REMARQUES

SUR LA

THÉORIE DES MOINDRES CARRÉS;

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

(Mémoire présenté à la Classe des sciences le 2 mars 1878.)

REMARQUES

SUR LA

THÉORIE DES MOINDRES CARRÉS (*).

I.

PRÉLIMINAIRES.

1. Soient

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz + du + ev + f = w, \\ a'x + b'y + c'z + d'u + e'v + f' = w', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

des équations du premier degré, en nombre supérieur à celui des inconnues x, y, z, u, v. Si l'on veut que la quantité

$$\Omega = w^2 + w'^2 + w''^2 + \cdots \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

soit minimum, on doit résoudre les équations *normales :*

$$\left.\begin{array}{l} (aa)\,x + (ab)\,y + (ac)\,z + (ad)\,u + (ae)\,v + (af) = 0, \\ (ba)\,x + (bb)\,y + (bc)\,z + (bd)\,u + (be)\,v + (bf) = 0, \\ (ca)\,x + (cb)\,y + (cc)\,z + (cd)\,u + (ce)\,v + (cf) = 0, \\ (da)\,x + (db)\,y + (dc)\,z + (dd)\,u + (de)\,v + (df) = 0, \\ (ea)\,x + (eb)\,y + (ec)\,z + (ed)\,u + (ee)\,v + (ef) = 0, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

(*) La première rédaction de ce Mémoire, lue au Congrès de Lille, en 1874, a été détruite dans l'incendie de l'imprimerie Danel.

dans lesquelles :

$$(aa) = a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots,\quad (ab) = ab + a'b' + a''b'' + \cdots,\quad (ef) = ef + e'f' + \cdots\ (*)$$

L'élimination de x, entre la première et chacune des quatre autres, conduit à

$$\left.\begin{array}{l} \left[(aa)(bb) - (ab)^2\right] y + \left[(aa)(bc) - (ab)(ac)\right] z + \cdots + \left[(aa)(bf) - (ab)(af)\right] = 0, \\ \left[(aa)(bc) - (ab)(ac)\right] y + \left[(aa)(cc) - (ac)^2\right] z + \cdots + \left[(aa)(cf) - (ac)(af)\right] = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ; \end{array}\right\} \quad (4)$$

mais ces nouvelles équations peuvent être écrites plus simplement.

2. En effet, on a d'abord les transformations connues :

$$\left.\begin{array}{l} (aa)(bb) - (ab)^2 = \sum (ab' - ba')^2,\quad (aa)(bc) - (ab)(ac) = \sum (ab' - ba')(ac' - ca'), \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (aa)(bf) - (ab)(af) = \sum (ab' - ba')(af' - fa'), \\ (aa)(cc) - (ac)^2 = \sum (ac' - ca')^2, \ldots (aa)(cf) - (ac)(af) = \sum (ac' - ca')(ef' - fe'), \ldots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (5)$$

D'un autre côté, si l'on élimine x entre les équations (1), combinées deux à deux de toutes les manières possibles, en supposant *nuls* les seconds membres, on forme un système dont les équations ont pour type :

$$(ab' - ba')y + (ac' - ca')z + (ad' - da')u + (ae' - ea')v + (af' - fa') = 0.$$

3. Soient donc, d'après cela :

$$\left.\begin{array}{l} ab' - ba' = g,\quad ac' - ca' = h,\quad ad' - da' = i,\quad ae' - ea' = j,\quad af' - fa' = k, \\ ab'' - ba'' = g',\quad ac'' - ca'' = h',\quad ad'' - da'' = i',\quad ae'' - ea'' = j',\quad af'' - fa'' = k', \\ a'b'' - b'a'' = g'',\quad a'c'' - c'a'' = h'',\quad a'd'' - d'a'' = i'',\quad a'e'' - e'a'' = j'',\quad a'f'' - f'a'' = k'', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (6)$$

Alors, les équations *auxiliaires*, dont il s'agit, deviennent :

$$\left.\begin{array}{l} gy + hz + iu + jv + k = 0, \\ g'y + h'z + i'u + j'v + k' = 0, \\ g''y + h''z + i''u + j''v + k'' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots ; \end{array}\right\} \dots\dots\dots \quad (7)$$

(*) GAUSS, *Méthode des Moindres carrés ;* traduction de Bertrand, p. 156.

et, si N est le nombre des équations (1), le nombre de celles-ci est $\frac{N(N-1)}{2} = N'$.

4. Au moyen des notations et des transformations (5), le système (4) prend la forme

$$\left.\begin{aligned}
(gg)\,y + (gh)\,z + (gi)\,u + (gj)\,v + (gk) &= 0,\\
(hg)\,y + (hh)\,z + (hi)\,u + (hj)\,v + (hk) &= 0,\\
(ig)\,y + (ih)\,z + (ii)\,u + (ij)\,v + (ik) &= 0,\\
(jg)\,y + (jh)\,z + (ji)\,u + (jj)\,v + (jk) &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

5. Supposons qu'entre les équations (7), prises deux à deux, on élimine y. L'équation-type étant

$$(gh' - hg')\,z + (gi' - ig')\,u + (gh' - hg')\,v + (gk' - kg') = 0,$$

posons

$$\left.\begin{array}{llll}
gh' - hg' = l, & gi' - ig' = m, & gj' - jg' = n, & gk' - kg' = o,\\
gh'' - hg'' = l', & gi'' - ig'' = m', & gj'' - jg'' = n', & gk'' - kg'' = o',\\
g'h'' - h'g'' = l'', & g'i'' - i'g'' = m'', & g'j'' - j'g'' = n'', & g'k'' - k'g'' = o'',\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ ;
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

nous aurons les $\frac{N'(N'-1)}{2} = N''$ équations :

$$\left.\begin{aligned}
lz + mu + nv + o &= 0,\\
l'z + m'u + n'v + o' &= 0,\\
l''z + m''u + n''v + o'' &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots &\ldots,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

donnant

$$\left.\begin{aligned}
(ll)\,z + (lm)\,u + (ln)\,v + (lo) &= 0,\\
(ml)\,z + (mm)\,u + (mn)\,v + (mo) &= 0,\\
(nl)\,z + (nm)\,u + (nn)\,v + (no) &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Ces équations *normales* sont celles qu'amènerait l'élimination de y, entre la première des équations (8) et chacune des trois autres.

6. Si l'on fait

$$\left.\begin{array}{lll}
lm' - ml' = p, & ln' - nl' = q, & lo' - ol' = r,\\
lm'' - ml'' = p', & ln'' - nl'' = q', & lo'' - ol'' = r',\\
l'm'' - m'l'' = p'', & l'n'' - n'l'' = q'', & l'o'' - o'l'' = r'',\\
\ldots & \ldots & \ldots\ ,
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

on aura les équations normales :

$$\left.\begin{aligned}(pp)\,u + (pq)\,v + (pr) &= 0,\\ (qp)\,u + (qq)\,v + (qr) &= 0,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

conséquences du système

$$\left.\begin{aligned}pu + qv + r &= 0,\\ p'u + q'v + r' &= 0,\\ p''u + q''v + r'' &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots &,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

renfermant $\frac{N''(N''-1)}{2} = N'''$ équations.

7. Continuant de même, on trouve l'équation normale

$$(ss)\,v + (st) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

dans laquelle

$$\left.\begin{aligned}pq' - qp' &= s, & pr' - rp' &= t,\\ pq'' - qp'' &= s', & pr'' - rp'' &= t',\\ p'p'' - q'p'' &= s'', & p'r'' - r'p'' &= t'',\\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots &\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

8. Posons enfin :

$$\left.\begin{aligned}st' - ts' &= \omega,\\ st'' - ts'' &= \omega',\\ s't'' - t's'' &= \omega'',\\ \ldots\ldots &;\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

de manière que

$$(\omega\omega) = \sum (st' - ts')^2; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

relation dont nous aurons besoin.

9. Avant d'aller plus loin, nous ferons une remarque importante, à laquelle donne lieu le calcul précédent.

Soient les équations

$$\left.\begin{aligned}ax + by + cz + \cdots + f &= 0,\\ a'x + b'y + c'z + \cdots + f' &= 0,\\ a''x + b''y + c''z + \cdots + f'' &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots &,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

en nombre *inférieur*, *égal* ou *supérieur* à celui des inconnues. Le système *normal*, déduit du système donné, est

$$\left.\begin{array}{l}(aa)\,x + (ab)\,y + (ac)\,z + \cdots + (af) = 0,\\ (ba)\,x + (bb)\,y + (bc)\,z + \cdots + (bf) = 0,\\ (ca)\,x + (cb)\,y + (cc)\,z + \cdots + (cf) = 0,\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Éliminant x, entre la première équation et chacune des équations suivantes, on forme le nouveau système normal :

$$\left.\begin{array}{l}(gg)\,y + (gh)\,z + \cdots + (gk) = 0,\\ (hg)\,y + (hh)\,z + \cdots + (hk) = 0,\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

En effet, d'après les relations (5) et (6) :

$$(aa)\,(bb) - (ab)^2 = (gg), \quad (aa)\,(bc) - (ab)\,(ac) = (gh), \ldots$$

Au lieu d'opérer de la sorte, commençons par éliminer x entre les équations (19), prises deux à deux, de toutes les manières possibles : nous obtiendrons, comme précédemment, les équations *auxiliaires :*

$$\left.\begin{array}{l}gy + hz + \cdots + k = 0,\\ g'y + h'z + \cdots + k' = 0,\\ g''y + h''z + \cdots + k'' = 0,\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Cela posé, *le système normal, déduit de ces équations* (7), *est le système* (8), *résultant du système normal* (3) (*).

(*) Cette propriété ne diffère pas de celle que nous avons signalée ci-dessus; mais les équations (1), annulation faite des seconds membres, étaient en nombre *supérieur* à celui des inconnues; tandis que, d'après la dernière remarque, le nombre des équations peut être quelconque. La propriété est donc générale.

II.

APPLICATIONS.

10. Soient les équations

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 1, \\ 7x + 2y + 3z &= 6, \\ 5x + 4y + 2z &= 7. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Le premier système normal est

$$\begin{aligned} 2(2x+3y+4z) + 7(7x+2y+3z) + 5(5x+4y+2z) &= 2.1 + 7.6 + 5.7, \\ 3(2x+3y+4z) + 2(7x+2y+3z) + 4(5x+4y+2z) &= 3.1 + 2.6 + 4.7, \\ 4(2x+3y+4z) + 3(7x+2y+3z) + 2(5x+4y+2z) &= 4.1 + 3.6 + 2.7; \end{aligned}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} 78x + 40y + 39z &= 79, \\ 40x + 29y + 26z &= 43, \\ 39x + 26y + 29z &= 36. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

On en déduit celui-ci :

$$\begin{aligned} (78.29 - 40^2)\,y + (78.26 - 40.39)\,z &= 78.43 - 40.79, \\ (78.26 - 39.40)\,y + (78.29 - 39^2)\,z &= 78.36 - 79.39; \end{aligned}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} 662y + 468z &= 194, \\ 468y + 741z &= -273. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Si l'on élimine x entre les proposées, prises deux à deux, on trouve

$$\left.\begin{aligned} 17y + 22z &= -5, \\ -7y - 16z &= 9, \\ 18y - z &= 19. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Les équations normales, déduites de ces équations (23), sont

$$\begin{aligned} (289 + 49 + 324)\,y + (374 + 112 - 18)\,z &= -85 - 63 + 342, \\ (274 + 112 - 18)\,y + (484 + 256 - 1)\,z &= -110 - 144 - 19; \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 662\,y + 468z &= 194, \\ 468\,y + 741z &= -273; \end{aligned}$$

comme ci-dessus.

11. On a encore, par l'élimination de y :

$$(662.741 - 468^2)z = -(642.273 + 468.194),$$

ou

$$271\,518z = -271\,518. \qquad (24)$$

Si l'on éliminait y entre les équations (23), prises deux à deux, on trouverait

$$\begin{aligned} -(17.16 - 7.22)\,z &= 17.9 - 7.5, \\ -(17.1 + 18.22)\,z &= 17.19 + 18.5, \\ (7.1 + 18.16)\,z &= -7.19 - 18.19; \end{aligned}$$

ou

$$-118z = +118, \quad -413z = 413, \quad 295z = -295.$$

L'équation *normale*, qui doit donner z, est donc

$$(118^2 + 413^2 + 295^2)\,z = -(118^2 + 413^2 + 295^2);$$

ou

$$(13\,924 + 170\,569 + 87\,025)\,z = -(13\,924 + 170\,569 + 87\,025);$$

ou enfin

$$271\,518z = -271\,518.$$

III.

CALCUL DE LA FONCTION Ω.

12. Prenons, dans chacun des systèmes (5), (8), (11), (13), (15), la première des équations qui le composent. Nous formerons ainsi le système

$$\left.\begin{aligned} (aa)\,x + (ab)\,y + (ac)\,z + (ad)\,u + (ae)\,v + (af) &= 0, \\ (gg)\,y + (gh)\,z + (gi)\,u + (gj)\,v + (gk) &= 0, \\ (ll)\,z + (lm)\,u + (ln)\,v + (lo) &= 0, \\ (pp)\,u + (pq)\,v + (pr) &= 0, \\ (ss)\,v + (st) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

employé par Gauss pour simplifier la fonction Ω. Cette réduction, assez compliquée dans l'ouvrage cité, peut être présentée comme il suit.

13. D'après les équations (1), (2), la valeur de Ω, ordonnée par rapport à x, est

$$(aa)\,x^2 + 2\left[(ab)\,y + (ac)\,z + (ad)\,u + (ae)\,v + (af)\right]x + \sum [by + cz + du + ev + f]^2.$$

Multipliant par (aa), et ayant égard à la première des équations (25), on trouve

$$(aa)\,\Omega = (aa)\sum [by + cz + du + ev + f]^2 - \left[(ab)\,y + (ac)\,z + (ad)\,u + (ae)\,v + af\right]^2. \quad (26)$$

Supposons le second membre ordonné suivant les carrés et les doubles produits des inconnues $y, z, u, \ldots$:

Le coefficient de y^2 est

$$(aa)\,(bb) - (ab)^2 = \sum (ab' - ba')^2 = (gg);$$

le coefficient de $2yz$ est

$$(aa)\,(bc) - (ab)\,(ac) = \sum (ab' - ba')\,(ac' - ca') = (gh);$$

etc.

Ainsi, la relation (26) devient

$$(aa)\,\Omega = \sum \left[(gg)\,y^2 + 2\,(gh)\,yz + (hh)\,z^2 + \cdots + 2\,(jk)\,v + (kk)\right],$$

ou

$$(aa)\,\Omega = \sum \left[gy + hz + iu + jv + k\right]^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

14. *Remarque.* Des formules (26), (27), on conclut *l'identité*

$$\left.\begin{aligned}&(aa)\sum [by + cz + du + ev + f]^2 = \\ &\quad\left[(ab)\,y + (ac)\,z + (ad)\,u + (ae)\,v + (af)\right]^2 + \sum [gy + hz + iu + jv + k]^2,\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

applicable à l'Algèbre et à la Théorie des nombres. Elle permet, par exemple, de *décomposer le produit d'une somme de* N *carrés par une somme de* N *carrés*, en une somme de $1 + \frac{N(N-1)}{2}$ *carrés;* de *décomposer la somme des carrés de* N^2 *polynômes entiers*, en $1 + \frac{N(N-1)}{2}$ *carrés de polynômes entiers;* etc.

15. Application (*).

$$(2^2+3^2+3^2+5^2+4^2)\left[(3y+4)^2+(y+1)^2+(2y+3)^2+(7y+4)^2+(3y+2)^2\right]$$
$$=(62y+48)^2+(7y+10)^2+(5y+6)^2+(y+12)^2+(6y+12)^2+(3y+6)^2$$
$$+(16y+7)^2+(5y+2)^2+(11y-3)^2+(y-6)^2+(13y+6)^2;$$

ou

$$(6y+8)^2+(2y+2)^2+(4y+6)^2+(14y+8)^2+(6y+4)^2$$
$$+(9y+12)^2+(3y+3)^2+(6y+9)^2+(21y+12)^2+(9y+6)^2$$
$$+(9y+12)^2+(3y+3)^2+(6y+9)^2+(21y+12)^2+(9y+6)^2$$
$$+(15y+20)^2+(5y+5)^2+(10y+15)^2+(35y+20)^2+(15y+10)^2$$
$$+(12y+16)^2+(4y+4)^2+(8y+12)^2+(28y+16)^2+(12y+8)^2$$
$$=(62y+48)^2+(7y+10)^2+(5y+6)^2+(y+12)^2+(6y+12)^2+(3y+6)^2$$
$$+(16y+7)^2+(5y+2)^2+(11y-3)^2+(y-6)^2+(13y+6)^2;$$

et, si l'on suppose $y = 1$:

$$(2^2+3^2+3^2+5^2+4^2)(7^2+2^2+5^2+11^2+5^2)$$
$$=110^2+17^2+11+13^2+18^2+9^2+23^2+7^2+8^2+5^2+19^2.$$

En effet, cette égalité équivaut à

$$63 \, . \, 224 = 14\,112;$$

ce qui est exact.

16. *Autre remarque.* Le produit d'une somme de N carrés, par une somme de N carrés, contient N^2 carrés. Donc, en vertu de l'identité (28), *une somme de* N^2 *carrés se réduit spontanément,* pour ainsi dire, *à une somme de* $1+\frac{N(N-1)}{2}$ *carrés* (**).

(*) Le calcul sera développé plus loin.

(**) Par exemple :

$$(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)=(ab+a'b')^2+(ab'-ba'),$$
$$(a^2+a'^2+a''^2)(b^2+b'^2+b''^2)=(ab+a'b'+a''b'')^2+(ab'-ba')^2+(a'b''-b'a'')^2+(a''b-b''a)^2,$$
$$(a^2+a'^2+a''^2+a'''^2)(b^2+b'^2+b''^2+b'''^2)=(ab+a'b'+a''b''+a'''b''')^2+(ab'-ba')^2+(ab''-ba'')^2$$
$$+(ab'''-ba''')^2+(a'b''-b'a'')^2+(a'b'''-b'a''')^2+(a''b'''-b''a''')^2;$$

identités évidentes et connues.

17. Dans les équations (7), remplaçons les seconds membres par w_1, w_1', w_1'',..., et considérons les équations *virtuelles*

$$\left.\begin{aligned} gy + hz + iu + jv + k &= w_1, \\ g'y + h'z + i'u + j'v + k' &= w_1', \\ g''y + h''z + i''u + j''v + k'' &= w_1'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Si ces équations résultaient d'observations faites, et qu'on voulût disposer des valeurs de $y, z,\ldots$, de manière à rendre minimum la quantité

$$\Omega_1 = w_1^2 + w_1'^2 + w_1''^2 + \cdots = \sum [gy + hz + iu + jv + k]^2,$$

on aurait à résoudre le système (25), abstraction faite de la première équation, c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} (gg)\,y + (gh)\,z + (gi)\,u + (gj)\,v + (gk) &= 0, \\ (ll)\,z + (lm)\,u + (ln)\,v + (lo) &= 0, \\ (pp)\,u + (pq)\,v + (pr) &= 0, \\ (ss)\,v + (st) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Conséquemment :

1°. *Si la somme des carrés des erreurs véritables*, w, w′, w″,..., *est un minimum, la somme des carrés des erreurs virtuelles*, w_1, w_1', w_1'',..., *est aussi un minimum* (*);

2° Ω *étant le premier minimum, et* Ω_1 *le second, on a*

$$(aa)\,\Omega = \Omega_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

(*) Il n'est peut-être pas inutile de faire observer que, d'après les équations (1) et (29), les erreurs *virtuelles* sont données, en fonction des erreurs *véritables*, par les formules

$$w_1 = aw' - a'w,\ w'_1 = aw'' - a''w,\ w''_1 = a'w'' - a''w', \ldots;$$

d'où l'on tire aisément

$$\Sigma w_1^2 = (aa)\,\Sigma w^2 - [aw + a'w' + a''w'' + \ldots]^2.$$

Dans le cas où Σw^2 est minimum, le terme négatif s'annule, en vertu des équations (1) et (3); et, par conséquent,

$$\Sigma w_1^2 = (aa)\,\Omega;$$

ce qui est la relation (31). Mais cette remarque ne prouverait pas que $(aa)\,\Omega$ est le minimum de Σw_1^2. La démonstration donnée dans le texte est donc nécessaire.

18. Sans nouveaux calculs, nous pouvons écrire, d'après cette équation (31) :

$$(gg)\,\Omega_1 = \Omega_2, \quad (ll)\,\Omega_2 = \Omega_3, \quad (pp)\,\Omega_3 = \Omega_4, \quad (ss)\,\Omega_4 = (\omega\omega); \text{ (*)} \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

et, par conséquent,

$$\Omega = \frac{(\omega\omega)}{(aa)\,(gg)\,(ll)\,(pp)\,(ss)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

On voit donc que *la quantité Ω, égale à une somme de carrés, est le quotient d'une somme de carrés, par un produit dont tous les facteurs sont des sommes de carrés.*

19. *Remarques.* I. Si, comme on le peut supposer, les coefficients $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots$ sont entiers, *les deux termes de la fraction* (33) *sont entiers*. Quant aux carrés $w^2, w'^2, \ldots$, qui composent Ω, ils sont généralement *fractionnaires.*

II. Dans cette même fraction (33), le dénominateur est le déterminant des quantités

$$\begin{array}{ccccc}
(aa), & (ab), & (ac), & (ad), & (ae), \\
0, & (gg), & (gh), & (gi), & (gj), \\
0, & 0, & (ll), & (lm), & (ln), \\
0, & 0, & 0, & (pp), & (pq), \\
0, & 0, & 0, & 0, & (ss),
\end{array}$$

qui entrent, comme coefficients des inconnues, dans le système (30).

(*) Si l'on considère les équations *virtuelles*

$$sv + t = w_4, \quad s'v + t' = w'_4, \quad s''v + t'' = w''_4, \ldots,$$

on trouve que le minimum de Σw_4^2 est donné par les relations

$$\Omega_4 = \Sigma\,(sv + t)^2, \quad (ss)\,v + (tt) = 0;$$

d'où résulte celle-ci :

$$(ss)\,\Omega_4 = (ss)\,(tt) - (st)^2 = \Sigma\,(st' - s't)^2;$$

c'est-à-dire (18)

$$(ss)\,\Omega_4 = (\omega\omega).$$

20. *Application et vérifications.* Soient les équations à deux inconnues x, y:

$$
\begin{aligned}
2x + 3y + 4 &= w,\\
3x + y + 1 &= w',\\
3x + 2y + 3 &= w'',\\
5x + 7y + 4 &= w''',\\
4x + 3y + 2 &= w^{\text{IV}}.
\end{aligned}
$$

1° Éliminant x, on trouve :

$$-7y - 10 = w_1,\quad -5y - 6 = w_1',\quad -y - 12 = w_1'',\quad -6y - 12 = w_1''',\quad 3y + 6 = w_1^{\text{IV}},$$
$$16y + 7 = w_1^{\text{V}},\quad 5y + 2 = w_1^{\text{VI}},\quad 11y - 3 = w_1^{\text{VII}},\quad y - 6 = w_1^{\text{VIII}},\quad -13y - 6 = w_1^{\text{IX}}.$$

2° Les valeurs de ω, ω', ω'',... sont:

$$
\begin{aligned}
&7.6 - 5.10 = -8,\quad 7.12 - 10.1 = 74,\quad 7.12 - 6.10 = 24,\\
&-7.6 + 10.3 = -12,\quad -7.7 + 10.16 = 111,\quad -7.2 + 5.10 = 36,\\
&7.3 + 11.10 = 131,\quad 7.6 + 1.10 = 52,\quad 7.6 - 13.10 = -88;\\
&5.12 - 6.1 = 54,\quad 5.12 - 6.6 = 24,\quad -5.6 + 3.6 = -12,\quad -5.7 + 16.6 = 61,\\
&-5.2 + 5.6 = 20,\quad 5.3 + 11.6 = 81,\quad 5.6 + 1.6 = 36,\quad 5.6 - 13.6 = -48;\\
&1.12 - 6.12 = -60,\quad -1.6 + 3.12 = 30,\quad -1.7 + 16.12 = 185,\\
&-1.2 + 5.12 = 58,\quad 1.3 + 11.12 = 135,\quad 1.6 + 1.12 = 18,\quad 1.6 - 13.12 = -150;\\
&-6.6 + 3.12 = 0,\quad -6.7 + 16.12 = 150,\quad -6.2 + 5.12 = 48,\\
&6.3 + 11.12 = 150,\quad 6.6 - 13.12 = -120;\\
&3.7 - 16.6 = -75,\quad 3.2 - 5.6 = -24,\quad -3.3 - 11.6 = -75,\\
&-3.6 - 1.6 = -24,\quad -3.6 + 13.6 = 60;\\
&16.2 - 5.7 = -3,\quad -16.3 - 11.7 = -125,\quad -16.6 - 1.7 = -103,\quad -16.6 + 13.7 = -5;\\
&-5.3 - 11.2 = -37,\quad -5.6 - 1.2 = -32,\quad -5.6 + 13.2 = -4;\\
&-11.6 + 1.3 = -63,\quad -11.6 - 13.3 = -105;\quad -1.6 - 6.13 = -84.
\end{aligned}
$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
(\omega\omega) = {} & (8^2 + 74^2 + 24^2 + 12^2 + 111^2 + 36^2 + 131^2 + 52^2 + 88^2)\\
& + (54^2 + 24^2 + 12^2 + 61^2 + 20^2 + 81^2 + 36^2 + 48^2)\\
& + (60^2 + 30^2 + 185^2 + 58^2 + 135^2 + 18^2 + 150^2)\\
& + (0^2 + 150^2 + 48^2 + 150^2 + 48^2 + 120^2) + (75^2 + 24^2 + 75^2 + 24^2 + 60^2)\\
& + (3^2 + 125^2 + 103^2 + 5^2) + (37^2 + 32^2 + 42^2) + (63^2 + 105^2) + 84^2
\end{aligned}
$$

$$= (64 + 5\,476 + 576 + 144 + 12\,321 + 1\,296 + 17\,161 + 2\,704 + 7\,744)$$
$$+ (2\,916 + 576 + 144 + 3\,721 + 400 + 6\,561 + 1\,296 + 2\,304)$$
$$+ (3\,600 + 900 + 34\,225 + 3\,364 + 18\,225 + 324 + 22\,500)$$
$$+ (22\,500 + 2\,304 + 22\,500 + 2\,304 + 14\,400) + (5\,625 + 576 + 5\,625 + 576 + 3\,600)$$
$$+ (9 + 15\,625 + 10\,609 + 25) + (1\,369 + 1\,024 + 16) + (3\,969 + 11\,025) + 7\,056$$
$$= 47\,486 + 17\,918 + 83\,138 + 64\,008 + 16\,002 + 26\,268 + 2\,409 + 14\,994 + 7\,056;$$

ou enfin

$$(\omega\omega) = 279\,279.$$

3° Les équations normales, déduites des proposées, sont

$$63x + 62y + 48 = 0,$$
$$62x + 72y + 53 = 0;$$

de manière que

$$(aa) = 2^2 + 3^2 + 3^2 + 5^2 + 4^2 = 63, \quad (ab) = 62, \quad (bb) = 72, \quad (af) = 48, \quad (bf) = 53,$$
$$(gg) = 7^2 + 5^2 + 1^2 + 6^2 + 3^2 + 16^2 + 5^2 + 11^2 + 1^2 + 13^2$$
$$= 49 + 25 + 1 + 36 + 9 + 256 + 25 + 121 + 1 + 269 = 692\ (^*).$$

4° Éliminant x, on trouve

$$692y + 363 = 0;$$

puis

$$y = -\frac{363}{692}, \quad x = -\frac{170}{692}, \quad w = \frac{1\,339}{692}, \quad w' = -\frac{181}{691}, \quad w'' = \frac{840}{692},$$
$$w''' = -\frac{623}{692}, \quad w^{\text{IV}} = -\frac{385}{692};$$
$$\Omega = \frac{1\,339^2 + 181^2 + 840^2 + 623^2 + 385^2}{692^2} = \frac{3\,067\,636}{692^2};$$

(*) D'après ces diverses valeurs, on a, par la formule (28) :

$$(2^2 + 3^2 + 3^2 + 5^2 + 4^2)\left[(3y + 4)^2 + (y + 1)^2 + (2y + 3)^2 + (7y + 4)^2 + (3y + 2)^2\right]$$
$$= (62y + 48)^2 + (7y + 10)^2 + (5y + 6)^2 + (y + 12)^2 + (6y + 12)^2 + (3y + 6)^2$$
$$+ (16y + 7)^2 + (5y + 2)^2 + (11y - 3)^2 + (y - 6)^2 + (13y + 6)^2;$$

identité considérée ci-dessus (**15**).

5° Au moyen de ces valeurs, et de la formule (33), on doit avoir

$$\frac{3\,067\,636}{692^2} = \frac{279\,279}{63.692},$$

ou

$$3\,067\,636.63 = 279\,279.692\,;$$

ce qui est exact (*).

6° Si, dans la dernière égalité, on remplace chaque facteur par la somme de carrés équivalente, on obtient

$$\begin{aligned}
&(1\,339^2 + 181^2 + 840^2 + 623^2 + 385^2)(2^2 + 3^2 + 3^2 + 5^2 + 4^2) = \\
&\quad(8^2 + 74^2 + 24^2 + 12^2 + 111^2 + 36^2 + 131^2 + 52^2 + 88^2 + 54^2 + 24^2 + 12^2 + 61^2 \\
&\qquad + 20^2 + 81^2 + 36^2 + 48^2 + 60^2 + 30^2 + 185^2 + 58^2 + 135^2 + 18^2 + 150^2 + 0^2 \\
&\qquad + 150^2 + 48^2 + 150^2 + 48^2 + 120^2 + 75^2 + 24^2 + 75^2 + 24^2 + 60^2 + 3^2 + 125^2 \\
&\qquad + 103^2 + 5^2 + 37^2 + 32^2 + 4^2 + 63^2 + 105^2 + 84^2) \\
&\qquad \times (7^2 + 5^2 + 1^2 + 6^2 + 3^2 + 16^2 + 5^2 + 11^2 + 1^2 + 13^2).
\end{aligned}$$

Le second membre est une somme de *quatre cent quarante carrés* (**); tandis que le premier membre en contient seulement *vingt-cinq*. Voici donc un nouvel exemple des réductions curieuses auxquelles donnent lieu les formules établies ci-dessus. Développons un peu ce sujet.

21. Pour fixer les idées, et ne pas compliquer inutilement les notations, nous avons supposé que les équations données (1) renfermaient seulement cinq inconnues : x, y, z, u, v. Mais il est visible que les formules (30), (31), (32), ... s'étendent à un nombre quelconque d'inconnues. En général, ν étant ce nombre, le diviseur de $(\omega\omega)$, dans la relation (33), sera le produit de ν facteurs, égaux chacun (sauf le premier) à une *somme de carrés de déterminants binaires*, ces déterminants se déduisant, les uns des autres, par

(*) En outre

$$\frac{3\,067\,636}{692} = \frac{279\,279}{63} = 4\,433.$$

Ainsi, le numérateur de la fraction qui représente Ω est divisible par $692 = (gg)$. Comme on le verra plus loin, cette réduction n'est pas fortuite.

(**) Par la suppression de 0^2.

une loi fort simple. Quant au dividende $(\omega\omega)$, il est également une *somme de carrés de déterminants binaires*. Afin de rendre le langage plus clair, nous dirons que ces premiers déterminants sont, respectivement, du 1^{er}, du 2^{me}, ... du $(\nu - 1)^e$ *ordre :* $(\omega\omega)$ est une somme de carrés de déterminants du ν^e ordre.

22. D'après ce que l'on a vu précédemment (3, 4), (aa) contient N termes, (gg) en contient $\frac{N(N-1)}{2} = N'$, (ll) en contient $\frac{N'(N'-1)}{2} = N''$, ... Ces nombres N, N', N'', ..., qui croissent très-rapidement, paraissent suivre une loi compliquée (*).

Dans l'exemple traité par Gauss, (**), $N = 11$, $\nu = 6$; par conséquent

$$\Omega = \frac{(\omega\omega)}{\text{ABCDEF}},$$

A étant une somme de			11	carrés,
B	»	»	55	»
C	»	»	1 485	»
D	»	»	1 101 870	»

etc.

23. Il est très-facile de trouver des expressions de Ω, différentes de celle qui a été donnée ci-dessus. D'abord, en vertu de la *définition* (2), cette quantité peut être représentée par $U_2 + U_1 + U_0$; U_2, U_1, U_0 étant des fonctions homogènes, en $x, y, z, \ldots$ Les équations (3) ne diffèrent pas des relations connues :

$$\frac{d\Omega}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dy} = 0, \ldots.$$

On conclut, de celles-ci,

$$x\frac{d\Omega}{dx} + y\frac{d\Omega}{dy} + z\frac{d\Omega}{dz} + \cdots = 0;$$

(*) Ils appartiennent à des *combinaisons de combinaisons de combinaisons*......

(**) *Méthode des moindres carrés*, p. 135.

puis, par le *théorème des fonctions homogènes*,

$$2\mathrm{U}_2 + \mathrm{U}_1 = 0.$$

Conséquemment,

$$\Omega = \frac{1}{2}\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

24. Ce n'est pas tout :

$$\mathrm{U}_1 = 2\sum f(ax + by + cz + du + ev) = 2\left[(af)\,x + (bf)\,y + (cf)\,z + (df)\,u + (ef)\,v\right],$$
$$\mathrm{U}_0 = \sum f^2 = (ff);$$

donc

$$\Omega = (af)\,x + (bf)\,y + (cf)\,z + (df)\,u + (ef)\,v + (ff); \quad \ldots \quad (35)$$

ou encore

$$\Omega = \sum fw, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

à cause des équations (1) (*).

25. Enfin, la fonction Ω peut être mise sous la forme d'une fraction dont les deux termes sont des déterminants.

En effet, écrivons ainsi les équations (3) et (35) :

$$\begin{aligned}
(aa)\,x + (ab)\,y + (ac)\,z + (ad)\,u + (ae)\,v + 0\,.\,\Omega &= -(af),\\
(ba)\,x + (bb)\,y + (bc)\,z + (bd)\,u + (be)\,v + 0\,.\,\Omega &= -(bf),\\
(ca)\,x + (cb)\,y + (cc)\,z + (cd)\,u + (ce)\,v + 0\,.\,\Omega &= -(cf),\\
(da)\,x + (db)\,y + (dc)\,z + (dd)\,u + (de)\,v + 0\,.\,\Omega &= -(df),\\
(ea)\,x + (eb)\,y + (ec)\,z + (ed)\,u + (ee)\,v + 0\,.\,\Omega &= -(ef),\\
(fa)\,x + (fb)\,y + (fc)\,z + (fd)\,u + (fe)\,v \;+\; \Omega &= -(ff).
\end{aligned}$$

Si l'on fait

$$\Delta = \begin{vmatrix}
(aa), & (ab), & (ac), & (ad), & (ae), \\
(ba), & (bb), & (bc), & (bd), & (be), \\
(ca), & (cb), & (cc), & (cd), & (ce), \\
(da), & (db), & (dc), & (dd), & (dc), \\
(ea), & (eb), & (ec), & (ed), & (ec),
\end{vmatrix}$$

(*) Nous rappelons ces formules connues, parce qu'elles nous serviront plus tard.

$$N = \begin{vmatrix} (aa), & (ab), & (ac), & (ad), & (ae), & (af), \\ (ba), & (bb), & (bc), & (bd), & (be), & (bf), \\ (ca), & (cb), & (cc), & (cd), & (ce), & (cf), \\ (da), & (db), & (dc), & (dd), & (de), & (df), \\ (ea), & (eb), & (ec), & (ed), & (ee), & (ef), \\ (fa), & (fb), & (fc), & (fd), & (fe), & (ff), \end{vmatrix}$$

il résulte, des plus simples notions de la théorie des déterminants, que

$$\Omega = \frac{N}{\Delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

26. *Remarque.* Si les valeurs de x, y, z, u, v, tirées des cinq premières équations, sont

$$x = \frac{\mathcal{A}}{\Delta}, \quad y = \frac{\mathcal{B}}{\Delta}, \quad z = \frac{\mathcal{C}}{\Delta}, \quad u = \frac{\mathcal{D}}{\Delta}, \quad v = \frac{\mathcal{E}}{\Delta};$$

la sixième équation, c'est-à-dire la formule (35), donne

$$\Omega = \frac{\mathcal{A}(af) + \mathcal{B}(bf) + \mathcal{C}(cf) + \mathcal{D}(dt) + \mathcal{E}(ef) + \Delta(ff)}{\Delta};$$

valeur identique avec la précédente, d'après les formules de Cramer.

27. Les valeurs de x, y, z, u, v, tirées des équations (25), sont des fractions dont le dénominateur commun est

$$(aa)\,(gg)\,(ll)\,(pp)\,(ss) = \frac{(\omega\omega)}{\Omega} = \mathrm{P}\ (^*) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

Par conséquent :

1° On peut supposer

$$w = \frac{A}{P}, \quad w' = \frac{A'}{P}, \quad w'' = \frac{A''}{P}, \ldots; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

$A, A', A'', \ldots$ étant des *quantités entières* ;

(*) On verra, plus loin, que ce dénominateur commun est réductible à (ss).

2° $$\Omega = \frac{\sum A^2}{P^2}; \quad \ldots \quad (40)$$

puis, par les formules (36) et (38) :

$$\Omega = \frac{\sum Af}{P} = \frac{(\omega\omega)}{P}. \quad \ldots \quad (41)$$

3° $$\sum Af = (\omega\omega), \qquad \sum A^2 = (aa)\,(gg)\,(ll)\,(pp)\,(ss)\,(\omega\omega). \quad \ldots \quad (42)$$

4° D'après la dernière relation, *une somme de* N^2 *carrés est le produit d'une somme de* N *carrés, par une somme de* N′ *carrés, par une somme de* N″ *carrés, ...*

28. *Vérifications.* Dans l'exemple ci-dessus (20) :

$$w = \frac{1\,339}{692}, \quad w' = -\frac{181}{692}, \quad w'' = \frac{840}{692}, \quad w''' = -\frac{625}{692}, \quad w^{\text{IV}} = -\frac{585}{692};$$

$$P = (aa)\,(gg) = 63\,.\,692;$$

donc

$$A = 1\,339\,.\,63, \quad A' = -181\,.\,63, \quad A'' = 840\,.\,63, \quad A''' = -625\,.\,63, \quad A^{\text{IV}} = -585\,.\,63.$$

Les relations (42) deviennent

$$63\;[1\,339\,.\,4 - 181\,.\,1 + 840\,.\,3 - 623\,.\,4 - 385\,.\,2] = 279\,279,$$

$$63^2\,[1\,339^2 + 181^2 + 840^2 + 623^2 + 385^2] = 63\,.\,692\,.\,279\,279;$$

ou

$$5\,356 - 181 + 2\,520 - 2\,492 - 770 = 4\,433,$$

$$1\,792\,921 + 32\,761 + 705\,600 + 388\,129 + 148\,225 = 3\,067\,636 = 692\,.\,4\,433;$$

et ces dernières sont identiques.

De plus,

$$1\,339^2 + 181^2 + 840^2 + 623^2 + 385^2 =$$
$$(7^2 + 5^2 + 1^2 + 6^2 + 5^2 + 16^2 + 5^2 + 11^2 + 1^2 + 15^2)\,(1\,339\,.\,4 - 181\,.\,1 + 840\,.\,3 - 623\,.\,4 - 385\,.\,2).$$

IV.

EXAMEN D'UN CAS PARTICULIER.

29. Supposons, comme dans l'exemple numérique précédent, qu'il y ait seulement deux inconnues; c'est-à-dire, prenons les équations

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + c = w, \\ a'x + b'y + c' = w', \\ a''x + b''y + c'' = w'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\} \qquad (43)$$

en nombre N. Si l'on pose, comme dans le paragraphe I :

$$\begin{array}{ll} ab' - ba' = g, & ac' - ca' = h, \\ ab'' - ba'' = g', & ac'' - ca'' = h', \\ a'b'' - b'a'' = g'', & a'c'' - c'a'' = h'', \\ \ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

on obtient les équations

$$(aa)\,x + (ab)\,y + (ac) = 0, \qquad (gg)\,y + (gh) = 0; \qquad (44)$$

d'où l'on tire

$$y = -\frac{(gh)}{(gg)}, \quad x = -\frac{(ac)\,(gg) - (ab)\,(gh)}{(aa)\,(gg)} \qquad (45)$$

La valeur de x ne doit différer, de celle de y, que par le changement de $a, a', a'', \ldots$, en $b, b', b'', \ldots$, *et vice versâ*. Par conséquent, si l'on fait

$$\begin{array}{l} bc' - cb' = \eta, \\ bc'' - cb'' = \eta', \\ b'c'' - c'b'' = \eta'', \\ \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

et si l'on a égard au changement de signe des binômes $g, g', g'', \ldots$, on aura

$$x = +\frac{(g\eta)}{(gg)}; \qquad (46)$$

et, en conséquence,

$$(ab)(gh) - (ac)(gg) = (aa)(g\eta),$$

ou

$$\sum a^2 \sum (ab' - ba')(bc' - cb') + \sum ac \sum (ab' - ba')^2 = \sum ab \sum (ab' - ba')(ac' - ca'),$$

ou enfin

$$\sum (ab' - ba')\left[(bc' - cb')\sum a^2 + (ca' - ac')\sum ab + (ab' - ba')\sum ac\right] = 0 \quad . \quad . \ (47)$$

30. *Remarque.* Lorsque $N = 3$, cette *identité* se réduit à

$$\begin{aligned}&(ab' - ba')\left[(bc' - cb')(a^2+a'^2+a''^2)+(ca' - ac')(ab+a'b'+a''b'')+(ab' - ba')(ac+a'c'+a''c'')\right]\\ +&(a'b''-b'a'')\left[(b'c''-c'b'')(a^2+a'^2+a''^2)+(c'a''-a'c'')(ab+a'b'+a''b'')+(a'b''-b'a'')(ac+a'c'+a''c'')\right]\\ +&(a''b - b''a)\left[(b''c - c''b)(a^2+a'^2+a''^2)+(c''a - a''c)(ab+a'b'+a''b'')+(a''b - b''a)(ac+a'c'+a''c'')\right]=0. \ (48)\end{aligned}$$

Si l'on représente par α, β, γ les faces d'un trièdre, et par α', β', γ' les faces correspondantes du trièdre *supplémentaire*, on la transforme aisément en

$$\sin\alpha\cos\beta' + \sin\beta\cos\gamma\cos\alpha' + \sin\gamma\cos\beta = 0;$$

ou, en introduisant les angles dièdres du premier trièdre :

$$\sin\gamma\cos\beta = \sin\alpha\cos B + \sin\beta\cos\gamma\cos A.$$

Or, cette dernière relation devient identique, au moyen des formules :

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}, \quad \cos B = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}.$$

31. Si, par analogie avec les formules (17), on prend

$$\begin{aligned}\omega &= gh' - hg',\\ \omega' &= gh'' - hg'',\\ \omega'' &= g'h'' - h'g'',\\ &\ldots\ldots,\end{aligned}$$

on a cette première expression :

$$\Omega = \frac{(\omega\omega)}{(aa)(gg)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

D'un autre côté (25) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} (aa), & (ab), \\ (ba), & (bb); \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} (aa), & (ab), & (ac) \\ (ba), & (bb), & (bc) \\ (ca), & (cb), & (cc) \end{vmatrix};$$

ou, plus simplement :

$$\Delta = (aa)(bb) - (ab)^2 = (gg) = \sum (ab' - ba')^2,$$

$$\begin{aligned} N &= (aa)\left[(bb)(cc) - (bc)^2\right] + (ba)\left[(cb)(ac) - (ab)(cc)\right] + (ca)\left[(ab)(bc) - (bb)(ac)\right] \\ &= (aa)\sum (bc' - cb')^2 + (ab)\sum (bc' - cb')(ca' - ac') + (ac)\sum (bc' - cb')(ab' - ba') \\ &= \sum (bc' - cb')\left[(bc' - cb')\sum a^2 + (ca' - ac')\sum ab + (ab' - ba')\sum ac\right]; \end{aligned}$$

donc

$$\Omega = \frac{\sum (bc' - cb')\left[(bc' - cb')\sum a^2 + (ca' - ac')\sum ab + (ab' - ba')\sum ac\right]}{\sum (ab' - ba')^2} \quad . \quad . \quad (50)$$

32. La comparaison des formules (49), (50) donne cette nouvelle identité :

$$\frac{\sum a^2 (ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'')^2}{\sum a^2}$$
$$= \sum (bc' - cb')\left[(bc' - cb')\sum a^2 + (ca' - ac')\sum ab + (ab' - ba')\sum ac\right]; \quad . \quad . \quad (51)$$

qui, dans le cas de $N = 3$, se réduit à

$$(ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'')^2 =$$
$$\sum (bc' - cb')\left[(bc' - cb')\sum a^2 + (ca' - ac')\sum ab + (ab' - ba')\sum ac\right]. \quad . \quad . \quad (52)$$

33. Application. Soient, par exemple :

$$\begin{aligned} a &= 2, & a' &= 3, & a'' &= 4, \\ b &= 3, & b' &= 1, & b'' &= 2, \\ c &= 5, & c' &= 2, & c'' &= 1; \end{aligned}$$

d'où résultent les valeurs des déterminants *binaires :*

$$\begin{aligned} bc' - cb' &= 1, & ca' - ac' &= 11, & ab' - ba' &= -7, \\ b'c'' - c'b'' &= -3, & c'a'' - a'c'' &= 5, & a'b'' - b'a'' &= 2, \\ b''c - c''b &= 7, & c''a - a''c &= -18, & a''b - b''c &= 8; \end{aligned}$$

puis

$$a(b'c'' - c'b'') + a'(b''c - c''b) + a''(bc' - cb') = 19,$$
$$\sum a^2 = 29, \qquad \sum ab = 17, \qquad \sum ac = 20.$$

L'égalité (52) devient donc

$$19^2 = [29 + 11.17 - 7.20] - 5[-5.29 + 5.17 + 2.20] + 7[7.29 - 18.17 + 8.20],$$

ou

$$561 = 29.59 - 17.150 + 20.45;$$

ce qui est exact.

34. *Remarque.* Le second membre de l'égalité (52) peut encore être écrit sous les deux formes :

$$\sum (ca' - ac')\left[(ca' - ac')\sum b^2 + (ab' - ba')\sum bc + (bc' - cb')\sum ba\right],$$
$$\sum (ab' - ba')\left[(ab' - ba')\sum c^2 + (bc' - cb')\sum ca + (ca' - ac')\sum cb\right];$$

car le premier membre est une fonction symétrique de a, b, c.

V.

THÉORÈMES SUR DES DÉTERMINANTS (*)

35. *Notations symboliques.* Soient n^2 quantités

$$\left.\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots & k_1, & l_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots & k_2, & l_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots & k_n, & l_n. \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

Représentons, par **A**, **B**, **C**, ... , **L** les *colonnes* du système : celui-ci sera représenté, symboliquement, par

A, B, C, ... L;

(*) Ces théorèmes, qui nous servent à compléter les recherches précédentes, sont, sinon nouveaux, du moins peu connus.

et nous désignerons ainsi :

$$dét\,(A, B, C, \ldots L),$$

le déterminant des quantités données.

36. Théorème. I. *Les déterminants des trois systèmes*

$$A, B \;\Big|\; M, B \;\Big|\; A + M, B,$$

satisfont à la relation

$$dét\,(A + M, B) = dét\,(A, B) + dét\,(M, B)\ (*) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (54)$$

37. Corollaires.

I. $$dét\,(A + M, B, C, \ldots) = dét\,(A, B, C, \ldots) + dét\,(M, B, C, \ldots). \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (55)$$

II. $$dét\,(A + M, B + N) = dét\,(A, B) + dét\,(A, N) + dét\,(M, B) + dét\,(M, N). \quad . \; . \quad (56)$$

III. $$\left.\begin{aligned} & dét\,(A + M,\ B + N,\ C + P) \\ = {} & dét\,(A, B, C) + dét\,(M, B, C) + dét\,(A, B, P) + dét\,(M, B, P) \\ + {} & dét\,(A, N, C) + dét\,(M, N, C) + dét\,(A, N, P) + dét\,(M, N, P) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (57)$$

IV. Etc. (**)

38. Application. *Connaissant*

$$\Delta_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{vmatrix} 3, & 2, & 4, \\ 5, & 1, & 3, \\ 6, & 7, & 2, \end{vmatrix} \end{array}, \qquad \Delta_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & N & P \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2, & 5, & 4, \\ 3, & 8, & 1, \\ 6, & 2, & 3; \end{vmatrix} \end{array}$$

trouver

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A+M & B+N & C+P \end{array} \\ \begin{vmatrix} 5, & 7, & 8, \\ 8, & 9, & 4, \\ 11, & 9, & 5. \end{vmatrix} \end{array}$$

(*) Pour la démonstration, presque inutile d'ailleurs, voir les *Bulletins de l'Académie*, tome XIII, p. 185.

(**) Comme moyen mnémonique, on peut effectuer les produits

$$(A + M)\ (B + N), \qquad (A + M)\ (B + N)\ (C + P), \ldots$$

en ayant soin de *ne pas intervertir l'ordre des facteurs.*

Soient les déterminants auxiliaires :

$$\Delta_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & N & C \end{array} \\ \begin{vmatrix} 3, & 5, & 4, \\ 5, & 8, & 3, \\ 6, & 2, & 2; \end{vmatrix} \end{array}, \quad \Delta_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & B & C \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2, & 2, & 4, \\ 3, & 1, & 5, \\ 6, & 7, & 2; \end{vmatrix} \end{array}, \quad \Delta_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & N & C \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2, & 5, & 4, \\ 3, & 8, & 3, \\ 6, & 2, & 2; \end{vmatrix} \end{array},$$

$$\Delta_5 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & P \end{array} \\ \begin{vmatrix} 3, & 2, & 4, \\ 5, & 1, & 1, \\ 6, & 7, & 3; \end{vmatrix} \end{array}, \quad \Delta_6 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & N & P \end{array} \\ \begin{vmatrix} 3, & 5, & 4, \\ 5, & 8, & 1, \\ 6, & 2, & 3; \end{vmatrix} \end{array}, \quad \Delta_7 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & B & P \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2, & 2, & 4, \\ 3, & 1, & 1, \\ 6, & 7, & 3. \end{vmatrix} \end{array}.$$

Cela posé :

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 3(2-21) + 5(28-4) + 6(6-4) = -57 + 120 + 12 = 75, \\
\Delta_2 &= 3(16-6) + 5(8-10) + 6(15-32) = 30 - 10 - 102 = -82, \\
\Delta_3 &= 2(2-21) + 3(28-4) + 6(6-4) = -38 + 72 + 12 = 46, \\
\Delta_4 &= 2(16-6) + 3(8-10) + 6(15-32) = 20 - 6 - 102 = -88, \\
\Delta_5 &= 3(3-7) + 5(28-6) + 6(2-4) = -12 + 110 - 12 = 86, \\
\Delta_6 &= 3(24-2) + 5(8-15) + 6(5-32) = 66 - 35 - 162 = -131, \\
\Delta_7 &= 2(3-7) + 3(28-6) + 6(2-4) = -8 + 66 - 12 = 46, \\
\Delta_8 &= 2(24-2) + 3(8-15) + 6(5-32) = 44 - 21 - 162 = -139.
\end{aligned}$$

Donc

$$\Delta = 75 - 82 + 46 - 88 + 86 - 131 + 46 - 139 = -187.$$

En effet,

$$\Delta = 5(45-36) + 8(72-35) + 12(28-72) = 45 + 296 - 528 = -187.$$

39. Autre corollaire.

$$\text{dét}\,(A, B - A, C - A, \ldots) = \text{dét}\,(A, B, C, \ldots) \quad (58)$$

Dans l'équation générale

$$\text{dét}\,(A + M, B + N, C + P, \ldots) = \text{dét}\,(A, B, C, \ldots) + \text{dét}\,(M, B, C, \ldots) + \cdots,$$

supposons

$$M = 0, \quad N = -A, \quad P = -A, \ldots$$

Tous les termes du second membre disparaissent, sauf le premier; donc, etc.

40. Application.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7, & 8, & 4, \\ 9, & 3, & 5, \\ 6, & 7, & 2, \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7, & 1, & -3, \\ 9, & -6, & -4, \\ 6, & 1, & -4. \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = 7(6-35) + 9(28-16) + 6(40-12) = -203 + 108 + 168 = 73;$$

$$\Delta_1 = 7(24+4) + 9(-3+4) + 6(-4-18) = 196 + 9 - 132 = 73 = \Delta.$$

41. *Décomposition d'un déterminant.* Considérons encore le système de n^2 quantités :

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, \dots & k_1, & l_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, \dots & k_2, & l_2, \\ . & . & . & . & . \\ a_n, & b_n, & c_n, \dots & k_n, & l_n, \end{matrix}$$

et décomposons-le en deux parties A, B :

$$\begin{array}{cccc|cccc} & \text{A} & & & & \text{B} & & \\ a_1, & b_1, & c_1, \dots & f_1, & g_1, & h_1, \dots & k_1, & l_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, \dots & f_2, & g_2, & h_2, \dots & k_2, & l_2, \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_n, & b_n, & c_n, \dots & f_n, & g_n, & h_n, \dots & k_n, & l_n. \end{array}$$

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ les *lignes* composant A, et $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$ celles qui composent B. Soient p le nombre des *colonnes* de A, $n-p$ celui des colonnes de B. Cherchons à former le déterminant Δ du système *résultant* donné, au moyen des déterminants des systèmes *composants*. A cet effet, prenons d'abord, pour plus de clarté, un cas particulier :

$$\begin{array}{ccc|cccc|} & \text{A} & & & & \text{B} & \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1, & e_1, & f_1, & g_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, & e_2, & f_2, & g_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3, & e_3, & f_3, & g_3, \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4, & e_4, & f_4, & g_4, \\ a_5, & b_5, & c_5, & d_5, & e_5, & f_5, & g_5, \\ a_6, & b_6, & c_6, & d_6, & e_6, & f_6, & g_6, \\ a\ , & b_7, & c_7; & d_7, & e_7, & f_7, & g_7. \end{array}$$

Dans Δ, le coefficient de $a_1b_2c_3$ est

$$d_4e_5f_6g_7 - d_4f_5e_6g_7 + \cdots = dét(\psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7).$$

Ce déterminant multiplie, non-seulement $a_1b_2c_3$, mais encore : $-b_1a_2c_3$, $+c_1a_2b_3$, etc. Une partie de Δ est donc

$$dét(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \times dét(\psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7) \ (^*).$$

Le coefficient de $a_1b_2c_4$, dans Δ, est

$$-d_3e_5f_6g_7 + \cdots = -dét(\psi_3, \psi_5, \psi_6, \psi_7).$$

En effet, le terme $a_1b_2d_3c_4e_5f_6g_7$ doit avoir le signe $-$. Ce coefficient multiplie

$$a_1b_2c_4 - b_1a_2c_4 + \cdots = dét(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4).$$

(*) Cette proposition, à peu près évidente, le devient tout à fait au moyen des remarques suivantes :

1° *Si l'on fait abstraction des signes, la partie* P *de* Δ, *qui contient les lettres* a, b, c, *affectées des indices* 1, 2, 3, *et les lettres* d, e, f, g, *affectées des indices* 4, 5, 6, 7, *est égale au produit du polynôme* dét $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, *par le polynôme* dét $(\psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7)$, *les termes de ces polynômes étant rendus positifs.*

En effet, un terme de P, tel que $b_1a_2c_3e_4g_5d_6f_7$, est décomposable en $b_1a_2c_3 \times e_4g_5d_6f_7$; et, réciproquement, le produit de deux termes $c_1b_2a_3$, $f_4d_5e_6g_7$ pris dans les polynômes dont il s'agit, est un terme de P.

2° Soient i, i', i'' les nombres respectifs d'inversions alphabétiques, dans $b_1a_2c_3$, $e_4g_5d_6f_7$, $b_1a_2c_3e_4g_5d_6f_7$: je dis que $i'' = i + i'$.

Quand on écrit, à la suite de $b_1a_2c_3$, les lettres $e_4g_5d_6f_7$, le nombre des inversions, d'abord égal à i, devient, successivement : i, i, $i+2$ (à cause des deux inversions ed, gd), $i+3 = i+i'$ (à cause de l'inversion gf).

3° *Si l'on a égard aux signes,*

$$P = dét(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \times dét(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4).$$

Les signes des *éléments*

$$b_1a_2c_3e_4g_5d_6f_7, \quad b_1a_2c_3, \quad e_4g_5d_6f_7$$

sont, respectivement, ceux des quantités

$$(-1)^{i''}, \quad (-1)^{i}, \quad (-1)^{i'};$$

donc, par ce qui précède,

$$P = \Sigma(-1)^i\, b_1a_2c_3 \times \Sigma(-1)^{i'}\, e_4g_5d_6f_7;$$

etc.

Une deuxième partie de Δ est donc

$$-\, dét\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4) \times dét\,(\psi_3, \psi_5, \psi_6, \psi_7):$$

il y a une inversion *numérique*, correspondant à celle qui provient de $a_1 b_2 c_4 \times d_3 e_5 f_6 g_7$.

Continuant de la même manière, on trouve

$$\begin{aligned}\Delta = {} & dét\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \times dét\,(\psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7) - dét\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \times dét\,(\psi_3, \psi_5, \psi_6, \psi_7) \\ & + dét\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \times dét\,(\psi_3, \psi_4, \psi_6, \psi_7) - \cdots;\end{aligned}$$

et, en général :

42. Théorème II (*).

$$\left.\begin{aligned}\Delta = {} & dét\,(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p) \times dét\,(\psi_{p+1}, \psi_{p+2}, \ldots \psi_n) \\ & - dét\,(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{p-1}, \varphi_{p+1}) \times dét\,(\psi_p, \psi_{p+2}, \ldots \psi_n) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (59)$$

chaque produit ayant le signe + ou le signe —, selon que les indices présentent un nombre pair ou un nombre impair d'inversions numériques.

43. Prenons, pour fixer les idées :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1, & e_1, & f_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, & e_2, & f_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_6, & b_6, & c_6, & d_6, & e_6, & f_6. \end{vmatrix}$$

Dans chaque *ligne*, divisons tous les termes par le premier ; et soit

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1, & \dfrac{b_1}{a_1}, & \dfrac{c_1}{a_1}, & \dfrac{d_1}{a_1}, & \dfrac{e_1}{a_1}, & \dfrac{f_1}{a_1}, \\ 1, & \dfrac{b_2}{a_2}, & \dfrac{c_2}{a_2}, & \dfrac{d_2}{a_2}, & \dfrac{e_2}{a_2}, & \dfrac{f_2}{a_2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \dfrac{b_6}{a_6}, & \dfrac{c_6}{a_6}, & \dfrac{d_6}{a_6}, & \dfrac{e_6}{a_6}, & \dfrac{f_6}{a_6}; \end{vmatrix};$$

(*) Ce théorème paraît dû à Laplace.

ou, ce qui est équivalent (*) :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \\ \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_2}{a_2}, & \frac{b_3}{a_3}, & \frac{b_4}{a_4}, & \frac{b_5}{a_5}, & \frac{b_6}{a_6}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_2}{a_2}, & \frac{f_3}{a_3}, & \frac{f_4}{a_4}, & \frac{f_5}{a_5}, & \frac{f_6}{a_6}. \end{vmatrix}$$

Il est visible que

$$\Delta_1 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \, \Delta' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

D'un autre côté, d'après le dernier corollaire (39) :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_4}{a_4} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_5}{a_5} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_6}{a_6} - \frac{b_1}{a_1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_2}{a_2} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_3}{a_3} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_4}{a_4} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_5}{a_5} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_6}{a_6} - \frac{f_1}{a_1}. \end{vmatrix}$$

ou simplement, à cause des termes nuls,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_4}{a_4} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_5}{a_5} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_6}{a_6} - \frac{b_1}{a_1}, \\ \frac{c_2}{a_2} - \frac{c_1}{a_1}, & \frac{c_3}{a_3} - \frac{c_1}{a_1}, & \frac{c_4}{a_4} - \frac{c_1}{a_1}, & \frac{c_5}{a_5} - \frac{c_1}{a_1}, & \frac{c_6}{a_6} - \frac{c_1}{a_1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{f_2}{a_2} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_3}{a_3} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_4}{a_4} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_5}{a_5} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_6}{a_6} - \frac{f_1}{a_1}. \end{vmatrix};$$

ou encore, en vertu de la relation (α) :

$$\Delta' = \frac{1}{a_1^5 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6} \Delta_2 ; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

(*) *Lorsque, dans un système de* n² *éléments, on remplace les colonnes par les lignes, et réciproquement, le déterminant ne change pas.*

pourvu que l'on suppose

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1b_2 - b_1a_2, & a_1c_2 - c_1a_2, & a_1d_2 - d_1a_2, & a_1e_2 - e_1a_2, & a_1f_2 - f_1a_2, \\ a_1b_3 - b_1a_3, & a_1c_3 - c_1a_3, & a_1d_3 - d_1a_3, & a_1e_3 - e_1a_3, & a_1f_3 - f_1a_3, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1b_6 - b_1a_6, & a_1c_6 - c_1a_6, & a_1d_6 - d_1a_6, & a_1e_6 - e_1a_6, & a_1f_6 - f_1a_6. \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

44. Les éléments de Δ_2 sont les *déterminants binaires* considérés au commencement de ce Mémoire. Pour abréger, représentons-les par

$$\begin{matrix} g_1, & h_1, & i_1, & j_1, & k_1, \\ g_2, & h_2, & i_2, & j_2, & k_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_5, & h_5, & i_5, & j_5, & k_5; \end{matrix}$$

de manière que Δ_2 soit le déterminant de ce nouveau système. Éliminant Δ' entre les équations (α), (β), on a cette relation simple et remarquable :

$$\Delta_1 = \frac{1}{a_1^4}\Delta_2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

De même, soient :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1, & o_1, \\ l_2, & m_2, & n_2, & o_2, \\ l_3, & m_3, & n_3, & o_3, \\ l_4, & m_4, & n_4, & o_4; \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} p_1, & q_1, & r_1, \\ p_2, & q_2, & r_2, \\ p_3, & q_3, & r_3, \end{vmatrix}, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} s_1, & t_1, \\ s_2, & t_2, \end{vmatrix};$$

les éléments de chaque déterminant étant déduits, de ceux du déterminant précédent, comme les éléments de Δ_2 l'ont été de ceux de Δ_1. L'égalité (δ) donne, successivement :

$$\Delta_2 = \frac{1}{g_1^3}\Delta_3, \qquad \Delta_3 = \frac{1}{l_1^2}\Delta_4, \qquad \Delta_4 = \frac{1}{p_1}\Delta_5;$$

et, en conséquence,

$$\Delta_1 = \frac{1}{a_1^4 g_1^3 l_1^2 p_1}\Delta_5 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon)$$

Nous pouvons, maintenant, énoncer cette proposition générale :

45. Théorème III. *Soient* $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\nu-1}$ *des déterminants composés de* $\nu^2, (\nu-1)^2, \dots, 2^2$ *éléments. Soient, respectivement,* $a_1, a_1', a_1'', \dots a_1^{(\nu-2)}$ *le premier élément de chacun d'eux, ces éléments se déduisant ainsi les uns des autres :*

$$a_1' = a_1 b_2 - b_1 a_2, \quad a_1'' = a_1' b_2' - b_1' a_2', \dots, a_1^{(\nu-2)} = a_1^{(\nu-3)} b_2^{(\nu-1)} - b_1^{(\nu-3)} a_2^{(\nu-1)}.$$

On a, entre Δ_1 et $\Delta_{\nu-1}$, *la relation*

$$\Delta_1 = \frac{\Delta_{\nu-1}}{(a_1)^{\nu-2}(a_1')^{\nu-3}\dots(a_1^{(\nu-3)})^1} \quad \dots\dots\dots \quad (60)$$

46. Corollaire. *Si les quantités données sont entières,* $\Delta_{\nu-1}$ *est divisible par* $(a_1)^{\nu-2}(a_2')^{\nu-3}\dots(a_1^{(\nu-3)})^1$.

47. Application et vérification.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2, & 3, & 5, & 4, & 7, \\ 3, & 7, & 2, & 4, & 3, \\ 6, & 2, & 4, & 5, & 3, \\ 5, & 2, & 3, & 6, & 4, \\ 7, & 5, & 2, & 4, & 3, \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5, & -11, & -4, & -15, \\ -14, & -22, & -14, & -56, \\ -11, & -19, & -8, & -27, \\ -11, & -31, & -20, & -43; \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -264, & -126, & -390, \\ -216, & -84, & -300, \\ -276, & -144, & -380; \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 264 \,.\, 84 - 216 \,.\, 126, & 264 \,.\, 300 - 216 \,.\, 390, \\ 264 \,.\, 144 - 276 \,.\, 126, & 264 \,.\, 380 - 276 \,.\, 390; \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 22\,176 - 27\,216, & 79\,200 - 84\,240, \\ 38\,010 - 34\,776, & 100\,320 - 107\,640; \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5\,040, & -5\,040 \\ 3\,240, & -7\,320 \end{vmatrix}$$

$$= 5\,040\,(7\,320 + 5\,240) = 5\,040 \,.\, 10\,560.$$

Ainsi, par la relation (60),

$$\Delta_1 = \frac{5\,040 \,.\, 10\,560}{2^3 \,.\, 5^2\,(-264)} = -\frac{252 \,.\, 1\,056}{264} = -1\,008.$$

Mais, si l'on fait

$$A_1 = 2, 3, 5; \quad M_1 = 4, 7; \quad A_2 = 3, 7, 2; \quad M_2 = 4, 3; \quad A_3 = 6, 2, 4; \quad M_3 = 5, 3;$$
$$A_4 = 5, 2, 3; \quad M_4 = 6, 4; \quad A_5 = 7, 5, 2; \quad M_5 = 4, 3;$$

on a, par le Théorème II (42) :

$$\begin{aligned}\Delta_1 = & \,\textit{dét}\,(A_1, A_2, A_3)\,\textit{dét}\,(M_4, M_5) - \textit{dét}\,(A_1, A_2, A_4)\,\textit{dét}\,(M_3, M_5) \\ & + \textit{dét}\,(A_1, A_2, A_5)\,\textit{dét}\,(M_3, M_4) + \textit{dét}\,(A_1, A_3, A_4)\,\textit{dét}\,(M_2, M_5) \\ & - \textit{dét}\,(A_2, A_3, A_4)\,\textit{dét}\,(M_1, M_5) + \textit{dét}\,(A_2, A_3, A_5)\,\textit{dét}\,(M_1, M_4) \\ & - \textit{dét}\,(A_2, A_4, A_5)\,\textit{dét}\,(M_1, M_3) + \textit{dét}\,(A_3, A_4, A_5)\,\textit{dét}\,(M_1, M_2) \\ = & - 132.2 + 108.3 - 138.2 + 0 + 96.2 - 66.3 + 12.16 - 96.26 + 23.66 + 0 \\ = & - 264 + 324 - 276 + 192 - 198 - 2\,496 + 1\,518 = - 1\,008;\end{aligned}$$

comme ci-dessus.

VI.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.

48. Soient des équations du premier degré, en nombre égal à celui des inconnues :

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz + du + ev + f = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d'u + e'v + f' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a^{\text{IV}}x + b^{\text{IV}}y + c^{\text{IV}}z + d^{\text{IV}}u + e^{\text{IV}}v + f^{\text{IV}} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (61)$$

Supposons que, par des éliminations successives, on en déduise le système

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz + du + ev + f = 0, \\ gy + hz + iu + jv + k = 0, \\ lz + mu + nv + o = 0, \\ pu + qv + z = 0, \\ sv + t = 0; \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (62)$$

dans lequel $g, h, \dots l, m, \dots s, t$ sont des déterminants *binaires* (*).

(*) $g = ab' - ba'$, $h = bc' - cb'$, ... $l = gh' - hg'$, ... ; c'est-à-dire que les éliminations sont faites dans le même ordre que celles qui nous ont donné, ci-dessus, les équations *réduites*.

D'après la dernière égalité,

$$v = -\frac{t}{s}.$$

Il y a lieu de remarquer, touchant cette expression :

1° Que *les deux termes sont divisibles par* a^3g^2l;

2° Que *les valeurs des inconnues* x, y, z, u *sont réductibles à la forme* $\frac{N}{s}$, N *étant une fonction entière des coefficients donnés.*

En effet :

1° Si l'on suppose les équations (61) résolues par les formules de Cramer, on a $v = -\frac{S}{\Delta}$. Cette fraction équivaut à $-\frac{t}{s}$. D'ailleurs (44), $\Delta = \frac{s}{a^3g^2l}$; donc

$$t = Sa^3g^2l.$$

2° Les valeurs des inconnues :

$$-\frac{t}{s},\quad -\frac{U}{ps},\quad -\frac{Z}{lps},\quad -\frac{Y}{glps},\quad -\frac{X}{aglps},$$

sont réductibles à

$$-\frac{S}{\Delta},\quad -\frac{P}{\Delta},\quad -\frac{L}{\Delta},\quad -\frac{K}{\Delta},\quad -\frac{H}{\Delta}.$$

A cause de la relation

$$s = \Delta a^3g^2l,$$

elles sont donc, à plus forte raison, réductibles à la forme $\frac{N}{s}$.

49. *Autre remarque.* t *est divisible par* a^3g^2l; U *est divisible par* pa^3g^2l; Z *est divisible par* $pl.\,a^3g^2l = pa^3g^2l^2$; Y *est divisible par* $plg.\,a^3g^2l = pa^3g^3l^2$; X *est divisible par* $plga.\,a^3g^2l = pa^4g^3l^2$.

50. Application. Le système donné étant

$$\begin{aligned}
2x + 3y + 5z + 4u + 7v + 3 &= 0,\\
3x + 7y + 2z + 4u + 3v + 1 &= 0,\\
6x + 2y + 4z + 5u + 3v + 2 &= 0,\\
5x + 2y + 3z + 6u + 4v + 7 &= 0,\\
7x + 5y + 2z + 4u + 3v + 6 &= 0,
\end{aligned}$$

on en déduit, successivement :

$$
\begin{aligned}
5y - 11z - 4u - 15v - 7 &= 0,\\
-14y - 22z - 14u - 36v - 14 &= 0,\\
-11y - 19z - 8u - 27v - 1 &= 0,\\
-11y - 31z - 20u - 43v - 13 &= 0;\\
-264z - 126u - 390v - 168 &= 0,\\
-216z - 84u - 300v - 82 &= 0,\\
-276z - 144u - 380v - 142 &= 0;\\
-5\,040u - 5\,040v - 14\,640 &= 0,\\
3\,240u - 7\,320v - 8\,880 &= 0;\\
5\,040 \,.\, 10\,560v + 92\,188\,800 &= 0;
\end{aligned}
$$

puis le système *résultant :*

$$
\begin{aligned}
2x + 3y + 5z + 4u + 7v + 3 &= 0,\\
5y - 11z - 4u - 15v - 7 &= 0,\\
-264z - 126u - 390v - 168 &= 0,\\
-5\,040u - 5\,040v - 14\,640 &= 0,\\
5\,040 \,.\, 10\,560v + 92\,188\,800 &= 0.
\end{aligned}
$$

On tire, de celui-ci :

$$
v = -\frac{92\,188\,800}{5\,040\,.\,10\,560} = -\frac{291}{168} = -\frac{1\,746}{1\,008}, \quad u = -\frac{197}{168} = -\frac{1\,182}{1\,008},
$$

$$
z = \frac{417}{168} = \frac{2\,502}{1\,008}, \quad y = \frac{122}{168} = \frac{732}{1\,008}, \quad x = -\frac{65}{168} = -\frac{590}{1\,008}.
$$

A cause de $\Delta = \Delta_1 = -1008$ (47), on a donc, dans cet exemple :

$$
S = 1\,746, \quad P = 1\,182, \quad L = 2\,502, \quad K = -732, \quad H = 390;
$$

$$
s = 5\,040\,.\,10\,560, \quad p = -5\,040, \quad l = -264, \quad g = 5, \quad a = 2;
$$

$$
t = 92\,188\,800, \qquad U = \frac{291}{168}\,.\,5\,040^2\,.\,10\,560 = 197\,.\,5\,040\,.\,30\,.\,10\,560,
$$

$$
Z = \frac{417}{168}\,.\,5\,040^2\,.\,10\,560\,.\,264 = 417\,.\,5\,040\,.\,30\,.\,10\,560\,.\,264, \text{ etc.}
$$

VII.

MOINDRES CARRÉS.

51. Soient, comme dans le paragraphe I :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (aa), & (ab), & (ac), \dots (af), \\ (ba), & (bb), & (bc), \dots (bf), \\ (ca), & (cb), & (cc), \dots (cf), \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (fa), & (fb), & (fc), \dots (ff); \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (gg), & (gh), & \dots\dots & (gk), \\ (hg), & (hh), & \dots\dots & (hk), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (kg), & (kh), & \dots\dots & (kk); \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} (ll), & (lm), & (ln), & (lo), \\ (ml), & (mm), & (mn), & (mo), \\ (nl), & (nm), & (nn), & (no), \\ (ol), & (om), & (on), & (oo); \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} (pp), & (pq), & (pr), \\ (qp), & (qq), & (qr), \\ (rp), & (rq), & (rr); \end{vmatrix},$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} (ss), & (st), \\ (ts), & (tt). \end{vmatrix}$$

D'après l'équation (ε) :

$$(\omega\omega) = (aa)^4 (gg)^3 (ll)^2 (pp)\, \Delta_1 .$$

Mais, d'un autre côté (58) :

$$\Omega = \frac{(\omega\omega)}{(aa)\,(gg)\,(ll)\,(pp)\,(ss)};$$

donc

$$\Omega = \frac{(aa)^3 (gg)^2 (ll)}{(ss)}\, \Delta_1 . \qquad (63)$$

Ainsi, *la dernière des équations réduites étant, par hypothèse,* $(ss)v + (st) = 0$, *la fonction* Ω, *qui représente le minimum de la somme des carrés des erreurs, est réductible à la forme* $\frac{\mathrm{N}}{(ss)}$, N *étant une quantité entière* (*).

52. Par analogie avec les valeurs (38), soient

$$w = \frac{\mathrm{W}}{(ss)}, \quad w' = \frac{\mathrm{W}'}{(ss)}, \quad w'' = \frac{\mathrm{W}''}{(ss)}, \ldots, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (64)$$

W, W′, W″, ... étant des quantités *entières* (**). On aura

$$\Omega = \frac{\sum \mathrm{W}^2}{(ss)^2};$$

puis, à cause de la formule (62) :

$$\Delta_2 = \frac{\sum \mathrm{W}^2}{(aa)^3 (gg)^2 (ll) (ss)} \ldots \ldots \ldots \quad (65)$$

Ainsi (les coefficients étant toujours supposés entiers), *la somme des carrés des numérateurs* W, W′, ... *est divisible par* $(aa)^3 (gg)^2 (ll) (ss)$ (***).

53. Application. Reprenons l'exemple déjà considéré (20) :

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4 &= w, \\ 3x + y + 1 &= w', \\ 3x + 2y + 3 &= w'', \\ 5x + 7y + 4 &= w''', \\ 4x + 3y + 2 &= w^{\text{IV}}. \end{aligned}$$

1° Nous en avons déduit les *équations normales :*

$$\begin{aligned} 63x + 62y + 48 &= 0, \\ 63x + 72y + 53 &= 0; \end{aligned}$$

(*) Cette proposition, que nous croyons nouvelle, résulte aussi de la formule (37), combinée avec la seconde remarque ci-dessus (48). Observons que, dans le cas actuel, *le diviseur* s *est remplacé par* (ss).

(**) Les nouvelles fractions sont, on le voit, beaucoup plus simples que les premières.

(***) En général, le diviseur serait $(a_1a_1)^{\nu-3}(a'_1a'_1)^{\nu-4}\ldots$

puis les *équations réduites :*

$$\begin{aligned} 63x + 62y + 48 &= 0, \\ 692y + 363 &= 0; \end{aligned}$$

puis

$$y = -\frac{363}{692}, \quad x = -\frac{170}{692}, \quad w = \frac{1\,339}{692}, \quad w' = -\frac{181}{692}, \quad w'' = \frac{840}{692},$$

$$w''' = -\frac{623}{692}, \quad w^{\text{IV}} = -\frac{385}{692}.$$

2° La valeur de Ω, réduite, est donnée par la formule

$$\Omega = \sum fw. \qquad \qquad (36)$$

Il en résulte

$$\Omega = \frac{1}{692}[4\,.\,1\,339 - 181 + 3\,.\,840 - 4\,.\,623 - 2\,.\,385] = \frac{4\,433}{692},$$

fraction équivalente à

$$\sum w^2 = \frac{1}{692^2}[1\,339^2 + 181^2 + 840^2 + 623^2 + 385^2] = \frac{3\,067\,636}{692}\cdot \text{(*)}$$

3° Si l'on suppose

$$\Delta = \begin{vmatrix} 63, & 62 \\ 62, & 72 \end{vmatrix}, \qquad N = \begin{vmatrix} 63, & 62, & 48 \\ 62, & 72, & 53 \\ 48, & 53, & \overset{(**)}{46} \end{vmatrix};$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \Delta &= 692, \\ N &= 63\,(72\,.\,46 - 53^2) + 62\,(53\,.\,48 - 62\,.\,46) + 48\,(62\,.\,53 - 72\,.\,48) \\ &= 63\,(3\,312 - 2\,809) + 62\,(2\,544 - 2\,852) + 48\,(3\,286 - 3\,456) \\ &= 63\,.\,503 - 62\,.\,308 - 48\,.\,170 = 31\,689 - 19\,096 - 8\,160 = 4\,433, \end{aligned}$$

on doit avoir aussi (25)

$$\Omega = \frac{N}{\Delta};$$

ce qui a lieu.

(*) 20 (5°).
(**) $46 = (cc) = 4^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2 + 2^2$.

4° La formule

$$(\omega\omega) = \Omega\,(aa)\,(gg)\,(ll)\,(pp)\,(ss) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

se réduit, dans le cas actuel, à

$$(\omega\omega) = \Omega\,(aa)\,(gg).$$

Donc

$$(\omega\omega) = \frac{4\,433}{692} \,.\, 63 \,.\, 692 = 279\,279\,;$$

résultat trouvé précédemment.

5° Enfin, comme on l'a déja vu (20, 6°) :

$$(1\,339^2 + 181^2 + 840^2 + 623^2 + 385^2)\,(2^2 + 5^2 + 3^2 + 5^2 + 4^2) =$$
$$(\omega\omega)\,(7^2 + 5^2 + 1^2 + 6^2 + 3^2 + 16^2 + 5^2 + 11^2 + 1^2 + 13^2)$$
$$= (8^2 + 74^2 + 24^2 + 12^2 + 111^2 + 36^2 + 131^2 + 52^2 + 88^2 + 54^2 + 24^2 + 12^2 + 61^2$$
$$+ 20^2 + 81^2 + 36^2 + 48^2 + 60^2 + 30^2 + 185^2 + 58^2 + 135^2 + 18^2 + 150^2 + 48^2$$
$$+ 150^2 + 48^2 + 120^2 + 75^2 + 24^2 + 75^2 + 24^2 + 60^2 + 5^2 + 125^2 + 105^2 + 5^2$$
$$+ 57^2 + 32^2 + 42^2 + 63^2 + 105^2 + 84^2)$$
$$\times\,(7^2 + 5^2 + 1^2 + 6^2 + 3^2 + 16^2 + 5^2 + 11^2 + 1^2 + 13^2),$$

ou

$$3\,067\,636 \,.\, 63 = 279\,279 \,.\, 69^2.$$

54. *Autre application.* 1° *Système donné :*

$$2x + 3y + 5z + 4u + 7 = w,$$
$$3x + 7y + 2z + 4u + 5 = w',$$
$$6x + 2y + 4z + 5u + 3 = w'',$$
$$5x + 2y + 3z + 6u + 4 = w''',$$
$$7x + 5y + 2z + 4u + 3 = w^{\text{IV}}.$$

2° *Équations normales :*

$$123x + 84y + 69z + 108u + 82 = 0,$$
$$84x + 91y + 53z + 82u + 71 = 0,$$
$$69x + 53y + 58z + 74u + 71 = 0,$$
$$108x + 82y + 74z + 109u + 91 = 0.$$

3° *Élimination de* x :

$$(123.91-84^2)y+(123.53-84.69)z+(123.82-84.108)u+(123.71-84.82)=0,$$
$$(123.53-84.69)y+(123.58-69^2)z+(123.74-69.108)u+(123.71-69.82)=0,$$
$$(123.82-108.84)y+(123.74-108.69)z+(123.109-108^2)u+(123.91-108.82)=0;$$

ou

$$(11\,193-7\,056)y+(6\,519-5\,796)z+(10\,086-9\,072)u+(8\,733-6\,888)=0,$$
$$(6\,519-5\,796)y+(7\,134-4\,761)z+(9\,102-7\,452)u+(8\,733-5\,658)=0,$$
$$(10\,086-9\,072)y+(9\,102-7\,452)z+(15\,407-11\,664)u+(11\,193-8\,856)=0;$$

ou

$$4\,137y+725z+1\,014u+1\,845=0,$$
$$725y+2\,375z+1\,650u+3\,075=0,$$
$$1\,014y+1\,650z+1\,743u+2\,337=0.$$

4° *Élimination de* y :

$$(4\,137.2\,375-725^2)z+(4\,137.1\,650-725.1\,014)u+(4\,137.3\,075-725.1\,845)=0,$$
$$(4\,137.1\,650-1\,014.725)z+(4\,137.1\,743-1\,014^2)u+(4\,137.2\,337-1\,014.1\,845)=0;$$

ou

$$(9\,817\,101-522\,729)z+(6\,826\,050-735\,122)u+(12\,721\,275-1\,333\,935)=0,$$
$$(6\,826\,050-735\,122)z+(7\,210\,791-1\,028\,196)u+(9\,668\,169-1\,870\,830)=0;$$

ou

$$9\,294\,372z+6\,092\,928u+11\,387\,340=0,$$
$$6\,092\,928z+6\,182\,595u+7\,797\,339=0;$$

ou

$$369.25\,188z+369.16\,512u+369.30\,860=0,$$
$$369.16\,512z+369.16\,755u+369.21\,131=0.$$

5° *Élimination de* z :

$$369^2(25\,188.16\,755-16\,512^2)u+369^2(25\,188.21\,131-16\,512.30\,860)=0,$$

ou

$$369^2.6^2(2\,099.5\,585-2\,752^2)u+369^2.12(2\,099.21\,131-5\,504.7\,715)=0,$$

ou

$$369^2.6^2(11\,722\,915-7\,573\,504)u+369^2.12(44\,353\,969-42\,463\,360)=0,$$

ou

$$369^2.6^2.4\,149\,411u+369^2.6^2.630\,203=0,$$

ou enfin

$$369^2 . 6^2 . 1\,379 . 3\,009u + 369^2 . 6^2 . 1\,379 . 457 = 0.$$

6° *Valeurs des inconnues* x, y, z, u :

$$u = -\frac{457}{3\,009};$$

$$z = -\frac{7\,715 . 3\,009 - 4\,128 . 457}{6\,297 . 3\,009} = -\frac{23\,214\,435 - 1\,886\,496}{6\,297 . 3\,009}$$

$$= -\frac{21\,327\,939}{6\,297 . 3\,009} = -\frac{3\,387}{3\,009};$$

$$y = -\frac{3\,075 . 3\,009 - 2\,373 . 3\,387 - 1\,650 . 457}{723 . 3\,009}$$

$$= -\frac{9\,252\,675 - 8\,037\,351 - 754\,050}{723 . 3\,009} = -\frac{461\,274}{723 . 3\,009} = -\frac{638}{3\,009};$$

$$x = -\frac{71 . 3\,009 - 53 . 638 - 58 . 3\,387 - 74 . 457}{69 . 3\,009}$$

$$= -\frac{213\,639 - 33\,814 - 196\,446 - 33\,818}{69 . 3\,009} = \frac{50\,439}{69 . 3\,009} = \frac{731}{3\,009}.$$

7° *Valeurs des erreurs :*

$$w = \frac{2 . 731 - 3 . 638 - 5 . 3\,387 - 4 . 457 + 7 . 3\,009}{3\,009}$$

$$= \frac{1\,462 - 1\,914 - 16\,935 - 1\,828 + 21\,063}{3\,009} = \frac{1\,848}{3\,009} = \frac{616}{1\,003};$$

$$w' = \frac{3 . 731 - 7 . 638 - 2 . 3\,387 - 4 . 457 + 3 . 3\,009}{3\,009}$$

$$= \frac{2\,193 - 4\,466 - 6\,774 - 1\,828 + 9\,027}{3\,009} = -\frac{1\,848}{3\,009} = -\frac{616}{1\,003};$$

$$w'' = \frac{6 . 731 - 2 . 638 - 4 . 3\,387 - 5 . 457 + 3 . 3\,009}{3\,009}$$

$$= \frac{4\,386 - 1\,276 - 13\,548 - 2\,285 + 9\,027}{3\,009} = -\frac{3\,696}{3\,009} = -\frac{1\,232}{1\,003};$$

$$w''' = \frac{5 . 731 - 2 . 638 - 3 . 3\,387 - 6 . 457 + 4 . 3\,009}{3\,009}$$

$$= \frac{3\,655 - 1\,276 - 10\,161 - 2\,742 + 12\,036}{3\,009} = \frac{1\,512}{3\,009} = \frac{504}{1\,003};$$

$$w^{\text{iv}} = \frac{7.731 - 5.638 - 2.5\,387 - 4.457 + 3.5\,009}{3\,009}$$
$$= \frac{5\,117 - 3\,190 - 6\,774 - 1\,828 + 9\,027}{3\,009} = \frac{2\,352}{3\,009} = \frac{784}{1\,003}.$$

8° *Moindre somme des carrés des erreurs :*

$$\Omega = \frac{1}{1\,003}(7.616 - 3.616 - 5.1\,232 + 4.504 + 3.784)$$
$$= \frac{1}{1\,003}(4\,312 - 1\,848 - 3\,696 + 2\,016 + 2\,352) = \frac{3\,136}{1\,003}.$$

On a aussi, par définition,

$$\Omega = \sum w^2 = \frac{616^2 + 616^2 + 1\,232^2 + 504^2 + 784^2}{1\,003^2}$$
$$= \frac{1}{1\,003^2}(379\,456 + 379\,456 + 1\,517\,824 + 254\,016 + 614\,656) = \frac{3\,145\,408}{1\,003^2} = \frac{3\,136}{1\,003}.$$

9° D'après le système résultant :

$$\begin{aligned}
123x + 84y + 69z + 108u + 82 &= 0,\\
4\,137y + 723z + 1\,014u + 1\,845 &= 0,\\
369.25\,188z + 369.16\,512u + 369.30\,860 &= 0,\\
369^2.6^2.1\,379.3\,009u + 369^2.6^2.1\,379.457 &= 0;
\end{aligned}$$

$$(aa) = 123, \quad (gg) = 4\,137, \quad (ll) = 369.25\,188, \quad (pp) = 369^2.6^2.1\,379.3\,009;$$

et, par conséquent,

$$(\omega\omega) = \frac{3\,136}{1\,003}.123.4\,137.369.25\,188.369^2.6^2.1\,379.3\,009 = 2^{10}.3^{12}.7^4.41^4.197^2.2\,099. \ (*)$$

(*) $(aa) = 2^2 + 3^2 + 6^2 + 5^2 + 7^2;$
$(gg) = 5^2 + 14^2 + 11^2 + 36^2 + 29^2 + 34^2 + 2^2 + 16^2 + 11^2$

est une somme de dix carrés; (ll) *est une somme de quarante-cinq carrés;* (pp), *une somme de neuf cent nonante carrés. Enfin* ($\omega\omega$) *est une somme de quatre cent quatre-vingt-neuf mille, cinq cent cinquante-cinq carrés.*