de suite (**).

(*) $\theta = \dfrac{1}{2n(2n-1)\ldots(n+2)}$. Quant au second coefficient, à cause de

$$X_n = \frac{1}{2^n.1.2.3\ldots n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{2^n.1.2.3\ldots n}(x^n - \cdots),$$

il a pour valeur

$$\theta_1 = 2^{n-1} \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(n+2)(n+3)\ldots(2n-1)}.$$

(**) C'est de cette manière que Jacobi a démontré quelques-unes des propriétés de la fonction X_n (*Journal de Liouville*, t. II, p. 106).

7. Remarque. D'après la formule (20), la fonction $F(x)$, ou plutôt *le polynôme* F_{n+1} *est, à un facteur près, le coefficient de* z^{n+1} *dans le développement de* $\sqrt{1-2zx+z^2}$ (*).

8. Développement de $F(x)$. Si l'on fait $u=(x+1)^n$, $v=(x-1)^n$, la formule de Leibniz :

$$\frac{d^{n-1}(uv)}{dx^{n-1}}=u\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}+\frac{n-1}{1}\frac{du}{dx}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}}+\cdots+\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}v,$$

donne

$$\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}=(x+1)^n n(n-1)\ldots 2(x-1)+\frac{n-1}{1}n(x+1)^{n-1}.n(n-1)\ldots 3(x-1)^2$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}n(n-1)(x+1)^{n-2}.n(n-1)\ldots 4(x-1)^3+\cdots+n(n-1)\ldots 2(x+1)(x-1)^n.$$

Le terme général est

$$\frac{(n-1)\ldots(n-p)}{1.2\ldots p}n(n-1)\ldots(n-p+1)\times n(n-1)\ldots(p+2)(x+1)^{n-p}(x-1)^{p+1}.$$

Si on le divise par $1.2.3\ldots n$, il devient

$$\frac{(n-1)\ldots(n-p)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots(p+1)}(x+1)^{n-p}(x-1)^{p+1},$$

ou

$$\frac{1}{n}C_{n,p}.C_{n,p+1}(x^2-1)(x+1)^{n-p-1}(x-1)^p.$$

Par conséquent,

$$\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}=1.2.3\ldots(n-1)(x^2-1)\sum_{p=0}^{p=n-1}C_{n,p}.C_{n,p+1}(x+1)^{n-p-1}(x-1)^p;$$

puis

$$F(x)=\frac{x^2-1}{C_{2n,n-1}}\sum_{p=0}^{p=n-1}C_{n,p}.C_{n,p+1}(x+1)^{n-p-1}(x-1)^p. \quad\ldots\ldots \quad (21)$$

(*) *Note sur les fonctions* X_n.

9. Remarque. Dans le premier membre, le coefficient de x^{n+1} est 1. Dans le second membre, ce coefficient égale

$$\frac{1}{C_{2n,n-1}}\sum_{p=0}^{p=n-1} C_{n,p}\,.\,C_{n,p+1}.$$

Conséquemment,

$$\sum_{p=0}^{p=n-1} C_{n,p}\,.\,C_{n,p+1} = C_{2n,n-1};$$

formule connue.

10. Les limites $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sont les racines de l'équation $F(x) = 0$, abstraction faite de ∓ 1 ; savoir :

$$\left.\begin{array}{r}\frac{n}{1}(x+1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{n}{1}(x+1)^{n-2}(x-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{n(n-1)}{1.2}(x+1)^{n-3}(x-1)^2 + \cdots \\ + \frac{n}{1}\frac{n(n-1)}{1.2}(x+1)(x-1)^{n-2} + \frac{n}{1}(x-1)^{n-1} = 0.\end{array}\right\} \quad (22)$$

n étant *impair*, le premier membre ne change pas quand on y remplace x par $-x$. Cette équation, comme l'équation $X_n = 0$, a donc ses racines égales et de signes contraires deux à deux (*).

11. Remarque. Si l'on fait $\frac{x+1}{x-1} = z$, on a l'équation *réciproque*

$$\frac{n}{1}z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{n}{1}z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{n(n-1)}{1.2}z^{n-3} + \cdots + \frac{n}{1}\frac{n(n-1)}{1.2}z + \frac{n}{1} = 0 \text{ (**)}. \quad (23)$$

12. Formule de quadrature. Nous avons trouvé

$$\lambda_k = \int_{-1}^{+1}\frac{F(x)}{(x-x_k)F'(x_k)}dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

D'après la discussion précédente : 1° $F(x)$ est une fonction *paire ;* 2° $F'(x)$

(*) Propriété évidente par la *définition* (19).

(**) Nouveau rapprochement entre les fonctions $F(x)$ et X_n.

est une fonction *impaire;* 3° $x_{n-k} = -x_k$. Par conséquent, $\lambda_{n-k} = \lambda_k$: la formule (3) devient

$$A = \lambda_0(y_0 + y_n) + \lambda_1(y_1 + y_{n-1}) + \cdots + \lambda_{\frac{n-1}{2}}\left(y_{\frac{n-1}{2}} + y_{\frac{n+1}{2}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Dans celle-ci, les coefficients λ sont donnés par la formule (16); et les ordonnées $y_0, y_1, \ldots, y_n$ sont, comme nous l'avons dit, celles qui répondent aux racines $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de l'équation

$$F(x) = \theta . \frac{d^{n-1}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

13. Remarque. Soit

$$Y = \sum_0^n y_k \frac{F(x)}{(x - x_k)F'(x_k)} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n :$$

cette équation représente la parabole *déterminée* par les $n + 1$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. L'aire de cette parabole est

$$A' = \int_{-1}^{+1} Y dx = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n = A.$$

On a donc ce théorème curieux, dont j'ai donné, en 1857, un cas particulier (*) :

Toutes les paraboles du degré 2n — 1, *qui passent par* n + 1 *points convenablement choisis, sont équivalentes à la parabole du degré* n, *déterminée par ces* n + 1 *points* (**).

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVI, p. 312; *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. II, p. 295.

(**) Lors de sa communication au Congrès de Montpellier, M. le général Parmentier croyait le théorème *nouveau* et vrai, seulement, pour la parabole cubique.