NOTES

D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE;

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présentées à la Classe des sciences, dans les séances des 14 avril, 9 mai, 11 novembre 1876 et 7 avril 1877.)

NOTES

D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE.

I

SUR LES DÉRIVÉES DE LA FONCTION $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

1. Si l'on désigne par y cette fonction, le calcul direct donne

$$\frac{dy}{dx} = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = (2x^2+1)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}},\quad \frac{d^3y}{dx^3} = (6x^3+9x)(1-x^2)^{-\frac{7}{2}},\ldots$$

On est donc conduit à supposer

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \mathrm{P}_n(1-x^2)^{-\frac{2n+1}{2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

P_n étant un *polynôme à coefficients entiers, du* n$^{\mathrm{e}}$ *degré, dans lequel les exposants sont de même parité.*

On conclut, de la formule (1),

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \left[(1-x^2)\frac{d\mathrm{P}_n}{dx} + (2n+1)\,x\mathrm{P}_n\right](1-x^2)^{-\frac{2n+3}{2}}.$$

Par conséquent, la loi supposée est vraie, et il existe, entre deux polynômes consécutifs, P_{n-1}, P_n, la relation

$$P_n = (1 - x^2)\frac{dP_{n-1}}{dx} + (2n - 1)xP_{n-1}. \qquad (2)$$

2. On a

$$y = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p} x^{2p}; \qquad (3)$$

puis, en prenant la dérivée n^e :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p} \cdot 2p(2p-1)\ldots(2p-n+1)x^{2p-n}. \qquad (4)\ (*)$$

3. La comparaison des formules (1), (4) donne

$$P_n = (1 - x^2)^{\frac{2n+1}{2}} \sum \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p} 2p(2p-1)\ldots(2p-n+1)x^{2p-n};$$

ou, si l'on développe $(1 - n^2)^{\frac{2n+1}{2}}$:

$$P_n = \sum \frac{1.3.5\ldots(2p-1)2p(2p-1)\ldots(2p-n+1)}{2.4.6\ldots 2p} x^{2p-n} \times \sum (-1)^q \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots(2n-2q+3)}{2.4.6\ldots 2q} x^{2q}. \ (5)$$

Ainsi, *le produit des deux séries est le polynôme entier* P_n.

De là résulte que si l'on suppose $2p + 2q - n = s$, $s > n$, on aura

$$\sum (-1)^{\frac{s+n}{2}-p} \frac{1.3.5\ldots(2p-1)2p(2p-1)\ldots(2p-n+1)}{2.4.6\ldots 2p} \cdot \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots(n+2p+3-s)}{2.4.6\ldots(s+n-2p)} = 0. \ (6)$$

Soient, par exemple, $n = 3$, $s = 5$. On doit trouver

$$\frac{1.3}{2.4}.4.3.2.\frac{7.5}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}.6.5.4.\frac{7}{2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.8.7.6 = 0;$$

(*) Dans cette nouvelle somme, la variable $2p$ doit être *égale ou supérieure à* n. La série *dérivée* (4) est convergente en même temps que la série *primitive* (3).

ou

$$3.3.7.5 - 3.5.5.7.2 + 3.5.7.7 = 0;$$

ou enfin

$$3 - 10 + 7 = 0;$$

etc.

4. L'égalité (1) peut être écrite ainsi :

$$y\frac{d^ny}{dx^n} = P_n(1-x^2)^{-(n+1)} = P_n\left[1 + \frac{n+1}{1}x^2 + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^4 + \cdots\right]. \quad . \quad (7)$$

Conséquemment, *le produit des séries* (3), (4), *à coefficients fractionnaires, est une série à coefficients entiers* (*).

5. De $y = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, ou

$$y^2(1-x^2) = 1,$$

on déduit

$$(1-x^2)y' - xy = 0,$$
$$(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0,$$
$$(1-x^2)y''' - 5xy'' - 4y' = 0,$$
$$(1-x^2)y^{\text{IV}} - 7xy''' - 9y'' = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(1-x^2)y^{(n)} - (2n-1)x\,y^{(n-1)} - (n-1)^2y^{(n-2)} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

puis, en vertu de l'équation (1),

$$P_n - (2n-1)x\,P_{n-1} - (n-1)^2(1-x^2)P_{n-2} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Comparant avec la formule (2), on a donc (par le changement de n en $n-1$) :

$$\frac{dP_n}{dx} = n^2P_{n-1}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

(*) Si $n=3$, l'égalité (7) devient

$$\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8+\cdots\right]\times\left[\frac{1.3}{2.4}.4.3.2x+\frac{1.3.5}{2.4.6}.6.5.4x^3+\cdots\right]$$
$$= (9x+6x^3)(1+4x^2+10x^4+20x^6+35x^8+\cdots);$$

ou

$$\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\frac{35}{128}x^8+\cdots\right)\left(9x+\frac{75}{2}x^3+\frac{735}{8}x^5+\frac{2\,835}{16}x^7+\frac{38\,115}{128}x^9+\cdots\right)$$
$$= 9x+42x^3+114x^5+240x^7+435x^9+\cdots;$$

ce qui est exact.

d'où

$$P_n = n^2 \int_0^x P_{n-1}\, dx + C_n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Quand n est *impair*, $C_{n=0}$. Quand n est *pair*, on voit, par la relation (9), que $C_n = (n-1)^2\, C_{n-2}$. Donc

$$C_n = (n-1)^2 (n-3)^2 \ldots 3^2 . C_2.$$

D'ailleurs, $P_2 = 2x^2 + 1 : C_2 = 1$, puis

$$C_n = [1.3.5 \ldots (n-1)]^2 \text{ (n } pair). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

6. Soit $A_{n,s}\, x^s$ le terme général de P_n. D'après la formule (11),

$$A_{n,s} = n^2 \frac{1}{s} A_{n-1,s-1}.$$

De même,

$$A_{n-1,s-1} = (n-1)^2 \frac{1}{s-1} A_{n-2,s-2},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$A_{n-s+1,1} = (n-s+1)^2 \frac{1}{1} \cdot A_{n-s,0}.$$

Or, $n - s$ est *pair* (1); donc

$$A_{n-s,0} = C_{n-s} = [1.3.5 \ldots (n-s-1)]^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

puis

$$A_{n-s} = \frac{[n(n-1) \ldots (n-s+1)^2][1.3.5 \ldots (n-s-1)]^2}{1.2.3 \ldots s}. \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Telle est la valeur des coefficients de x^s, dans P_n. On peut la réduire à la forme plus simple

$$A_{n,s} = \frac{1.2.3 \ldots n}{2^{n-s}} C_{n,s} . C_{n-s,\frac{n-s}{2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

7. *Remarque. n* étant *pair*,

$$A_{n,0} = \frac{1.2.3 \ldots n}{2^n} C_{n,\frac{n}{2}} = [1.3.5 \ldots (n-1)]^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Par conséquent, m *étant un nombre entier quelconque, la fraction*

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots 2m}{2^m}$$

est réductible à un nombre impair (*).

8. A cause de la formule (15), on a

$$P_n = \frac{1.2.3\ldots n}{2^n}\sum C_{n,s}\,.\,C_{n-s,\frac{n-s}{2}}\,.\,(2x)^s. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Si n est *pair*, on doit attribuer à s les valeurs $0, 2, 4, \ldots\ldots n$; et, si n est *impair*, supposer $s = 1, 3, 5, \ldots\ldots n$.

9. Dans le produit des séries

$$\sum \frac{1.3.5\ldots(2p-1)\,2p\,(2p-1)\ldots(2p-n+1)}{2.4.6\ldots 2p}x^{2p-n},$$
$$\sum (-1)^q \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots(2n-2q+3)}{2.4.6\ldots 2q}x^{2q},$$

supposons, comme précédemment (2), $2p+2q-n=s$, ou $2q=s+n-2p$. L'expression du coefficient de x^s sera

$$\sum (-1)^{\frac{s+n}{2}-p}\frac{1.3.5\ldots(2p-1)2p(2p-1)\ldots(2p-n+1)}{2.4.6\ldots 2p}\cdot\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots(n+2p+3-s)}{2.4.6\ldots(s+n-2p)}.$$

Mais ce coefficient est $A_{n,s}$; donc, par la formule (15),

$$\sum (-1)^{\frac{s+n}{2}-p}\frac{1.3.5\ldots(2p-1)2p(2p-1)\ldots(2p-n+1)}{2.4.6\ldots 2p}\cdot\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots(n+2p+3-s)}{2.4.6\ldots(s+n-2p)}$$
$$=\frac{1.2.3\ldots n}{2^{n-s}}C_{n,s}\,.\,C_{n-s,\frac{n-s}{2}}.$$

(*) Plus généralement : *si* p *est un nombre premier, la fraction*

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots pm}{p^m}$$

est réductible à un nombre entier, non divisible par p. En d'autres termes : *Dans le produit* $(m+1)(m+2)\ldots(mp-1)$, *le nombre premier* p *est* m − 1 *fois facteur;* ce qui est visible.

Pour simplifier cette remarquable sommation, j'observe que :

$$1^\circ\ \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p}\times 2p(2p-1)\ldots(2p-n+1)=\frac{1.2.3\ldots 2p}{4^p(1.2.3\ldots p)^2}\times 1.2.3\ldots n\times\frac{2p(2p-1)\ldots(2p-n+1)}{1.2\ldots n}$$

$$=\frac{1.2.3\ldots n}{4^p}C_{2p,p}\times C_{2p,n};$$

$$2^\circ\ \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots(n+p+3-s)}{2.4.6\ldots(s+n-2p)}=\frac{1}{2^{\frac{s+n}{2}-p}}\cdot\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots(n+p+3-s)}{1.2\ldots\left(\frac{s+n}{2}-p\right)}.$$

La relation précédente devient donc, après suppression d'un facteur commun,

$$\sum(-1)^{\frac{s+n}{2}-p}\frac{1}{2^{\frac{s+n}{2}+p}}C_{2p,p}\times C_{2p,n}\times\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots(n+p+3-s)}{1.2\ldots\left(\frac{s+n}{2}-p\right)}=\frac{1}{2^{n-s}}C_{n,s}\times C_{n-s,\frac{n-s}{2}}.\quad(18)$$

Dans celle-ci, la variable p doit satisfaire aux conditions

$$\frac{n}{2}\overline{\overline{<}}\,p<\frac{s+n}{2}.$$

Soient, par exemple, $n=9$, $s=5$. On peut faire $p=5,\ 6,\ 7$; et l'on doit trouver

$$\frac{1}{2^{12}}\cdot C_{10,5}\times C_{10,9}\times\frac{19.17}{1.2}-\frac{1}{2^{13}}C_{12,6}\times C_{12,9}\times\frac{19}{1}+\frac{1}{2^{14}}C_{14,7}\times C_{14,9}=\frac{1}{2^4}C_{9,5}\times C_{4,2};$$

ou, successivement :

$$\frac{252.10}{2^{12}}\cdot\frac{19.17}{2}-\frac{924.220}{2^{13}}\cdot 19+\frac{3432.2002}{2^{14}}=\frac{126.6}{2^4},$$

$$\frac{63.5}{1024}.19.17-\frac{231.110}{1024}\cdot 19+\frac{429.1001}{1024}=\frac{63.3}{4},$$

$$63.5.19.17-63.3.256=231.110.19-429.1001,$$

$$3.5.19.17-3.3.256=11.110.19-143.143,$$

$$3(1615-768)=121(190-169)$$

$$3.847=121.21,$$

$$77=11.7.$$

10. La détermination de $y^{(n)}$, et par suite celle de P_n, peuvent être présentées d'une autre manière. Posons

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = u, \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} = v; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

nous aurons

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,2}(1+x)^{-\frac{5}{2}}, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = -\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,2\,.\,2}(1+x)^{-\frac{7}{2}}, \ldots$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,2}(1-x)^{-\frac{5}{2}}, \quad \frac{d^3v}{dx^3} = \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,2\,.\,2}(1-x)^{-\frac{7}{2}}, \ldots;$$

donc, par la formule de Leibniz, et à cause de $y = uv$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}} - (1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\left[(1+x)-(1-x)\right],$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2^2}\left[3(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{5}{2}} - 2(1+x)^{-\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}} + 3(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{5}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2^2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\left[3(1+x)^2 - 2(1+x)(1-x) + 3(1-x)^2\right],$$

$$\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{1}{2^3}\left[3.5(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{7}{2}} - 3.3(1+x)^{-\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{5}{2}} + 3.3(1+x)^{-\frac{5}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}} - 3.5(1+x)^{-\frac{7}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2^3}(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}\left[1.3.5(1+x)^3 - 3.1.3.1(1+x)^2(1-x) + 3.1.1.3(1+x)(1-x)^2 - 1.3.5(1-x)^3\right],$$

. . . .

Conséquemment :

$$P_1 = \frac{1}{2}\left[(1+x)-(1-x)\right], \quad P_2 = \frac{1}{2^2}\left[1.3(1+x)^2 - 2.1.1(1+x)(1-x) + 1.3(1-x)^2\right],$$

$$P_3 = \frac{1}{2^3}\left[1.3.5(1+x)^3 - 3.1.3.1(1+x)^2(1-x) + 3.1.1.3(1+x)(1-x)^2 - 1.3.5(1-x)^3\right],$$

$$P_4 = \frac{1}{2^4}\left[1.3.5.7(1+x)^4 - 4.1.3.5.1(1+x)^3(1-x) + 6.1.3.1.3(1+x)^2(1-x)^2 \right.$$
$$\left. - 4.1.1.3.5(1+x)(1-x)^3 + 1.3.5.7(1-x)^4\right]$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned} P_n = \frac{1}{2^n}\Big[& 1.3.5\ldots(2n-1)(1+x)^n - \frac{n}{1}.1.3.5\ldots(2n-3).1.(1+x)^{n-1}(1-x) \\ & + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}1.3.5\ldots(2n-5).1.3(1+x)^{n-1}(1-x)^2 - \cdots \\ & \pm \frac{n}{1}1.1.3.5\ldots(2n-3)(1+x)(1-x)^{n-1} \mp 1.3.5\ldots(2n-1)(1-x)^n\Big]. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

11. Le terme général du second membre est

$$(-1)^k C_{n,k}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(n-k-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(k-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{n-k}(1-x)^k$$

$$=(-1)^k C_{n,k}\frac{\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(1+x)^{n-k}(1-x)^k$$

$$=\frac{\Gamma(n+1)}{\pi}(-1)^k C_{n,k}(1+x)^{n-k}(1-x)^k\int_0^1 \theta^{n-k-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{k-\frac{1}{2}}\,d\theta.$$

Par conséquent,

$$P_n=\frac{\Gamma(n+1)}{\pi}\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta\sum_0^n(-1)^k C_{n,k}(\theta+\theta x)^{n-k}(1-\theta-x+\theta x)^k.$$

La quantité sous le signe $\sum$ est le terme général de

$$\left[(\theta+\theta x)-(1-\theta-x+\theta x)\right]^n;$$

donc

$$P_n=\frac{\Gamma(n+1)}{\pi}\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}(x+2\theta-1^n)\,d\theta;$$

ou, si l'on fait $\theta=\cos^2\frac{\varphi}{2}$:

$$P_n=\frac{\Gamma(n+1)}{\pi}\int_0^\pi(x+\cos\varphi)^n\,d\varphi;\quad\ldots\ldots\ldots\quad(21)$$

expression assez simple.

12. Si on la substitue dans la relation (9), on trouve cette formule :

$$\int_0^\pi(x+\cos\varphi)^{n-2}\left[(x+\cos\varphi)\cos\varphi-(n-1)\sin^2\varphi\right]d\varphi=0;\quad\ldots\ldots\quad(22)$$

dont la vérification est facile.

II.

SOMMATION D'UNE SÉRIE. — INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION.

1. Parmi les Notes que l'illustre Legendre a placées à la suite de sa *Géométrie*, la plus remarquable me paraît être celle qui donne, en fraction continue, le développement de

$$\psi(z)=\frac{a}{z}\,\frac{1+\dfrac{a}{z+1}-\dfrac{1}{1\,.\,2}\dfrac{a^2}{(z+1)(z+2)}+\dfrac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\dfrac{a^3}{(z+1)(z+2)(z+3)}+\cdots}{1+\dfrac{a}{z}+\dfrac{1}{1\,.\,2}\dfrac{a^2}{z(z+1)}+\dfrac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\dfrac{a^3}{z(z+1)(z+2)}+\cdots};\qquad(1)$$

savoir,

$$\psi(z)=\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\cfrac{a}{z+3+\cdots}}}}\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

Ce développement résulte d'ailleurs des équations

$$\varphi(z)-\varphi(z+1)=\frac{a}{z(z+1)}\varphi(z+2),\quad\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

$$\psi(z)=\frac{a}{z}\,\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)};\quad\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

dans lesquelles

$$\varphi(z)=1+\frac{a}{z}+\frac{a^2}{1.2.z(z+1)}+\frac{a^3}{1.2.3.z(z+1)(z+2)}+\cdots\quad\ldots\quad(5)\ (*)$$

(*) La formule (4) est l'égalité (1), mise sous forme abrégée.

2. Changeons de notation, et soit

$$\varphi(k) = y = 1 + \frac{x}{k} + \frac{x^2}{1.2.k(k+1)} + \frac{x^3}{1.2.3.k(k+1)(k+2)} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Pour évaluer y, ou sommer la série, prenons la dérivée de $x^{k-1}y$:

$$(x^{k-1}y)' = (k-1)x^{k-2} + x^{k-1} + \frac{x^k}{1.2.k} + \frac{x^{k+1}}{1.2.3.k(k+1)} + \cdots$$

Multiplions par x^{2-k} les deux membres de cette équation, et prenons encore la dérivée; nous aurons

$$\left[x^{2-k}(x^{k-1}y)'\right]' = 1 + \frac{x}{1.k} + \frac{x^2}{1.2.k(k+1)} + \cdots = y;$$

ou

$$xy'' + ky' - y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Telle est l'équation qui, intégrée, ferait connaître y.

3. On tire, de l'équation (6) :

$$y' = \frac{1}{k}\left[1 + \frac{x}{1.(k+1)} + \frac{x^2}{1.2.(k+1)(k+2)} + \cdots\right],$$

ou

$$y' = \frac{1}{k}\varphi(k+1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

La relation (4) devient donc, après le changement de notation,

$$\psi(k) = x\frac{y'}{y}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$k\frac{d.\varphi(x,k)}{dx} = \varphi(x, k+1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)\ (*)$$

(*) Cette équation (10) nous paraît se rattacher au *Calcul des différences mêlées*, dont Biot, et d'autres Géomètres, se sont occupés au commencement du siècle.

4. Lorsque $k=\frac{1}{2}$, $\psi(k)=\sqrt{x}\frac{e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}}{e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}}$ (*). L'équation (9) devient

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}}{e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}}.$$

La fraction $\frac{e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est la dérivée de $e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}$; donc $y=y_1=e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}$ doit satisfaire à l'équation

$$xy''+\frac{1}{2}y'-y=0. \qquad (11)$$

C'est ce qui a lieu en effet. Connaissant cette *intégrale particulière*, on trouve, sans peine, l'intégrale générale

$$y=\mathrm{A}e^{2\sqrt{x}}+\mathrm{B}e^{-2\sqrt{x}}. \qquad (12)\ (^{**})$$

III.

UNE FORMULE COMBINATOIRE

1. Prenons les trois formules connues :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\cdots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}x^{2n}+\cdots, \qquad (1)$$

$$\operatorname{arc}\sin x=x+\frac{1}{1.2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}(\operatorname{arc}\sin x)^2=\frac{1}{1.2}x^2+\frac{2}{3.4}x^4+\frac{2.4}{3.5.6}x^6+\cdots+\frac{2.4.6\ldots2n}{3.5.7\ldots(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}+\cdots (3)(^{***})$$

(*) LEGENDRE, *Éléments de Géométrie* (1823), p. 291.

(**) La question précédente, traitée dans mon cours, au mois de novembre dernier (1875), a été l'occasion du remarquable travail de M. Le Paige, présenté à l'Académie (*Bulletin*, mai 1876).

(***) *Traité élémentaire des séries*, p. 102.

On conclut, de celle-ci :

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \cdots \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}x^{2n+1} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ainsi, *le produit des séries* (1), (2) *est égal à la série* (4).

2. Il est visible que

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} = \frac{1.2\ldots 2n}{(2.4.6\ldots 2n)^2} = \frac{1}{4^n}C_{2n,\,n}.$$

Par conséquent, si l'on fait le produit des séries (1), (2), et que l'on égale, à $\frac{2.4\ldots 2n}{3.5\ldots(2n+1)}$, le coefficient de x^{2n+1}, on a cette formule de sommation :

$$\left.\begin{aligned} &C_{2n,\,n} + \frac{1}{3}\,.\,C_{2n-2,\,n-1}\,.\,C_{2,1} + \frac{1}{5}\,.\,C_{2n-4,\,n-2}\,.\,C_{4,2} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\,.\,C_{2n,\,n} \\ &\qquad = 4^n\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Par exemple,

$$C_{10,5} + \frac{1}{3}C_{8,4}\,.\,C_{2,1} + \frac{1}{5}C_{6,3}\,.\,C_{4,2} + \frac{1}{7}C_{4,2}\,.\,C_{6,3} + \frac{1}{9}C_{2,1}\,.\,C_{8,4} + \frac{1}{11}C_{10,5}$$
$$= 4^5\frac{2.4.6.8.10}{3.5.7.9.11},$$

ou

$$252 + \frac{1}{3}\,.\,70\,.\,2 + \frac{1}{5}20\,.\,6 + \frac{1}{7}6\,.\,20 + \frac{1}{9}2\,.\,70 + \frac{1}{11}252 = \frac{4^9}{7.9.11},$$

ou

$$\frac{12}{11}252 + \frac{4}{9}140 + \frac{12}{7}24 = \frac{4^9}{7.9.11},$$

etc.

IV.

UNE INTÉGRALE DOUBLE.

1. Dans une Note qu'il a bien voulu me communiquer, et qui est encore inédite, M. Le Paige démontre cette *nouvelle relation entre les Nombres de Bernoulli :*

$$-(2q+1)\,B_{2q-1} = C_{2q,2}\,B_1\,.\,B_{2q-3} + C_{2q,4}\,.\,B_3\,B_{2q-5} + \cdots + C_{2q,2}\,B_{2q-3}\,B_1. \quad (1)\ (^*)$$

D'après *Plana :*

$$B_{2q-1} = \pm\, 4q\int_0^\infty \frac{t^{2q-1}dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Dans le second membre de l'égalité (A), substituons, à chacun des nombres de Bernoulli, la valeur résultant de cette formule; nous aurons

$$\pm\,(2q+1)\,B_{2q-1} = 16\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{dxdy}{(e^{2\pi x}-1)(e^{2\pi y}-1)}\,P, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

en supposant

$$P = 1\,(q-1)\,C_{2q,2}\,x\,y^{2q-3} + 2\,(q-2)\,C_{2q,4}\,x^3\,y^{2q-5} + 3\,(q-3)\,C_{2q,6}\,x^5\,y^{2q-7} + \cdots (q-1)\,1\,x^{2q-3}y. (3)$$

2. Les coefficients

$$1\,(q-1)\frac{2q\,(2q-1)}{1\,.\,2},\quad 2\,(q-2)\frac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},\quad 3\,(q-3)\,\frac{2q\,(2q-1)\ldots(2q-5)}{1\,.\,2\ldots 6},\ldots$$

se réduisent à

$$\frac{2q\,(2q-1)}{4}\,\frac{2q-2}{1},\quad \frac{2q\,(2q-1)}{4}\,\frac{(2q-2)(2q-3)(2q-4)}{1\,.\,2\,.\,3},\quad \frac{2q\,(2q-1)}{4}\,\frac{(2q-2)\ldots(2q-6)}{1\ldots.5},\ldots$$

Par conséquent,

$$P = \frac{1}{2}\,q\,(2q-1)\,[C_{2q-2,1}\,xy^{2q-3} + C_{2q-2,3}\,.\,x^3y^{2q-5} + C_{2q-2,5}\,.\,x^5y^{2q-7} + \cdots + C_{2q-2,1}\,x^{2q-3}y].$$

(*) *Bulletin de l'Académie,* mai 1876.

La quantité entre parenthèses est la somme des termes de rang pair, dans le développement de $(x+y)^{2q-2}$. Autrement dit, cette quantité égale $\frac{1}{2}\left[(x+y)^{2q-2}-(x-y)^{2q-2}\right]$. Donc

$$P=\frac{1}{4}q(2q-1)\left[(x+y)^{2q-2}-(x-y)^{2q-2}\right]; \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

puis

$$\pm(2q+1)B_{2q-1}=4q(2q-1)\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(x+y)^{2q-2}-(x-y)^{2q-2}}{(e^{2\pi x}-1)(e^{2\pi y}-1)}dx\,dy;$$

ou, par le changement de q en $q+1$:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(x+y)^{2q}-(x-y)^{2q}}{(e^{2\pi x}-1)(e^{2\pi y}-1)}dx\,dy=\mp\frac{2q+3}{4(q+1)(2q+1)}B_{2q+1}. \quad \ldots \quad (5)\ (*)$$

3. *Remarque.* — Si l'on considère la surface ayant pour équation

$$z=\frac{(x+y)^{2q}-(x-y)^{2q}}{(e^{2\pi x}-1)(e^{2\pi y}-1)},$$

laquelle est *asymptotique* au plan xy ; le volume de l'espace limité par cette surface et par les plans coordonnés est, non-seulement *fini*, mais *commensurable*.

4. *Remarque.* — Si, dans les deux expressions de P, (3), (4), on suppose $x=y=1$, il en résulte cette *identité :*

$$1(q-1)C_{2q,2}+2(q-2)C_{2q,4}+3(q-3)C_{2q,6}+\cdots+(q-1)1.C_{2q,2}=q(2q-1)4^{q-2}. \quad (6)$$

Par exemple,

$$1.4.\frac{10.9}{1.2}+2.3.\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}+3.2.\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}+4.1.\frac{10.9}{1.2}=5.9.64.$$

(*) On doit prendre le signe — si q est *impair.*

V.

UNE DÉCOMPOSITION DE FRACTION RATIONNELLE.

1. La théorie exposée dans tous les Traités d'Algèbre donne, successivement :

$$\frac{1}{(x-a)^n(x-b)^n}=\sum_{p=1}^{p=n}\frac{A_p}{(x-a)^p}+\sum_{p=1}^{p=n}\frac{B_p}{(x-b)^p}, \quad \ldots\ldots\ (1)$$

$$\frac{1}{(x-b)^n}=\sum_{p=1}^{p=n}A_p(x-a)^{n-p}+\cdots,$$

$$\frac{1}{(a-b+z)^n}=(a-b)^{-n}\left[1+\frac{z}{a-b}\right]^{-n}=\sum_{p=1}^{p=n}A_p z^{n-p}+\cdots, \quad \ldots\ (2)$$

$$A_p=(-1)^{n-p}C_{2n-p-1,\,n-p}\frac{1}{(a-b)^{2n-p}}, \quad \ldots\ldots\ (3)$$

$$\frac{1}{(x-a)^n(x-b)^n}=\sum_{p=1}^{p=n}(-1)^{n-p}C_{2n-p-1,\,n-p}\left[\frac{1}{(a-b)^{2n-p}(x-a)^p}+\frac{1}{(b-a)^{2n-p}(x-b)^p}\right]. \quad (4)$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-a)^3(x-b)^3}=\frac{4.3}{1.2}&\left[\frac{1}{(a-b)^5(x-a)}+\frac{1}{(b-a)^5(x-b)}\right]\\ -\frac{3}{1}&\left[\frac{1}{(a-b)^4(x-a)^2}+\frac{1}{(b-a)^4(x-b)^2}\right]\\ +&\left[\frac{1}{(a-b)^3(x-a)^3}+\frac{1}{(b-a)^3(x-b)^3}\right],\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(a-b)^5=6(x-a)^2(x-b)^2\left[(x-b)-(x-a)\right]-3(a-b)(x-a)(x-b)\left[(x-b)^2+(x-a)^2\right]\\ +(a-b)^2\left[(x-b)^3-(x-a)^3\right].\end{aligned}$$

2. En général, la relation (4) devient, si l'on fait disparaître les dénominateurs :

$$(a-b)^{2n}=\sum_{p=1}^{p=n}(-1)^{n-p}C_{2n-p-1,\,n-p}(a-b)^p(x-a)^{n-p}(x-b)^{n-p}\left[(x-b)^p+(a-x)\right]. \ (5)$$

Pour $x = 0$, cette identité se réduit à

$$(a-b)^{2n} = \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n-p} C_{2n-p-1,\, n-p} (a-b)^p (ab)^{n-p} \left[a^p + (-b)^p\right];$$

ou, par le changement de b en $-b$:

$$(a+b)^{2n} = \sum_{p=1}^{p=n} C_{2n-p-1,\, n-p} (a+b)^p (ab)^{n-p} (a^p + b^p)\ (^*);$$

ou enfin

$$(a+b)^{2n-1} = \sum_{p=1}^{p=n} C_{2n-p-1,\, n-p} (a+b)^{p-1} (ab)^{n-p} (a^p + b^p). \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

3. Si, dans le second membre, on met en facteur commun a^n, puis b^n, on trouve

$$\left.\begin{aligned} (a+b)^{2n-1} = a^n \Big[&(a+b)^{n-1} + \frac{n}{1}(a+b)^{n-2} b + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}(a+b)^{n-3} b^2 + \cdots + C_{2n-2,\, n-1} b^{n-1} \Big] \\ + b^n \Big[&(a+b)^{n-1} + \frac{n}{1}(a+b)^{n-2} a + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}(a+b)^{n-3} a^2 + \cdots + C_{2n-2,\, n-1} a^{n-1} \Big]. \end{aligned}\right\} (7)$$

Cette *formule du binôme* est un cas particulier de celle-ci :

$$\left.\begin{aligned} (a+b)^{p+q-1} = a^p \Big[&(a+b)^{q-1} + \frac{p}{1}(a+b)^{q-2} b + \frac{p(p+1)}{1 \cdot 2}(a+b)^{q-3} b^2 + \cdots + C_{p+q-2,\, q-1} b^{q-1} \Big] \\ + b^q \Big[&(a+b)^{p-1} + \frac{q}{1}(a+b)^{p-2} a + \frac{q(q+1)}{1 \cdot 2}(a+b)^{p-3} a^2 + \cdots + C_{p+q-2,\, p-1} a^{p-1} \Big], \end{aligned}\right\} (8)$$

que l'on peut déduire du *Problème des partis* (**).

(*) A cause de $(-1)^{n-p} \cdot (-1)^{n-p} = +1$.
(**) *Mélanges mathématiques*, p. 73.

VI.

SUR UNE FONCTION TRANSCENDANTE.

1. Dans le Mémoire intitulé : *Recherches sur quelques produits indéfinis,* j'ai considéré la fonction

$$F(q) = q + q^2 + q^4 + q^8 + \cdots, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

dont l'illustre Jacobi s'était occupé. On va voir que $F(q)$ représente la somme (inconnue) d'une série analogue à celle de Lambert.

2. LEMME. *Soit* N *un nombre entier. Soit* δ *un diviseur* IMPAIR *de* N, *composé d'un nombre* IMPAIR *de facteurs premiers, inégaux. Soit enfin* δ' *un diviseur* IMPAIR *de* N, *composé d'un nombre* PAIR *de facteurs premiers, inégaux. Cela posé, le nombre des diviseurs* δ, *égal au nombre des diviseurs* δ', *est* 2^{n-1}; n *représentant le nombre des facteurs premiers, impairs et inégaux, de* N.

Soient $a, b, c, d, e, \ldots$ ces facteurs premiers. Les valeurs de δ sont

$$a, b, c, d, \ldots, abc, abd, acd, bcd, \ldots, abcde, \ldots;$$

les valeurs de δ' sont

$$1, ab, ac, bc, \ldots, abcd, abce, bcde, \ldots$$

Or, par la théorie des combinaisons, on sait que le nombre des termes contenus dans chacune de ces deux lignes est 2^{n-1}; donc, etc.

3. Considérons la série

$$\varphi(q) = \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} - \frac{q^5}{1-q^5} - \frac{q^7}{1-q^7} - \frac{q^{11}}{1-q^{11}} - \frac{q^{13}}{1-q^{13}} + \frac{q^{15}}{1-q^{15}} - \frac{q^{17}}{1-q^{17}} - \frac{q^{19}}{1-q^{19}} + \frac{q^{21}}{1-q^{21}}$$
$$- \frac{q^{23}}{1-q^{23}} - \frac{q^{29}}{1-q^{29}} - \frac{q^{31}}{1-q^{31}} + \frac{q^{33}}{1-q^{33}} + \frac{q^{35}}{1-q^{35}} - \cdots,$$

ou, pour abréger,

$$\varphi(q)=\frac{q}{1-q}-\sum\frac{q^a}{1-q^a}+\sum\frac{q^{ab}}{1-q^{ab}}-\sum\frac{q^{abc}}{1-q^{abc}}+\cdots, \quad \ldots \quad (2)$$

a, b, c, d, ... étant des nombres *premiers, impairs* et *inégaux.*

Si chaque fraction est développée en série, la somme de toutes ces séries prendra la forme

$$A_1q_1 + A_2q^2 + \cdots + A_nq^n + \cdots;$$

ainsi

$$\varphi(q)=\sum_1^\infty A_nq^n. \quad \ldots \quad (3)$$

Cela posé, il y a deux cas à distinguer :

1° *Si* n *est une puissance de* 2, le terme A_nq^n provient, uniquement, de $\frac{q}{1-q}$; donc $A_n = 1$.

2° *Si* n *n'est pas une puissance de* 2, cet exposant a la forme $2^k a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$; A_n égale le nombre des diviseurs δ', moins le nombre des diviseurs δ; ou, d'après le lemme, $A_{n=0}$.

Conséquemment,

$$\varphi(q)=1+q+q^2+q^4+q^8+\cdots=F(q); \quad \ldots \quad (4)$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned}F(q)&=q+q^2+q^4+q^8+\cdots\\&=\frac{q}{1-q}-\sum\frac{q^a}{1-q^a}+\sum\frac{q^{ab}}{1-q^{ab}}-\sum\frac{q^{abc}}{1-q^{abc}}+\cdots\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

4. Si, dans cette égalité (5), on change q en $-q$, il vient

$$\begin{aligned}&-q+q^2+q^4+q^8+\cdots\\&=-\frac{q}{1+q}+\sum\frac{q^a}{1+q^a}-\sum\frac{q^{ab}}{1+q^{ab}}+\sum\frac{q^{abc}}{1+q^{abc}}+\cdots;\end{aligned}$$

puis, par soustraction,

$$q=\frac{q}{1-q^2}-\sum\frac{q^a}{1-q^{2a}}+\sum\frac{q^{ab}}{1-q^{2ab}}-\sum\frac{q^{abc}}{1-q^{2abc}}+\cdots,$$

c'est-à-dire :

$$\left.\begin{aligned}q=&\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^3}{1-q^6}-\frac{q^5}{1-q^{10}}-\frac{q^7}{1-q^{14}}-\frac{q^{11}}{1-q^{22}}-\frac{q^{13}}{1-q^{26}}+\frac{q^{15}}{1-q^{30}}-\frac{q^{17}}{1-q^{34}}\\&-\frac{q^{19}}{1-q^{38}}+\frac{q^{21}}{1-q^{42}}-\frac{q^{23}}{1-q^{46}}-\frac{q^{29}}{1-q^{58}}-\frac{q^{31}}{1-q^{62}}+\frac{q^{33}}{1-q^{66}}+\frac{q^{35}}{1-q^{70}}-\cdots\end{aligned}\right\} . \quad (6)$$

Cette relation remarquable s'accorde avec l'une des formules données, par M. Tchébychef, dans le *Journal de Liouville* (tome XVI, p. 340).

5. Dans la série

$$\frac{q}{1}+\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{3}+\frac{q^4}{4}+\frac{q^5}{5}+\frac{q^6}{6}+\frac{q^7}{7}+\cdots,$$

développement de $-\mathrm{l}(1-q)$, groupons ainsi les termes :

$$\begin{aligned}&\frac{q}{1}+\frac{q^2}{2}+\frac{q^4}{4}+\frac{q^8}{8}+\cdots\\&+\frac{q^3}{3}+\frac{q^6}{6}+\frac{q^{12}}{12}+\cdots\\&+\frac{q^5}{5}+\frac{q^{10}}{10}+\frac{q^{20}}{20}+\cdots\\&+\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad;\end{aligned}$$

nous aurons

$$-\mathrm{l}(1-q)=\sum_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{q^i}{i}+\frac{q^{2i}}{2i}+\frac{q^{4i}}{4i}+\cdots\right);$$

ou, ce qui est équivalent :

$$-\mathrm{l}(1-q)=\sum_{i=1}^{i=\infty}\int_0^q dq\,(q^{i-1}+q^{2i-1}+q^{4i-1}+\cdots);$$

i étant *impair*.

La nouvelle série égale $\frac{F(q^i)}{q}$; donc

$$-\mathrm{l}(1-q)=\sum_{i=1}^{i=\infty}\int_0^q\frac{dq}{q}F(q^i). \qquad (7)$$

Ainsi, la transcendante $F(q)$, déjà rattachée aux fonctions elliptiques, peut être introduite dans le développement de la fonction $\mathrm{l}(1-q)$ (*).

(*) Pour vérifier, *a posteriori*, la relation (7), il suffit d'intervertir l'ordre des signes $\sum, \int$: le second membre se réduit, tout de suite, à $\int_0^q\frac{dq}{1-q}=-\mathrm{l}(1-q)$.

VII.

SUR LA SÉRIE HARMONIQUE.

1. Si, dans la dernière équation de la Note VI, on suppose $q = 1$, les deux membres deviennent infinis; en sorte que la transformation précédente n'est pas applicable à la *série harmonique :*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Afin de simplifier, néanmoins, le calcul de

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

je groupe ainsi les termes du second membre :

$$\begin{array}{l} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \\ + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \cdots \\ + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \cdots \\ + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \cdots \\ + \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{array}$$

Soit i un nombre *impair* quelconque, non supérieur à n. *Le quotient de* n *par* i *est compris entre deux puissances de* 2, *consécutives;* de manière que

$$2^\alpha < \frac{n}{i} < 2^{\alpha+1}.$$

Cela posé, les fractions

$$\frac{1}{i}, \frac{1}{2i}, \frac{1}{4i}, \cdots \frac{1}{2^\alpha i}$$

ont pour somme

$$\frac{1}{i}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^\alpha}\right)=\frac{1}{i}\,\frac{2^{\alpha+1}-1}{2^\alpha}.$$

Donc

$$S_n=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{i}\,\frac{2^{\alpha+1}-1}{2^\alpha}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en supposant, pour plus de régularité, n *impair*.

2. La formule (10) abrége, singulièrement, le calcul de S_n. Soit, par exemple, $n=101$. On trouve

$$S_{101}=\frac{127}{64}+\frac{1}{3}\cdot\frac{63}{32}+\frac{1}{5}\cdot\frac{31}{16}+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)\frac{15}{8}+\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{25}\right)\frac{7}{4}$$
$$+\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{29}+\cdots+\frac{1}{49}\right)\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{53}+\cdots+\frac{1}{101}\right).$$

Ainsi, au lieu de *cent* additions de termes appartenant à la série harmonique, il en reste seulement $2+6+11+25=44$.

3. On simplifie la formule (1) en prenant α pour *variable*. A cet effet, divisons n par $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^\alpha, 2^{\alpha+1}, \ldots$ Soient, en général, $a, a+2, a+4, \ldots b$ les nombres impairs compris entre $\frac{n}{2^\alpha}$ et $\frac{n}{2^{\alpha+1}}$. Nous pouvons écrire :

$$S_n=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{b}\right)\frac{2^{\alpha+1}-1}{2^\alpha}. \quad \ldots\ldots \quad (2)\ (^*)$$

L'exemple ci-dessus est une application de cette dernière formule.

(*) Soit, suivant la notation de Legendre, $E\left(\frac{n}{2^{\alpha+2}}\right)=q$, le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2^{\alpha+2}}$. Le nombre des fractions $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+2}, \ldots, \frac{1}{b}$ égale q ou $q+1$, selon que $E\left(\frac{n}{2^\alpha}\right)$ est *pair* ou *impair*.

VIII.

SUR L'ÉQUATION D'EULER : $y(c+nx)\,dx - (y+a+bx+nx^2)\,dy = 0$.

I. L'intégration de cette équation, déjà simplifiée par Le Besgue (*), peut l'être encore, de la manière suivante.

J'observe, en premier lieu, que si $n = 0$, on rend l'équation homogène en posant $a + bx = z$. Supposant donc n différent de zéro, et remplaçant y par ny, on a

$$y\left(\frac{c}{n}+x\right)dx - \left[y+\frac{a}{n}+\frac{b}{n}x+x^2\right]dy = 0;$$

ou, par un simple changement de notation :

$$y(x-c)\,dx = \left[y+(x-a)(x-b)\right]dy. \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Telle est donc la forme à laquelle on peut réduire l'équation d'Euler.

II. Soit

$$u = \frac{y(x-c)}{y+(x-a)(x-b)}\ (^{**}): \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

l'équation (4) devient

$$\frac{dx}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{du}{u(u+c-a)(u+c-b)};$$

ou, si l'on fait

$$u + c = v: \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\frac{dx}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{dv}{(v-a)(v-b)(v-c)}; \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

(*) *Journal de Liouville*, tome X.
(**) Transformation employée par Euler.

III. Les quantités a, b, c étant supposées inégales, on a

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\sum\frac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)},$$

ou

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\sum\frac{c-b}{x-a};$$

donc l'équation (4) devient

$$\left(\frac{c-b}{x-a}+\frac{a-c}{x-b}+\frac{b-a}{x-c}\right)dx=\left(\frac{c-b}{v-a}+\frac{a-c}{v-b}+\frac{b-a}{v-c}\right)dv; \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

de sorte que l'intégrale cherchée est

$$(c-b)\,\mathrm{l}\frac{x-a}{v-a}+(a-c)\,\mathrm{l}\frac{x-b}{v-b}+(b-a)\,\mathrm{l}\frac{x-c}{v-c}=const. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

IV. D'après la formule (3) :

$$v-c=\frac{y(x-c)}{y+(x-a)(x-b)},$$

$$v-a=(x-a)\frac{y+(c-a)(x-b)}{y+(x-a)(x-b)},$$

$$v-b=(x-b)\frac{y+(c-b)(x-a)}{y+(x-a)(x-b)},$$

$$\frac{x-a}{v-a}=\frac{y+(x-a)(x-b)}{y+(c-a)(x-b)},\quad \frac{x-b}{v-b}=\frac{y+(x-a)(x-b)}{y+(c-b)(x-a)},\quad \frac{x-c}{v-c}=\frac{y+(x-a)(x-b)}{y}. \quad (7)$$

A cause de

$$(c-b)+(a-c)+(b-a)=0,$$

l'intégrale (6) devient donc

$$(c-b)\,\mathrm{l}\left[y+(c-a)(x-b)\right]+(a-c)\,\mathrm{l}\left[y+(c-b)(x-a)\right]+(b-a)\,\mathrm{l}\,y=const.;$$

ou, sous une forme plus simple :

$$(c-b)\,\mathrm{l}\left[1+\frac{(c-a)(x-b)}{y}\right]-(c-a)\,\mathrm{l}\left[1+\frac{(c-b)(x-a)}{y}\right]=\mathrm{l}\,k. \quad . \quad . \quad (8)$$

IX.

SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI ET D'EULER.

Dans le petit Mémoire qui porte ce même titre, après avoir supposé

$$\operatorname{tg} x = G_1 \frac{x}{1} + G_3 \frac{x^3}{1.2.3} + G_5 \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots,$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + G_2 \frac{x^2}{1.2} + G_4 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots,$$

j'ai donné la relation

$$G_i - C_{i-1,1} G_{i-1} + C_{i-1,3} G_{i-3} - C_{i-5,5} G_{i-5} + \cdots = 0, \quad \ldots\ldots \quad \text{(S)}$$

qui permet de former G_2, G_3, G_4, ..., en partant de $G_1 = 1$. Mais le calcul exige des *additions* et des *soustractions :* il serait abrégé si l'on n'avait à faire que des *additions* (*). Tel est l'objet de la présente Note.

I.

Si l'on fait

$$y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x},$$

d'où résulte :

$$y' = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}, \quad 1 + y^2 = \frac{2 + 2\sin x}{\cos^2 x},$$

on a

$$y' = \tfrac{1}{2}(1 + y^2);$$

et, par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} & G_1 + G_2 \frac{x}{1} + \cdots + G_{i+1} \frac{x^i}{1.2\ldots i} + \cdots = \\ & \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 + G_1 \frac{x}{1} + G_2 \frac{x^2}{1.2} + \cdots + G_{i+1} \frac{x^i}{1.2\ldots i} + \cdots\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 131.

Développant le second membre, et identifiant, on trouve

$$G_{i+1} = \tfrac{1}{2}\left[G_i + C_{i,1} G_1 G_{i-1} + C_{i,2} G_2 G_{i-2} + \cdots + C_{i,1} G_{i-1} G_1 + G_i\right]; \quad \ldots \quad (2)$$

formule beaucoup plus commode que celle qui résulte de l'égalité (S). A cause de $G_0 = 1$, on peut l'écrire sous la forme *symbolique :*

$$G_{i+1} = \tfrac{1}{2}\left[G + G\right]^i.$$

II.

Le calcul précédent, appliqué à la fonction $z = \operatorname{tg} x$, donne $z' = 1 + z^2$. Ainsi, les nombres *pairs* G_3, G_5, ... se déduisent, les uns des autres, au moyen de la formule

$$G_{2q+1} = C_{2q,1} \,.\, G_1 G_{2q-1} + C_{2q,3} G_3 G_{2q-3} + \cdots + C_{2q,1} G_{2q-1} G_1, \quad \ldots \quad (3)$$

dans laquelle $G_1 = 1$. Ces nombres, liés aux coefficients de Bernoulli par l'équation

$$B_{2q-1} = \pm \frac{2q}{4^q(4^q - 1)} G_{2q-1},$$

ne diffèrent pas des nombres y_1, y_3, y_5,..., que j'ai considérés autrefois (*).

III.

L'équation

$$y' = \tfrac{1}{2}(1 + y^2),$$

trouvée ci-dessus, conduit, très-facilement, à deux relations entre les nombres G, que nous croyons nouvelles. En effet, à cause de $y = 1$ pour $x = 0$, on conclut, de cette équation,

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{2} x,$$

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 128.

ou

$$y - 1 = (y + 1)\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x,$$

c'est-à-dire

$$G_1 \frac{x}{1} + G_2 \frac{x^2}{1.2} + G_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + G_i \frac{x^i}{1.2\ldots i} + \cdots =$$

$$\left[2 + G_1 \frac{x}{1} + G_2 \frac{x^2}{1.2} + \cdots + G_{i-1} \frac{x^{i-1}}{1.2\ldots(i-1)} + \cdots\right]\left[\frac{G_1}{1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{G_3}{1.2.3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots\right].$$

Lorsque i est *pair*, le coefficient de x^i, dans le second membre, est

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1.2\ldots(i-1).1} G_{i-1} G_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{1.2\ldots(i-3).1.2.3} G_{i-3} G_3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \frac{1}{1.1.2\ldots(i-2)} G_1 G_{i-2};$$

donc

$$G_i = \tfrac{1}{2} C_{i,1} G_{i-1} G_1 + (\tfrac{1}{2})^3 C_{i,3} G_{i-3} G_3 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^{i-1} C_{i,1} G_1 G_{i-1};$$

ou bien

$$G_{2q} = \tfrac{1}{2} C_{2q,1} G_{2q-1} G_1 + (\tfrac{1}{2})^3 C_{2q,3} G_{2q-3} G_3 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^{2q-1} C_{2q,1} G_1 G_{2q-1}. \quad . \quad . \quad (4)$$

Si l'exposant i est *impair*, on trouve d'abord, par un calcul semblable au précédent,

$$G_i = \tfrac{1}{2} C_{i,1} G_{i-1} G_1 + (\tfrac{1}{2})^3 C_{i,3} G_{i-3} G_3 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^{i-2} C_{i,2} G_2 G_{i-2} + (\tfrac{1}{2})^{i-1} G_i,$$

puis

$$(2^{i-1} - 1) G_i = 2^{i-2} C_{i,1} G_{i-1} G_1 + 2^{i-4} C_{i,3} G_{i-3} G_3 + \cdots + 2 C_{i,2} G_2 G_{i-2},$$

ou

$$(4^q - 1) G_{2q+1} = 2^{2q-1} C_{2q+1,1} G_{2q} G_1 + 2^{2q-3} C_{2q+1,3} G_{2q-2} G_3 + \cdots + 2 C_{2q+1,2} G_2 G_{2q-1}. \quad (5)$$

A cause de $G_{2q} = E_{2q}$, l'équation (4) peut donner les *nombres d'Euler* au moyen des *nombres de Bernoulli;* l'équation (5) fait concourir les uns et les autres à la détermination d'un nombre de Bernoulli, dont le rang est donné.

IV.

En supposant, comme nous venons de le faire, i successivement *pair* et *impair*, et en combinant, de diverses manières, les formules (2), (3), on obtiendrait d'autres relations entre ces deux catégories de nombres; mais elles ne diffèrent pas de celles que nous avons publiées autrefois.

X.

SUR L'ADDITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Dans une Note sur ce sujet, imprimée il y a trois ans, nous disions : « *Pour*
» *transformer, en une différentielle exacte, le premier membre de l'équation*

$$\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

» *il a suffi de le multiplier par*

$$\lambda = \frac{\Delta(x)\Delta(y) - c^2 \sin x \sin y \cos x \cos y}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y} = \Delta(\mu). \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

» Conséquemment, $\left[\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)}\right]\varphi(\lambda)$ *est aussi une différentielle exacte*, la
» fonction φ étant arbitraire; et, *si*

$$\left[\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)}\right]\varphi(\lambda) = d\mathrm{V},$$

» *on peut adopter, comme intégrale de l'équation* (1),

$$\mathrm{V} = \text{const. } (^*). \text{ »}$$

Nous allons faire, à quelques cas simples, l'application de cette remarque.

I.

Si l'on prend $\varphi(\lambda) = \lambda^2 = [\Delta(\mu)]^2$, on a

$$d\mathrm{V} = \left[\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)}\right]\left[\frac{\Delta(x)\Delta(y) - c^2 \sin x \sin y \cos x \cos y}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}\right]^2 = \Delta(\mu)\, d\mu = d\,.\,\mathrm{E}(\mu). \quad (3)$$

Mais (**)

$$d\mathrm{E}(\mu) = dx\,\Delta(x) + dy\,\Delta(y) - c^2 d(\sin x \sin y \sin \mu);$$

(*) *Comptes rendus*, 25 mai 1874, p. 1481.

(**) *Fonctions elliptiques*, t. I, p. 43

donc : 1° *la quantité* dV *est une différentielle exacte, identiquement égale à*

$$dx\,\Delta(x) + dy\,\Delta(y) - c^2 d\left[\sin x \sin y \frac{\sin x \cos y\,\Delta(y) + \sin y \cos x\,\Delta(x)}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}\right];$$

2° *l'intégrale de l'équation peut être mise sous la forme :*

$$\mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y) - c^2 \sin x \sin y \frac{\sin x \cos y\,\Delta(y) + \sin y \cos x\,\Delta(x)}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y} = const. \quad \ldots \quad (4)$$

II.

Soit $\varphi(\lambda) = \lambda^3 = \left[\Delta(\mu)\right]^3$. Alors

$$dV = (1 - c^2 \sin^2 \mu)\, d\mu, \quad \ldots \quad (5)$$

$$V = (1 - \tfrac{1}{2} c^2)\mu + \tfrac{1}{4} c^2 \sin 2\mu. \quad \ldots \quad (6)$$

D'ailleurs :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\sin x \cos y\,\Delta(y) + \sin y \cos x\,\Delta(x)}{\cos x \cos y - \sin x \sin y\,\Delta(x)\Delta(y)},$$

$$\sin 2\mu = 2\frac{\left[\sin x \cos y\,\Delta(y) + \sin y \cos x\,\Delta(x)\right]\left[\cos x \cos y - \sin x \sin y\,\Delta(x)\Delta(y)\right]}{(1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y)^2};$$

donc l'intégrale de l'équation (1) est, si l'on veut,

$$(2 - c^2) \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin x \cos y\,\Delta(y) + \sin y \cos x\,\Delta(x)}{\cos x \cos y - \sin x \sin y\,\Delta(x)\Delta(y)}$$

$$+ c^2 \frac{\left[\sin x \cos y\,\Delta(y) + \sin y \cos x\,\Delta(x)\right]\left[\cos x \cos y - \sin x \sin y\,\Delta(x)\Delta(y)\right]}{(1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y)^2} = const. \quad (7)$$

III.

Prenons $\varphi(\lambda) = \frac{1}{1 + n \sin^2 \mu} = \frac{c^2}{c^2 + n - n\lambda^2}$; nous aurons

$$dV = \frac{d\mu}{(1 + n \sin^2 \mu)\Delta(\mu)} = d\Pi(\mu), \quad \ldots \quad (8)$$

ou

$$dV = \frac{dx}{(1 + n \sin^2 x)\Delta(x)} + \frac{dy}{(1 + n \sin^2 y)\Delta(y)} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, d.\operatorname{arc\,tg} \frac{n\sqrt{\alpha} \sin \mu \sin x \sin y}{1 + n - n \cos \mu \cos x \cos y} \text{(*)}; \quad (9)$$

(*) *Fonctions elliptiques,* t. I, p. 75 : $\alpha = (1 + n)\left(1 + \frac{c^2}{n}\right)$.

expression dans laquelle $\sin\mu$ et $\cos\mu$ doivent être remplacés par leurs valeurs. L'intégrale de l'équation (1) prend donc la nouvelle forme :

$$\Pi(x)+\Pi(y)-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{arc\,tg}\frac{n\sqrt{\alpha}\sin x\sin y\left[\sin x\cos y\,\Delta(y)+\sin y\cos x\,\Delta(x)\right]}{(1+n)(1-c^2\sin^2x\sin^2y)-n\cos x\cos y\left[\cos x\cos y-\sin x\sin y\,\Delta(x)\Delta(y)\right]}=const. \quad (10)$$

En outre, *la différentielle de cette dernière fonction est, identiquement, égale à*

$$c^2\left[\frac{dx}{\Delta(x)}+\frac{dy}{\Delta(y)}\right]\frac{(1-c^2\sin^2x\sin^2y)^2}{(c^2+n)\left[1-c^2\sin^2x\sin^2y\right]^2+n\left[\Delta(x)\Delta(y)-c^2\sin x\sin y\cos x\cos y\right]^2}. \quad (11)$$

IV.

Soit, comme dernière application, $\varphi(\lambda)=\frac{\cos\mu}{\Delta(\mu)}$: nous aurons

$$dV=\frac{\cos\mu\,d\mu}{1-c^2\sin^2\mu},\quad V=\frac{1}{2c}\,\mathrm{l}\,\frac{1+c\sin\mu}{1-c\sin\mu}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Par conséquent :

1° *La quantité*

$$\left[\frac{dx}{\Delta(x)}+\frac{dy}{\Delta(y)}\right]\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y\Delta(x)\Delta(y)}{\Delta(x)\Delta(y)-c^2\sin x\sin y\cos x\cos y}=\frac{1}{2c}d.\mathrm{l}\frac{1-c^2\sin^2x\sin^2y+c\left[\sin x\cos y\Delta(y)+\sin y\cos x\Delta(x)\right]}{1-c^2\sin^2x\sin^2y-c\left[\sin x\cos y\Delta(y)+\sin y\cos x\Delta(x)\right]};$$

2° *l'intégrale de la proposée est*

$$\frac{1-c^2\sin^2x\sin^2y+c\left[\sin x\cos y\,\Delta(y)+\sin y\cos x\,\Delta(x)\right]}{1-c^2\sin^2x\sin^2y-c\left[\sin x\cos y\,\Delta(y)+\sin y\cos x\,\Delta(x)\right]}=const. \quad \ldots \quad (13)$$

V.

Lorsque $c=1$, l'équation (1) se réduit à

$$\frac{dx}{\cos x}+\frac{dy}{\cos y}=0;$$

et l'intégrale *immédiate* de celle-ci est

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\times\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)=const. \quad \dots\dots\dots \quad (14)$$

Quant aux intégrales *médiates* (4), (7), (13), elles deviennent, respectivement :

$$\frac{\sin x+\sin y}{1+\sin x\sin y}=const.,\qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin x+\sin y}{\cos x\cos y}+\frac{(\sin x+\sin y)\cos x\cos y}{(1+\sin x\sin y)^2}=const.,$$

$$\frac{(1+\sin x)(1+\sin y)}{(1-\sin x)(1-\sin y)}=const.$$

D'après ce qui précède, ces quatre dernières formules sont équivalentes (*).

VI.

Le module c étant toujours égal à l'unité, la quantité λ (2) devient $\frac{\cos x\cos y}{1+\sin x\sin y}$. Par suite, $dV=\left(\frac{dx}{\cos x}+\frac{dy}{\cos y}\right)\frac{\cos x\cos y}{1+\sin x\sin y}$. Si l'on intègre directement cette différentielle, et qu'on identifie le résultat avec $\frac{\sin x+\sin y}{1+\sin x\sin y}$, on arrive à cette conséquence curieuse, qu'il est facile de prouver directement :

L'équation

$$y=2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin y+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\cos y}-\operatorname{arc\,sin}\frac{\sin x+\sin y}{1+\sin x\sin y}$$

est identique.

(*) Il en résulte, en particulier, que si l'on propose de *rendre calculables, par logarithmes, les valeurs de z données par chacune des équations :*

$$\sin z=\frac{\sin a+\sin b}{1+\sin a\sin b},\qquad z+\sin z\cos z=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin a+\sin b}{\cos a\cos b}+\frac{(\sin a+\sin b)\cos a\cos b}{(1+\sin a\sin b)^2},$$

$$\frac{1+\sin z}{1-\sin z}=\frac{(1+\sin a)(1+\sin b)}{(1-\sin a)(1-\sin b)},$$

il suffit de prendre

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{b}{2}\right).$$