RECHERCHES

SUR

QUELQUES PRODUITS INDÉFINIS;

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

(Mémoire présenté à la Classe des sciences le 14 octobre 1871.)

AVANT-PROPOS.

Le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie a pour objet l'étude de certains produits indéfinis, déjà considérés par *Euler, Jacobi* et *Legendre*. Parmi ces quantités, appelées quelquefois *produites continues*, les plus simples et les plus importantes sont celles que l'illustre inventeur de la *Théorie des Fonctions elliptiques* a désignées par α, α', β, β'. En combinant de diverses manières, soit ces produits, soit leurs développements en séries, on trouve, sans les chercher, une multitude de théorèmes relatifs à la *Partition des nombres* ou à la *Théorie des nombres* proprement dite. J'en citerai quelques-uns :

Quand un nombre n'est pas pentagonal, il admet autant de décompositions en un nombre pair de parties inégales, que de décompositions en un nombre impair de parties inégales ;

Soit N *un multiple de* 4, *donné. Soit* n *un nombre pair, inférieur à* N. *On décompose* n *en une somme de puissances de* 2, *et l'on fait* $\lambda_n = \pm 1$, *selon que le nombre des parties est pair ou impair. Enfin, supposant* $N - n = 2^{\beta_n} i$, *on a*

$$\sum_{n=0}^{n=N-2} \lambda_n \cdot 2^{\beta_n} = \pm \frac{N}{2},$$

le signe + *répondant au cas où* N *est la somme d'un nombre impair de puissances de* 2 ;

L'excès du nombre des valeurs paires de x (zéro excepté), *satisfaisant à l'équation*

$$4x^2 + 4y^2 + (2z + 1)^2 = (2n + 1)^2,$$

sur le nombre des valeurs impaires, est $\frac{(2n+1)(-1)^n - 1}{4}$;
etc.

Si l'on groupe convenablement les facteurs simples d'un produit indéfini P, on pourra, dans certains cas, décomposer P en d'autres produits indéfinis A, B, C, ...; puis, si l'on développe en séries P, A, B, C, ..., on aura *une série égale à un produit de séries.* C'est ainsi que Jacobi a trouvé la célèbre formule

$$(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - - \cdots)^3 = 1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \cdots,$$

ou $\alpha'^3 = s$; d'où il a tiré de nombreuses conséquences. En suivant la voie indiquée par ce grand Géomètre, j'ai obtenu *huit* nouvelles décompositions de s : ce résultat semblera peut-être curieux, si on le compare à ce qui a lieu pour les polynômes. Ces diverses décompositions, et d'autres encore, conduisent à des théorèmes d'Arithmétique, plus ou moins intéressants.

La dernière partie du Mémoire est consacrée à la sommation, au moyen d'intégrales définies, de séries remarquables, dont les *Fundamenta nova* contiennent de nombreux exemples. Ces suites, dont les termes sont des fractions telles que $\frac{x^n}{1+x^n}$, ont pour type la célèbre *série de Lambert.* Quelques-unes des sommations obtenues donnent des relations simples entre les intégrales elliptiques et d'autres intégrales définies.

Ce Mémoire, déjà bien long, aurait pu, pour ainsi dire, être indéfiniment étendu : les questions dont il traite me paraissent inépuisables. J'ose espérer qu'il sera favorablement accueilli par les Géomètres.

Liége, 11 octobre 1871.

RECHERCHES

SUR

QUELQUES PRODUITS INDÉFINIS.

I.

FORMULES PRÉLIMINAIRES.

1. Je rappelle, dans ce premier paragraphe, un certain nombre de définitions et de formules connues.

$$\omega = \mathrm{K} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \omega' = \mathrm{K}' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k^2 + k'^2 = 1, \quad . \quad (1)$$

$$q = e^{-\pi \frac{\omega'}{\omega}}, \qquad q' = e^{-\pi \frac{\omega}{\omega'}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\alpha = (1 - q)(1 - q^3)(1 - q^5) \cdots = 2^{\frac{1}{6}} k^{-\frac{1}{12}} k'^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\alpha' = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6) \cdots = 2^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (kk')^{\frac{1}{6}} q^{-\frac{1}{12}}, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\beta = (1 + q)(1 + q^3)(1 + q^5) \cdots = 2^{\frac{1}{6}} (kk')^{-\frac{1}{12}} q^{\frac{1}{24}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\beta' = (1 + q^2)(1 + q^4)(1 + q^6) \cdots = 2^{-\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{6}} (k'q)^{-\frac{1}{12}}, \quad \ldots\ldots \quad (6)\ (*)$$

(*) A la page 97 du troisième volume de LEGENDRE (*Traité des Fonctions elliptiques*), la valeur de β'^6 ne contient pas le facteur k.

$$\alpha\beta\beta' = 1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\Theta(x) = \alpha' \prod_1^\infty \left(1 - 2q^{2n-1} \cos \frac{\pi x}{\omega} + q^{4n-2}\right), \quad \ldots \ldots \quad (8)\ (*)$$

$$\Theta(x) = 1 - 2q \cos \frac{\pi x}{\omega} + 2q^4 \cos \frac{2\pi x}{\omega} - 2q^9 \cos \frac{3\pi x}{\omega} + \cdots, \quad \ldots \ldots$$

$$\mathrm{H}(x) = 2\alpha' q^{\frac{1}{4}} \sin \frac{\pi x}{2\omega} \prod_1^\infty \left(1 - 2q^n \cos \frac{\pi x}{\omega} + q^{4n}\right), \quad \ldots \ldots \quad (10)\ (*)$$

$$\mathrm{H}(x) = 2q^{\frac{1}{4}} \left[\sin \frac{\pi x}{2\omega} - q^2 \sin \frac{3\pi x}{2\omega} + q^6 \sin \frac{5\pi x}{2\omega} - q^{12} \sin \frac{7\pi x}{2\omega} + \cdots\right], \quad \ldots \quad (11)$$

$$\Theta(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \cdots = \alpha^2\alpha', \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

$$\Theta\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + 2q^{64} - \cdots = \alpha'(1+q^2)(1+q^6)(1+q^{10})\ldots, \quad \ldots \quad (13)$$

$$\Theta(\omega) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots = \alpha'\beta^2, \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

$$\mathrm{H}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{4}}(1 - q^2 - q^6 + q^{12} + q^{20} - \cdots) = \alpha' \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{4}}(1+q^4)(1+q^8)(1+q^{12})\ldots, \quad \ldots \quad (15)$$

$$\mathrm{H}(\omega) = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \cdots) = 2\alpha'\beta'^2 q^{\frac{1}{4}}, \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

$$1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \cdots = \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}}, \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

$$1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}, \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

$$1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \cdots = q^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\omega k}{2\pi}}, \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

$$1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots = q^{-\frac{1}{8}} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}\sqrt{k}} = \frac{\alpha'}{\alpha}, \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

$$1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots = q^{-\frac{1}{8}} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}\sqrt{kk'}} = \frac{\alpha'}{\beta}, \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

$$1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + 2q^{32} + \cdots = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}(1 + k')}, \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

$$1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}\sqrt{k'}}, \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

$$1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + 9q^{20} - \cdots = \alpha'^3 = q^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2kk'}, \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

(*) Ces *définitions*, adoptées par M. Bertrand (*Calcul intégral*, pp. 640 et 642), diffèrent de celles qu'emploie Legendre, d'après Jacobi. L'illustre auteur du *Traité des Fonctions elliptiques* suppose (t. III, p. 104) :

$$\Theta(x) = \alpha' \prod_1^\infty (1 - 2q^{2n-1} \cos 2x + q^{4n-2}),$$
$$\Lambda(x) = \mathrm{H}(x) = 2\alpha' q^{\frac{1}{4}} \sin x \prod_1^\infty (1 - 2q^{2n} \cos 2x + q^{4n}).$$

$$\sqrt[4]{\frac{\omega'}{\omega}}\,[1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots] = \sqrt[4]{\frac{\omega}{\omega'}}\,[1 + 2q' + 2q'^4 + 2q'^9 + 2q'^{16} + \cdots], \quad (25)\,(^*)$$

$$\sqrt{k} = 2q^{\frac{1}{4}}\frac{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots}, \quad \sqrt{k'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots}, \quad (26)$$

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots} = \frac{1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - q^{15} - \cdots}{1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + q^{15} + \cdots}, \quad . \quad . \quad (27)$$

$$\sqrt{kk'} = 2q^{\frac{1}{4}}\frac{1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + 9q^{20} - \cdots}{(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots)^3}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

$$(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)^4 - (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots)^4 = 16q\,(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)^4, \quad (29)\,(^{**})$$

$$(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)^2 + (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots)^2 = 2\,(1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + \cdots)^2, \quad (30)\,(^{***})$$

$$(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)^2 - (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots)^2 = 8q\,(1 + q^4 + q^{12} + q^{24} + \cdots)^2. \quad . \quad (31)$$

II.

DÉVELOPPEMENTS DES PRODUITS α, α', β, β' ET DE QUELQUES-UNES DE LEURS COMBINAISONS.

2. *Développement de $\beta\beta'$.* Si $\varphi(n)$ représente le *nombre des décompositions de* n *en parties positives, entières, inégales,* il est visible que

$$\beta\beta' = (1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3)\cdots = \sum_0^\infty \varphi(n)\,q^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)\,(^{****})$$

(*) Cauchy, *Mémoire sur la Théorie des nombres* (1830, p. 614). Cette relation, conséquence des formules (2) et (8), y est énoncée ainsi :

« $$a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2} + e^{-a^2} + e^{-4a^2} + e^{-9a^2} + \cdots\right] = b^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2} + e^{-b^2} + e^{-4b^2} + e^{-9b^2} + \cdots\right]$$

si

$$ab = \pi. \text{ »}$$

(**) Cette identité, qui équivaut à la relation

$$\beta^8 - \alpha^8 = 16q\beta'^8,$$

a été écrite autrement par Jacobi (*Fundamenta nova*, p. 90).

(***) Celle-ci résulte immédiatement d'une formule donnée par Cauchy (*Comptes rendus*, t. XVII, p. 530).

(****) On suppose $\varphi(o) = 1$.

3. *Développement de* $\frac{1}{\alpha}$. D'après la relation (7), $\frac{1}{\alpha} = \beta\beta'$; ainsi

$$\frac{1}{\alpha} = \sum_0^\infty \varphi(n)\, q^n. \quad \ldots \quad (33)$$

4. *Développement de* β. Soit $\varphi_i(n)$ le *nombre des décompositions de* n *en parties impaires, inégales;* alors

$$\beta = (1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots = \sum_0^\infty \varphi_i(n)\, q^n \quad \ldots \quad (34)$$

5. *Développement de* β'. De même, $\varphi_p(n)$ désignant le *nombre des décompositions de* n *en parties paires, inégales,*

$$\beta' = (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots = \sum_0^\infty \varphi_p(n)\, q^n \quad \ldots \quad (35)$$

6. *Remarque.* Le produit β', qui renferme seulement les puissances paires de q, se déduit de $\beta\beta'$ par le changement de q en q^2; donc

$$\beta' = \sum_0^\infty \varphi(n)\, q^{2n}, \quad \ldots \quad (36)$$

et

$$\varphi_p(2n) = \varphi(n);$$

relation évidente.

7. *Décomposition de* φ (n). Dans le produit des séries (34), (35), le coefficient de q^n a pour valeur

$$\varphi_p(n) + \varphi_i(1)\varphi_p(n-1) + \varphi_i(2)\varphi_p(n-2) + \cdots + \varphi_i(n-1)\varphi_p(1) + \varphi_i(n).$$

Donc, quand n est *pair*, on a, d'après la formule (32),

$$\varphi(n) = \varphi_p(n) + \varphi_i(4)\varphi_p(n-4) + \varphi_i(6)\varphi_p(n-6) + \cdots + \varphi_i(n-2)\varphi_p(2) + \varphi_i(n); \quad (37)$$

et, quand n est *impair*,

$$\varphi(n) = \varphi_i(1)\varphi_p(n-1) + \varphi_i(3)\varphi_p(n-3) + \cdots + \varphi_i(n-2)\varphi_p(2) + \varphi_i(n). \quad . \quad (38)$$

Soit, par exemple, $n = 13$. La Table III donne

$$\varphi(13)=18,\ \varphi_i(1)=1,\ \varphi_i(3)=1,\ \varphi_i(5)=1,\ \varphi_i(7)=1,\ \varphi_i(9)=2,\ \varphi_i(11)=2,\ \varphi_i(13)=3,$$
$$\varphi_p(12)=4,\ \varphi_p(10)=3,\ \varphi_p(8)=2,\ \varphi_p(6)=2,\ \varphi_p(4)=1,\ \varphi_p(2)=1;$$

ainsi,

$$18 = 1.4. + 1.3 + 1.2 + 1.2 + 2.1 + 2.1 + 3;$$

ce qui est exact.

8. *Développement de α.* Si, dans le produit β, on change q en $-q$, on obtient α; conséquemment :

$$\alpha = \frac{1}{\beta\beta'} = (1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots\cdots = \sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q)^n. \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

9. *Relation entre les nombres φ, φ_i.* Le produit des séries (32), (39) doit se réduire à 1; on a donc ce théorème :

La fonction

$$\varphi(n) - \varphi_i(1)\varphi(n-1) + \varphi_i(2)\varphi(n-2) - \cdots \pm \varphi_i(n)$$

est nulle pour toutes les valeurs de n (*).

Par exemple,

$$\varphi(13) - \varphi_i(1)\varphi(12) + \varphi_i(2)\varphi(11) - \varphi_i(3)\varphi(10) + \varphi_i(4)\varphi(9) - \varphi_i(5)\varphi(8) + \varphi_i(6)\varphi(7)$$
$$- \varphi_i(7)\varphi(6) + \varphi_i(8)\varphi(5) - \varphi_i(9)\varphi(4) + \varphi_i(10)\varphi(3) - \varphi_i(11)\varphi(2) + \varphi_i(12)\varphi(1)$$
$$- \varphi_i(13) = 0;$$

ou (Tables I et III)

$$18 - 1.15 + 0.12 - 1.10 + 1.8 - 1.6 + 1.5 - 1.4 + 2.3 - 2.2 + 2.2 - 2.1 + 3.1 - 3 =$$
$$18 - 15 - 10 + 8 - 6 + 5 - 4 + 6 - 2 = 0.$$

10. *Développement de $\alpha\beta$.* Ce produit résulte de α, par le changement de q en q^2; donc

$$\alpha\beta = \frac{1}{\beta'} = (1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})\cdots = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n) q^{2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

11. *Relations entre les nombres φ_i.* Reprenons les formules

$$\beta = 1 + \varphi_i(1)q + \varphi_i(2)q^2 + \varphi_i(3)q^3 + \varphi_i(4)q^4 + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$
$$\alpha = 1 - \varphi_i(1)q + \varphi_i(2)q^2 - \varphi_i(3)q^3 + \varphi_i(4)q^4 - \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$
$$\alpha\beta = 1 - \varphi_i(1)q^2 + \varphi_i(2)q^4 - \varphi_i(3)q^6 + \varphi_i(4)q^8 - \cdots. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

(*) Dans cet énoncé, et dans tous ceux du même genre, il est toujours sous-entendu que n *est un nombre entier.*

Il en résulte que l'on doit avoir, *identiquement*,

$$\sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n)\, q^{2n} = \left[1 + \varphi_i(2)\, q^2 + \varphi_i(4)\, q^4 + \cdots\right]^2 - \left[\varphi_i(1)\, q + \varphi_i(3)\, q^3 + \cdots\right]^2; \qquad (41)$$

puis, suivant que n est *pair* ou *impair* :

$$\begin{aligned}\pm\varphi_i(n) = \varphi_i(2n) &+ \varphi_i(2)\,\varphi_i(2n-2) + \varphi_i(4)\,\varphi_i(2n-4) + \cdots + \varphi_i(2n-2)\,\varphi_i(2) + \varphi_i(2n)\\ &-\left[\varphi_i(1)\,\varphi_i(2n-1) + \varphi_i(3)\,\varphi_i(2n-3) + \cdots + \varphi_i(2n-1)\,\varphi_i(1)\right] \;.\;. \qquad (42)\end{aligned}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}-\varphi_i(9) &= 2\left[\varphi_i(18) + \varphi_i(2)\varphi_i(16) + \varphi_i(4)\varphi_i(14) + \varphi_i(6)\varphi_i(12) + \varphi_i(8)\,\varphi_i(10)\right]\\ &\quad-\left[\varphi_i(1)\varphi_i(17) + \varphi_i(3)\varphi_i(15) + \varphi_i(5)\varphi_i(13) + \varphi_i(7)\,\varphi_i(11) + \varphi_i(9)\varphi_i(9) + \cdots\right]\\ \varphi_i(10) &= \varphi_i(20) + \varphi_i(2)\varphi_i(18) + \varphi_i(4)\varphi_i(16) + \varphi_i(6)\varphi_i(14) + \varphi_i(8)\,\varphi_i(12) + \varphi_i(10)\,\varphi_i(10)\\ &\quad+ \varphi_i(12)\,\varphi_i(8) + \cdots\\ &\quad- 2\left[\varphi_i(1)\,\varphi_i(19) + \varphi_i(3)\,\varphi_i(17) + \varphi_i(5)\,\varphi_i(15) + \varphi_i(7)\,\varphi_i(13) + \varphi_i(9)\,\varphi_i(11)\right].\end{aligned}$$

En effet, ces deux égalités se réduisent à (*)

$$\begin{aligned}-2 &= 2\,[5 + 1.3 + 1.3 + 4] - [1.5 + 1.4 + 1.3 + 1.2 + 4 + 2 + 3 + 4 + 5]\\ &= 2.15 - 32,\\ 2 &= 7 + 1.5 + 1.3 + 2.3 + 2.2 + 3.2 + 3.1 + 5.1 + 7\\ &\quad - 2\,[1.6 + 1.5 + 1.4 + 1.3 + 2.2] = 46 - 2.22.\end{aligned}$$

12. *Remarque.* Si l'on suppose

$$\alpha = f(q), \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad (43)$$

on a, par ce qui précède,

$$\beta = f(-q), \qquad \alpha\beta = f(q^2); \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad (44)$$

puis

$$f(q)\,f(-q) = f(q^2); \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad (45)$$

relation qui nous sera utile plus loin.

13. *Développement de $\alpha\alpha'$.* 1° Euler a trouvé (**) cette formule remarquable :

$$\alpha\alpha' = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots = \sum_0^\infty (-1)^l q^{\frac{3l^2 \mp l}{2}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad (46)$$

(*) Voir la Table III.

(**) *Introduction à l'Analyse*, p. 250.

2° Représentons par n_p le *nombre des décompositions de* n *en un nombre pair de parties inégales,* et par n_i *le nombre des décompositions de* n *en un nombre impair de parties inégales;* nous aurons, comme on le voit sans peine,

$$\alpha\alpha' = \sum_0^\infty (n_p - n_i) q^n. \quad (47)$$

14. *Conséquences.* D'après ces deux expressions de $\alpha\alpha'$:

1° *Si le nombre* n *n'est pas pentagonal, il admet autant de décompositions en un nombre pair de parties inégales, que de décompositions en un nombre impair de parties inégales;*

2° *Si le nombre* n *est pentagonal,* c'est-à-dire, s'il est compris dans la formule $n = \frac{3l^2 \mp l}{2}$, *l'excès du premier nombre de décompositions sur le second, est* $(-1)^l$;

3° *Le nombre total des décompositions de* n, *en parties inégales, c'est-à-dire* $\varphi(n)$, *est impair ou pair, selon que* n *est ou n'est pas pentagonal;*

4° *Si le nombre* n *est pentagonal,*

$$n_p = \frac{1}{2}\left[\varphi(n) + (-1)^l\right]; \quad n_i = \frac{1}{2}\left[\varphi(n) - (-1)^l\right]; \quad (48)$$

5° *Dans le cas contraire,*

$$n_p = n_i = \frac{1}{2}\varphi(n) \quad (49)$$

15. *Développement de* α'. Cette fonction se déduit de $\alpha\alpha'$ par le changement de q en q^2; donc

$$\alpha' = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots = \sum_0^\infty (-1)^l q^{3l^2 \mp l} = \sum_0^\infty (n_p - n_i) q^{2n} \quad (50)$$

16. *Relation entre les nombres* φ_i. Écrivons ainsi les formules (46), (39), (50) :

$$\alpha\alpha' = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + q^{51} + q^{57} - \cdots, \quad (51)$$

$$\alpha = 1 - \varphi_i(1) q + \varphi_i(2) q^2 - \varphi_i(3) q^3 + \varphi_i(4) q^4 - \cdots \quad (39)$$

$$\alpha' = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + q^{44} + q^{52} - q^{70} - q^{80} + \cdots \quad (52)$$

Dans le produit des deux dernières séries, le coefficient de q^n est

$$(-1)^n\left[\varphi_i(n) - \varphi_i(n-2) - \varphi_i(n-4) + \varphi_i(n-10) + \varphi_i(n-14) - \varphi_i(n-24) - \cdots\right].$$

Comparant avec le développement (51), on a cette proposition, analogue à un célèbre théorème d'Euler (*) :

La fonction

$$\varphi_i(n) - \varphi_i(n-2) - \varphi_i(n-4) + \varphi_i(n-10) + \varphi_i(n-14) - \cdots$$

égale $(-1)^{n-1}$ *ou zéro, selon que le nombre* n *est ou n'est pas pentagonal.*

17. *Développements de* $\alpha'\beta'$. 1° Par les formules (36), (52) :

$$\alpha'\beta' = (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots) \sum_0^\infty \varphi(n)\, q^{2n} . \quad (53)$$

2° A cause des définitions (4), (6) et de la formule (51) :

$$\alpha'\beta' = 1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - q^{60} + q^{88} + \cdots \quad (54)$$

3° De

$$\alpha'\beta'^2 = 1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \cdots, \quad (16)$$

$$\frac{1}{\beta'} = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n)\, q^{2n}, \quad (40)$$

on conclut

$$\alpha'\beta' = (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots) \sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n)\, q^{2n}. \quad (55)$$

4° Les relations (21), (32) donnent, semblablement,

$$\alpha'\beta' = (1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots) \sum_0^\infty \varphi(n)\, q^n . \quad (56)$$

(*) Parmi toutes les démonstrations de ce théorème, la plus simple est peut-être celle qu'a donnée Labey, dans ses *Notes sur l'Introduction à l'Analyse*. Voici comment on la peut présenter :

De
$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \cdots,$$

on déduit, en prenant les logarithmes et les dérivées,

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \cdots = \frac{1 + 2x - 5x^4 - 7x^6 + \cdots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \cdots} ;$$

puis, en multipliant par x et développant le premier membre :

$$x + 3x^2 + 4x^3 + 7x^4 + \cdots + x^n \int n + \cdots = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + \cdots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7} .$$

Enfin, chassant le dénominateur, et identifiant, on a :

$$\int n - \int(n-1) - \int(n-2) + \int(n-5) + \int(n-7) - \cdots = \textit{zéro ou} \pm n.$$

3° Si l'on change q en $-q$, on trouve

$$\alpha'\beta' = (1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots)\sum_0^\infty (-1)^n \varphi(n) q^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

18. *Relations entre les nombres* φ. 1° D'après les valeurs (53), (54) :
La fonction

$$\varphi(n) - \varphi(n-1) - \varphi(n-2) + \varphi(n-5) + \varphi(n-7) - \varphi(n-12) - \cdots,$$

nulle si n *n'est pas le double d'un nombre pentagonal, se réduit à* $(-1)^l$ *dans le cas contraire,* c'est-à-dire quand $n = 3l^2 \mp l$.

2° La comparaison des valeurs (54), (56) donne cet autre théorème :
La fonction

$$\varphi(n) - \varphi(n-1) - \varphi(n-3) + \varphi(n-6) + \varphi(n-10) - \varphi(n-15) - \cdots,$$

nulle si n *n'est pas le quadruple d'un nombre pentagonal, se réduit à* $(-1)^l$ *dans le cas contraire,* c'est-à-dire quand $n = 2l(3l \mp 1)$.

19. *Relations entre les nombres* φ_i. Elle se déduit des formules (54), (55) :
La fonction

$$\varphi_i(n) - \varphi_i(n-1) - \varphi_i(n-3) + \varphi_i(n-6) + \varphi_i(n-10) - \cdots,$$

nulle si n *n'est pas le double d'un nombre pentagonal, se réduit à* $(-1)^{n-l}$ *dans le cas contraire.*

20. *Vérifications des quatre derniers théorèmes.*

1° $\varphi_i(15) - \varphi_i(13) - \varphi_i(11) + \varphi_i(5) + \varphi_i(1) = 4 - 3 - 2 + 1 + 1 = 1 = (-1)^{15-3}$,
$\varphi_i(11) - \varphi_i(9) - \varphi_i(7) + \varphi_i(1) = 2 - 2 - 1 + 1 = 0$;
2° $\varphi(11) - \varphi(10) - \varphi(9) + \varphi(6) + \varphi(4) = 12 - 10 - 8 + 4 + 2 = 0$,
$\varphi(14) - \varphi(13) - \varphi(12) + \varphi(9) + \varphi(7) - (2) = 22 - 18 - 15 + 8 + 5 - 1 = 1 = (-1)^{14-2}$;
3° $\varphi(11) - \varphi(10) - \varphi(8) + \varphi(5) + \varphi(1) = 12 - 10 - 6 + 3 + 1 = 0$,
$\varphi(20) - \varphi(19) - \varphi(17) + \varphi(14) + \varphi(10) - \varphi(5) = 64 - 54 - 38 + 22 + 10 - 3 = 1 = (-1)^2$;
4° $\varphi_i(11) - \varphi_i(10) - \varphi_i(8) + \varphi_i(5) + \varphi_i(1) = 2 - 2 - 2 + 1 + 1 = 0$,
$\varphi_i(14) - \varphi_i(13) - \varphi_i(11) + \varphi_i(8) + \varphi_i(4) = 3 - 3 - 2 + 2 + 1 = 1 = (-1)^{14-2}$.

21. *Remarques.* I. On a, simultanément :

$$\alpha\alpha' = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$
$$\alpha' = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + q^{44} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$
$$\alpha'\beta' = 1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - q^{60} + q^{88} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Mais, par les formules (3), (4), (6) :

$$\alpha\alpha' = 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{12}} k'^{\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{24}}, \quad \alpha' = 2^{\frac{1}{6}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (kk')^{\frac{1}{6}} q^{-\frac{1}{12}}, \quad \alpha'\beta' = 2^{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{3}} k'^{\frac{1}{12}} q^{-\frac{1}{6}}.$$

Si donc l'on suppose $q^2 = q_1$, et que l'on représente par ω_1, k_1, k'_1 les valeurs correspondantes de ω, k, k', on doit trouver

$$2^{\frac{1}{6}}\omega_1^{\frac{1}{2}} k_1^{\frac{1}{12}} k_1'^{\frac{1}{3}} = \omega^{\frac{1}{2}} (kk')^{\frac{1}{6}}, \quad 2^{\frac{1}{3}}\omega_1^{\frac{1}{2}} (k_1 k'_1)^{\frac{1}{6}} = \omega^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{3}} k'^{\frac{1}{12}};$$

ou, plus simplement :

$$2^{\frac{1}{2}}\omega_1 k_1^{\frac{1}{4}} k_1'^{\frac{1}{2}} = \omega k^{\frac{1}{2}} k'^{\frac{1}{4}}, \qquad kk'_1 = 2(k_1 k')^{\frac{1}{2}}. \quad \ldots \ldots \quad (58)$$

En effet, ces relations s'accordent avec les formules connues :

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad k'_1 = 2\frac{\sqrt{k'}}{1+k'}, \quad \omega_1 = \frac{1+k'}{2}\,\omega, \quad \omega'_1 = (1+k')\,\omega'. \quad . \; (59)\ (^*)$$

II. Soit

$$\alpha\alpha' = \varphi(q); \quad \ldots \ldots \quad (60)$$

alors

$$\alpha' = \varphi(q^2), \quad \alpha'\beta' = \varphi(q^4); \quad \ldots \ldots \quad (61)$$

puis

$$\alpha = \frac{\varphi(q)}{\varphi(q^2)}, \quad \beta' = \frac{\varphi(q^4)}{\varphi(q^2)}; \quad \ldots \ldots \quad (62)$$

et, en vertu de la relation (7),

$$\beta = \frac{[\varphi(q^2)]^2}{\varphi(q)\,\varphi(q^4)} \quad \ldots \ldots \quad (63)$$

III. L'équation (45), qui caractérise la fonction f, devient en vertu de la valeur de α,

$$[\varphi(q^2)]^3 = \varphi(q)\,\varphi(-q)\,\varphi(q^4). \quad \ldots \ldots \quad (64)$$

22. *Développement de* $\frac{1}{\alpha\alpha'}$. Cette fonction est égale au produit

$$(1 + q + q^2 \ldots)(1 + q^2 + q^4 + \cdots)(1 + q^3 + q^6 + \cdots)\ldots$$

(*) Legendre, t. III, p. 99.

Par conséquent, si $\psi(n)$ représente le *nombre des décompositions de* n *en parties entières, positives, égales ou inégales,*

$$\frac{1}{\alpha\alpha'} = \sum_0^\infty \psi(n)\, q^n. \qquad (65)$$

23. *Relation entre les nombres* ψ. A cause du développement de $\alpha\alpha'$ (51), on a le théorème suivant :

La fonction

$$\psi(n) - \psi(n-1) - \psi(n-2) + \psi(n-5) + \psi(n-7) - \cdots$$

est nulle pour toutes les valeurs de n (*).

24. *Développement de* $\frac{1}{\alpha}$. Soit $\psi_i(n)$ le *nombre des décompositions de* n *en parties impaires, égales ou inégales ;* alors

$$\frac{1}{\alpha} = \beta\beta' = \sum_0^\infty \psi_i(n)\, q^n \qquad (66)$$

25. *Remarque.* D'après la formule (52),

$$\psi_i(n) = \varphi(n); \qquad (67)$$

ou, ce qui est équivalent :

Il y a autant de décompositions d'un nombre n, *en parties impaires, égales ou inégales, que de décompositions de* n *en parties inégales* (**).

26. *Développement de* $\frac{1}{\alpha'}$. Si, dans la formule (65), on remplace q par q^2, le premier membre devient $\frac{1}{\alpha'}$ (15); donc

$$\frac{1}{\alpha'} = \sum_0^\infty \psi(n)\, q^{2n} \qquad (68)$$

27. *Autre expression de* $\frac{1}{\alpha'}$. Elle résulte, immédiatement, des formules (65), (66), (67) :

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{\sum_0^\infty \psi(n)\, q^n}{\sum_0^\infty \varphi(n)\, q^n} \qquad (69)$$

(*) On suppose $\psi(0) = 1$.

(**) Euler, *Introduction à l'Analyse*, p. 252.

28. *Relations entre les nombres* φ, ψ. 1° D'après les égalités (52), (69) :

$$\varphi(n) = \psi(n) - \psi(n-2) - \psi(n-4) + \psi(n-10) + \psi(n-14) - \cdots \quad (70)$$

2° Si l'on identifie les deux valeurs de $\frac{1}{\alpha'}$, on trouve

$$\psi(n) = \varphi(n) + \varphi(n-2)\psi(1) + \varphi(n-4)\psi(2) + \varphi(n-6)\psi(3) + \cdots \quad (71)$$

29. *Seconde expression de* α. Si l'on divise, membre à membre, les égalités (68), (65), on trouve

$$\alpha = \frac{\sum_0^\infty \psi(n)\, q^{2n}}{\sum_0^\infty \psi(n)\, q^n}; \quad (72)$$

résultat qui est d'accord avec l'une des remarques ci-dessus (21, II).

30. *Relation entre les nombres* φ_i, ψ. La comparaison des formules (39), (72) donne le théorème suivant :

La fonction

$$\psi(n) - \varphi_i(1)\psi(n-1) + \varphi_i(2)\psi(n-2) - \varphi_i(3)\psi(n-3) + \cdots$$

égale zéro ou $\psi\left(\frac{n}{2}\right)$, *suivant que* n *est impair ou pair.*

31. *Vérifications des trois derniers théorèmes.* D'après la Table III :

1° $\psi(13) - \psi(11) - \psi(9) + \psi(3) = 101 - 56 - 30 + 3 = 18 = \varphi(13)$,
$\psi(14) - \psi(12) - \psi(10) + \psi(4) + \psi(1) = 135 - 77 - 42 + 5 + 1 = 22 = \varphi(14)$;

2° $\varphi(13) + \varphi(11)\psi(1) + \varphi(9)\psi(2) + \varphi(7)\psi(3) + \varphi(5)\psi(4) + \varphi(3)\psi(5) + \varphi(1)\psi(6)$
$= 18 + 12.1 + 8.2 + 5.3 + 3.5 + 2.7 + 1.11 = 101 = \psi(13)$;
$\varphi(14) + \varphi(12)\psi(1) + \varphi(10)\psi(2) + \varphi(8)\psi(3) + \varphi(6)\psi(4) + \varphi(4)\psi(5) + \varphi(2)\psi(6) + \psi(7)$
$= 22 + 15.1 + 10.2 + 6.3 + 4.5 + 2.7 + 1.11 + 15 = 135 = \psi(14)$;

3° $\psi(13) - \varphi_i(1)\psi(12) + \varphi_i(2)\psi(11) - \varphi_i(3)\psi(10) + \varphi_i(4)\psi(9) - \varphi_i(5)\psi(8) + \varphi_i(6)\psi(7)$
$- \varphi_i(7)\psi(6) + \varphi_i(8)\psi(5) - \varphi_i(9)\psi(4) + \varphi_i(10)\psi(3) - \varphi_i(11)\psi(2) + \varphi_i(12)\psi(1) - \varphi_i(13)$
$= 101 - 1.77 + 0.56 - 1.42 + 1.30 - 1.22 + 1.15 - 1.11 + 2.7 - 2.5 + 2.3$
$- 2.2 + 3.1 - 3 = 0$,
$\psi(14) - \varphi_i(1)\psi(13) + \varphi_i(2)\psi(12) - \varphi_i(3)\psi(11) + \varphi_i(4)\psi(10) - \varphi_i(5)\psi(9) + \varphi_i(6)\psi(8)$
$- \varphi_i(7)\psi(7) + \varphi_i(8)\psi(6) - \varphi_i(9)\psi(5) + \varphi_i(10)\psi(4) - \varphi_i(11)\psi(3) + \varphi_i(12)\psi(2)$
$- \varphi_i(13)\psi(1) + \varphi_i(14)$
$= 135 - 1.101 + 0.77 - 1.56 + 1.42 - 1.30 + 1.22 - 1.15 + 2.11 - 2.7 + 2.5$
$- 2.3 + 5.2 - 3.1 + 3 = 15 = \psi(7)$.

32. *Développement de* $\frac{1}{\beta}$. Les fonctions α, β ne diffèrent que par le changement de q en $-q$. Donc (66), (67) :

$$\frac{1}{\beta} = \alpha\beta' = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi(n) q^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

33. *Second développement de* α. On a

$$\alpha = \frac{1}{\beta\beta'} = (1 - q + q^2 - q^3 + \cdots)(1 - q^2 + q^4 - \cdots)(1 - q^3 + q^6 - \cdots)\ldots$$

Un produit partiel quelconque a la forme

$$(-q)^a (-q^2)^b (-q^3)^c \cdots = (-1)^{a+b+c\ldots} q^{a+2b+3c+\cdots} = (-1)^{a+b+c+\cdots} q^n.$$

Ce produit égale $\pm q^n$, suivant que le nombre $a + b + c + \cdots$, des parties de n, est *pair* ou *impair*. Donc, dans le développement cherché, le *coefficient de* q^n *est égal à l'excès* ε_n *du nombre des décompositions de* n *en un nombre pair de parties, égales ou inégales, sur le nombre des décompositions de* n *en un nombre impair de parties, égales ou inégales*. Autrement dit,

$$\alpha = \frac{1}{\beta\beta'} = \sum_0^\infty \varepsilon_n q^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

34. *Remarques*. I. La comparaison avec le premier développement (39) donne cette relation

$$\varepsilon_n = (-1)^n \varphi_i(n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

II. Si n_p, n_i sont les nombres dont il s'agit, l'on a

$$n_p + n_i = \psi(n);$$

et, par conséquent,

$$n_p = \frac{1}{2}\left[\psi(n) + (-1)^n \varphi_i(n)\right], \quad n_i = \frac{1}{2}\left[\psi(n) - (-1)^n \varphi_i(n)\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (76)\ (*)$$

III. ψ (n) *et* φ_i (n) *sont de même parité.*

(*) Nous avons trouvé, ci-dessus (**14**), des formules analogues à celles-ci.

35. *Développements de* $\alpha'\beta$. Ils se déduisent des développements de $\alpha\alpha'$, par le changement de q en $-q$ (8). Ainsi (46), (47) :

$$\alpha'\beta = \sum_0^\infty (-1)^l (-q)^{\frac{3l^2 \mp l}{2}}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (77)$$

$$\alpha'\beta = \sum_0^\infty (n_p - n_i)(-q)^n. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (78)$$

36. *Remarque.* D'après la formule (51),

$$\alpha'\beta = 1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + q^{22} + q^{26} + q^{35} - q^{40} - q^{51} - \cdots \quad (79)$$

Les termes de cette nouvelle série semblent donc, à partir du troisième, se succéder par groupes de quatre termes, alternativement négatifs et positifs. C'est ce qu'il est facile de vérifier.

37. *Développement de* $\alpha\alpha'\beta$. On tire, des formules (12), (14), (17), (18) :

$$\alpha^2\alpha' = \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}}, \qquad \alpha'\beta^2 = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (80)$$

puis, de celles-ci,

$$\alpha\alpha'\beta = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}\sqrt{k'}}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (81)$$

ou, en vertu de la formule (23),

$$\alpha\alpha'\beta = \frac{\alpha'}{\beta'} = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots \quad \ldots \ldots \ldots \quad (82)$$

38. *Remarque.* La fonction

$$\alpha\alpha'\beta = \alpha\beta \times \alpha' = (1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})\cdots \times (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots;$$

donc, *dans le développement de ce produit, les coefficients sont* ± 2 *ou zéro.* Cette propriété a de l'analogie avec celle dont jouit le produit $\alpha\alpha'$.

39. *Relation entre les nombres* φ_i. Les développements de $\alpha\beta$ et de α' étant (10), (15)

$$\sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n)\, q^{2n}, \qquad 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots,$$

le coefficient de q^{2n}, dans le produit, est

$$(-1)^n \varphi_i(n) - (-1)^{n-1}\varphi_i(n-1) - (-1)^{n-2}\varphi_i(n-2) + (-1)^{n-5}\varphi_i(n-5) + (-1)^{n-7}\varphi_i(n-7) - \cdots,$$

ou

$$(-1)^n\left[\varphi_i(n)+\varphi_i(n-1)-\varphi_i(n-2)-\varphi_i(n-5)-\varphi_i(n-7)-\varphi_i(n-12)+\cdots\right].$$

Identifiant cette quantité avec le terme général de la série (82), on a ce nouveau théorème :

La fonction

$$\varphi_i(n)+\varphi_i(n-1)-\varphi_i(n-2)-\varphi_i(n-5)-\varphi_i(n-7)-\cdots$$

égale 2 *ou zéro, suivant que* n *est ou n'est pas carré* (*).

Par exemple :

$$\varphi_i(16)+\varphi_i(15)-\varphi_i(14)-\varphi_i(11)-\varphi_i(9)-\varphi_i(4)+\varphi_i(1)=5+4-3-2-2-1+1=+2,$$
$$\varphi_i(25)+\varphi_i(24)-\varphi_i(23)-\varphi_i(20)-\varphi_i(18)-\varphi_i(13)+\varphi_i(10)+\varphi_i(3)$$
$$=12+11-9-7-5-3+2+1=+2,$$
$$\varphi_i(24)+\varphi_i(23)-\varphi_i(22)-\varphi_i(19)-\varphi_i(17)-\varphi_i(12)+\varphi_i(9)+\varphi_i(2)$$
$$=11+9-8-6-5-3+2+0=0.$$

40. *Remarque.* Le produit $\alpha'\beta^2$ est décomposable en $\alpha'\beta\times\beta$; donc, à cause des formules (14), (34) et (77) :

$$1+2q+2q^4+2q^9+\cdots=[1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots]\sum_0^\infty\varphi_i(n)\,q^n. \quad (83)$$

Identifiant les deux membres, on retombe sur le théorème précédent. [*Ad.*] (**)

41. *Autre relation entre les nombres* φ_i. Si l'on décompose $\alpha\alpha'\beta$ en $\beta\times\alpha\alpha'$, et que l'on ait égard aux formules

$$\beta=1+\varphi_i(1)\,q+\varphi_i(2)\,q^2+\varphi_i(3)\,q^3+\cdots, \quad (34)$$
$$\alpha\alpha'=1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+q^{22}+q^{26}-\cdots, \quad (51)$$

on trouve la proposition suivante :

La fonction

$$\varphi_i(n)-\varphi_i(n-1)-\varphi_i(n-2)+\varphi_i(n-5)+\varphi_i(n-7)-\varphi_i(n-12)-\varphi_i(n-15)+\cdots$$

égale $2(-1)^{\frac{n}{2}}$ *ou zéro, suivant que* n *est ou n'est pas le double d'un carré.*

(*) Le terme général est $(-1)^{a-l}\varphi_i(n-a)$, a désignant $\frac{3l^2\mp l}{2}$.

(**) Nous indiquons ainsi les *additions* au texte primitif.

Exemples :

$$\varphi_i(8)-\varphi_i(7)-\varphi_i(6)+\varphi_i(3)+\varphi_i(1)=2-1-1+1+1=2=2(-1)^4,$$
$$\varphi_i(18)-\varphi_i(17)-\varphi_i(16)+\varphi_i(13)+\varphi_i(11)-\varphi_i(6)-\varphi_i(3)=5-5-5+3+2-1-1=-2=2(-1)^9,$$
$$\varphi_i(16)-\varphi_i(15)-\varphi_i(14)+\varphi_i(11)+\varphi_i(9)-\varphi_i(4)-\varphi_i(1)=5-4-3+2+2-1-1=0.$$

42. Corollaire. Si l'on combine les deux derniers théorèmes, on en conclut un autre, assez simple, que l'on peut énoncer ainsi :

La fonction

$$\varphi_i(n)-\varphi_i(n-2)-\varphi_i(n-12)+\varphi_i(n-22)+\varphi_i(n-26)-\cdots$$

égale 1, *ou* $(-1)^{\frac{n}{2}}$, *ou zéro, suivant que* n *est un carré, ou le double d'un carré, ou un autre nombre.*

Par exemple :

$$\varphi_i(16)-\varphi_i(14)-\varphi_i(4)=5-3-1=1,$$
$$\varphi_i(25)-\varphi_i(23)-\varphi_i(13)+\varphi_i(3)=12-9-3+1=1,$$
$$\varphi_i(18)-\varphi_i(16)-\varphi_i(6)=5-5-1=(-1)^9,$$
$$\varphi_i(24)-\varphi_i(22)-\varphi_i(12)+\varphi_i(2)=11-8-3+0=0.$$

43. *Seconde expression de* $\alpha\alpha'\beta$. Des formules (34), (65), on déduit

$$\alpha\alpha'\beta=\frac{1+\varphi_i(1)\,q+\varphi_i(2)\,q^2+\varphi_i(3)\,q^3+\cdots}{1+\psi(1)\,q+\psi(2)\,q^2+\psi(3)\,q^3+\cdots} \quad \ldots \ldots \quad (84)$$

44. *Relation entre les nombres* ψ, φ_i. D'après cette dernière valeur, comparée au développement ci-dessus (82) :

$$\varphi_i(n)=\psi(n)-2\psi(n-2)+2\psi(n-8)+2\psi(n-18)-\cdots \quad \ldots \quad (85)$$

45. *Développement de* $\frac{\beta'}{\alpha'}$. Nous avons trouvé

$$\beta'=1+\varphi(1)\,q^2+\varphi(2)\,q^4+\varphi(3)\,q^6+\cdots, \quad \ldots \ldots \quad (36)$$
$$\frac{1}{\alpha'}=1+\psi(1)\,q^2+\psi(2)\,q^4+\psi(3)\,q^6+\cdots \quad \ldots \ldots \quad (68)$$

Par suite

$$\frac{\beta'}{\alpha'}=1+A_1q^2+A_2q^4+\cdots+A_nq^{2n}+\cdots, \quad \ldots \ldots \quad (86)$$

$A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ étant des *nombres entiers*, définis par la formule

$$A_n = \varphi(n) + \varphi(n-1)\psi(1) + \varphi(n-2)\psi(2) + \cdots + \varphi(1)\psi(n-1) + \psi(n). \quad (87)$$

46. *Calcul des coefficients* A_n. Le produit des séries (82), (86) doit se réduire à l'unité; donc

$$A_n = 2[A_{n-1} - A_{n-4} + A_{n-9} - A_{n-16} + \cdots], \quad (88)$$

formule plus commode que la précédente. Les premières valeurs de A_n sont

$A_0 = 1,\quad A_1 = 2,\quad A_2 = 4,\quad A_3 = 8,\quad A_4 = 14,\quad A_5 = 24,\quad A_6 = 40,$
$A_7 = 64,\quad A_8 = 100,\quad A_9 = 154,\quad A_{10} = 232,\quad A_{11} = 344,\quad A_{12} = 504,$
$A_{13} = 728,\quad A_{14} = 1\,040,\quad A_{15} = 1\,472,\quad A_{16} = 2\,062, \ldots.$

47. *Identité remarquable.* En vertu de la relation (7),

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\alpha'}{\alpha\alpha' \times \alpha'\beta}.$$

Mais

$$\alpha\alpha' = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + \cdots, \quad (51)$$
$$\alpha'\beta = 1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + q^{22} + \cdots, \quad (79)$$
$$\alpha' = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + q^{44} + \cdots, \quad (52)$$
$$\frac{\alpha'}{\beta'} = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - 2q^{50} + \cdots; \quad (82)$$

donc

$$\left.\begin{aligned}&(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + \cdots)(1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + \cdots)\\ &= (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - \cdots)(1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots)\end{aligned}\right\} \quad (89)\ (*)$$

48. *Développement de* $\alpha\alpha'\beta'$. Par les formules (5), (6) :

$$\alpha\alpha'\beta' = \frac{\alpha'}{\beta} = q^{-\frac{1}{8}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}\sqrt{kk'}}; \quad (90)$$

donc (21)

$$\alpha\alpha'\beta' = \frac{\alpha'}{\beta} = 1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - q^{15} - q^{21} + \cdots \quad (91)$$

(*) On arrive au même résultat si l'on emploie les formules (60), (61), ...

49. *Développement de $\alpha'\beta\beta'$.* Il est donné par la dernière formule, dans laquelle on changerait q en $-q$. Ainsi :

$$\alpha'\beta\beta' = \frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + q^{15} + q^{21} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (92)$$

50. Corollaires. I. *Dans le produit des fonctions*

$$\alpha\alpha' = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots, \qquad \beta' = (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots,$$

le coefficient de q^n *est* $(-1)^n$ *ou zéro, suivant que* n *est ou n'est pas triangulaire.*

II. *Dans le produit des fonctions*

$$\alpha' = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots, \qquad \beta\beta' = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots,$$

le coefficient de q^n *est* 1 *ou zéro, selon que* n *est ou n'est pas triangulaire.*

51. *Relation entre les nombres* φ_p. Comme

$$\alpha\alpha' = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots, \qquad \beta' = 1 + \varphi_p(1)\,q + \varphi_p(2)\,q^2 + \varphi_p(3)\,q^3 + \cdots,$$

il s'ensuit que :

La fonction

$$\varphi_p(n) - \varphi_p(n-1) - \varphi_p(n-2) + \varphi_p(n-5) + \varphi_p(n-7) - \cdots,$$

nulle si n *n'est pas triangulaire, se réduit à* $+1$ *quand* n *est triangulaire pair, et à* -1 *dans le cas contraire.*

52. *Relations entre les nombres* φ. 1° Si $n = 2n'$, les termes $\varphi_p(2n'-1)$, $\varphi_p(2n'-5)$, $\varphi_p(2n'-7)$, ... sont nuls. En même temps, $\varphi_p(2n') = \varphi(n')$, $\varphi_p(2n'-2) = \varphi(n'-1)$, etc. Remplaçant n' par n, on peut énoncer ainsi la dernière propriété :

La fonction

$$\varphi(n) - \varphi(n-1) - \varphi(n-6) + \varphi(n-11) + \varphi(n-13) - \varphi(n-20) - \cdots$$

se réduit à 1 *ou à zéro, suivant que* 2n *est ou n'est pas triangulaire* (*).

(*) Le terme général est $(-1)^l\varphi(n-b)$, b représentant $\frac{1}{4}(3l^2 \mp l)$, $\frac{1}{4}(3l^2 - l)$ ou $\frac{1}{4}(3l^2 + l)$, selon que l a la forme $4l'$, $4l'-1$ ou $4l'+1$.

2° A cause de

$$\alpha' = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots, \quad \beta\beta' = 1 + \varphi(1)\,q + \varphi(2)\,q^2 + \varphi(3)\,q^3 + \cdots,$$

on conclut, de l'égalité (92), cet autre théorème :

La fonction

$$\varphi(n) - \varphi(n-2) - \varphi(n-4) + \varphi(n-10) + \varphi(n-14) - \cdots$$

se réduit à 1 *ou à zéro, suivant que* n *est ou n'est pas triangulaire.*

53. *Relations entre les nombres* φ *et* ψ. **1° On a** (32), (68), (92) :

$$\beta\beta' = \sum_0^\infty \varphi(n)\,q^n, \quad \frac{1}{\alpha'} = \sum_0^\infty \psi(n)\,q^{2n}, \quad \alpha'\beta\beta' = 1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots;$$

et, par conséquent :

$$\varphi(2n) = \psi(n) + \psi(n-3) + \psi(n-5) + \psi(n-14) + \psi(n-18) + \psi(n-33) + \cdots, \tag{93}$$
$$\varphi(2n+1) = \psi(n) + \psi(n-1) + \psi(n-7) + \psi(n-10) + \psi(n-22) + \psi(n-27) + \cdots. \tag{94}$$

Par exemple :

$$\varphi(72) = \psi(36) + \psi(33) + \psi(31) + \psi(22) + \psi(18) + \psi(1),$$
$$\varphi(71) = \psi(35) + \psi(34) + \psi(28) + \psi(25) + \psi(13) + \psi(8);$$

ou (*)

$$36\,352 = 17\,977 + 10\,143 + 6\,842 + 1\,002 + 385 + 3,$$
$$32\,994 = 14\,883 + 12\,310 + 3\,718 + 1\,958 + 101 + 22;$$

ce qui est exact.

2° Si l'on fait usage de la formule

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{\sum_0^\infty \psi(n)\,q^n}{\sum_0^\infty \varphi(n)\,q^n}, \tag{69}$$

on trouve, avec la même facilité,

$$\left[1 + \varphi(1)\,q + \varphi(2)\,q^2 + \cdots\right]^2 = \left[1 + \psi(1)\,q + \psi(2)\,q^2 + \cdots\right](1 + q + q^3 + q^6 + \cdots); \tag{95}$$

puis

$$\psi(n) + \psi(n-1) + \psi(n-3) + \psi(n-6) + \cdots = \varphi(n) + \varphi(1)\varphi(n-1) + \varphi(2)\varphi(n-2) + \cdots + \varphi. \tag{96}$$

(*) Voir Tables II et III.

54. *Développement de* $\frac{\beta}{\alpha'}$. Si l'on suppose

$$\frac{\beta}{\alpha'} = 1 + B_1 q + B_2 q^2 + \cdots B_n q^n + \cdots, \quad \ldots \ldots \quad (97)$$

on conclut, des relations (34), (68),

$$B_n = \varphi_i(n) + \varphi_i(n-2)\,\psi(1) + \varphi_i(n-4)\,\psi(2) + \cdots; \quad \ldots \ldots \quad (98)$$

et, par la formule (91) :

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-3} - B_{n-6} - B_{n-10} + B_{n-15} + B_{u-21} - \cdots \quad \ldots \ldots \quad (99)$$

Ainsi, *les coefficients* B_n *sont des nombres entiers.* A cause de $B_0 = 1$, la dernière équation donne, successivement :

$$B_1 = 1,\ B_2 = 1,\ B_3 = 2,\ B_4 = 3,\ B_5 = 4,\ B_6 = 5,\ B_7 = 7,\ B_8 = 10,\ B_9 = 13, \ldots$$

55. *Remarque.* Si les nombres B_n étaient connus, il serait facile d'en déduire les nombres φ_i. En effet (34), (52).

$$\frac{\beta}{\alpha'} = \frac{1 + \varphi_i(1)\,q + \varphi_i(2)\,q^2 + \varphi_i(3)\,q^3 + \cdots}{1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + \cdots}; \quad \ldots \ldots \quad (100)$$

donc, à cause de la formule (97) :

$$\varphi_i(n) = B_n - B_{n-2} - B_{n-4} + B_{n-10} + B_{n-14} - \cdots. \quad \ldots \ldots \quad (101)$$

56. *Développement de* $\frac{\alpha}{\alpha'}$. D'après ce que nous avons fait observer plusieurs fois,

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 - B_1 q + B_2 q^2 - \cdots \pm B_n q^n \mp \cdots \quad \ldots \ldots \quad (102)$$

57. *Développement de* $\frac{\alpha}{\beta}$. On a trouvé (8), (31) :

$$\alpha = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n)\,q^n, \qquad \frac{1}{\beta} = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi(n)\,q^n;$$

donc

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 - C_1 q + C_2 q^2 - \cdots \pm C_n q^n \mp \cdots, \quad \ldots \ldots \quad (103)$$

pourvu que

$$C_n = \varphi_i(n) + \varphi_i(n-1)\,\varphi(1) + \varphi_i(n-2)\,\varphi(2) + \cdots + \varphi(n). \quad \ldots \quad (104)$$

58. *Calcul des coefficients* C_n. Au lieu d'employer la dernière formule, on peut faire attention que, d'après les relations (51), (79), on a

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+q^{22}+\cdots}{1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+q^{15}+q^{22}+\cdots}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

et, en conséquence :

La fonction

$$C_n-C_{n-1}-C_{n-2}+C_{n-5}+C_{n-7}-C_{n-12}-\cdots$$

nulle si le nombre n *n'est pas pentagonal, se réduit à* $(-1)^{n-l}$ *dans le cas contraire, c'est-à-dire quand* $n=\frac{3l^2\mp l}{2}$ (*).

On trouve, en appliquant ce théorème :

$$C_1=2,\quad C_2=2,\quad C_3=4,\quad C_4=6,\quad C_5=8,$$
$$C_6=12,\quad C_7=16,\quad C_8=22,\quad C_9=30,\quad C_{10}=40,\ldots$$

59. *Relation entre les nombres* φ, φ_i. La série (103) est le quotient de

$$\alpha=1-\varphi_i(1)\,q+\varphi_i(2)\,q^2-\varphi_i(3)\,q^3+\cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

par

$$\beta=1+\varphi_i(1)\,q+\varphi_i(2)\,q^2+\varphi_i(3)\,q^3+\cdots. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Conséquemment

$$\varphi_i(n)=C_n-C_{n-1}\varphi_i(1)+C_{n-2}\varphi_i(2)-C_{n-3}\varphi_i(3)+\cdots\pm\varphi_i(n), \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

C_n, C_{n-1}, $C_{n-2}\ldots C_1$ étant déterminés par la formule (104).

Si par exemple, $n=4$:

$$\begin{aligned}\varphi_i(4)=&\left[\varphi_i(4)+\varphi_i(3)\,\varphi(1)+\varphi_i(2)\,\varphi(2)+\varphi_i(1)\,\varphi(3)+\varphi(4)\right]\\&-\left[\varphi_i(3)+\varphi_i(2)\,\varphi(1)+\varphi_i(1)\,\varphi(2)+\varphi(3)\right]\varphi_i(1)+\left[\varphi_i(2)+\varphi_i(1)\,\varphi(1)+\varphi(2)\right]\varphi_i(2)\\&-\left[\varphi_i(1)+\varphi(1)\right]\varphi_i(3)+\varphi_i(4);\end{aligned}$$

ou (Table III)

$$1=[1+1+2+2]-[1+1+2]+0-[1+1]+1;$$

ce qui est exact. Du reste la relation (106) est beaucoup trop compliquée pour que l'on en puisse faire usage.

(*) On peut comparer ce théorème à l'un de ceux que nous avons énoncés dans le n° **18**.

60. *Développements de* $\frac{\beta}{\alpha}$. 1° Les fonctions α, β ne différant que par le changement de q en $-q$, il en doit être de même pour les fractions $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$.

Ainsi

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + C_1 q + C_2 q^2 + \cdots + C_n q^n + \cdots, \quad (107)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + q^{22} + \cdots}{1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + \cdots}, \quad (108)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 + \varphi_i(1) q + \varphi_i(2) q^2 + \varphi_i(3) q^3 + \cdots}{1 - \varphi_i(1) q + \varphi_i(2) q^2 - \varphi_i(3) q^3 + \cdots}. \quad (109)$$

2° A cause de la formule (72), et de la relation entre α et β,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 + \psi(1) q + \psi(2) q^2 + \psi(3) q^3 + \cdots}{1 - \psi(1) q + \psi(2) q^2 - \psi(3) q^3 + \cdots}. \quad (110)$$

61. *Autre relation entre les coefficients* C_n. D'après les formules (103), (107),

$$C_n - C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} - \cdots \pm C_n = 0. \quad (111)$$

Cette équation, qui peut servir à calculer C_n quand n est *pair*, devient, dans le cas contraire, une pure identité. Voici, je pense, la raison de ce fait :

Le produit des séries (103), (107) a la forme $P^2 - Q^2 q^2$, P et Q représentant des fonctions *paires* de q. Pour rendre ce produit égal à 1, il n'est donc pas nécessaire d'attribuer des valeurs déterminées aux coefficients C_1, C_3, C_5, ... Autrement dit, ces coefficients restent *arbitraires* ou *indéterminés* (*).

62. *Remarques.* I. La comparaison des formules (109), (110) conduit à cette conséquence assez curieuse : la fraction (109) ne change pas de valeur, si l'on y remplace les nombres φ_i par les nombres ψ.

(*) L'égalité dont il est question dans le texte, est

$$(1 + C_2 q^2 + C_4 q^4 + \cdots)^2 = 1 + q^2 (C_1 + C_3 q^2 + C_5 q^4 + \cdots)^2.$$

Posant

$$C_1 + C_3 q^2 + C_5 q^4 + \cdots = Q,$$

on a, par la formule du binôme,

$$1 + C_2 q^2 + C_4 q^4 + \cdots = 1 + \frac{1}{2} q^2 Q - \frac{1}{2.4} q^4 Q^2 + \frac{1.3}{2.4.6} q^6 Q^3 - \cdots;$$

relation d'où l'on tire, successivement :

$$C_2 = \frac{1}{2} C_1, \quad C_4 = \frac{1}{2} C_3 - \frac{1}{8} C_1^2, \quad C_6 = \frac{1}{2} C_5 - \frac{1}{4} C_1 C_3 + \frac{1}{16} C_1^3, \text{ etc. } [Ad.]$$

II. Si, pour abréger, on écrit ainsi les équations (108), (109), (110) :

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{B}{A}=\frac{B'}{A'}=\frac{B''}{A''},$$

on a

$$AB'=A'B, \qquad AB''=A''B.$$

Or,

$$A=\alpha\alpha', \qquad B'=\beta;$$

donc

$$AB'=\alpha\alpha'\beta=1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots, \quad \ldots \quad (82)$$

ou

$$\left[1+\varphi_i(1)\,q+\varphi_i(2)\,q^2+\varphi_i(3)\,q^3+\cdots\right](1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)=1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots, \quad (112)$$

relation déjà trouvée (41).

III. De même,

$$A=\alpha\alpha', \qquad B''=\frac{1}{\alpha\alpha'}; \quad \ldots \quad (65)$$

donc $AB''=1$, ou

$$\left[1+\psi(1)\,q+\psi(2)\,q^2+\cdots\right]\left[1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots\right]=1, \quad \ldots \quad (113)$$

comme ci-dessus (22).

IV. Si l'on suppose $\frac{\alpha}{\beta}=F(q)$, on a $\frac{\beta}{\alpha}=F(-q)$, puis

$$F(q)\,F(-q)=1. \quad \ldots \quad (114)$$

Ainsi,

$$F(q)=\frac{A}{B}, \quad F(q)=\frac{A'}{B'}, \quad F(q)=\frac{A''}{B''}$$

sont *trois solutions* de cette équation. La solution générale est donnée par la formule

$$F(q)=\frac{P+Qq}{P-Qq},$$

dans laquelle P, Q désignent, comme précédemment (61), des fonctions *paires* de q.

V. Si l'on prenait

$$F(q)=P_1+Q_1q, \quad F(-q)=P_1-Q_1q,$$

la fonction *paire* P_1 serait déterminée par la formule

$$P_1=\sqrt{1+Q_1^2q^2};$$

mais cette solution est comprise dans la première. En effet, l'identification des deux valeurs de $F(q)$ conduit à

$$P_1 = \frac{P^2 + Q^2q^2}{P^2 - Q^2q^2}, \qquad Q_1 = 2\,\frac{PQ}{P^2 - Q^2q^2};$$

etc. (*).

63. *Développement de* $\frac{\beta}{\beta'}$. Des formules (54), (40) :

$$\beta = \sum_0^\infty \varphi_i(n)\, q^n, \quad \frac{1}{\beta'} = \sum_0^\infty (-1)^n\, \varphi_i(n)\, q^{2n},$$

on conclut

$$\frac{\beta}{\beta'} = 1 + D_1 q + D_2 q^2 + \cdots + D_n q^n + \cdots, \qquad (115)$$

pourvu que l'on suppose

$$D_n = \varphi_i(n) - \varphi_i(1)\,\varphi_i(n-2) + \varphi_i(2)\,\varphi_i(n-4) - \varphi_i(3)\,\varphi_i(n-6) + \cdots. \qquad (116)$$

64. *Autres expressions de* $\frac{\beta}{\beta'}$. 1° $\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\alpha'\beta}{\alpha'\beta'}$; donc (79), (54) :

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + \cdots}{1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - q^{60} + \cdots} \qquad (117)$$

2° Les égalités (13), (15), divisées membre à membre, donnent

$$\frac{(1+q^2)(1+q^6)(1+q^{10})\ldots}{(1+q^4)(1+q^8)(1+q^{12})\ldots} = \frac{1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \cdots}{1 - q^2 - q^6 + q^{12} + q^{20} - \cdots};$$

d'où, par le changement de q^2 en q :

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots}{1 - q - q^5 + q^6 + q^{10} + \cdots}. \qquad (118)$$

(*) Par exemple, on satisfait à l'équation (114) au moyen de

$$F(q) = \sqrt{1 + q^6} + q^3;$$

mais cette égalité peut être mise sous la forme

$$F(q) = \frac{1 + \sqrt{1 + q^6} + q^3}{1 + \sqrt{1 + q^6} - q^3}.$$

3° Nous avons trouvé

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots, \quad \ldots \quad (82)$$

$$\frac{\beta}{\alpha'} = \frac{1 + \varphi_i(1)\,q + \varphi_i(2)\,q^2 + \varphi_i(3)\,q^3 + \cdots}{1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + \cdots}. \quad \ldots \quad (100)$$

Conséquemment,

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots}{1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + \cdots}\left[1 + \varphi_i(1)\,q + \varphi_i(2)\,q^2 + \cdots\right]. \quad (119)$$

4° Si l'on a égard à la relation (112), on peut éliminer le second facteur. De là résulte, au lieu de la dernière expression,

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{[1 - 2q^2 - 2q^8 + 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots]^2}{[1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots]\,[1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots]} \quad \ldots \quad (120)$$

5° Enfin, des formules (34), (36), (40), (73), on déduit encore :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\beta}{\beta'} &= \frac{1 + \varphi_i(1)\,q + \varphi_i(2)\,q^2 + \varphi_i(3)\,q^3 + \cdots}{1 + \varphi(1)\,q^2 + \varphi(2)\,q^4 + \varphi(3)\,q^6 + \cdots}\\ &= \frac{1 - \varphi_i(1)\,q^2 + \varphi_i(2)\,q^4 - \varphi_i(3)\,q^6 + \cdots}{1 - \varphi(1)\,q + \varphi(2)\,q^2 - \varphi(3)\,q^3 + \cdots}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (121)$$

65. *Identités remarquables.* 1° Si l'on égale les valeurs (117), (118), on trouve, en changeant q en $-q$:

$$\left.\begin{aligned}&(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots)\,(1 + q + q^3 + q^6 + \cdots)\\ &= (1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots)\,(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots).\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (122)$$

2° De même,

$$\left.\begin{aligned}&(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots)\,(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots)\\ &= (1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots)\,(1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots).\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (123)$$

3° Il résulte, de ces deux égalités,

$$\left.\begin{aligned}&(1 + q + q^3 + q^6 + \cdots)\,(1 - q - q^3 + q^6 + \cdots)\\ &= (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots)\,(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots).\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (124)$$

66. *Remarques.* I. La valeur commune des deux membres, dans la première identité, est $\alpha\alpha' \times \frac{\alpha'}{\alpha} = \alpha'^2$.

II. D'après les formules (51), (52), la valeur commune des deux produits suivants est $\alpha\alpha'^2$.

III. Enfin, dans la dernière identité, la valeur commune des deux membres est (20), (21), (7) : $\frac{\alpha'^2}{\alpha\beta} = \alpha'^2\beta'$.

67. *Relations entre les coefficients* D_n. Elles résultent de la comparaison des formules (115), (117), (118) :

1° *La fonction*

$$D_n - D_{n-4} - D_{n-8} + D_{n-20} + D_{n-28} - \cdots$$

nulle si n *n'est pas pentagonal, se réduit, dans le cas contraire, à* $(-1)^{n-l}$;

2° *La fonction*

$$D_n - D_{n-1} - D_{n-3} + D_{n-6} + D_{n-10} -$$

nulle si n *n'est pas le double d'un carré, égale* $2(-1)^{\frac{n}{2}}$ *dans le cas contraire.*

On trouve, en appliquant l'un ou l'autre théorème :

$$D_1 = 1,\ D_2 = -1,\ D_3 = 0,\ D_4 = 1,\ D_5 = 0,\ D_6 = -1,\ D_7 = -1,\ D_8 = 2,\ D_9 = 1,\ D_{10} = -2, \ldots$$

68. *Développement de* $\frac{\beta}{\beta'}$. Si l'on fait

$$\frac{\beta'}{\beta} = 1 - E_1 q + E_2 q^2 - \cdots \pm E_n q^n \mp \cdots, \quad (125)$$

les formules (36), (73) :

$$\beta' = 1 + \varphi(1)\, q^2 + \varphi(2)\, q^4 + \cdots, \qquad \frac{1}{\beta} = 1 - \varphi(1)\, q + \varphi(2)\, q^2 - \varphi(3)\, q^3 + \cdots$$

donnent

$$E_n = \varphi(n) + \varphi(1)\, \varphi(n-2) + \varphi(2)\, \varphi(n-4) + \varphi(3)\, \varphi(n-6) + \cdots \quad (126)$$

69. *Relations entre les nombres* E_n. Il suffit de les énoncer :

1° *La fonction*

$$E_n - E_{n-1} - E_{n-2} + E_{n-5} + E_{n-7} - E_{n-12} - \cdots$$

égale $(-1)^l$ *ou zéro, selon que* n *est ou n'est pas quadruple d'un nombre pentagonal;*

2° *La fonction*

$$E_n - 2E_{n-2} + 2E_{n-8} - 2E_{n-18} + \cdots$$

égale 1 *ou zéro, suivant que* n *est ou n'est pas triangulaire* (*).

Les premières valeurs sont :

$E_1 = 1$, $E_2 = 2$, $E_3 = 3$, $E_4 = 4$, $E_5 = 6$, $E_6 = 9$, $E_7 = 12$, $E_8 = 16$, $E_9 = 22$, $E_{10} = 29$, ...

70. *Valeurs de* $\sqrt[4]{k'}$, $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt{1+k'}$, etc. 1° D'après les formules (3) et (5), la fraction $\frac{\alpha}{\beta}$ est égale à $\sqrt[4]{k'}$. Conséquemment (55), (27) :

$$\left.\begin{aligned}\sqrt[4]{k'} = \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \cdots}{1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + \cdots}\\ &= \frac{1 - \varphi_i(1)\, q + \varphi_i(2)\, q^2 - \varphi_i(3)\, q^3 + \cdots}{1 + \varphi_i(1)\, q + \varphi_i(2)\, q^2 + \varphi_i(3)\, q^3 + \cdots}\\ &= \frac{1 - \psi(1)\, q + \psi(2)\, q^2 - \psi(3)\, q^3 + \cdots}{1 + \psi(1)\, q + \psi(2)\, q^2 + \psi(3)\, q^3 + \cdots}\\ &= \frac{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots}\\ &= \frac{1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - q^{15} - \cdots}{1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + q^{15} + \cdots}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (127)$$

2° On trouve, avec la même facilité, au moyen des formules (6), (5), (36), (54), (117), (118), (121) :

$$\left.\begin{aligned}\sqrt[4]{k} = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \frac{\beta'}{\beta} &= 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \frac{1 + \varphi(1)\, q^2 + \varphi(2)\, q^4 + \varphi(3)\, q^6 + \cdots}{1 + \varphi_i(1)\, q + \varphi_i(2)\, q^2 + \varphi_i(3)\, q^3 + \cdots}\\ &= 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \frac{1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - q^{60} + \cdots}{1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + \cdots}\\ &= 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \frac{1 - \varphi(1)\, q + \varphi(2)\, q^2 - \varphi(3)\, q^3 + \cdots}{1 - \varphi_i(1)\, q^2 + \varphi_i(2)\, q^4 - \varphi_i(3)\, q^6 + \cdots}\\ &= 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \frac{1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - q^{15} - \cdots}{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (128)$$

3° La comparaison des formules (26) et (30) donne ces valeurs simples :

$$\sqrt{\frac{1 + k'}{2}} = \frac{1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}, \quad \ldots\ldots \quad (129)$$

$$\sqrt{\frac{1 - k'}{2}} = 2q^{\frac{1}{2}} \frac{1 + q^4 + q^{12} + q^{24} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots} \quad \ldots\ldots \quad [Ad.] \ (130)$$

(*) De là résulte que E_n est *impair* dans le premier cas, *pair* dans le second.

4° Des égalités (19), (22), on tire, semblablement,

$$\sqrt{\frac{k}{1+k'}} = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{4}} \frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots}{1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [Ad.] \ (131)$$

5° Ce n'est pas tout : en partant de la valeur de $\sqrt{k}$ (26), et en faisant usage d'une identité connue, que nous indiquerons tout à l'heure, on arrive à ces deux autres formules :

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[4]{k} &= 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots}{1+q+q^3+q^6+\cdots}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

6° Enfin, celles-ci équivalent à

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta}{\beta'} &= \frac{1+q+q^3+q^6+\cdots}{1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots} \\ &= \frac{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}{1+q+q^3+q^6+\cdots}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [Ad.] \ (133)$$

71. *Autre expression de* $\sqrt{\frac{k}{1+k'}}$. Des formules connues

$$\cos \operatorname{am} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, \qquad \cos \operatorname{am} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\mathrm{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\Theta\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

on conclut, à cause des valeurs de $\mathrm{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\Theta\left(\frac{\omega}{2}\right)$ (I) :

$$\sqrt{\frac{k}{1+k'}} = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{4}} \frac{1-q^2-q^6+q^{12}+q^{20}-\cdots}{1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}+\cdots} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [Ad.] \ (134)$$

72. *Identités remarquables.* 1° Rappelons d'abord celles que nous avons citées ou démontrées précédemment :

$$\sqrt[4]{\frac{\omega'}{\omega}}\,[1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots] = \sqrt[4]{\frac{\omega}{\omega'}}\,[1+2q'+2q'^4+2q'^9+2q'^{16}+\cdots], \quad (25)$$

$$(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^4 - (1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^4 = 16q\,(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4, \quad (29)$$

$$(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^2 + (1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^2 = 2\,(1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots)^2, \quad (30)$$

$$(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^2 - (1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^2 = 8q\,(1+q^4+q^{12}+q^{24}+\cdots)^2, \quad (31)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)\\=&(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ (89)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)\\=&(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)(1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (122)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)\\=&(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (123)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)\\=&(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}+\cdots)(1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (124)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots)\\=&(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{36}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ .\ .\ [Ad.]\ (127)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots)\\=&(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}-\cdots).\end{aligned}\right\}\ [Ad.]\ (127^{\text{bis}})$$

2° Le changement de q en $-q$ donne

$$\left.\begin{aligned}&(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)\\=&(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)(1-q^4-q^{18}+q^{20}+q^{28}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (135)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)\\=&(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots),\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (136)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots)\\=&(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{36}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ .\ .\ [Ad.]\ (137)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots)\\=&(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots).\end{aligned}\right\}\ .\ .\ [Ad.]\ (138)$$

3° Ces relations, combinées deux à deux, conduisent à celles-ci :

$$(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)^2=(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots),\ (139)$$

$$(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)^2=(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots),\ (140)$$

$$\left.\begin{aligned}(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)^2&=(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-\cdots)\\&=(1-q-q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}-\cdots)\\&=(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)(1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ (141)$$

$$(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots)^2=(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots).\ (142)\ (*)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)\\=&(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{10}+\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}-\cdots).\end{aligned}\right\}\ .\ .\ [Ad.]\ (143)$$

(*) Legendre, t. III, p. 112.

4° On sait que

$$(1+q+q^3+q^6+\cdots)^2=(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots),\ (144)\ (^*)$$
$$(1-q-q^3+q^6+\cdots)^2=(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)(1-2q+2q^4+2q^9+\cdots);\ (145)\ (^*)$$

donc, à cause de la relation précédente,

$$(1+q+q^3+q^6+\cdots)(1-q-q^3+q^6+\cdots)=(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots);\ (146)$$

puis, en vertu de l'égalité (124) :

$$\left.\begin{aligned}&(1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)\\ &=(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)(1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}-\cdots).\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (147)$$

5° Le changement de q^2 en $\pm q$ donne ensuite :

$$\left.\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)\\ &=(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ .\ .\ (148)\ (^{**})$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)\\ &=(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (149)$$

6° Des égalités (144), (145), on tire, par soustraction,

$$\left.\begin{aligned}&(1+q^6+q^{10}+q^{28}+q^{36}+\cdots)(q+q^3+q^{15}+q^{21}+q^{45}+\cdots)\\ &=(1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\cdots)(q+q^9+q^{25}+q^{49}+q^{81}+\cdots);\end{aligned}\right\}\ .\ .\ (150)$$

ou, en désignant par i, i', des nombres impairs :

$$\sum_0^\infty q^{2i(4i\mp1)}\times\sum_0^\infty q^{i'(2i'\mp1)}=\sum_0^\infty q^{i(i\mp1)}\times\sum_0^\infty q^{i'^2}.\ .\ .\ .\ .\ .\ (151)$$

(*) Legendre, t. III, p. 111. La formule (144) donne les valeurs de $\sqrt[4]{k}$ rapportées ci-dessus (132).

(**) La relation (148) équivaut à

$$\alpha\alpha'.\alpha=\alpha'\beta\beta'\sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}},$$

ou à

$$\alpha^2\alpha'=\sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}};$$

et celle-ci est une conséquence des formules (3), (4).

7° L'identité (144) peut être écrite ainsi :

$$\left(q^{\frac{1}{8}}+q^{\frac{9}{8}}+q^{\frac{25}{8}}+q^{\frac{49}{8}}+\cdots\right)^2=\left(q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+q^{\frac{49}{4}}+\cdots\right)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots);$$

ou, par le changement de q en q^8 :

$$(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots)^2=(q^2+q^{18}+q^{50}+q^{98}+\cdots)(1+2q^8+2q^{32}+2q^{72}+\cdots). \quad (152)$$

8° Faisant la multiplication par 1, réduisant, puis supprimant le facteur 2, on trouve

$$(q^2+q^{18}+q^{50}+q^{98}+\cdots)(q^8+q^{32}+q^{72}+q^{128}+\cdots)=\sum q^{i^2+i'^2} \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

Dans cette nouvelle relation (*), i, i' sont des *nombres impairs, inégaux.*

9° Si l'on ajoute membre à membre les égalités (144), (145), après avoir élevé au carré, on trouve, eu égard à la relation (30) :

$$\left.\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)^4+(1-q-q^3+q^6+q^{10}+\cdots)^4\\&=2(1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\cdots)^2(1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots)^2.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (154)$$

10° Les mêmes relations (144), (145), combinées avec (29), donnent

$$(1+q+q^3+q^6+\cdots)^8-(1-q-q^3+q^6+\cdots)^8=16q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^8; \quad (155)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots)^8-(q-q^9-q^{25}+q^{49}+\cdots)^8=16(q^2+q^{18}+q^{50}+q^{98}+\cdots)^8. \quad (156)$$

11° On a aussi, d'après les formules (144), (145) :

$$\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)^4-(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)^4\\&=(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^2\left[(1+2q+2q^4+\cdots)^2-(1-2q+2q^4-\cdots)^2\right];\end{aligned}$$

c'est-à-dire (31) :

$$(1+q+q^3+q^6+\cdots)^4-(1-q-q^3+q^6+\cdots)^4=8q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^2(1+q^4+q^{12}+\cdots)^2; \quad (157)$$

(*) Elle ne diffère pas de l'identité (31).

relation que l'on peut conclure encore des égalités (154), (155). La valeur commune des deux membres est $q^{-\frac{1}{2}}\frac{\omega^2}{\pi^2}k(1-k')$.

12° En vertu des deux expressions de $\sqrt{\frac{k}{1+k'}}$ (131), (134), on a

$$\left.\begin{aligned}&(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)(1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}+\cdots)\\=&(1-q^2-q^6+q^{12}+\cdots)(1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots).\end{aligned}\right\}\quad . \ . \quad [Ad.] \quad (158)$$

73. *Remarque.* D'après les identités (127^{bis}), (149), *les produits*

$$\begin{gathered}(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots),\\(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots),\\(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)\end{gathered}$$

sont égaux : leur valeur commune est $\alpha'^2\beta=\frac{\omega}{\pi}2^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{8}}(kk')^{\frac{1}{4}}$. [*Ad.*]

74. *Formes diverses de* $\beta\beta'$. 1° Nous avons trouvé (66), (72) :

$$\beta\beta'=\sum_0^\infty\varphi(n)\,q^n,\qquad \beta\beta'=\frac{\sum_0^\infty\psi(n)\,q^n}{\sum_0^\infty\psi(n)\,q^{2n}}.$$

2° D'après les formules (5), (6),

$$\beta\beta'=2^{-\frac{1}{6}}k^{\frac{1}{12}}k'^{-\frac{1}{6}}q^{-\frac{1}{24}}=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{k}}{2k'\sqrt[4]{q}}}.$$

Mais (26)

$$\frac{\sqrt{k}}{2k'\sqrt[4]{q}}=\frac{(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)}{(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^2};$$

ou, à cause de la relation (144),

$$\frac{\sqrt{k}}{2k'\sqrt[4]{q}}=\left[\frac{1+q+q^3+q^6+\cdots}{1-2q+2q^4+2q^9+\cdots}\right]^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (159)$$

Ainsi

$$\beta\beta'=\left[\frac{1+q+q^3+q^6+\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}\right]^{\frac{1}{3}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (160)$$

3° D'après la *Remarque* ci-dessus (73), on a aussi

$$\beta\beta' = \left[\frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots}{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots}\right]^{\frac{1}{3}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad [Ad.] \; (161) \; (^*)$$

4° La relation (7) peut être écrite ainsi :

$$\beta\beta' = \frac{\alpha'}{\alpha\alpha'} \cdot$$

Donc, par les formules (50), (52) :

$$\beta\beta' = \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots}{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (162)$$

5° A cause de l'identité (139), on peut remplacer cette formule par celle-ci :

$$\beta\beta' = \frac{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (163)$$

6° Si l'on divise le cube de $\beta\beta'$ (160) par le produit des deux dernières valeurs, on trouve

$$\beta\beta' = \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots}{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (164)$$

75. *Autres identités.* La comparaison des valeurs (160), (164) donne

$$(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)^3 = (1+q+q^3+q^6+\cdots)^2\,(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots); \quad (165)$$

et, par le changement de q en $-q$:

$$(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)^3 = (1-q-q^3+q^6+\cdots)^2\,(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots). \quad (166)$$

76. *Valeurs de* $(\beta\beta')^2$. Elles résultent des formules (162), (163), (164), combinées deux à deux ; savoir :

$$(\beta\beta')^2 = \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots} = \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots}{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots} \quad . \; . \; . \quad (167)$$

(*) Cette valeur résulte encore de l'identité (127bis). [*Ad.*]

77. *Développement de* $(\beta\beta')^2$. Si l'on suppose

$$(\beta\beta')^2 = 1 + G_1 q + G_2 q^2 + \cdots + G_n q^n + \cdots, \quad (168)$$

les *nombres entiers* G_n sont déterminés par les propriétés suivantes, analogues à plusieurs des théorèmes ci-dessus :

1° *La fonction*

$$G_n - 2G_{n-1} + 2G_{n-2} - 2G_{n-9} + 2G_{n-16} - \cdots$$

se réduit à $(-1)^i$ *ou à zéro, suivant que* n *est ou n'est pas le double d'un nombre pentagonal* (*) ;

2° *La fonction*

$$G_n - G_{n-1} - G_{n-2} + G_{n-5} + G_{n-7} - \cdots$$

égale 1 *ou zéro, suivant que* n *est ou n'est pas triangulaire.*

78. *Relation entre les nombres* G_n, φ. Dans le premier membre de l'égalité (168), le coefficient de q^n est

$$G_n = \varphi(n) + \varphi(n-1)\varphi(1) + \varphi(n-2)\varphi(2) + \cdots \varphi(1)\varphi(n-1) + \varphi(n). \quad (169)$$

79. *Valeurs de* $(\beta\beta')^3$. 1° Par la formule (160),

$$(\beta\beta')^3 = \frac{1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \cdots}. \quad (170)$$

2° De même, à cause de la formule (161) :

$$(\beta\beta')^3 = \frac{1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots}{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots}. \quad [Ad.]\ (171)$$

3° $(\beta\beta')^3 = \frac{\alpha'^3}{(\alpha\alpha')^3}$. Mais

$$\alpha'^3 = 1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + 9q^{20} - \cdots; \quad (24)$$

et, par le changement de q^2 en q :

$$(\alpha\alpha')^3 = 1 - 3q + 5q^3 - 7q^6 + 9q^{10} - \cdots; \quad (172)$$

donc

$$(\beta\beta')^3 = \frac{1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \cdots}{1 - 3q + 5q^3 - 7q^6 + \cdots}. \quad (173)$$

(*) Conséquemment, G_n est *impair* dans le premier cas, *pair* dans le second.

80. *Nouvelle identité.* La comparaison des formules (170), (173) prouve que

$$\left.\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1-3q+5q^3-7q^6+\cdots)\\=&(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)(1-3q^2+5q^6-7q^{12}+\cdots).\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (174)\ (*)$$

81. *Développement de* $(\beta\beta')^3$. Si

$$(\beta\beta')^3 = 1 + H_1 q + H_2 q^2 + \cdots + H_n q^n + \cdots,$$

les nombres entiers H_n sont, évidemment, définis par chacune des propriétés suivantes :

1° *La fonction*

$$H_n - 2H_{n-1} + 2H_{n-4} - 2H_{n-9} + \cdots$$

égale 1 *ou zéro, suivant que* n *est ou n'est pas triangulaire;*

2° *La fonction*

$$H_n - 3H_{n-1} + 5H_{n-3} - 7H_{n-6} + 9H_{n-10} - \cdots,$$

nulle si n *n'est pas le double d'un nombre triangulaire, se réduit à* $(2l+1)(-1)^l$ *dans le cas contraire*, c'est-à-dire quand $n = l(l+1)$.

82. *Relation entre les nombres* φ, H_n. Il est visible que

$$H_n = \sum \varphi(a)\,\varphi(b)\,\varphi(c), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (175)$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$x + y + z = n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176)$$

83. *Remarques.* **I.** A cause de $\alpha\beta\beta' = 1$, les propriétés démontrées dans les numéros (74) et suivants, comprennent celles qui se rapportent aux développements de $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3}, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$. Par exemple :

$$\alpha = \frac{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots}{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots} = \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots}{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots}, \quad (177)$$

$$\alpha^2 = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots}{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots} = \frac{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots}{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (178)$$

$$\alpha^3 = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots}{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots} = \frac{1-3q+5q^3-7q^6+\cdots}{1-3q^2+5q^6-7q^{12}+\cdots} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (179)$$

(*) La valeur commune des deux produits est $\frac{\alpha'}{\alpha}(\alpha\alpha')^3 = \alpha^2\alpha'^4$.

II. Si l'on change q en $-q$, β se transforme en α (8); donc, par les formules (160), (161), ...

$$\left.\begin{aligned}\alpha\beta' = \frac{1}{\beta} &= \left[\frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-q^{24}-\cdots}{1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+\cdots} \\ &= \frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots}{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots} = \frac{1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots},\end{aligned}\right\} \quad (180)$$

$$\left.\begin{aligned}(\alpha\beta')^2 = \frac{1}{\beta^2} &= \frac{1-q-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots} = \frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots}{1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots} \\ &= 1 - G_1 q + G_2 q^2 - \cdots \pm G_n q^n \mp \cdots,\end{aligned}\right\} \quad (181)$$

$$\left.\begin{aligned}(\alpha\beta')^3 = \frac{1}{\beta^3} &= \frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots} = \frac{1-3q^2+5q^6-7q^{12}+\cdots}{1+3q-5q^3-7q^6+\cdots} \\ &= 1 - H_1 q + H_2 q^2 - \cdots \pm H_n q^n \mp \cdots;\end{aligned}\right\} \quad (182)$$

etc.

84. *Formes diverses de* α'^3. 1° Reprenons les égalités

$$\alpha\alpha'\beta = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (82)$$

$$\alpha'\beta\beta' = 1 + q + q^3 + q^6 + \cdots, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (92)$$

$$\alpha\alpha'\beta' = 1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (91)$$

Comme $(\alpha\beta\beta')^2 = 1$, le produit des premiers membres est α'^3; ainsi

$$\alpha'^3 = (1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)(1+q+q^3+q^6+\cdots)(1-q-q^3+q^6+\cdots). \quad (183)$$

2° A cause de l'identité (146), cette formule équivaut à

$$\alpha'^3 = (1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)^2(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots); \quad . \; . \; . \quad (184)$$

ou encore, à

$$\alpha'^3 = (1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)(1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}+\cdots); \quad (185)$$

en vertu de la relation (147).

3° On a trouvé

$$(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots)^2 = (1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots); \quad (142)$$

donc la formule (184) devient

$$\alpha'^3 = (1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots). \quad (186)$$

4° Par les formules (12) et (20) :

$$\alpha'^3 = (1 + q + q^3 + q^6 + \cdots)^2 (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

5° De même, par les égalités (14) et (21) :

$$\alpha'^3 = (1 - q - q^3 + q^6 + \cdots)^2 (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (188)$$

6° On tire, des formules (13), (15) :

$$(1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \cdots)(1 - q^2 - q^6 + q^{12} + q^{20} - \cdots) = \alpha'^2 (1 + q^2)(1 + q^4)(1 + q^6) \ldots;$$

ou plutôt

$$\alpha'^2\beta' = (1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \cdots)(1 - q^2 - q^6 + q^{12} + q^{20} - \cdots) \quad . \quad . \quad . \quad (189)$$

Mais

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

donc

$$\alpha'^3 = (1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \cdots)(1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots)(1 - q^2 - q^6 + q^{12} + q^{20} - \cdots). \quad (190)$$

7° Nous avons trouvé

$$\alpha\alpha' = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

$$\beta\alpha' = 1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

$$\alpha'\beta' = 1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - \cdots; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

donc

$$\alpha'^3 = (1 - q - q^2 + q^5 + \cdots)(1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - \cdots)(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots). \; (191) \; (*)$$

8° Comme (75)

$$\alpha'^2\beta = (1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + \cdots)(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots),$$

et que

$$\frac{\alpha'}{\beta} = 1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

il s'ensuit

$$\alpha'^3 = (1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + \cdots)(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \cdots)(1 - q - q^3 + q^6 + \cdots) \quad . \quad . \quad (192)$$

$$= (1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - \cdots)(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \cdots)(1 + q + q^3 + q^6 + \cdots). \; [Ad.] \; (193)$$

(*) Cette égalité (191) ne diffère pas de la relation (64). [*Ad.*]

9° D'ailleurs

$$\alpha'^3 = 1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + 9q^{20} - \cdots \qquad (24)$$

10° Enfin

$$\alpha'^3 = (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots)^3. \qquad (54)$$

85. *Remarque.* Il résulte, des *douze* expressions précédentes de α'^3, que *la série* (24) *est décomposable :*

1° *De sept manières différentes, en trois facteurs inégaux ;*

2° *De trois manières différentes, en deux facteurs égaux et en un facteur différent des deux premiers ;*

3° *En trois facteurs égaux.*

Ce résultat paraît assez curieux, surtout si on le rapproche de ce qui a lieu pour les polynômes (*).

86. *Formes diverses de* $(\alpha\alpha')^3$. Elles résultent des formules précédentes, dans lesquelles q^2 est remplacé par q ; savoir :

$$\left.\begin{aligned}(\alpha\alpha')^3 &= (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots)^2(1 + q + q^3 + q^6 + \cdots)\\ &= (1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots)(1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots)(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots)\\ &= (1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots)(1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots)(1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots)\\ &= 1 - 3q + 5q^3 - 7q^6 + 9q^{10} - \cdots\\ &= (1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots)^3.\end{aligned}\right\} \quad (194)$$

87. *Formes diverses de* $(\beta\alpha')^3$. Le changement de q en $-q$ donne

$$\left.\begin{aligned}(\beta\alpha')^3 &= (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)^2(1 - q - q^3 + q^6 + \cdots)\\ &= (1 + q - q^2 - q^5 - q^7 + \cdots)(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots)\\ &= (1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots)(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)(1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots)\\ &= 1 + 3q - 5q^3 - 7q^6 + 9q^{10} + \cdots\\ &= (1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - \cdots)^3.\end{aligned}\right\} \quad (195)$$

88. *Développement de* α'^2. 1° Pour essayer de le former, rappelons-nous qu'un terme quelconque de α' a la forme $(-1)^i q^{3i^2 \mp i}$ (50).

(*) Il est bien vrai qu'à une *série dividende* et à une *série diviseur* données, correspond toujours une *série quotient.* Mais, quand les deux premières séries, même supposées très-simples, sont prises arbitrairement, la troisième, si tant est qu'on en puisse assigner le terme général, est, presque toujours, fort compliquée. Ici, au contraire, chacun des facteurs est aussi simple que le produit.

D'après cela, si l'on suppose

$$\alpha'^2 = 1 + L_1 q^2 + L_2 q^4 + \cdots + L_n q^{2n} + \cdots, \quad \ldots \ldots \quad (196)$$
$$2n = (3l^2 \mp l) + (3l'^2 \mp l'), \quad \ldots \ldots \quad (197)$$

on a

$$L_n = \sum (-1)^{l+l'}, \quad \ldots \ldots \quad (198)$$

le signe $\sum$ s'étendant à *toutes les solutions, en nombres entiers*, de l'équation (197)

On peut l'écrire ainsi

$$24n + 2 = (6l \mp 1)^2 + (6l' \mp 1)^2 : \quad \ldots \ldots \quad (199)$$

il s'agira, dans chaque cas particulier, de décomposer $24n + 2$ en deux carrés (*). Cela posé, suivant que l et l' sont de même parité ou de parités contraires, $(-1)^{l+l'} = \pm 1$. Donc enfin

Le coefficient L_n *est égal à l'excès* ε *du nombre des solutions de l'équation* (199), *dans lesquelles* l *et* l' *sont de même parité, sur le nombre des solutions dans lesquelles ces inconnues sont de parités contraires.*

89. *Application.* Soit $2n = 80$, $12n + 1 = 481 = 13 \,.\, 37$. Les méthodes connues (**) donnent :

$$481 = 16^2 + 15^2 = 20^2 + 9^2,$$
$$2.481 = 962 = 31^2 + 1^2 = 29^2 + 11^2;$$

puis

$$l = 5,\ l' = 0; \quad l = 0,\ l' = 5; \quad l = 5,\ l' = 2; \quad l = 2,\ l' = 5.$$

Dans chacune de ces quatre solutions, l et l' sont de parités différentes ; donc $L_{40} = -4$: le terme cherché est $-4q^{80}$.

En effet, si l'on multiplie par elle-même la série

$$1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + q^{44} + q^{52} - q^{70} - q^{80} + \cdots, \quad \ldots \quad (52)$$

on trouve, comme seuls produits partiels contenant q^{80} :

$$1 \times -q^{80}, \quad q^{10} \times -q^{70}, \quad -q^{70} \times q^{10}, \quad -q^{80} \times 1.$$

(*) Il est facile de voir que si $a^2 + b^2 = 24\,n + 2$, les nombres entiers a, b ont nécessairement la forme $6\mu \pm 1$.

(**) Voir, par exemple, un remarquable travail de M. Genocchi (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIII).

90. *Relation entre les coefficients* L_n. Des formules

$$\alpha' = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} + \cdots, \quad \ldots \quad (52)$$

$$\alpha'^3 = 1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + 9q^{20} - \cdots, \quad \ldots \quad (24)$$

jointes au développement de α'^2 (196), on conclut le théorème suivant :

La fonction

$$L_n - L_{n-1} - L_{n-2} + L_{n-5} + L_{n-7} - \cdots,$$

nulle si n *n'est pas triangulaire, égale* $(2\lambda + 1)(-1)^\lambda$ *dans le cas contraire,* c'est-à-dire quand $n = \frac{1}{2}\lambda(\lambda + 1)$ (*).

91. *Relation entre les coefficients* L_n *et les nombres* ψ. A cause de $\alpha'^2 = \alpha'^3 \times \frac{1}{\alpha'}$,

$$1 + L_1 q^2 + L_2 q^4 + \cdots + L_n q^{2n} + \cdots = \left[1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \cdots\right]\left[1 + \psi(1) q^2 + \psi(2) q^4 + \cdots\right]; \quad (200)$$

et, par conséquent,

$$L_n = \psi(n) - 3\psi(n-1) + 5\psi(n-3) - 7\psi(n-6) + \cdots \quad \ldots \quad (201)$$

Au moyen de cette formule et de la Table III, on trouve

$$L_1 = -2,\ L_2 = -1,\ L_3 = 2,\ L_4 = 1,\ L_5 = 2,\ L_6 = -2,\ L_7 = 0,$$
$$L_8 = -2,\ L_9 = -2,\ L_{10} = 1, \ldots$$

92. *Autres expressions de* α'^2. 1° De

$$\alpha\alpha' = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots, \quad \ldots \quad (51)$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots, \quad \ldots \quad (19)$$

on déduit

$$\alpha'^2 = (1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots)(1 + q + q^3 + q^6 + \cdots). \quad \ldots \quad (202)$$

2° Semblablement, si l'on part des formules

$$\alpha'\beta' = 1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - q^{60} + \cdots, \quad \ldots \quad (54)$$

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots, \quad \ldots \quad (82)$$

(*) On a ainsi une relation entre les nombres de solutions de l'équation (199), relatifs aux valeurs successives de n; ce qui est assez remarquable.

on trouve

$$\alpha'^2 = (1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - \cdots)(1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots] \;.\;.\; (203)\ (^*)$$

93. *Autres théorèmes sur les coefficients* L_n. 1° Dans le second membre de l'égalité (202), un produit partiel quelconque a la forme

$$(-1)^\lambda q^{\frac{3\lambda^2 \mp \lambda}{2}} q^{\frac{\lambda'(\lambda'+1)}{2}};$$

donc

$$4n = (3\lambda^2 \mp \lambda) + \lambda'(\lambda' + 1),$$

ou

$$48n + 4 = (6\lambda \mp 1)^2 + 3(2\lambda' + 1). \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (204)$$

Par suite :

Le coefficient L_n *égale l'excès du nombre des valeurs paires sur le nombre des valeurs impaires de* λ, *satisfaisant à l'équation* (204).

2° La formule (203) donne, avec la même facilité, le théorème suivant :

Le coefficient L_n *égale deux fois l'excès* ε' *du nombre des solutions de l'équation*

$$12n + 1 = (6x \mp 1)^2 + 3(2y)^2, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (205)$$

dans lesquelles x *et* y *sont de même parité, sur le nombre des solutions dans lesquelles ces inconnues sont de parités contraires* (**).

94. *Remarques.* I. Ainsi qu'on a déjà pu l'observer ci-dessus (91), les valeurs de L_n croissent très-lentement. Cette conclusion résulte surtout du développement de α'^2, prolongé, par exemple, jusqu'au terme q^{200}. On trouve :

$$\begin{aligned}\alpha'^2 = 1 &- 2q^2 - q^4 + 2q^6 + q^8 + 2q^{10} - 2q^{12} - 2q^{16} - 2q^{18} + q^{20} + 2q^{26} + 3q^{28} - 2q^{30} + 2q^{32} \\ &- 2q^{38} - 2q^{40} - 2q^{46} - q^{48} + 2q^{52} + 2q^{54} - 2q^{56} + 2q^{58} + q^{60} + 2q^{62} + 2q^{66} - 2q^{68} - 2q^{70} \\ &+ 2q^{72} - 2q^{76} - 4q^{80} + q^{88} - 2q^{90} + 2q^{96} + 2q^{100} + 2q^{102} + q^{104} - 2q^{106} + 2q^{110} + 2q^{112} - 2q^{118} \\ &- 2q^{122} - 2q^{126} + 2q^{128} - 4q^{132} - 2q^{138} - q^{140} + 2q^{142} + 2q^{146} - 2q^{154} + 2q^{156} + 4q^{158} + q^{160} + 2q^{166} \\ &- 2q^{168} + 2q^{170} - 2q^{172} + 2q^{178} - 2q^{182} - 2q^{136} - 2q^{188} - 2q^{192} + 2q^{200} + \cdots \;.\;.\;.\;.\;.\; (206)\end{aligned}$$

(*) Ces deux expressions de α'^2 s'accordent avec l'identité (122).

(**) Cet énoncé suppose y différent de zéro. Dans le cas opposé, c'est-à-dire quand n a la forme $l(3l \mp 1)$, $2\varepsilon'$ doit être augmenté de $(-1)^l$.

II. Dans ce développement, les seuls coefficients *impairs* sont ceux de $q^0, q^4, q^8, q^{20}, q^{28}, q^{48}, \ldots$ A cause de

$$\alpha' = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + \cdots,$$

ce résultat était nécessaire.

95. *Expressions de $\alpha'^2\beta'$.* Nous avons trouvé (65), (66), (84) :

$$\alpha'^2\beta' = (1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots)(1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots), \quad . \quad . \quad (207)$$

$$\alpha'^2\beta' = (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots)(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{20} - \cdots), \quad . \quad . \quad (208)$$

$$\alpha'^2\beta' = (1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \cdots)(1 - q^2 - q^6 + q^{12} + q^{20} - \cdots); \quad . \quad . \quad (189)$$

donc, par l'identité (146),

$$\alpha'^2\beta' = (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)(1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots). \quad [Ad.] \; (209)$$

96. *Développement de $\alpha'^2\beta'$.* Les manières les plus simples de le former, consistent à partir des formules (207) ou (208). Si l'on suppose

$$\alpha'^2\beta' = 1 + P_1 q^2 + P_2 q^4 + \cdots + P_n q^{2n} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (210)$$

on aura, soit

$$P_n q^{2n} = \sum (-1)^{l+l'} q^{(3l^2 \mp l) + 2(3l'^2 \mp l')},$$

soit

$$P_n q^{2n} = \sum (-1)^{\frac{\lambda'(\lambda'+1)}{2}} q^{\frac{\lambda(\lambda+1)}{2} + \frac{\lambda'(\lambda'+1)}{2}}.$$

Par conséquent, si l'on considère les équations

$$2n = (3l^2 \mp l) + 2(3l'^2 \mp l'), \qquad 2n = \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} + \frac{\lambda'(\lambda'+1)}{2},$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$24n + 3 = (6l \mp 1)^2 + 2(6l'^2 \mp 1)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (211)$$

$$8n + 1 = (\lambda + \lambda' + 1)^2 + (\lambda - \lambda')^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (212)$$

on a les deux propositions suivantes :

1° *Le coefficient* P_n *égale l'excès du nombre des solutions de l'équation* (211), *dans lesquelles* l *et* l' *sont de même parité, sur le nombre des solutions dans lesquelles ces inconnues sont de parités contraires ;*

2° *Le coefficient* P_n *égale l'excès du nombre des valeurs de* λ', *satisfaisant à l'équation* (212), *et ayant les formes* 4μ, $4\mu - 1$, *sur le nombre des autres valeurs de cette inconnue.*

97. Application. Soit $2n = 130$. Les dernières équations deviennent

$$1\,563 = (6l \mp 1)^2 + 2\,(6l' \mp 1)^2, \quad 521 = (\lambda + \lambda' + 1)^2 + (\lambda - \lambda')^2.$$

521 est un nombre premier, de la forme $4\mu + 1$. Conséquemment, ce nombre est décomposable, d'une seule manière, en une somme de deux carrés. On trouve

$$\lambda + \lambda' + 1 = 20, \qquad \lambda - \lambda' = \pm 11;$$

puis ces deux systèmes de valeurs :

$$\lambda = 15,\ \lambda' = 4; \qquad \lambda = 4,\ \lambda' = 15.$$

D'après le second théorème, on a $P_{65} = 2$. En effet, dans le produit des séries

$$1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots + q^{120} + q^{136} + \cdots,$$
$$1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots + q^{120} + q^{136} - \cdots,$$

le terme $P_{65}q^{130} = q^{10} \times q^{120} + q^{120} \times q^{10}$.

Prenons maintenant l'équation

$$1\,563 = (6l \mp 1)^2 + 2\,(6l' \mp 1)^2.$$

On y satisfait par

$$l = 5,\ l' = 3; \qquad l = 6,\ l' = 2;\ (*)$$

donc $P_{65} = 2$. D'ailleurs, si l'on fait le produit des séries

$$1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + q^{44} + q^{52} - q^{70} - q^{80} + q^{102} + q^{114} - \cdots,$$
$$1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - q^{60} + q^{88} + q^{104} - \cdots,$$

on trouve

$$P_{65}q^{130} = (-q^{70} \times -q^{60}) + (+q^{102} \times + q^{28}).$$

(*) $1\,563 = 29^2 + 2 \cdot 19^2 = 37^2 + 2 \cdot 13^2$.

98. *Développement de* $(\alpha'\beta'^2 - \alpha'^2\beta')$. On a

$$1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \cdots = \alpha'\beta'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (16)$$

De là résulte que la formule (209) équivaut à

$$\alpha'\beta'^2 - \alpha'^2\beta' = 2\,[1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots]\,[q^2 - q^8 + q^{18} - q^{32} + \cdots] \quad . \quad . \qquad (213)$$

Soit

$$Q = (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)\,(q^2 - q^8 + q^{18} - q^{32} + \cdots) = q^2 + Q_2 q^4 + \cdots + Q_n q^{2n} + \cdots \quad (214)$$

Un terme quelconque du produit a la forme $q^{x(x+1)} \times (-1)^{y-1} q^{2y^2}$. Par conséquent, si l'on pose

$$2n = x(x+1) + 2y^2,$$

ou

$$8n + 1 = (2x+1)^2 + 2(2y)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (215)$$

on voit que :

Le coefficient Q_n *égale l'excès du nombre des valeurs impaires sur le nombre des valeurs paires de* y, *vérifiant l'équation* (215).

99. *Remarques.* I. D'après l'expression de $\alpha'\beta'^2$:

Si le nombre n *est triangulaire; ou, ce qui est équivalent, si* $8n+1$ *est carré* (*), $P_n = 1 - 2Q_n$. *Dans le cas contraire*, $P_n = -2Q_n$.

II. On a vu, précédemment, avec quelle lenteur croissent les coefficients des puissances de q, dans le développement de α'^2 (94). Le même fait s'observe dans la série Q. En effet, le calcul direct donne

$$\begin{aligned} Q = {} & q^2 + q^4 - q^{10} + q^{18} + q^{20} + q^{24} - q^{28} + q^{32} - q^{34} - q^{38} + q^{48} + q^{56} + q^{58} + q^{60} - q^{64} \\ & + q^{70} - q^{72} - q^{78} - q^{84} - q^{88} + q^{90} + q^{92} + q^{100} - q^{102} + q^{106} + q^{108} + q^{110} + q^{112} - q^{114} - q^{130} \\ & - q^{142} - q^{144} - q^{148} + q^{150} + q^{154} + q^{160} - q^{164} + q^{168} + 2q^{174} + q^{182} - q^{190} + q^{192} - q^{200} + \cdots \end{aligned}$$

Ainsi, pour toutes les valeurs de n qui ne surpassent pas 100, $Q_n = \pm 1$ ou 0, excepté $Q_{87} = 2$.

100. *Vérifications.* 1° Si $n = 87$, l'équation (215) devient

$$687 = (2x+1)^2 + 2(2y)^2.$$

(*) $n = \frac{n'(n'+1)}{2}$ donne $8n + 1 = (2n'+1)^2$. Alors l'équation (215) est vérifiée par $x = n'$, $y = 0$. Quant à l'équation (212), on y satisfait par $\lambda = \lambda' = n'$.

On n'y satisfait que par $x=3$, $y=9$; $x=12$, $y=3$ (*). Donc $Q_{87}=2$.

2° L'équation (212) est, dans le cas actuel,

$$697=(\lambda+\lambda'+1)^2+(\lambda-\lambda')^2.$$

Le facteur $17=4^2+1^2$; le facteur $41=5^2+4^2$. Pour décomposer 697 en deux carrés u^2, v^2, il suffit de faire (**)

$$u+v\sqrt{-1}=\left(4+\sqrt{-1}\right)^{\theta}\left(4-\sqrt{-1}\right)^{1-\theta}\left(5+4\sqrt{-1}\right)^{\theta'}\left(5-4\sqrt{-1}\right)^{1-\theta'},$$

en attribuant à θ et θ' les valeurs 0, 1. On trouve ainsi

$$u=16,\ v=21;\qquad u=24,\ v=11;$$

puis

$$\lambda=18,\ \lambda'=2;\quad \lambda=2,\ \lambda'=18;\quad \lambda=17,\ \lambda'=6;\quad \lambda=6,\ \lambda'=17.$$

Aucune des valeurs de λ' n'a la forme 4μ ou la forme $4\mu-1$; donc (96) $P_{87}=-4=-2Q_{87}$.

3° L'équation (211) est, pour $n=87$:

$$2\,091=(6l\mp1)^2+2\,(6l'\mp1)^2.$$

Le premier membre admet *quatre* diviseurs de la forme $8\mu+1$ et *quatre* diviseurs de la forme $8\mu+3$. Conséquemment, le nombre des solutions est $\frac{4}{2}+\frac{4}{2}=4$ (***). En effet :

$$2\,091=43^2+2.11^2=37^2+2.19^2=29^2+2.25^2=13^2+2.31^2;$$

puis

$$l=7,\ l'=2;\quad l=6,\ l'=3;\quad l=5,\ l'=4;\quad l=2,\ l'=5.$$

Dans chacun de ces systèmes, l et l' sont de parités contraires; donc (96) $P_{87}=-4$.

(*) Le nombre $697=17.41$: il a donc quatre diviseurs, tous de la forme $8\mu+1$. D'après un théorème démontré par M. Genocchi (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 167), le nombre des solutions de l'équation considérée doit être $\frac{4}{2}$; ce qui est exact.

(**) Voir la Note de M. Genocchi.

(***) *Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 168. Ce nombre de solutions serait réduit, si les valeurs de l, l' n'étaient pas entières; circonstance qui ne se présente pas dans l'exemple considéré.

101. *Autre expression de* $(\alpha'\beta'^2 - \alpha'^2\beta')$. Des formules (36), (50), on conclut, à cause de $\varphi(n) = n_p + n_i$ (13, 2°) :

$$\beta' - \alpha' = 2\sum_0^\infty n_i \cdot q^{2n}.$$

De plus,

$$\alpha'\beta' = 1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Donc

$$\alpha'\beta'^2 - \alpha'^2\beta' = 2\,(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots)\sum_0^\infty n_i \cdot q^{2n} \quad . \quad . \quad . \quad [Ad.] \quad (216)$$

102. *Remarques.* I. La comparaison avec les séries (213) ou (214) prouve que

$$Q_n = n_i - (n-2)_i - (n-4)_i + (n-10)_i + (n-14)_i - \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (217)$$

II. Si l'on connaît le nombre des solutions de l'équation (215), on en pourra déduire, au moyen de la dernière formule, *combien l'inconnue* y *a de valeurs paires et de valeurs impaires* (*). [*Ad.*]

103. *Valeur de* $(\alpha'\beta'^2 + \alpha'^2\beta')$. Il est visible que

$$\alpha'\beta'^2 + \alpha'^2\beta' = 2\,(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots)\sum_0^\infty n_p \cdot q^{2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [Ad.] \quad (218)$$

104. *Vérification.* Soit $n = 72$. La formule (217) donne

$$Q_{72} = 72_i - 70_i - 68_i + 62_i + 58_i - 48_i - 42_i + 28_i + 20_i - 2_i;$$

ou, d'après la Table I :

$$Q_{72} = 18\,176 - 14\,964 - 12\,288 + 6\,697 + 4\,404 - 1\,455 - 715 + 111 + 32 - 1 = -1\,;$$

valeur déjà trouvée (99, II). [*Ad.*]

(*) Dans le Paragraphe VI, nous reviendrons sur ce sujet.

III.

SUR DEUX AUTRES FONCTIONS NUMÉRIQUES.

105. *Définitions, propriétés fondamentales.* Soient

$$(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^p)=\sum_{n=0}^{n=\frac{p(p+1)}{2}} f(n,p)\,x^n, \quad \ldots\ldots \quad (219)$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^p)}=\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{F}(n,p)\,x^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (220)$$

Il est visible que :

1° f(n, p) *est le nombre des décompositions de* n *en parties inégales, non supérieures à* p ;

2° F(n, p) *est le nombre des décompositions de* n *en parties égales ou inégales, non supérieures à* p ;

3° *Si* p *devient infini,* f(n, p) = φ(n), F(n, p) = ψ(n);

4° Si l'on suppose $p \overline{\gt} n$, les fonctions numériques f, F ne diffèrent pas de φ, ψ; c'est-à-dire que

$$f(n,n)=\varphi(n), \qquad \mathrm{F}(n,n)=\psi(n). \quad \ldots\ldots \quad (221)\ (^*)$$

106. *Propriétés de la fonction* F. 1° L'égalité (220) peut être écrite ainsi :

$$(x+x^2+x^3+\cdots)(x+x^3+x^5+\cdots)(x+x^4+x^7+\cdots)\dots(x+x^{p+1}+x^{2p+1}+\cdots)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\mathrm{F}(n,p)\,x^{n+p}. \quad (222)$$

Par conséquent :

Il y a autant de manières de décomposer une somme n *en parties égales ou inégales, non supérieures à* p, *qu'il y en a de décomposer* n + p *en* p *parties appartenant, respectivement, aux progressions :*

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...,
1, 3, 5, 7, 9, 11, ...,
1, 4, 7, 10, 13, 16, ...,

(*) Par exemple, le nombre des décompositions de 6, en parties inégales, non supérieures à 9, ne diffère pas du nombre des décompositions de 6 en parties inégales. Autrement dit, $f(6,9)=\varphi(6)=4$.

$$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1,\ p+1,\ 2p+1,\ 3p+1,\ldots$$

Ce dernier nombre est d'ailleurs celui des *décompositions de* n + p *en* p *parties, égales ou inégales* (*); donc :

Il y a autant de manières de décomposer n *en parties égales ou inégales, non supérieures à* p, *qu'il y en a de décomposer* n + p *en* p *parties, égales ou inégales* (**).

2° Si l'on multiplie par $1-x^p$ les deux membres de l'égalité (219), le premier membre devient $\sum\limits_{n=0}^{n=\infty} F(n, p-1)\, x^n$.

D'ailleurs, dans le nouveau second membre, le coefficient de x^n est $F(n,p) - F(n-p, p)$. Conséquemment,

$$F(n,p) = F(n, p-1) + F(n-p, p). \quad \ldots\ldots \quad (223)$$

Ainsi :

Le nombre des décompositions de n, *en parties qui ne surpassent pas* p, *égale le nombre de décompositions de* n *en parties inférieures à* p, *augmenté du nombre de décompositions de* n — p *en parties qui ne surpassent pas* p.

107. *Relations entre les nombres* φ, ψ, F. Euler a démontré (***) les égalités

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots = 1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \cdots, \quad (224)$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots} = 1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \cdots. \quad (225)$$

Il en résulte

$$\varphi(n) = F(n-1, 1) + F(n-3, 2) + F(n-6, 3) + \cdots, \quad \ldots \quad (226)$$

$$\psi(n) = F(n-1, 1) + F(n-2, 2) + F(n-3, 3) + \cdots; \quad \ldots \quad (227)$$

puis ces théorèmes :

1° *Le nombre des décompositions de* n, *en parties inégales, se compose du*

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 512.
(**) *Introduction à l'Analyse*, p. 244.
(***) *Id.*, pp. 239 et 243.

nombre des décompositions de n — 1 *en parties qui ne surpassent pas* 1, *augmenté du nombre des décompositions de* n — 3 *en parties qui ne surpassent pas* 2, *augmenté du nombre des décompositions de* n — 6 *en parties qui ne surpassent pas* 3, etc.;

2° *Le nombre des décompositions de* n, *en parties égales ou inégales, se compose du nombre des décompositions de* n — 1 *en parties qui ne surpassent pas* 1, *augmenté du nombre des décompositions de* n — 2 *en parties qui ne surpassent pas* 2, *augmenté du nombre des décompositions de* n — 3 *en parties qui ne surpassent pas* 3; etc.

108. *Remarque.* Le second membre de l'égalité (225) peut être écrit sous ces diverses formes, différentes de la première :

$$\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}+\cdots,$$
$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}+\cdots,$$
$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}+\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Conséquemment,

$$\left.\begin{aligned}\psi(n) &= F(n,1)+F(n-2,2)+F(n-3,3)+F(n-4,4)+\cdots\\ &= F(n,2)+F(n-3,3)+F(n-4,4)+\cdots\\ &= +\ F(n,3)+F(n-4,4)+\cdots\\ &= F(n,4)+\cdots\\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\quad (228)$$

109. ***Relation entre les nombres* F.** On conclut, des dernières égalités,

$$F(n,p)=F(n-1,1)+F(n-2,2)+\cdots+F(n-p,p).\quad (229)\ (*)$$

Par exemple, *le nombre des décompositions de 7, en parties qui ne surpassent pas* 3, *égale le nombre des décompositions de* 6 *en unités, augmenté du nombre des décompositions de* 5 *en parties qui ne surpassent pas* 2, *augmenté du nombre des décompositions de* 4 *en parties qui ne surpassent pas* 3.

(*) Cette propriété résulte aussi de la relation (223).

Ces décompositions sont :

$$
\begin{aligned}
7 &= 1+1+1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+2 = 1+1+1+1+3 \\
&= 1+1+1+2+2 = 1+1+2+3 = 1+2+2+2 \\
&= 1+3+3 = 2+2+3; \\
6 &= 1+1+1+1+1+1; \\
5 &= 1+1+1+1+1 = 1+1+1+2 = 1+2+2; \\
4 &= 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+3 = 2+2.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$F(7,3)=8, \quad F(6,1)=1, \quad F(5,2)=3, \quad F(4,3)=4;$$

et l'on a, en effet,

$$8 = 1+3+4.$$

110. *Remarque.* La dernière relation est une conséquence de *l'identité*

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^p)} = 1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} + \cdots + \frac{x^p}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x)^p}. \quad (230)$$

111. *Relation entre les nombres* F, f. Si l'on divise membre à membre les égalités (219), (220), on trouve, en observant que $f(n,p)=0$ *si* n *surpasse* $\frac{p(p+1)}{2}$:

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2p})} = \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} F(n,p)\,x^n}{\sum_{n=0}^{n=\infty} f(n,p)\,x^n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (231)$$

Il est visible que le développement du premier membre est $\sum_{n=0}^{n=\infty} F(n,p)\,x^{2n}$; donc

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} F(n,p)\,x^{2n} \times \sum_{n=0}^{n=\infty} f(n,p)\,x^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n,p)\,x^n, \quad \ldots\ldots \quad (232)$$

puis

$$F(n,p) = f(n,p) + F(1,p)\,f(n-2,p) + F(2,p)\,f(n-4,p) + \cdots \quad \ldots \quad (233)$$

112. *Relation entre les nombres* f. D'après la remarque précédente, l'égalité (219) peut être remplacée par

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^p) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f(n,p)\,x^n. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (234)$$

Le premier membre égale $(1+x)\ldots(1+x^{p-1})\times(1+x^p)$; donc

$$(1+x^p)\sum_{n=0}^{n=\infty} f(n,p-1)x^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} f(n,p)\,x^n;$$

et, par suite,

$$f(n,p) = f(n,p-1) + f(n-p,p-1), \quad \ldots\ldots \quad (235)$$

théorème qu'il est facile de démontrer directement. On peut l'énoncer ainsi :

Le nombre des décompositions de n, *en parties inégales qui ne surpassent pas* p, *est égal à la somme des nombres de décompositions de* n *et de* n — p *en parties inégales, inférieures à* p.

113. *Autres relations.* 1° On tire, de la dernière égalité,

$$f(n,p) = f(n-2,1) + f(n-3,2) + \cdots + f(n-p,p-1); \quad \ldots\ldots \quad (236)$$
$$f(n,p) = f(n,p-1) + f(n-p,p-2) + f(n-2p+1,p-3) + f(n-3p+3,p-4) + \cdots,$$

c'est-à-dire

$$f(n,p) = \sum_{a=1}^{a=p-1} f\left[n - \frac{(a-1)(2p-a+2)}{2}, p-a\right]. \quad \ldots\ldots \quad (237)$$

Par exemple,

$$f(36,11) = f(36,10) + f(25,9) + f(15,8) + f(6,7);$$

ou, d'après la Table IV :

$$68 = 29 + 22 + 13 + 4.$$

2° Dans le développement du produit $(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^p)$, les termes également éloignés des extrêmes ont même coefficient; donc

$$f(n,p) = f\left[\frac{p(p+1)}{2} - n, p\right]. \quad \ldots\ldots \quad (238)$$

114. *Remarque générale.* Il est évident que les séries d'Euler (224), (225) peuvent servir à développer les fonctions elliptiques α, α', β, β'. Par exemple, le changement de x en q donne d'abord

$$\beta\beta' = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \frac{q^{10}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)} + \cdots, \quad (239)$$

$$\frac{1}{\alpha\alpha'} = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \frac{q^4}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)} + \cdots; \quad (240)$$

puis, par la substitution de $-q$ et q^2 à q :

$$\alpha\beta'=1-\frac{q}{1+q}-\frac{q^3}{(1+q)(1-q^2)}+\frac{q^6}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)}+\frac{q^{10}}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^4)}+\cdots,\tag{241}$$

$$\frac{1}{\beta\alpha'}=1-\frac{q}{1+q}+\frac{q^2}{(1+q)(1-q^2)}-\frac{q^3}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)}+\frac{q^4}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^4)}-\cdots,\tag{242}$$

$$\beta'=1+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^{12}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\frac{q^{20}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)}+\cdots,\tag{243}$$

$$\frac{1}{\alpha'}=1+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\frac{q^8}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)}+\cdots.\tag{244}$$

Parmi les identités déduites de ces formules (*), nous citerons seulement celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}
&\left[1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots\right]\\
\times&\left[1-\frac{q}{1+q}+\frac{q^2}{(1+q)(1-q^2)}+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1+q^3)}+\cdots\right]\\
=&\left[1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots\right]\\
\times&\left[1-\frac{q}{1+q}+\frac{q^3}{(1+q)(1-q^2)}+\frac{q^6}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)}+\cdots\right]\\
=&\left[1+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^{12}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\cdots\right]\\
\times&\left[1+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\cdots\right],
\end{aligned}\right\}\ldots\tag{245}$$

(*) Elles ne diffèrent pas, au fond, de celles que nous avons démontrées dans le Paragraphe II. On peut d'ailleurs en trouver beaucoup d'autres en combinant les premières avec des formules données par JACOBI, LEGENDRE, DIRICHLET,... Si, par exemple, on suppose $z=1$ dans une relation des *Fundamenta* (p. 180), on obtient ce développement :

$$\beta=1+\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\frac{q^{16}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)}+\cdots;$$

puis, à cause des égalités (238), (243) :

$$\begin{aligned}
&\left[1+\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\cdots\right]\\
\times&\left[1+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^{12}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\cdots\right]\\
&=1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots;
\end{aligned}$$

identité assez remarquable.

$$\left.\begin{aligned}
&\left[1-\frac{q}{1+q}-\frac{q^3}{(1+q)(1-q^2)}+\frac{q^6}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)}+\frac{q^{10}}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^4)}-\cdots\right]\\
\times&\left[1+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\frac{q^8}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)}+\cdots\right]\\
\times&\left[1+\frac{q^4}{1-q^4}+\frac{q^{12}}{(1-q^4)(1-q^8)}+\frac{q^{24}}{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})}+\frac{q^{40}}{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})(1-q^{16})}+\cdots\right]\\
=&\left[1-\frac{q}{1+q}+\frac{q^2}{(1+q)(1-q^2)}-\frac{q^3}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)}+\frac{q^4}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^4)}-\cdots\right]\\
\times&\left[1+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^{12}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\frac{q^{20}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)}+\cdots\right]\\
\times&\left[1-\frac{q^2}{1+q^2}-\frac{q^6}{(1+q^2)(1-q^4)}+\frac{q^{12}}{(1+q^2)(1-q^4)(1+q^6)}+\frac{q^{20}}{(1+q^2)(1-q^4)(1+q^6)(1-q^8)}-\cdots\right].
\end{aligned}\right\}\quad(246)$$

115. *Autres identités.* La relation (246) exprime que

$$\alpha\beta'\times\frac{1}{\alpha_1}\times\beta'_1=\frac{1}{\beta\alpha'}\times\beta'\times(\alpha\beta')_1.$$

Celle-ci, dont la vérification est facile, peut être écrite sous ces deux formes :

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_0^\infty(-1)^n\varphi(n)\,q^n\times\sum_0^\infty\psi(n)\,q^{2n}\times\sum_0^\infty\varphi(n)\,q^{4n}\\
=&\sum_0^\infty(-1)^n\psi(n)\,q^n\times\sum_0^\infty\varphi(n)\,q^{2n}\times\sum_0^\infty(-1)^n\varphi(n)\,q^{2n};
\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ (247)$$

$$\sum_0^\infty\varphi(n)\,q^{4n}=\sum_0^\infty\varphi(n)\,q^{2n}\times\sum_0^\infty(-1)^n\varphi(n)\,q^{2n}.\quad .\ .\ .\ .\ .\ (248)$$

Ces *nouvelles identités* ont d'assez nombreuses conséquences; mais nous croyons ne pas devoir les énoncer (*).

(*) Observons, seulement, que la relation (71) pourrait être déduite des deux dernières. [*Ad.*]

IV.

TABLES DES NOMBRES φ, ψ, f, F, ...

116. *Construction des Tables I et II.* Je reproduis d'abord, d'après Euler (*) : 1° une table indiquant le *nombre des décompositions de* n, *en* p *parties inégales ;* 2° une table donnant le *nombre des décompositions de* n *en* p *parties, égales ou inégales.*

Si ces nombres sont désignés par (n, p), $[n, p]$, on a, comme l'on sait (**) :

$$(n, p) = (n-p, p-1) + (n-p, p), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (249)$$

$$[n, p] = \left(n + \frac{p(p-1)}{2}, p\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (250)\ (^{***})$$

Ces égalités supposent $n \geqq 2p$ (****).

Il est visible que

$$\left.\begin{aligned} \varphi(n) &= (n, 1) + (n, 2) + (n, 3) + \cdots, \\ n_i &= (n, 1) + (n, 3) + (n, 5) + \cdots, \\ n_p &= (n, 2) + (n, 4) + (n, 6) + \cdots, \\ \psi(n) &= [n, 1] + [n, 2] + [n, 3] + \cdots, \\ n_{\mathrm{i}} &= [n, 1] + [n, 3] + [n, 5] + \cdots, \\ n_{\mathrm{P}} &= [n, 2] + [n, 4] + [n, 6] + \cdots. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (251)$$

De simples additions ont donc fait connaître les nombres $\varphi(n)$, $\psi(n)$, n_i, n_p, n_{i}, n_{P}, ou du moins une partie d'entre eux.

117. La Table II est limitée à $n = 36$, $p = 13$. Pour y inscrire les valeurs de $\psi(n)$, n_{i}, n_{P}, à partir de $n = 14$, nous avons fait usage des théorèmes démontrés dans les numéros 22, 27, ... L'un d'eux suppose connues les valeurs de $\varphi_{\mathrm{i}}(n)$, contenues dans la Table III.

(*) *Introduction à l'Analyse*, p. 252.

(**) *Mélanges mathématiques*, pp. 62, 63.

(***) D'après cette relation, les nombres de la seconde table sont les mêmes que ceux de la première. Aussi Euler les a-t-il fondues en une seule.

(****) *Mélanges*, p. 64.

118. *Construction de la Table III.* Le calcul des nombres $\varphi_i(n)$ repose sur la relation

$$\varphi_i(n) - \varphi_i(n-2) - \varphi_i(n-4) + \varphi_i(n-10) + \cdots = (-1)^{n-l} \text{ ou zéro},$$

établie dans le numéro 16. Il a été soumis à diverses vérifications.

119. *Construction de la Table IV.* Cette table, qui contient les valeurs de $f(n, p)$, a été calculée au moyen de la relation (235). Soient $n=13$, $p=7$: à l'intersection de la ligne horizontale 13 et de la colonne verticale 7, on trouve le nombre 8; donc $f(13, 7) = 8$. En effet, il y a 8 décompositions de 13 en parties inégales, non supérieures à 7 ; savoir :

$$7+6,\ 7+5+1,\ 7+4+2,\ 7+3+2+1,\ 6+5+2,\ 6+4+3,\ 6+4+2+1,\ 5+4+3+1.$$

120. *Remarques.* Les nombres placés dans la $p^{\text{ième}}$ colonne verticale sont les coefficients des puissances *positives* de x, dans le développement de $(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^p)$. La somme de ces coefficients est $2^p - 1$ (*). Par exemple, si $p=6$:

$$1+1+2+2+3+4+4+4+5+5+5+5+4+4+4+3+2+2+1+1+1 = 63.$$

121. *Construction de la Table V.* Elle résulte de la formule (223), combinée avec les relations (229) et (233). On tire de celle-ci, par exemple :

$$F(36, 17) = f(36, 17) + F(1, 17)f(34, 17) + F(2, 17)f(32, 17) + \cdots + F(18, 17);$$

ou

$$\begin{aligned} F(36, 17) &= 416 + 1.343 + 2.280 + 3.226 + 5.179 + 7.140 + 11.108 + 15.82 \\ &+ 22.61 + 30.45 + 42.32 + 56.22 + 77.15 + 101.10 + 135.6 + 176.4 \\ &+ 231.2 + 297.1 + 384 \\ &= 416 + 343 + 560 + 678 + 895 + 980 + 1\,188 + 1\,230 + 1\,342 + 1\,350 \\ &+ 1\,344 + 1\,232 + 1\,155 + 1\,010 + 810 + 704 + 462 + 297 + 384 = 16\,380\ (^{**}). \end{aligned}$$

(*) A partir de $p = 9$, les colonnes sont *incomplètes*.

(**) Plusieurs des nombres compris dans la table V ont été soumis à des vérifications semblables.

TABLE I.

	1	2	3	4	5	6	7	8				n_i	n_p	$\varphi(n)$
1	1											1	0	1
2	1											1	0	1
3	1	1										1	1	2
4	1	1										1	1	2
5	1	2										1	2	3
6	1	2	1									2	2	4
7	1	3	1									2	3	5
8	1	3	2									3	3	6
9	1	4	3									4	4	8
10	1	4	4	1								5	5	10
11	1	5	5	1								6	6	12
12	1	5	7	2								8	7	15
13	1	6	8	3								9	9	18
14	1	6	10	5								11	11	22
15	1	7	12	6	1							14	13	27
16	1	7	14	9	1							16	16	32
17	1	8	16	11	2							19	19	38
18	1	8	19	15	3							23	23	46
19	1	9	21	18	5							27	27	54
20	1	9	24	23	7							32	32	64
21	1	10	27	27	10	1						38	38	76
22	1	10	30	34	13	1						44	45	89
23	1	11	33	39	18	2						52	52	104
24	1	11	37	47	23	3						61	61	122
25	1	12	40	54	30	5						71	71	142
26	1	12	44	64	37	7						82	83	165
27	1	13	48	72	47	11						96	96	192
28	1	13	52	84	57	14	1					111	111	222
29	1	14	56	94	70	20	1					128	128	256
30	1	14	61	108	84	26	2					148	148	296
31	1	15	65	120	101	35	3					170	170	340
32	1	15	70	136	119	44	5					195	195	390
33	1	16	75	150	141	58	7					224	224	448
34	1	16	80	169	164	71	11					256	256	512
35	1	17	85	185	192	90	15					293	292	585
36	1	17	91	206	221	110	21	1				334	334	668

TABLE I. (*Suite.*)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	n_i	n_p	$\varphi(n)$
37	1	18	96	225	255	136	28	1				380	380	760
38	1	18	102	249	291	163	38	2				432	432	864
39	1	19	108	270	333	199	49	3				491	491	982
40	1	19	114	297	377	235	65	5				557	556	1 113
41	1	20	120	321	427	282	82	7				630	630	1 260
42	1	20	127	351	480	331	105	11				713	713	1 426
43	1	21	133	378	540	391	131	15				805	805	1 610
44	1	21	140	411	603	454	164	22				908	908	1 816
45	1	22	147	441	674	532	201	29	1			1 024	1 024	2 048
46	1	22	154	478	748	612	248	40	1			1 152	1 152	2 304
47	1	23	161	511	831	709	300	52	2			1 295	1 295	2 590
48	1	23	169	551	918	811	364	70	3			1 455	1 455	2 910
49	1	24	176	588	1 014	931	436	89	5			1 632	1 632	3 264
50	1	24	184	632	1 115	1 057	522	116	7			1 829	1 829	3 658
51	1	25	192	672	1 226	1 206	618	146	11			2 048	2 049	4 097
52	1	25	200	720	1 342	1 360	733	186	15			2 291	2 291	4 582
53	1	26	208	764	1 469	1 540	860	230	22			2 560	2 560	5 120
54	1	26	217	816	1 602	1 729	1 009	288	30			2 859	2 859	5 718
55	1	27	225	864	1 747	1 945	1 175	352	41	1		3 189	3 189	6 378
56	1	27	234	920	1 898	2 172	1 367	434	54	1		3 554	3 554	7 108
57	1	28	243	972	2 062	2 432	1 579	525	73	2		3 958	3 959	7 917
58	1	28	252	1 033	2 233	2 702	1 824	638	94	3		4 404	4 404	8 808
59	1	29	261	1 089	2 418	3 009	2 093	764	123	5		4 896	4 896	9 792
60	1	29	271	1 154	2 611	3 331	2 400	919	157	7		5 440	5 440	10 880
61	1	30	280	1 215	2 818	3 692	2 738	1 090	201	11		6 038	6 038	12 076
62	1	30	290	1 285	3 034	4 070*	3 120	1 297	252	15		6 697	6 697	13 394
63	1	31	300	1 350	3 266	4 494	3 539	1 527	318	22		7 424	7 424	14 848
64	1	31	310	1 425	3 507	4 935	4 011	1 801	393	30		8 222	8 222	16 444
65	1	32	320	1 495	3 765	5 427	4 526	2 104	488	42		9 100	9 100	18 200
66	1	32	331	1 575	4 033	5 942	5 102	2 462	598	55	1	10 066	10 066	20 132
67	1	33	341	1 650	4 319	6 510	5 731	2 857	732	75	1	11 125	11 125	22 250
68	1	33	352	1 735	4 616	7 104	6 430	3 319	887	97	2	12 288	12 288	24 576
69	1	34	363	1 815	4 932	7 760	7 190	3 828	1 076	128	3	13 565	13 565	27 130
70	1	34	374	1 906	5 260	8 442	8 033	4 417	1 291	164	5	14 964	14 963	29 927
71	1	35	385	1 991	5 608	9 192	8 946	5 066	1 549	212	7	16 496	16 496	32 992
72	1	35	397	2 087	5 969	9 975	9 953	5 812	1 845	267	11	18 176	18 176	36 352

* La Table d'Euler donne, au lieu de ce nombre, 4 007.

TABLE II.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	n_i	n_p	$\psi(n)$
1	1													1		1
2	1	1												1	1	2
3	1	1	1											2	1	3
4	1	2	1	1										2	3	5
5	1	2	2	1	1									4	3	7
6	1	3	3	2	1	1								5	6	11
7	1	3	4	3	2	1	1							8	7	15
8	1	4	5	5	3	2	1	1						10	12	22
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1					16	14	30
10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1				20	22	42
11	1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1			29	27	56
12	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1		37	40	77
13	1	6	14	18	18	14	11	7	5	3	2	1	1	52	49	101
14	1	7	16	23	23	20	15	11	7	5	3	2	1	66	69	135
15	1	7	19	27	30	26	21	15	11	7	5	3	2	90	86	176
16	1	8	21	34	37	35	28	22	15	11	7	5	3	113	118	231
17	1	8	24	39	47	44	38	29	22	15	11	7	5	151	146	297
18	1	9	27	47	57	58	49	40	30	22	15	11	7	190	195	385
19	1	9	30	54	70	71	65	52	41	30	22	15	11	248	242	490
20	1	10	33	64	84	90	82	70	54	42	30	22	15	310	317	627
21	1	10	37	72	101	110	105	89	73	55	42	30	22	400	392	792
22	1	11	40	84	119	136	131	116	94	75	56	42	30	497	505	1 002
23	1	11	44	94	141	163	164	146	123	97	76	56	42	632	623	1 255
24	1	12	48	108	164	199	201	186	157	128	99	77	56	782	793	1 575
25	1	12	52	120	192	235	248	230	201	164	131	100	77	985	973	1 958
26	1	13	56	136	221	282	300	288	252	212	169	133	101	1 212	1 224	2 436
27	1	13	61	150	255	331	364	352	318	267	219	172	134	1 512	1 498	3 010
28	1	14	65	169	291	391	436	434	393	340	278	224	174	1 851	1 867	3 718
29	1	14	70	185	333	454	522	525	488	423	355	285	227	2 291	2 274	4 565
30	1	15	75	206	377	532	618	638	598	530	445	366	290	2 793	2 811	5 604
31	1	15	80	225	427	612	733	764	732	653	560	460	373	3 431	3 411	6 842
32	1	16	85	249	480	709	860	919	887	807	695	582	471	4 163	4 186	8 349
33	1	16	91	270	540	811	1 009	1 090	1 076	984	863	725	597	5 084	5 059	10 143
34	1	17	96	297	603	931	1 175	1 297	1 291	1 204	1 060	905	747	6 142	6 168	12 310
35	1	17	102	321	674	1 057	1 367	1 527	1 549	1 455	1 303	1 116	935	7 456	7 427	14 883
36	1	18	108	351	748	1 206	1 579	1 801	1 845	1 761	1 586	1 380	1 158	8 972	9 005	17 977

TABLE III.

n	$\varphi(n)$	$\varphi_p(n)$	$\varphi_i(n)$	$\psi(n)$	$\psi_p(n)$	$\psi_i(n)$	n	$\varphi(n)$	$\varphi_p(n)$	$\varphi_i(n)$	$\psi(n)$	$\psi_p(n)$	$\psi_i(n)$
1	1	0	1	1	0	1	**19**	54	0	6	490	0	54
2	1	1	0	2	1	1	**20**	64	10	7	627	42	64
3	2	0	1	3	0	2	**21**	76	0	8	792	0	76
4	2	1	1	5	2	2	**22**	89	12	8	1 002	56	89
5	3	0	1	7	0	3	**23**	104	0	9	1 255	0	104
6	4	2	1	11	3	4	**24**	122	15	11	1 575	77	122
7	5	0	1	15	0	5	**25**	142	0	12	1 958	0	142
8	6	2	2	22	5	6	**26**	165	18	12	2 436	101	165
9	8	0	2	30	0	8	**27**	192	0	14	3 010	0	192
10	10	3	2	42	7	10	**28**	222	22	16	3 718	135	222
11	12	0	2	56	0	12	**29**	256	0	17	4 565	0	256
12	15	4	3	77	11	15	**30**	296	27	18	5 604	176	296
13	18	0	3	101	0	18	**31**	340	0	20	6 842	0	340
14	22	5	3	135	15	22	**32**	390	32	23	8 349	231	390
15	27	0	4	176	0	27	**33**	448	0	25	10 143	0	448
16	32	6	5	231	22	32	**34**	512	38	26	12 310	297	512
17	38	0	5	297	0	38	**35**	585	0	29	14 883	0	585
18	46	8	5	385	30	46	**36**	668	46	33	17 977	385	668

TABLE IV. — VALEURS DE $f(n,p)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3		1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4			1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
5			1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
6			1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
7				2	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
8				1	3	4	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
9				1	3	5	6	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
10				1	3	5	7	8	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
11					2	5	7	9	10	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12					2	5	8	10	12	13	14	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
13					1	4	8	11	13	15	16	17	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
14					1	4	8	12	15	17	19	20	21	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
15					1	4	8	13	17	20	22	24	25	26	27	27	27	27	27	27	27	27	27
16						3	8	13	18	22	25	27	29	30	31	32	32	32	32	32	32	32	32
17						2	7	13	19	24	28	31	33	35	36	37	38	38	38	38	38	38	38
18						2	7	14	21	27	32	36	39	41	43	44	45	46	46	46	46	46	46
19						1	6	13	21	29	35	40	44	47	49	51	52	53	54	54	54	54	54
20						1	5	13	22	31	39	45	50	54	57	59	61	62	63	64	64	64	64
21						1	5	13	23	33	43	51	57	62	66	69	71	73	74	75	76	76	76
22							4	12	23	35	46	56	64	70	75	79	82	84	86	87	88	89	89
23							3	11	23	36	49	61	71	79	85	90	94	97	99	101	102	103	104
24							2	10	23	38	53	67	79	89	97	103	108	112	115	117	119	120	121
25							2	9	22	39	56	72	87	99	109	117	123	128	132	135	137	139	140
26							1	8	21	39	59	78	95	110	122	132	140	146	151	155	158	160	162
27							1	7	21	40	62	84	104	122	137	149	159	167	173	178	182	185	187
28							1	6	19	40	64	89	113	134	152	167	179	189	197	203	208	212	215
29								5	18	39	66	94	121	146	168	186	201	213	223	231	237	242	246
30								4	17	39	68	100	131	160	186	208	226	241	253	263	271	277	282
31								3	15	38	69	104	140	173	203	230	252	270	285	297	307	315	321
32								2	13	36	69	108	148	187	222	253	280	302	320	335	347	357	365
33								2	12	35	70	113	158	202	243	279	311	338	360	378	393	405	415
34								1	10	33	69	115	166	216	263	306	343	375	402	424	442	457	469
35								1	9	31	69	118	174	231	285	334	378	416	448	475	497	515	530
36								1	8	29	68	121	182	246	308	365	416	461	499	531	558	580	598

TABLE V. — VALEURS DE F (n, p).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	1	3	5	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
6	1	4	7	9	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
7	1	4	8	11	13	14	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
8	1	5	10	15	18	20	21	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
9	1	5	12	18	23	26	28	29	30	30	30	30	30	30	30	30	30
10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42	42	42	42	42	42	42	42
11	1	6	16	27	37	44	49	52	54	55	56	56	56	56	56	56	56
12	1	7	19	34	47	58	65	70	73	75	76	77	77	77	77	77	77
13	1	7	21	39	57	71	82	89	94	97	99	100	101	101	101	101	101
14	1	8	24	47	70	90	105	116	123	128	131	133	134	135	135	135	135
15	1	8	27	54	84	110	131	146	157	164	169	172	174	175	176	176	176
16	1	9	30	64	101	136	164	186	201	212	219	224	227	229	230	231	231
17	1	9	33	72	119	163	201	230	252	267	278	285	290	293	295	296	297
18	1	10	37	84	141	199	248	288	318	340	355	366	373	378	381	383	384
19	1	10	40	94	164	235	300	352	393	423	445	460	471	478	483	486	488
20	1	11	44	108	192	282	364	434	488	530	560	582	597	608	615	620	623
21	1	11	48	120	221	331	436	525	598	653	695	725	747	762	773	780	785
22	1	12	52	136	255	391	522	638	732	807	863	905	935	957	972	983	990
23	1	12	56	150	291	454	618	764	887	984	1 060	1 116	1 158	1 188	1 210	1 225	1 236
24	1	13	61	169	333	532	733	919	1 076	1 204	1 303	1 380	1 436	1 478	1 508	1 530	1 545
25	1	13	65	185	377	612	860	1 090	1 291	1 455	1 586	1 686	1 763	1 819	1 861	1 891	1 913
26	1	14	70	206	427	709	1 009	1 297	1 549	1 761	1 930	2 063	2 164	2 244	2 297	2 339	2 369
27	1	14	75	225	480	811	1 175	1 527	1 845	2 112	2 331	2 503	2 637	2 738	2 815	2 871	2 913
28	1	15	80	249	540	931	1 367	1 801	2 194	2 534	2 812	3 036	3 210	3 345	3 446	3 523	3 578
29	1	15	85	270	603	1 057	1 579	2 104	2 592	3 015	3 370	3 655	3 882	4 057	4 192	4 293	4 370
30	1	16	91	297	674	1 206	1 824	2 462	3 060	3 590	4 035	4 401	4 691	4 920	5 096	5 231	5 332
31	1	16	96	321	748	1 360	2 093	2 857	3 589	4 242	4 802	5 262	5 635	5 928	6 158	6 334	6 469
32	1	17	102	351	831	1 540	2 400	3 319	4 206	5 013	5 708	6 290	6 761	7 139	7 434	7 665	7 841
33	1	17	108	378	918	1 729	2 738	3 828	4 904	5 888	6 751	7 476	8 073	8 551	8 932	9 228	9 459
34	1	18	114	411	1 014	1 945	3 120	4 417	5 708	6 912	7 972	8 877	9 624	11 232	11 715	12 098	12 395
35	1	18	120	441	1 115	2 172	3 539	5 066	6 615	8 070	9 373	10 489	11 424	12 186	12 804	13 287	13 671
36	1	19	127	478	1 226	2 432	4 011	5 812	7 657	9 418	11 004	12 384	13 542	14 499	15 272	15 892	16 380

APPLICATIONS.

122. *De combien de manières* 23 *est-il décomposable en cinq parties inégales?*

On cherche, dans la Table I, le nombre situé dans la *ligne* 23 et dans la *colonne* 5 : 18 est le résultat demandé. En effet,

$$\begin{aligned}23 &= 1+2+3+4+13 = 1+2+3+5+12 = 1+2+3+6+11 = 1+2+3+7+10 \\ &= 1+2+3+8+9 = 1+2+4+5+11 = 1+2+4+6+10 = 1+2+4+7+9 \\ &= 1+2+5+6+9 = 1+2+5+7+8 = 1+3+4+5+10 = 1+3+4+6+9 \\ &= 1+3+4+7+8 = 1+3+5+6+8 = 1+4+5+6+7 = 2+3+4+5+9 \\ &= 2+3+4+6+8 = 2+3+5+6+7.\end{aligned}$$

123. *De combien de manières peut-on décomposer* 11 *en sept parties, égales ou inégales?*

D'après la Table II, ce nombre est 5. Effectivement :

$$\begin{aligned}11 &= 1+1+1+1+1+1+5 = 1+1+1+1+1+2+4 = 1+1+1+1+1+3+3 \\ &= 1+1+1+1+2+2+3 = 1+1+1+2+2+2+2.\end{aligned}$$

124. *De combien de manières le nombre* 9 *est-il décomposable en parties inégales?*

La Table I donne $\varphi(9) = 8$. On a, en effet,

$$9 = 9 = 1+8 = 2+7 = 3+6 = 4+5 = 1+2+6 = 1+3+5 = 2+3+4.$$

125. *De combien de manières peut-on décomposer* 7 *en parties, égales ou inégales?*

On trouve, Table II, $\psi(7) = 15$. D'ailleurs,

$$\begin{aligned}7 &= 7 = 1+6 = 2+5 = 3+4 = 1+1+5 = 1+2+4 = 1+3+3 = 2+2+3 \\ &= 1+1+1+4 = 1+1+2+3\,(^*) = 1+2+2+2 = 1+1+1+1+3 = 1+1+1+2+2 \\ &= 1+1+1+1+1+2 = 1+1+1+1+1+1+1.\end{aligned}$$

(*) Dans l'*Introduction à l'Analyse* (p. 251), cette décomposition manque.

126. *Quel est le nombre des décompositions de* 36 *en parties impaires, inégales ?*

D'après la Table III, $\varphi_i(36)=33$. En effet,

$$\begin{aligned}36 &= 1+35=3+33=5+31=7+29=9+27=11+25=13+23=15+21=17+19\\ &=1+3+5+27=1+3+7+25=1+3+9+23=1+3+11+21=1+3+13+19\\ &=1+3+15+17=1+5+7+23=1+5+9+21=1+5+11+19=1+5+13+17\\ &=1+7+9+19=1+7+11+17=1+7+13+15=1+9+11+15=3+5+7+21\\ &=3+5+9+19=3+5+11+17=3+5+13+15=3+7+9+17=3+7+11+15\\ &=3+9+11+13=5+7+9+15=5+7+11+13=1+3+5+7+9+11.\end{aligned}$$

127. *De combien de manières peut-on décomposer* 11 *en un nombre pair de parties, égales ou inégales ?*

La Table II donne

$$11_p=[11,2]+[11,4]+[11,6]+[11,8]+[11,10]=5+11+7+3+1=27.$$

Tel est le nombre demandé. Les décompositions dont il s'agit sont :

$1+10,\ 2+9,\ 3+8,\ 4+7,\ 5+6;$

$1+1+1+8,\ 1+1+2+7,\ 1+1+3+6,\ 1+1+4+5,\ 1+2+2+6,\ 1+2+3+5,\ 1+2+4+4;$

$1+3+3+4,\ 2+2+2+5,\ 2+2+3+4,\ 2+3+3+3;$

$1+1+1+1+1+6,\ 1+1+1+1+2+5,\ 1+1+1+1+3+4,\ 1+1+1+2+2+4,$

$1+1+1+2+3+3,\ 1+1+2+2+2+3,\ 1+2+2+2+2+2;$

$1+1+1+1+1+1+1+4,\ 1+1+1+1+1+1+2+3,\ 1+1+1+1+1+2+2+2;$

$1+1+1+1+1+1+1+1+1+2.$

128. *De combien de manières le nombre* 11 *est-il décomposable en parties inégales, non supérieures à* 8 ?

D'après la Table IV, $f(11,8)=9$. En effet,

$$\begin{aligned}11&=3+8=4+7=5+6=1+2+8=1+3+7=1+4+6\\&=2+3+6=2+4+5=1+2+3+5.\ (^*)\end{aligned}$$

(*) Une autre application a été donnée ci-dessus (**119**).

129. *De combien de manières peut-on décomposer 7 en parties non supérieures à 3?*

On trouve (Table V) $F(7,3)=8$. Les décompositions du nombre 7 sont

$1+1+1+1+1+1+1$, $1+1+1+1+1+2$, $1+1+1+1+3$, $1+1+1+2+2$, $1+1+2+3$, $1+2+2+2$, $1+3+3$, $2+2+3$.

V.

DE LA FONCTION

$(1-q)(1-q^2)(1-q^4)(1-q^8)\ldots$

130. L'équation

$$\alpha=\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^2)}, \qquad (62)$$

donne, par le changement de q en q^2, en q^4, en q^8, ...

$$\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots=\varphi(q):$$

en effet, *limite de* $\varphi(q^n)=1$ (*).

D'ailleurs, $\varphi(q)=\alpha\alpha'$; donc

$$\alpha\alpha'=\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots; \qquad (252)$$

c'est-à-dire

$$2^{\frac{1}{6}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(kk')^{\frac{1}{6}}q^{-\frac{1}{12}}=2^{\frac{1}{6}}k_1^{-\frac{1}{12}}k_1'^{\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{12}}\times 2^{\frac{1}{6}}k_2^{-\frac{1}{12}}k_2'^{\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{6}}\times 2^{\frac{1}{6}}k_3^{-\frac{1}{12}}k_3'^{\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{3}}\times\cdots, \qquad (253)$$

et

$$\left.\begin{aligned}&(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)\ldots\\ =&(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots\times(1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})\ldots\times(1-q^4)(1-q^{12})(1-q^{20})\ldots\end{aligned}\right\}(254)$$

131. De ces deux égalités, la première ne paraît guère pouvoir conduire à des résultats intéressants. Quant à la seconde, on peut d'abord observer

(*) Pour démontrer rigoureusement cette proposition presque évidente, il suffit de se reporter aux définitions (1), (2).

qu'elle est *identique*, en ce sens que tout facteur du premier membre appartient au second, et réciproquement. En effet, les progressions

$$\begin{array}{l} 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ldots \\ 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ldots \\ 4,\ 12,\ 20,\ 28,\ 36,\ldots \\ 8,\ 24,\ 40,\ 56,\ 72,\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

renferment *tous* les nombres entiers (zéro excepté); et un nombre entier quelconque ne saurait appartenir à deux de ces progressions.

132. Cela posé, si l'on intervertit l'ordre des facteurs, et que l'on fasse

$$\varpi(q) = (1-q)(1-q^2)(1-q^4)(1-q^8)\ldots, \quad \ldots\ldots \quad (255)$$

on aura, au lieu de l'identité (254),

$$\alpha\alpha' = \varpi(q)\,\varpi(q^3)\,\varpi(q^5)\,\varpi(q^7)\ldots \quad \ldots\ldots \quad (256)$$

133. *Relation entre les nombres* φ, ψ. Avant de discuter la fonction ϖ, nous indiquerons encore une conséquence assez simple de l'égalité (252). Si on l'écrit ainsi

$$\frac{1}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{1}{\alpha_2}\cdot\frac{1}{\alpha_4}\cdots,$$

et que l'on ait égard aux formules (65), (52), on trouve

$$\sum_0^\infty \psi(n)\,q^n = \sum_0^\infty \varphi(n)\,q^n \times \sum_0^\infty \varphi(n)\,q^{2n} \times \sum_0^\infty \varphi(n)\,q^{4n} \times \sum_0^\infty \varphi(n)\,q^{8n} \times \cdots. \quad (257)$$

Par conséquent, si l'on suppose

$$n = a + 2b + 4c + 8d + \cdots, \quad \ldots\ldots \quad (258)$$

on a le théorème exprimé par l'égalité

$$\psi(n) = \sum \varphi(a)\,\varphi(b)\,\varphi(c)\,\varphi(d)\ldots, \quad \ldots\ldots \quad (259)$$

dans laquelle, bien entendu, la somme $\sum$ s'étend à toutes les valeurs entières, positives ou nulles, des inconnues $a, b, c, d, \ldots$ (*).

134. APPLICATION. Soit $n = 11$. Prenons les progressions

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11, \ldots, \\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10, \ldots \\ 4,\ 8,\ 12, \ldots \\ 8,\ 16, \ldots \end{array}$$

Il en résulte les décompositions suivantes :

$$11;\ 9+2;\ 7+4,\ 5+6,\ 3+8,\ 1+10,\ 7+4,\ 3+8,\ 3+8;\ 5+2+4,\ 3+4+4,\ 1+2+8,\ 1+6+4,\ 1+2+8.$$

L'équation (259) devient donc

$$\begin{aligned} \psi(11) = {} & \varphi(11) + \varphi(9)\varphi(1) + \varphi(7)\varphi(2) + \varphi(5)\varphi(3) + \varphi(3)\varphi(4) + \varphi(1)\varphi(5) + \varphi(7)\varphi(1) \\ & + \varphi(3)\varphi(2) + \varphi(3)\varphi(1) + \varphi(5)\varphi(1)\varphi(1) + \varphi(3)\varphi(2)\varphi(1) + \varphi(1)\varphi(1)\varphi(2) \\ & + \varphi(1)\varphi(3)\varphi(1) + \varphi(1)\varphi(1)\varphi(1); \end{aligned}$$

ou, d'après les Tables I, II :

$$\begin{aligned} 56 & = 12+8.1+5.1+3.2+2.2+1.3+5.1+2.1+2.1+3.1.1+2.1.1+1.1.1+1.2.1+1.1.1 \\ & = 12+8+5+6+4+3+5+2+2+3+2+1+2+1; \end{aligned}$$

ce qui est exact.

135. *Développement de la fonction $\varpi(q)$.* On sait (**) que *tout nombre entier est décomposable, d'une seule manière, en une somme de puissances de* 2. D'après cela,

$$\varpi(q) = 1 - q - q^2 + q^3 - q^4 + q^5 + q^6 - q^7 - q^8 + q^9 + q^{10} - q^{11} + q^{12} - q^{13} - q^{14} + q^{15} - \cdots \pm q^n \pm \cdots, \quad (260)$$

le signe $+$ répondant au cas où l'exposant n égale la somme d'un nombre *pair* de puissances de 2, l'unité comprise.

(*) On peut remarquer l'analogie qui existe entre cette relation (259) et l'une de celles qui ont été démontrées précédemment (**82**).

(**) *Introduction à l'Analyse*, p. 254.

136. *Remarques.* I. La fonction $\varpi(q)$, qui est peut-être une transcendante fort compliquée, est définie par l'équation

$$\varpi(q) = (1-q)\,\varpi(q^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (261)$$

II. D'après cette équation, si l'on désigne par A_{2n}, A_{2n+1} les coefficients de q^{2n}, q^{2n+1}, on a toujours

$$A_{2n+1} = -A_{2n}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (262)$$

III. Conséquemment, si l'on décompose la série en groupes de deux termes, commençant par le premier terme, chaque groupe présente l'une ou l'autre de ces combinaisons de signes :

$$+\,-, \quad -\,+\,.$$

IV. De même, si l'on décompose la série en groupes de quatre termes, commençant par le premier terme, chaque groupe présente l'une ou l'autre de ces combinaisons

$$+\,-\,-\,+, \quad -\,+\,+\,-;$$

et ainsi de suite.

V. L'équation (261) prouve encore que

$$A_{2n} = A_n. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (263)$$

137. *Détermination du coefficient de* q^n. D'après les relations (262), (263) :

1° Si

$$n = 2^\alpha i, \qquad i \text{ étant } \textit{impair}, \qquad A_n = A_i;$$

2° Si

$$n = 2^\alpha i + 1, \qquad \text{»} \qquad A_n = -A_i.$$

Le calcul de A_i résulte de la dernière égalité. En effet, soient

$$i = 2^{\alpha'} i' + 1, \quad i' = 2^{\alpha''} i'' + 1, \quad i'' = 2^{\alpha'''} i''' + 1, \ldots; \quad \ldots \quad (264)$$

alors

$$A_i = -A_{i'} = +A_{i''} = -A_{i'''} = \cdots = \pm A_1 = \mp 1, \quad \ldots \quad (265)$$

selon que les entiers impairs $i, i', i'', \ldots 1$ sont en nombre *impair* ou en nombre *pair*.

Si, par exemple, $i = 251$, on a

$$A_{251} = -A_{125} = A_{31} = -A_{15} = +A_7 = -A_3 = +A_1 = -1.$$

138. *Remarque.* Le dernier calcul ne diffère pas, au fond, de celui qui résulte de la règle ci-dessus (**135**). Car les égalités (264) donnent

$$i = 2^{\alpha'+\alpha''+\alpha'''+\cdots+\alpha^{(p)}} + 2^{\alpha'+\alpha''+\alpha'''+\cdots+\alpha^{(p-1)}} + 2^{\alpha'+\alpha''+\cdots+\alpha^{(p-2)}} + \cdots + 1, \quad . \quad . \quad (266)$$

pourvu que $2^{\alpha^{(p)}}$ soit le dernier *quotient;* et, au moyen de cette formule, le nombre i est décomposé en puissances de 2.

Dans l'exemple précédent, les exposants $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ sont $1, 2, 1, 1, 1, 1$; donc

$$251 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 1 + 1 = 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1.$$

139. *Développement de* $q\frac{\varpi'(q)}{\varpi(q)}$. Si, dans l'égalité (255), on prend les logarithmes, puis les dérivées, on trouve, en multipliant par q :

$$-q\frac{\varpi'(q)}{\varpi(q)} = \frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1-q^2} + 4\frac{q^4}{1-q^4} + \frac{8q^8}{1-q^8} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (267)$$

Le développement du second membre est, après une réduction évidente,

$$\begin{aligned} &q + (4-1)q^2 + q^3 + (8-1)q^4 + q^5 + (4-1)q^6 + q^7 \\ &+ (16-1)q^8 + q^9 + (4-1)q^{10} + q^{11} + (8-1)q^{12} + \cdots \end{aligned}$$

Donc, si l'exposant est impair, le coefficient égale 1 ; et, si l'exposant a la forme $2^{\alpha_n}i$, le coefficient est $2.2^{\alpha_n} - 1$. Soit représentée par S_n cette fonction numérique; alors

$$-q\frac{\varpi'(q)}{\varpi(q)} = S_1 q + S_2 q^2 + S_3 q^3 + \cdots + S_n q^n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (268)$$

140. *Relation entre les coefficients* S_n. Pour l'obtenir, il suffit de multiplier le second membre par

$$\varpi(q) = 1 - q - q^2 + q^3 - q^4 + q^5 + q^6 - \cdots,$$

et d'identifier le produit avec

$$-q\varpi'(q) = q + 2q^2 - 3q^3 + 4q^4 - 5q^5 - 6q^6 + 7q^7 + \cdots$$

On obtient ainsi

$$S_n - S_{n-1} - S_{n-2} + S_{n-3} - S_{n-4} + S_{n-5} + S_{n-6} - \cdots = \pm n, \quad . \quad . \quad . \quad (269)$$

selon que n est la somme d'un nombre *impair* ou d'un nombre *pair* de puissances de 2.

Par exemple,

$$S_9 - S_8 - S_7 + S_6 - S_5 + S_4 + S_3 - S_2 - S_1 = -9, \text{ (*)}$$

ou

$$1 - (16 - 1) - 1 + (4 - 1) - 1 + (8 - 1) + 1 - (4 - 1) - 1 = -9.$$

141. *Théorème d'arithmétique.* D'après l'une des remarques ci-dessus (136, IV), si n est un multiple de 4, la somme de tous les termes égaux à ± 1, dans le premier membre de l'égalité (269), est nulle. Par suite, ce premier membre se réduit à

$$2 . 2^{\alpha_n} - 2\alpha^{\alpha_{n-2}} - 2 . 2^{\alpha_{n-4}} + 2 . 2^{\alpha_{n-6}} + \cdots$$

De là résulte la proposition suivante :

Soit N *un multiple de* 4 (**), *donné. Soit* n *un nombre pair, inférieur à* N. *On décompose* n *en une somme de puissances de* 2, *et l'on fait* $\lambda_n = \pm 1$, *selon que le nombre des parties est pair ou impair. Enfin, supposant* $N - n = 2^{\beta_n} i$, *on a*

$$\sum_{n=0}^{n=N-2} \lambda_n 2^{\beta_n} = \pm \frac{N}{2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (270)$$

le signe + répondant au cas où N *est la somme d'un nombre impair de puissances de* 2.

142. Application. Soit $N = 20$. Les valeurs de n sont

$$0, \quad 2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 12, \quad 14, \quad 16, \quad 18.$$

Donc

$$\lambda_n = 1^{(***)}, -1, \quad -1, \quad 1, -1, \quad 1, \quad 1, -1, -1, \quad 1;$$
$$N - n = 20, \quad 18, \quad 16, \quad 14, \quad 12, \quad 10, \quad 8, \quad 6, \quad 4, \quad 2.$$

(*) $9 = 8 + 1$; on doit donc prendre le signe —

(**) Si N n'était pas multiple de 4, l'énoncé serait moins simple.

(***) On suppose toujours $\lambda_0 = 1$.

Les plus hautes puissances de 2 qui divisent ces nombres, sont respectivement :

$$4,\quad 2,\quad 16,\quad 2,\quad 4,\quad 2,\quad 8,\quad 2,\quad 4,\quad 2.$$

De plus, $20 = 16 + 4$. Ainsi, l'on doit trouver

$$4 - 2 - 16 + 2 - 4 + 2 + 8 - 2 - 4 + 2 = -10;$$

ce qui est exact.

143. *Remarques.* I. Le symbole λ_n représente le coefficient de q^n dans le développement de $\varpi(q)$, ou A_n. La formule (260) peut donc être écrite ainsi :

$$\varpi(q) = \sum_0^\infty \lambda_n q^n.$$

II. Par suite, l'égalité (256) devient

$$\alpha x' = \sum_0^\infty \lambda_a q^a \times \sum_0^\infty \lambda_b q^{3b} \times \sum_0^\infty \lambda_c q^{5c} \times \cdots,$$

ou (46)

$$\sum_0^\infty (-1)^l q^{\frac{3l^2 \mp l}{2}} = \sum_0^\infty \lambda_a q^a \times \sum_0^\infty \lambda_b q^{3b} \times \sum_0^\infty \lambda_c q^{5c} \times \cdots \qquad (271)$$

III. Dans le second membre, le coefficient de q^n est $\sum \lambda_a \lambda_b \lambda_c \ldots$, pourvu que

$$a + 3b + 5c + \cdots = n. \qquad (272)$$

On a donc ce théorème, analogue à plusieurs de ceux que nous avons démontrés dans le Paragraphe II :

La somme $\sum \lambda_a \lambda_b \lambda_c \ldots$, *étendue à toutes les solutions entières et positives de l'équation* (272) (*), *égale* $(-1)^l$ *ou zéro, selon que le nombre* n *est ou n'est pas pentagonal* (**).

144. *Développement de* $l\varpi(q)$. La relation (268) étant écrite ainsi :

$$-\frac{\varpi'(q)}{\varpi(q)} = 1 + (4-1)q + q^2 + (8-1)q^3 + q^4 + (4-1)q^5 + q^6 + (16-1)q^7 + q^8 + (4-1)q^9 + \cdots,$$

(*) On verra bientôt que le nombre de ces solutions est $\varphi(n)$.

(**) On ne doit pas oublier que *le symbole* λ_a *représente* ± 1, *suivant que* a *est décomposable en un nombre pair ou en un nombre impair de puissances de* 2.

on en conclut

$$-l\varpi(q) = q + \frac{4-1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 + \frac{8-1}{4}q^4 + \frac{1}{5}q^5 + \frac{4-1}{6}q^6 + \frac{1}{7}q^7 + \frac{16-1}{8}q^8 + \frac{1}{9}q^9 + \cdots,$$

ou

$$-l\varpi(q) = \left(q - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 - \frac{1}{4}q^4 + \cdots\right) + \left(\frac{4}{2}q^2 + \frac{8}{4}q^4 + \frac{4}{6}q^6 + \frac{16}{8}q^8 + \cdots\right).$$

La première série est le développement de $l(1+q)$. Quant à la seconde, il est visible, d'après les calculs ci-dessus (139), que le coefficient du terme contenant q^{2n} est $\frac{2 \cdot 2^{\alpha_n}}{2n} = \frac{2}{i}$, si l'on suppose $2n = 2^{\alpha_n} i$. La dernière égalité devient donc

$$-l\varpi(q) = l(1+q) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n}}{i}. \qquad (273)\ (*)$$

145. *Remarques.* I. Dans l'application, on doit se rappeler que *i représente le plus grand diviseur impair de* n.

II. Si l'on change q en q^2, et que l'on ait égard à l'équation (261), on trouve

$$l\frac{1+q}{1-q} = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{i}(q^n - q^{2n}). \qquad (274)$$

Cette relation, identique au fond, peut être utile pour le calcul des logarithmes. On en déduit, par exemple,

$$l2 = 4\left[\frac{1}{9} + \frac{4}{9^2} + \frac{13}{3.9^3} + \frac{40}{9^4} + \frac{121}{5.9^5} + \frac{364}{3.9^6} + \frac{1\,093}{7.9^7} + \cdots\right].$$

146. *Développement de* $l\frac{\beta'}{\alpha'}$. Dans la relation (273), changeons q en q^3, en q^5, ..., et ajoutons membre à membre : nous trouvons

$$-l[\varpi(q)\varpi(q^3)\varpi(q^5)\varpi(q^7)\ldots] = l[(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots] + 2\sum\frac{1}{i}(q^{2n} + q^{6n} + q^{10n} + \cdots);$$

c'est-à-dire (256), (5)

$$-l(\alpha\alpha'\beta) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{i}\frac{q^{2n}}{1-q^{4n}},$$

(*) On arrive directement à cette formule, si l'on fait attention que

$$-l\varpi(q) = -l(1-q) - l(1-q^2) - l(1-q^4) - \cdots$$

ou bien,

$$l\,\frac{\beta'}{\alpha'}=2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{i}\,\frac{q^{2n}}{1-q^{4n}}\cdot \quad (275)$$

147. *Remarque.* Si l'on substitue, au premier membre,

$$l\,\frac{1+q^2}{1-q^2}+l\,\frac{1+q^4}{1-q^4}+l\,\frac{1+q^6}{1-q^6}+\cdots,$$

et que l'on remplace les logarithmes par leurs développements, on obtient encore une identité.

148. *Développement de* $-\mathrm{l}\,(\alpha^2\alpha')$. Lorsque, dans la fonction $\frac{\beta'}{\alpha'}$, on remplace q^2 par q, elle devient $\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}=\frac{1}{\alpha^2\alpha'}\cdot$ Donc

$$-\,l\,(\alpha^2\alpha')=2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{i}\,\frac{q^n}{1-q^{2n}}\cdot \quad (276)$$

Il serait facile de multiplier ces transformations. Nous n'en indiquerons plus qu'une.

149. *Décomposition de* $\beta\beta'$. Au moyen de la remarque faite par Euler (135), la fonction

$$\beta\beta'=(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\ldots\times(1+q^3)(1+q^6)(1+q^{12})\ldots\times(1+q^5)(1+q^{10})(1+q^{20})\ldots\times\ldots$$

peut d'abord être décomposée en ce produit de séries fort simples :

$$1+q+q^2+q^3+q^4+\cdots,\quad 1+q^3+q^6+q^9+q^{12}+\cdots,\quad 1+q^5+q^{10}+q^{15}+\cdots,\ \ldots\ (*)$$

si l'on remplace ensuite $\beta\beta'$ par son premier développement (32), on a cette relation

$$\sum_0^\infty\varphi(n)\,q^n=\sum_0^\infty q^a\times\sum_0^\infty q^{3b}\times\sum_0^\infty q^{5c}\times\cdots \quad (277)$$

150. *Théorème d'arithmétique.* Il suffit de l'énoncer :

Le nombre des décompositions de n *en parties inégales* (ou $\varphi(n)$), *égale*

(*) Cette décomposition résulte aussi de l'identité (7).

le nombre des décompositions de n *en parties appartenant aux progressions*

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ldots \\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27,\ldots \\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35,\ 40,\ 45,\ldots \\ 7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42,\ 49,\ 56,\ 63,\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$ (*)

Par exemple :

$$8 = 8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4;$$

de sorte que $\varphi(8) = 6$. D'un autre côté, le nombre 8 admet les 6 décompositions suivantes :

$$8,\ 5+3,\ 3+5,\ 1+7,\ 2+6,\ 3+5.$$

151. *Remarque.* Ainsi que nous l'avons annoncé (**143**, III), le nombre des solutions entières de l'équation (272) est $\varphi(n)$.

VI.

REMARQUES DIVERSES.

152. Soient

$$f(q) = \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \frac{q^7}{1-q^7} + \cdots, \quad \ldots\ldots \quad (278)$$

$$f(q^2) = \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{q^6}{1-q^6} + \frac{q^{10}}{1-q^{10}} - \frac{q^{14}}{1-q^{14}} + \cdots,$$

d'où résulte

$$f(q) - f(q^2) = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \frac{q^7}{1-q^{14}} + \cdots,$$

ou (**)

$$f(q) - f(q^2) = \frac{(1-k')\,\omega}{4\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (279)$$

(*) Ce théorème a de l'analogie avec celui que nous avons démontré dans le numéro **106**. Il est bien entendu que, pour toute décomposition de n, chaque progression ne renferme pas plus d'une partie.

(**) LEGENDRE, t. III, p. 132.

Dans cette équation, changeons q en q^2, en q^4, en q^8, ... : à cause de $f(q^n) = 0$ *pour* n *infini*, la somme des premiers membres est

$$f(q) = \frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi} - 1\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (280)\ (*)$$

Conséquemment

$$(1 - k')\,\omega + (1 - k'_1)\,\omega_1 + (1 - k'_2)\,\omega_2 + \cdots = 2\omega - \pi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (281)$$

On voit que *les quantités* $(1 - \mathrm{k}')\,\omega$, $(1 - \mathrm{k}'_1)\,\omega_1 \ldots$ *forment une série convergente, dont la somme est* $2\omega - \pi$. Chacun de ces *termes* peut, de deux manières différentes, être développé en série ordonnée suivant les puissances de q; et il en est de même pour la *somme*.

153. En premier lieu, la combinaison des formules (17), (18), (31) donne

$$(1 - k')\,\omega = 4\pi q\,(1 + q^4 + q^{12} + q^{24} + \cdots)^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (282)\ (**)$$

On a aussi (18)

$$2\omega - \pi = 4\pi\,(q + q^4 + q^9 + q^{16} + \cdots)(1 + q + q^4 + q^9 + q^{16} + \cdots);$$

donc l'équation (281) devient

$$\left.\begin{aligned} q\,(1 + q^4 + q^{12} + q^{24} + \cdots)^2 + q^2\,(1 + q^8 + q^{24} + q^{48} + \cdots)^2 + q^4\,(1 + q^{16} + q^{48} + q^{96} + \cdots)^2 + \cdots \\ = (q + q^4 + q^9 + q^{16} + \cdots)\,(1 + q + q^4 + q^{16} + \cdots) \end{aligned}\right\} \quad (283)$$

154. Avant d'aller plus loin, nous ferons deux remarques :

1°
$$f(q) = (q + q^4 + q^9 + q^{16} + \cdots)\,(1 + q + q^4 + q^9 + \cdots); \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (284)$$

2° Chacune des relations (281), (283) équivaut à celle-ci :

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \cdots\right] + \left[\frac{q^2}{1-q^4} - \frac{q^6}{1-q^{12}} + \frac{q^{10}}{1-q^{20}} - \cdots\right] \\ &+ \left[\frac{q^4}{1-q^8} - \frac{q^{12}}{1-q^{24}} + \cdots\right] + \cdots = \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \cdots . \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (285)$$

(*) Jacobi, *Fundamenta nova*, p. 103.
(**) Legendre, t. III, p. 110.

Pour la démontrer directement, il suffit de vérifier que

$$\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^4}{1-q^8}+\frac{q^8}{1-q^{16}}+\cdots=\frac{q}{1-q}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (286)$$

Or, si l'on développe le premier membre, on trouve

$$q+q^2+q^3+q^4+q^5+\cdots;$$

etc. (*)

155. On sait, et il est d'ailleurs évident, que *dans le développement de* f(q), *le coefficient de* q^n *égale l'excès* ε_n *du nombre des diviseurs de* n, *ayant la forme* $4\mu+1$, *sur le nombre des diviseurs ayant la forme* $4\mu-1$. Conséquemment, les termes en q^n, q^{2n}, q^{4n},... ont même coefficient; et, pour déterminer ε_n, il suffit de considérer le cas où n est *impair*. Cela posé :

1° *Si le nombre* n *a la forme* $4\mu-1$, $\varepsilon_n=0$. En effet, à chaque diviseur ayant cette forme, il en correspond un ayant la forme contraire;

2° De même, $\varepsilon_n=0$ *quand* n, *ayant la forme* $4\mu+1$, *n'admet aucun facteur premier de cette forme ;*

3° *Si le nombre* n *a la forme* $4\mu+1$, ε_n *égale le nombre des diviseurs de* n *exclusivement formés des facteurs premiers ayant cette même forme* (**);

4° En particulier, $\varepsilon_n=2$ *lorsque* n *est premier et de la forme* $4\mu+1$;

5° *Si* n *est une puissance d'un nombre premier* $4\mu-1$, *dont l'exposant soit pair,* $\varepsilon_n=1$;

6° *L'excès* ε_n *n'est jamais négatif.*

(*) Semblablement :

$$\frac{q+q^2}{1-q^3}+\frac{q^3+q^6}{1-q^9}+\frac{q^9+q^{18}}{1-q^{27}}+\cdots=\frac{q}{1-q};$$

$$\frac{q+q^2+q^3+q^4}{1-q^5}+\frac{q^5+q^{10}+q^{15}+q^{20}}{1-q^{25}}+\frac{q^{25}+q^{50}+q^{75}+q^{100}}{1-q^{125}}+\cdots=\frac{q}{1-q};$$

$$\frac{q+q^2+\cdots+q^6}{1-q^7}+\frac{q^7+q^{14}+\cdots+q^{42}}{1-q^{49}}+\frac{q^{49}+q^{98}+\cdots+q^{294}}{1-q^{343}}+\cdots=\frac{q}{1-q},$$

. . . .

Ces identités, assez remarquables, se vérifient aussi facilement que la première.

(**) Je supprime la démonstration, parce que le théorème est sans doute connu.

156. Effectuant le développement de chacune des fractions qui composent $f(q)$ (277), on trouve :

$$f(q) = q + q^2 + q^4 + 2q^5 + q^8 + q^9 + 2q^{10} + 2q^{13} + q^{16} + 2q^{17} + q^{18} + 2q^{20} + \cdots; \quad (287)$$

et il est visible que les coefficients satisfont aux conditions précédentes.

157. Ces diverses propositions peuvent être généralisées de la manière suivante :

Soit $n = p^\alpha p'^{\alpha'} p''^{\alpha''} \ldots \times q^\beta q'^{\beta'} q''^{\beta''} \ldots$, les premiers facteurs ayant la forme $4\mu - 1$, et les seconds, la forme $4\mu + 1$. Soit E_n *l'excès relatif* au premier produit. Il est visible que :

1° $\varepsilon_n = E_n(\beta + 1)(\beta' + 1)(\beta'' + 1)\ldots$;

2° *Si tous les exposants* $\alpha, \alpha', \alpha''$, ... *sont pairs*, $E_n = 1$;

3° *Dans le cas contraire*, $E_n = 0$.

Donc

ε_n *égale zéro ou* $(\beta + 1)(\beta' + 1)(\beta'' + 1)\ldots$. [*Ad.*] (*)

158. Soit maintenant

$$F(q) = q + q^2 + q^4 + q^8 + q^{16} + \cdots \quad (288)$$

D'après l'une des remarques précédentes, et celle que nous avons faite au numéro 131, la formule (287) devient

$$f(q) = \varepsilon_1 F(q) + \varepsilon_5 F(q^5) + \varepsilon_9 F(q^9) + \cdots, \quad (289)$$

ou

$$f(q) = \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} F(q^{4n+1}). \quad (290)$$

159. Il est évident que

$$F(q) - F(q^2) = q; \quad (291)$$

donc

$$f(q) - f(q^2) = \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} q^{4n+1}; \quad (292)$$

puis

$$\frac{(1 - k')\omega}{4\pi} = q(1 + q^4 + q^{12} + q^{24} + \cdots)^2 = \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} q^{4n+1}, \quad (293)$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi} - 1\right) = (q + q^4 + q^9 + q^{16} + \cdots)(1 + q + q^4 + q^9 + \cdots) = \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} F(q^{4n+1}). \quad (294)$$

(*) On vérifie aisément ces propriétés en considérant le produit

$$[1 - p + p^2 - \cdots + (-p)^\alpha][1 - p' + p'^2 - \cdots + (-p')^{\alpha'}]\ldots.$$

160. Si, dans la relation (293), on change q^4 en q, elle devient

$$(1+q+q^3+q^6+\cdots)^2=\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^n; \quad \ldots \quad (295)$$

c'est-à-dire (20),

$$q^{-\frac{1}{4}}\frac{\omega}{\pi}\sqrt{k}=\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}=\sum_0^\infty \varepsilon_{4n\mp1}q^n. \quad \ldots \quad (296)$$

161. Cette dernière égalité donne une nouvelle décomposition de la série qui représente α'^3 (24); savoir (39), (46) :

$$1-3q^2+5q^6-7q^{12}+\cdots=\sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q)^n\times\sum_0^\infty(-1)^l q^{\frac{3l^2\mp l}{2}}\times\sum_0^\infty \varepsilon_{4m+1}q^m. \quad . \ (297)$$

Elle prouve aussi que *la série*

$$\alpha'^2=(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)^2$$

est décomposable en un produit de trois facteurs, etc. Mais passons à d'autres propriétés.

162. Si, pour abréger, on appelle S, S′, S″ les sommes contenues dans les équations (293), (295), (296), on trouve

$$\omega=\frac{\pi}{2}(1+4S')\,(^*),\quad \sqrt{k}=2q^{\frac{1}{4}}\frac{S''}{1+4S'},\quad k'=\frac{1+4S'-8S}{1+4S'}. \quad \ldots \quad (298)$$

Ces valeurs de $\sqrt{k}$ et de k', comparées à celles que l'on connaît (26), donnent les *identités*

$$\frac{1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}=\frac{S''}{1+4S'}, \quad \ldots \quad (299)$$

$$\left[\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}\right]^2=\frac{1+4S'-8S}{1+4S'}; \quad \ldots \quad (300)$$

De plus,

$$(1+4S'-8S)^2(1+4S')^2=(1+4S')^4-16qS''^4. \quad \ldots \quad (301)\,(^{**})$$

163. *Relations entre* f(q), F(q) *et une autre transcendante.* Dans ma

(*) Jacobi, *Fundamenta nova,* p. 105.

(**) Ces identités ne sont pas nouvelles : elles équivalent aux relations (144), (31), etc.

Note sur une formule de M. Botesu (*), j'ai démontré que si l'on fait

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=l(n)+\varphi(n)+\mathrm{C},$$

C étant la *constante d'Euler*, on a :

1° $$\varphi(n)=\int_0^1 \frac{dq}{1+q}\left[\mathrm{F}(q^n)-q^n\right];$$

2° $$\varepsilon_1\varphi(1)+\varepsilon_5\varphi(5)+\varepsilon_9\varphi(9)+\cdots=\frac{1}{4\pi}\int_0^1 \frac{dq}{1+q}(1+k')\,\omega-\frac{1}{4}l(2);$$

3° $$\varepsilon_1\varphi(1)+\varepsilon_5\varphi(5)+\varepsilon_0\varphi(9)+\cdots=-\frac{1}{4\pi}\int_0^1 dq\left[\frac{1}{1-q}+\frac{1}{ql(q)}\right](1-k')\,\omega;$$

4° $$\int_0^1\left[2\,\frac{1-qk'}{1-q^2}+\frac{1-k'}{ql(q)}\right]\omega dq=\pi l(2);$$

5° $$\int_0^1 \frac{dq}{1+q}\mathrm{F}(q)=2-l(2)-\mathrm{C}.\quad [Ad.]$$

164. La transcendante $\mathrm{F}(q)$ a été remarquée par l'illustre Jacobi. On trouve en effet, à la dernière page des *Fundamenta :*

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2&=(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^4=1+8\left[\frac{q}{1-q}+2\frac{q^2}{1+q^2}+3\frac{q^3}{1-q^3}+4\frac{q^4}{1+q^4}+\cdots\right]\\&=1+8\sum_1^\infty(q^i+3q^{2i}+3q^{4i}+3q^{8i}+\cdots)\int i,\end{aligned}\right\}\ \begin{matrix}(302)\\(**)\end{matrix}$$

i étant *impair*.

La seconde ligne est la même chose que

$$1+24\sum_1^\infty \mathrm{F}(q^i)\int i-16\sum_1^\infty q^i\int i;$$

donc

$$\frac{q}{1-q}+2\frac{q^2}{1+q^2}+3\frac{q^3}{1-q^3}+4\frac{q^4}{1+q^4}+\cdots=3\sum_1^\infty \mathrm{F}(q^i)\int i-2\sum_1^\infty q^i\int i.\ (303)\ (***)$$

(*) *Bulletins de l'Académie*, juillet et novembre 1872.

(**) Sans doute par suite d'une erreur typographique, les coefficients 2, 3, 4, ... ont été omis. La formule exacte est rapportée p. 107.

(***) On ne doit pas oublier que la notation $\int i$, employée par Euler, représente la somme des diviseurs de i.

165. Changeant q en $-q$, puis retranchant membre à membre, on trouve

$$\frac{q^2}{1-q^2}+3\frac{q^6}{1-q^6}+5\frac{q^{10}}{1-q^{10}}+\cdots=\sum_1^\infty (q^{2i}+q^{4i}+q^{8i}+\cdots)\int i;$$

ou, plus simplement,

$$\frac{q}{1-q}+3\frac{q^3}{1-q^3}+5\frac{q^5}{1-q^5}+\cdots=\sum_0^\infty \mathrm{F}(q^i)\int i. \quad . \quad . \quad [Ad.] \ (304)$$

166. Le premier membre est la même chose que $-\frac{q}{\alpha}\frac{d\alpha}{dq}$. Donc

$$-\frac{q}{\alpha}\frac{d\alpha}{dq}=\sum_1^\infty \mathrm{F}(q^i)\int i.$$

Et comme $\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dq}+\frac{1}{\beta\beta'}\frac{d(\beta\beta')}{dq}=0$ (7), on a encore

$$\frac{q}{1+q}+2\frac{q^2}{1+q^2}+3\frac{q^3}{1+q^3}+\cdots=\sum_1^\infty \mathrm{F}(q^i)\int i. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (305)$$

Ainsi : 1° *Les séries*

$$\frac{q}{1-q}+3\frac{q^3}{1-q^3}+5\frac{q^5}{1-q^5}+\cdots,$$
$$\frac{q}{1+q}+2\frac{q^2}{1+q^2}+3\frac{q^3}{1+q^3}+\cdots,$$
$$\mathrm{F}(q)+\mathrm{F}(q^3)\int 3+\mathrm{F}(q^5)\int 5+\mathrm{F}(q^7)\int 7+\cdots,$$

ordonnées suivant les puissances de q, *deviennent*

$$q+q^2+4q^3+q^4+6q^5+4q^6+8q^7+q^8+13q^9+6q^{10}+\cdots$$

2° *Ces quatre séries ont la même limite* (*).

167. *Autres expressions de* F (q). Cette transcendante peut être rattachée, soit aux nombres φ, soit aux nombres φ_i.

(*) On verra, plus loin, que cette limite commune est

$$-\frac{1}{24}+\frac{1}{3}\frac{k^2\omega^2}{\pi^2}+\frac{1}{6}\frac{k'^2\omega^2}{\pi^2}. \qquad [Ad.]$$

1° Si l'on part de la formule

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots=\sum_0^\infty \varphi(n)\,q^n, \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

on trouve, par le calcul précédent,

$$\sum_1^\infty \mathrm{F}(q^i)\int i=\frac{\sum_0^\infty n\varphi(n)\,q^n}{\sum_0^\infty \varphi(n)\,q^n}. \quad \ldots \ldots \quad (306)$$

2° De même, la relation

$$(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots=\sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q)^n, \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

conduit à celle-ci :

$$\sum_1^\infty \mathrm{F}(q^i)\int i=-\frac{\sum_0^\infty n\varphi_i(n)(-q)^n}{\sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q)^n}. \quad \ldots \ldots \quad [Ad.]\ (307)$$

168. *Relation entre les nombres* φ. D'après l'identité $\left(306\right)$:

$$\left.\begin{aligned} n\varphi(n)= &\ \varphi(n-1)+\varphi(n-2)+\varphi(n-4)+\varphi(n-8)+\cdots \\ &+4\left[\varphi(n-3)+\varphi(n-6)+\varphi(n-12)+\varphi(n-24)+\cdots\right] \\ &+6\left[\varphi(n-5)+\varphi(n-10)+\varphi(n-20)+\varphi(n-40)+\cdots\right] \\ &+8\left[\varphi(n-7)+\varphi(n-14)+\varphi(n-28)+\varphi(n-56)+\cdots\right] \\ &+13\left[\varphi(n-9)+\varphi(n-18)+\varphi(n-36)+\varphi(n-72)+\cdots\right] \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (308)$$

Par exemple,

$$8\varphi(8)=\varphi(7)+\varphi(6)+\varphi(4)+\varphi(0)+4\left[\varphi(5)+\varphi(2)\right]+6\varphi(3)+8\varphi(1),$$

ou

$$8.6=5+4+2+1+4(3+1)+6.2+8. \quad [Ad.]$$

169. *Relation entre les nombres* φ_i. De même,

$$\left.\begin{aligned} -n\varphi_i(n)= &-\varphi_i(n-1)+\varphi_i(n-2)+\varphi_i(n-4)+\varphi_i(n-8)+\cdots \\ &+4\left[-\varphi_i(n-3)+\varphi_i(n-6)+\varphi_i(n-12)+\varphi_i(n-24)+\cdots\right] \\ &+6\left[-\varphi_i(n-5)+\varphi_i(n-10)+\varphi_i(n-20)+\varphi_i(n-40)+\cdots\right] \\ &+8\left[-\varphi_i(n-7)+\varphi_i(n-14)+\varphi_i(n-28)+\varphi_i(n-56)+\cdots\right] \\ &+13\left[-\varphi_i(n-9)+\varphi_i(n-18)+\varphi_i(n-36)+\varphi_i(n-72)+\cdots\right] \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (309)$$

Soit $n=8$: on doit trouver

$$-8\varphi_i(8)=-\varphi_i(7)+\varphi_i(6)+\varphi_i(4)+\varphi_i(0)+4)\left[-\varphi_i(5)+\varphi_i(2)\right]-6\varphi_i(3)-8\varphi_i(1).$$

En effet, cette égalité est la même chose que

$$-8.2=-1+1+1+1+4[-1+0]-6-8. \quad [Ad.]$$

170. La combinaison des formules (280), (302) donne

$$[f(q)]^2=\frac{3}{2}\sum_1^\infty F(q^i)\int i-\sum_1^\infty q^i\int i-\frac{1}{2}f(q);$$

ou (290)

$$\left[\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}F(q^{4n+1})\right]^2=\frac{3}{2}\sum_0^\infty F(q^i)\int i-\sum_1^\infty q^i\int i-\frac{1}{2}\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}F(q^{4n+1});$$

ou encore, attendu que $\varepsilon_i=0$ quand i n'a pas la forme $4\mu+1$ (155) :

$$\left[\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}F(q^{4n+1})\right]^2=\frac{1}{2}\sum_1^\infty\left(3\int i-\varepsilon_i\right)F(q^i)-\sum_1^\infty q^i\int i. \quad . \quad . \quad . \quad (310)$$

171. Soit i un nombre impair, donné. Dans le second membre, le coefficient de q^i est $\frac{1}{2}\left(\int i-\varepsilon_i\right)$. Dans le premier membre, ce coefficient est une somme de produits, laquelle peut être mise sous deux formes différentes.

1° Si d'abord, pour plus de simplicité dans la notation, on remplace la quantité entre parenthèses par

$$f(q)=\varepsilon_1 q+\varepsilon_2 q^2+\varepsilon_3 q^3+\varepsilon_4 q^4+\cdots,$$

on voit que la somme cherchée égale

$$2\left[\varepsilon_i\varepsilon_{i-1}+\varepsilon_2\varepsilon_{i-2}+\cdots+\varepsilon_{\frac{i-1}{2}}\varepsilon_{\frac{i+1}{2}}\right]=2\sum_{n=1}^{n=\frac{i-1}{2}}\varepsilon_n\varepsilon_{i-n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (311)$$

Conséquemment,

$$\int i=\varepsilon_i+4\sum_{n=1}^{n=\frac{i-1}{2}}\varepsilon_n\varepsilon_{i-n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (312)$$

On a donc ce théorème, qui me paraît remarquable :

La somme des diviseurs d'un nombre impair i *se compose de l'excès relatif* *à ce nombre* i, *augmenté de quatre fois la somme des produits deux à deux des excès relatifs aux nombres inférieurs à* i *et dont la somme est* i (*).

2° Chacune des sommes (311), (312) contient un grand nombre de termes nuls : en effet, $\varepsilon_n = 0$ quand $n = 4\mu - 1$ (155). De plus, $\varepsilon_m = \varepsilon_{2m}$. De là résulte (**) que

$$\varepsilon_i\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_2\varepsilon_{i-2} + \cdots + \varepsilon_{\frac{i-1}{2}}\varepsilon_{\frac{i+1}{2}}$$
$$= \varepsilon_1(\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_{i-2} + \varepsilon_{i-4} + \varepsilon_{i-8} + \cdots) + \varepsilon_5(\varepsilon_{i-5} + \varepsilon_{i-10} + \varepsilon_{i-20} + \cdots)$$
$$+ \varepsilon_9(\varepsilon_{i-9} + \varepsilon_{i-18} + \varepsilon_{i-36} + \varepsilon_{i-72} + \cdots) + \varepsilon_{13}(\varepsilon_{i-13} + \varepsilon_{i-26} + \varepsilon_{i-52} + \cdots)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \sum \varepsilon_{4n+1} \sum \varepsilon_{i-2^\alpha(4n+1)};$$

sous la condition

$$i - 2^\alpha(4n+1) > \frac{i}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (313)$$

On peut donc écrire, au lieu de l'équation (312) :

$$\int i = \varepsilon_i + 4\sum \varepsilon_{4n+1} \sum \varepsilon_{i-2^\alpha(4n+1)}. \quad \ldots\ldots \quad (314)\ (***)$$

En particulier,

$$\int 45 = \varepsilon_{45} + 4\left[\varepsilon_1(\varepsilon_{44} + \varepsilon_{43} + \varepsilon_{41} + \varepsilon_{37} + \varepsilon_{29}) + \varepsilon_5(\varepsilon_{40} + \varepsilon_{35} + \varepsilon_{25}) + \varepsilon_9(\varepsilon_{36} + \varepsilon_{27}) + \varepsilon_{13}\varepsilon_{32} + \varepsilon_{17}\varepsilon_{28}\right]$$
$$= \varepsilon_{45} + 4\left[\varepsilon_1(\varepsilon_{41} + \varepsilon_{37} + \varepsilon_{29}) + \varepsilon_5(\varepsilon_5 + \varepsilon_{25}) + \varepsilon_9 \cdot \varepsilon_9 + \varepsilon_{13}\right],$$

ou

$$78 = 2 + 4\left[2 + 2 + 2 + 2(2+5) + 1 + 2\right];$$

ce qui est exact.

172. L'équation (310) peut donner d'autres théorèmes. Par exemple, en égalant les coefficients de q^{2i}, dans les deux membres, on trouve

$$3\int i = \varepsilon_i + 4\sum \varepsilon_{4n'+1} \sum \varepsilon_{2i-2^{\alpha'}(4n'+1)} + 2\varepsilon_i^2, \quad \ldots\ldots \quad (315)$$

(*) Lorsque i est premier, cette somme de produits se réduit à $\frac{i \mp 1}{4}$. Par exemple :

$$\varepsilon_1\varepsilon_{16} + \varepsilon_2\varepsilon_{15} + \varepsilon_3\varepsilon_{14} + \varepsilon_4\varepsilon_{13} + \varepsilon_5\varepsilon_{12} + \varepsilon_6\varepsilon_{11} + \varepsilon_7\varepsilon_{10} + \varepsilon_8\varepsilon_9 = \frac{17-1}{4},$$

ou (**155**)

$$\varepsilon_1(\varepsilon_{16} + \varepsilon_{15} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_9) + \varepsilon_5\varepsilon_{12} = 4,$$

ou enfin

$$1 + 2 + 1 = 4.$$

(**) *Voyez* la note précédente.

(***) On arrive plus rapidement à ce résultat, mais d'une manière moins simple, en conservant, dans le premier membre de l'égalité (319), la seconde forme de $f(q)$.

relation dans laquelle le second indice satisfait à la condition

$$2i - 2^{\alpha'}(4n' + 1) > i. \qquad (316)$$

Si maintenant on élimine $\int i$, on obtient la nouvelle égalité

$$\sum \varepsilon_{4n'+1} \sum \varepsilon_{2i-2^{\alpha'}(4n'+1)} - 3 \sum \varepsilon_{4n+1} \sum \varepsilon_{i-2^{\alpha}(4n+1)} + \frac{1}{2}\varepsilon_i(\varepsilon_i - 1) = 0. \qquad (317)$$

Par conséquent, *étant donné un nombre* 2i — 1, *on peut exprimer* ε_{2i-1} *en fonction des indices relatifs aux nombres inférieurs à* 2i — 1. Soit, comme ci-dessus, $i = 45$, d'où $2i - 1 = 89$: la dernière équation devient

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{89} + \varepsilon_{88} + \varepsilon_{86} + \varepsilon_{82} + \varepsilon_{74} + \varepsilon_{58} + \varepsilon_5(\varepsilon_{85} + \varepsilon_{80} + \varepsilon_{70} + \varepsilon_{50}) + \varepsilon_9(\varepsilon_{81} + \varepsilon_{72} + \varepsilon_{54}) + \varepsilon_{13}(\varepsilon_{77} + \varepsilon_{64}) \\ &+ \varepsilon_{17}(\varepsilon_{73} + \varepsilon_{56}) + \varepsilon_{21}(\varepsilon_{69} + \varepsilon_{48}) + \varepsilon_{25}.\varepsilon_{65} + \varepsilon_{29}.\varepsilon_{61} + \varepsilon_{33}.\varepsilon_{57} + \varepsilon_{37}.\varepsilon_{53} + \varepsilon_{41}.\varepsilon_{49} \\ &- 3\left[\varepsilon_{44} + \varepsilon_{43} + \varepsilon_{41} + \varepsilon_{37} + \varepsilon_{29} + \varepsilon_5(\varepsilon_{40} + \varepsilon_{35} + \varepsilon_{25}) + \varepsilon_9(\varepsilon_{36} + \varepsilon_{27}) + \varepsilon_{13}.\varepsilon_{32} + \varepsilon_{17}.\varepsilon_{28}\right] \\ &+ \frac{1}{2}\varepsilon_{45}(\varepsilon_{45} - 1) = 0; \end{aligned}$$

ou, après quelques réductions :

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2(4 + 2 + 3) + 1 + 1 + 2 + 2.2 + 3.4 + 2.2 + 2.2 + 2 - 3.19 + 1 = 0;$$

ce qui est identique.

173. Au moyen d'un calcul très-simple, que nous omettons, on transforme l'équation de Jacobi (502), soit en celle-ci :

$$\left.\begin{aligned} (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)^4 = 1 &+ 8q\,(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)^4 \\ &+ 24q^2(1 + q^4 + q^{12} + q^{24} + \cdots)^4 \\ &+ 24q^4(1 + q^8 + q^{24} + q^{48} + \cdots)^4 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (318)$$

soit en cette autre :

$$\frac{4(1 + k^2)\omega^2 - \pi^2}{6} = \omega^2 k^2 + \omega_1^2 k_1^2 + \omega_2^2 k_2^2 + \cdots \qquad (319)$$

Ainsi, les quantités $(\omega k)^2$, $(\omega_1 k_1)^2$, ... forment une série convergente, dont la somme est connue. Ce résultat est analogue à celui que nous avons indiqué précédemment (152).

174. *Identité remarquable.* Si, dans la relation (318), on change q en q^2, et que l'on retranche ensuite membre à membre, on obtient l'identité

$$\left.\begin{aligned}&(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^4-(1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots)^4\\ &=8q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4+16q^2(1+q^4+q^{12}+q^{24}+\cdots)^4,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (320)$$

qu'il est facile de vérifier.

175. Au moyen des relations connues :

$$\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2-1=8\left[\frac{q}{1-q}+2\frac{q^2}{1+q^2}+3\frac{q^3}{1-q^3}+4\frac{q^4}{1+q^4}+\cdots\right], \quad . \quad (321)$$

$$\left(\frac{\omega k}{\pi}\right)^2=4\left[\frac{q}{1-q^2}+3\frac{q^3}{1-q^6}+5\frac{q^5}{1-q^{10}}+7\frac{q^7}{1-q^{14}}+\cdots\right], \quad (322)\ (*)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega k}{\pi}\right)^2-\frac{1}{2\pi^2}\omega E_1(k)=2\frac{q^2}{1-q^4}+4\frac{q^4}{1-q^8}+6\frac{q^6}{1-q^{12}}+8\frac{q^8}{1-q^{16}}+\cdots, \quad (323)\ (*)$$

on peut former des développements de la fonction $\omega E_1(k)=F_1(k)E_1(k)$ $=F_1E_1$. On tire en effet, de ces trois équations,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi^2}\omega E_1(k)-\frac{1}{8}=&\frac{q}{1-q}+2\frac{q^2}{1+q^2}+4\frac{q^3}{1-q^3}+4\frac{q^4}{1+q^4}+\cdots\\ &-\frac{q}{1-q^2}-2\frac{q^2}{1-q^4}-3\frac{q^3}{1-q^6}-4\frac{q^4}{1-q^8}-\cdots;\end{aligned}$$

et, en réduisant :

$$\frac{F_1E_1}{2\pi^2}-\frac{1}{8}=\frac{q^2}{1-q^2}-2\frac{q^4}{1-q^4}+3\frac{q^6}{1-q^6}-4\frac{q^8}{1-q^8}+5\frac{q^{10}}{1-q^{10}}-\cdots. \quad . \quad (324)$$

Si l'on développe chaque fraction, on reconnaît que *le coefficient de* q^{2n} *est égal à l'excès de la somme des diviseurs impairs sur la somme des diviseurs pairs de* n. Ainsi, sous forme abrégée,

$$\frac{F_1E_1}{2\pi^2}-\frac{1}{8}=\sum_1^\infty(S_i-S_p)\,q^{2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (325)$$

(*) Legendre, t. III, pp. 133 et 134.

176. Pour simplifier le second membre, appelons encore i le plus grand nombre impair contenu dans n, et soit $n = 2^\alpha i$. Alors

$$S_i = \int i,\quad S_p = (2^{\alpha+1} - 2)\int i,\quad S_i - S_p = (3 - 2^{\alpha+1})\int i;$$

puis

$$\frac{F_1 E_1}{2\pi^2} - \frac{1}{8} = \sum_1^\infty (3 - 2^{\alpha+1})\, q^{2n} \int i, \quad \ldots \quad (326)$$

ou

$$\frac{F_1 E_1}{2\pi^2} - \frac{1}{8} = \sum (q^{2i} - q^{4i} - 5q^{8i} - 13q^{16i} - 29q^{32i} - \cdots) \int i, \quad \ldots \quad (327)$$

ou enfin

$$\frac{F_1 E_1}{2\pi^2} - \frac{1}{8} = 3 \sum \left[F(q^i) - q^i\right] \int i - \sum \left[2q^{2i} + 4q^{4i} + 8q^{8i} + \cdots\right] \int i \quad \ldots \quad (328)$$

Sous cette dernière forme, on reconnaît que le produit des fonctions complètes E_1, F_1 dépend de $F(q^i)$ et d'une nouvelle transcendante

$$2q^{2i} + 4q^{4i} + 8q^{8i} + 16q^{16} + \cdots = \frac{q}{i} \frac{d.}{dq} \left[F(q^i) - q^i\right] \quad \ldots \quad (329)$$

177. Dans l'équation (293), changeons q en $\sqrt{q}$: elle devient (19) :

$$q^{-\frac{1}{2}} \frac{\omega k}{2\pi} = (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)^2 = \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} q^{2n} \quad \ldots \quad (330)\ (*)$$

178. On sait que

$$(1 + q + q^3 + q^6 + \cdots)^4 = \frac{\omega^2}{\pi^2} k q^{-\frac{1}{2}} = 1 + 4q + 6q^2 + \cdots + q^n \int (2n+1) + \cdots \quad (331)\ (**)$$

Si l'on change q en $-q$, et que l'on retranche, on a donc

$$(1 + q + q^3 + q^6 + \cdots)^4 - (1 - q - q^3 + q^6 + \cdots)^4 = 2 \sum_0^\infty q^i \int (2i+1). \quad (332)$$

Le premier membre équivaut à

$$8q (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)^2 (1 + q^4 + q^{12} + q^{24} + \cdots)^2; \quad \ldots \quad (157)$$

(*) Depuis que ce passage est rédigé, je me suis aperçu que les formules (293), (330) ont été données par Jacobi, sous une forme un peu différente. Voyez *Fundamenta,* pp. 105, 106.

(**) *Fundamenta nova,* p. 105.

ou, d'après les formules (293), (330), à

$$8 \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} q^{4n+1} \times \sum_0^\infty \varepsilon_{4n'+1} q^{2n'}.$$

Conséquemment,

$$\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} q^{4n+1} \times \sum_0^\infty \varepsilon_{4n'+1} q^{2n'} = \frac{1}{4} \sum_1^\infty q^i \int (2i+1); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (333)$$

puis, si l'on considère un nombre donné i, *de la forme* $4\mu - 1$:

$$\int i = 4 \sum_{n=0}^{n \leqq \frac{i-3}{8}} \varepsilon_{4n+1}\varepsilon_{4n'+1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (334)$$

avec la condition

$$4n + 1 + 2n' = \frac{i-1}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (335)$$

Soit, par exemple, $i = 19$. Alors

$$\int 19 = 20 = 4\,[\varepsilon_1 . \varepsilon_{17} + \varepsilon_5 . \varepsilon_9 + \varepsilon_9 . \varepsilon_1] = 4\,[1 . 2 + 2 . 1 + 1 . 1]. \text{ (*)}$$

179. Après avoir mis l'égalité (332) sous la forme (333), écrivons-la ainsi :

$$[(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)(1 + q^4 + q^{12} + q^{24} + \cdots)]^2 = \frac{1}{2} \sum_1^\infty q^{i-1} \int (2i+1). \quad . \qquad (336)$$

Dans le premier membre, un terme quelconque du produit des deux séries peut être représenté par $A_n q^{2n}$, pourvu que

$$2n = x(x+1) + 2y(y+1),$$

ou

$$8n + 3 = (2x+1) + 2(2y+1)^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (337)$$

Ainsi, *le coefficient* A_n *est égal au nombre des solutions, entières et positives, de l'équation* (337). D'après un théorème connu (**), *ce coefficient est égal à l'excès du nombre des diviseurs de* $8n + 3$, *ayant la forme* $8\mu + 1$, *sur le nombre de ceux qui ont la forme* $8\mu + 5$. [*Ad.*]

(*) La formule (314) donnerait, au lieu de cette somme composée seulement de *trois* termes :

$$\varepsilon_1 (\varepsilon_{18} + \varepsilon_{17} + \varepsilon_{15} + \varepsilon_{11}) + \varepsilon_5 . \varepsilon_{14} + \varepsilon_9 . \varepsilon_{10} = \varepsilon_9 + \varepsilon_{17} + \varepsilon_9 . \varepsilon_5 = 1 + 2 + 1 . 2.$$

(**) Genocchi, *Nouvelles Annales*, tome XIII, p. 167.

180. Si, pour plus de simplicité, on fait $i = 2l - 1$, et que l'on remplace q^2 par q, la relation (336) devient

$$\left[\sum_0^\infty A_n q^n\right]^2 = \frac{1}{4}\sum_1^\infty q^{l-1} \int (4l-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [Ad.]\ (338)\ (^*)$$

181. *Vérifications.* 1° Le produit des séries

$$1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + q^{15} + q^{21} + q^{28} + \cdots,$$
$$1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + q^{30} + \cdots,$$

limité aux onze premiers termes, est

$$1 + q + q^2 + 2q^3 + q^5 + 2q^6 + q^7 + q^8 + q^9 + q^{10}.$$

2° De même,

$$\frac{1}{4}\sum_1^{11} q^{l-1}\int(4l-1) = 1 + 2q + 3q^2 + 6q^3 + 5q^4 + 6q^5 + 10q^6 + 8q^7 + 12q^8 + 14q^9 + 11q^{10}.$$

3° Enfin, le carré du premier polynôme est

$$1 + 2q + 3q^2 + 6q^3 + 5q^4 + 6q^5 + 10q^6 + 8q^7 + 12q^8 + 14q^9 + 11q^{10} + \cdots \ [Ad.]$$

182. *Identité remarquable.* Une simple transformation de l'identité connue

$$\frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \frac{q^7}{1-q^{14}} + \cdots = \frac{q}{1+q^2} + \frac{q^3}{1+q^6} + \frac{q^5}{1+q^{10}} + \cdots \quad (339)\ (^{**})$$

conduit à un résultat curieux. Si l'on écrit, au lieu de cette égalité,

$$\left(\frac{q}{1-q^2} - \frac{q}{1+q^2}\right) + \left(\frac{q^5}{1-q^{10}} - \frac{q^5}{1+q^{10}}\right) + \left(\frac{q^9}{1-q^{18}} - \frac{q^9}{1+q^{18}}\right) + \cdots$$
$$= \left(\frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^3}{1+q^6}\right) + \left(\frac{q^7}{1-q^{14}} + \frac{q^7}{1+q^{14}}\right) + \left(\frac{q^{11}}{1-q^{22}} + \frac{q^{11}}{1+q^{22}}\right) + \cdots,$$

que l'on réduise, et que l'on remplace q^4 par q, on trouve

$$\frac{q}{1-q} + \frac{q^4}{1-q^5} + \frac{q^7}{1-q^9} + \frac{q^{10}}{1-q^{13}} + \cdots = \frac{q}{1-q^3} + \frac{q^2}{1-q^7} + \frac{q^3}{1-q^{11}} + \frac{q^4}{1-q^{15}} + \cdots,$$

(*) On suppose $A_0 = 1$.
(**) Legendre, t. III, p. 132.

ou

$$\sum_1^\infty \frac{q^{3a-2}}{1-q^{4a-3}} = \sum_1^\infty \frac{q^b}{1-q^{4b-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [Ad.]\ (340)$$

183. *Remarques.* **I.** Si l'on met cette identité sous la forme

$$\sum_1^\infty A_n q^n = \sum_1^\infty B_n q^n,$$

chacun des coefficients A_n, B_n *est égal à la moitié du nombre des diviseurs de* $4n-1$.

Soit en effet

$$n = 3a - 2 + (4a-3)x = b + (4b-1)y, \quad \ldots\ldots \quad (341)$$

ou

$$4n - 1 = (4a-3)(4x+3) = (4b-1)(4y+1).$$

Soit ensuite $4n - 1 = ii'$, i étant le diviseur qui a la forme $4\mu - 1$: il est clair que

$$a = \frac{i'+3}{4}, \quad b = \frac{i+1}{4}, \quad x = \frac{i-3}{4} = b-1, \quad y = \frac{i'-1}{4} = a-1.$$

Conséquemment, le nombre des fractions qui concourent à former $A_n q^n$ est égal à celui des valeurs de i; etc.

II. *Les équations* (341) *admettent le même nombre de solutions entières : ce nombre est la moitié de celui des diviseurs de* $4n-1$.

Prenons, par exemple, $n = 19$; d'où

$$i = 3, 15, 75; \quad i' = 25, 5, 1.$$

Les valeurs des inconnues sont

$$a = 7, 2, 1; \quad b = 1, 4, 19; \quad x = 0, 3, 18; \quad y = 6, 1, 0.$$

Le terme $A_{19} q^{19}$ provient du développement des fractions

$$\frac{q}{1-q}, \quad \frac{q^4}{1-q^5}, \quad \frac{q^{19}}{1-q^{25}};$$

donc $A_{19} = 3$.

Dans le second développement, ces fractions sont remplacées par

$$\frac{q}{1-q^3},\quad \frac{q^4}{1-q^{15}},\quad \frac{q^{19}}{1-q^{75}}.$$

Par suite, $B_{19} = 3 = A_{19}$.

III. *Si* $4n - 1$ *est un nombre premier*, $A_n = B_n = 1$. [*Ad.*]

184. Le beau théorème de Jacobi, sur le nombre des décompositions de $8n + 4$ en quatre carrés impairs, résulte de *l'identité*

$$(q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \cdots)^4 = \frac{q^4}{1-q^8} + 3\frac{q^{12}}{1-q^{24}} + 5\frac{q^{20}}{1-q^{40}} + \cdots \quad (342)\ (^*)$$

On en conclut, très-facilement :

$$(1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots)^4 = \frac{1}{1-q} + 3\frac{q}{1-q^3} + 5\frac{q^2}{1-q^5} + 7\frac{q^3}{1-q^7} + \cdots, \quad (343)$$

$$(1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots)^4 = \frac{1}{1+q} - 3\frac{q}{1+q^3} + 5\frac{q^2}{1+q^5} - 7\frac{q^3}{1+q^7} + \cdots, \quad (344)$$

$$(q - q^9 - q^{25} + q^{49} + q^{81} - \cdots)^4 = \frac{q^4}{1+q^8} - 3\frac{q^{12}}{1+q^{24}} + 5\frac{q^{20}}{1+q^{40}} + 7\frac{q^{28}}{1+q^{56}} + \cdots; \quad (345)$$

relations qui nous seront utiles plus loin.

185. La *série de Lambert :*

$$\frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^4}{1-q^4} + \cdots = q + 2q^2 + 2q^3 + \cdots + N(n)\,q^n + \cdots, \quad (346)$$

$N(n)$ représentant le nombre des diviseurs de n, est évidemment décomposable en

$$\sum_1^\infty \left(\frac{q^i}{1-q^i} + \frac{q^{2i}}{1-q^{2i}} + \frac{q^{4i}}{1-q^{4i}} + \cdots\right).$$

Or,

$$\frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^4}{1-q^4} + \cdots = q + 2q^2 + 3q^4 + q^5 + 2q^6 + q^7 + 4q^8 + \cdots + (\alpha + 1)\,q^n + \cdots, \quad (347)$$

pourvu que l'on suppose, comme précédemment, $n = 2^\alpha i$. Autrement dit,

(*) Legendre, t. III, p. 133.

le coefficient de q$^{\mathrm{n}}$ *est égal au nombre des puissances de* 2 *qui divisent* n (*). Par suite,

$$\frac{q^i}{1-q^i}+\frac{q^{2i}}{1-q^{2i}}+\frac{q^{4i}}{1-q^{4i}}+\cdots=\sum_{n=1}^{n=\infty}(\alpha+1)\,q^{ni},$$

puis

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^4}{1-q^4}+\cdots=\sum_{i=1}^{i=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}(\alpha+1)\,q^{ni}. \quad . \quad . \quad (348)$$

Si l'on intervertit l'ordre des sommations, on peut remplacer le second membre par

$$\sum_1^\infty(\alpha+1)(q^n+q^{3n}+q^{5n}+\cdots)=\sum_1^\infty(\alpha+1)\frac{q^n}{1-q^{2n}}\cdot$$

Ainsi,

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots=\frac{q}{1-q^2}+2\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}+3\frac{q^4}{1-q^8}+\cdots+(\alpha+1)\frac{q^n}{1-q^{2n}}+\cdots;\ (349)$$

transformation assez curieuse (**).

186. Si, dans le premier membre de l'égalité (347), on change les signes des termes de rang pair, on trouve

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{1-q}-\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^4}{1-q^4}-\frac{q^8}{1-q^8}+\frac{q^{16}}{1-q^{16}}-\cdots\\&=\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^4}{1-q^8}+\frac{q^{16}}{1-q^{32}}+\frac{q^{64}}{1-q^{128}}+\cdots\\&=q+q^3+q^4+q^5+q^7+q^9+\cdots+q^n+\cdots,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (350)$$

pourvu que l'exposant n *ait la forme* 4^αi. Ce développement me paraît être le plus simple de ceux auxquels donnent lieu les séries qui ont pour type celle de Lambert.

187. La fonction qui représente la somme de la dernière série est liée à la fonction F (q) considérée ci-dessus. En effet, soit

$$\mathcal{F}(q)=q+q^4+q^{16}+q^{64}+\cdots. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (351)$$

(*) L'*unité* est considérée comme égale à 2^0.

(**) Elle résulte aussi de cette propriété évidente : *le nombre des diviseurs de* n *est égal au produit de* $\alpha+1$ *par le nombre des diviseurs impairs.*

D'après cette définition,

$$F(q) = \mathcal{F}(q) + \mathcal{F}(q^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (352)$$

puis

$$\mathcal{F}(q) - \mathcal{F}(q^4) = F(q) - F(q^2) = q, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (353)$$

et encore

$$\frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^4}{1-q^4} - \frac{q^8}{1-q^8} + \cdots = \sum_1^\infty \mathcal{F}(q^i). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (354)$$

188. De la formule d'Euler :

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots = \alpha\alpha',$$

on tire, en prenant les logarithmes, les dérivées, puis développant (16) :

$$q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots + q^n \int n + \cdots = -\frac{q}{dq}\frac{d(\alpha\alpha')}{(\alpha\alpha')}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (355)$$

D'après les formules (6), (7),

$$\alpha\alpha' = 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{12}} k'^{\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{24}};$$

donc

$$\frac{d(\alpha\alpha')}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2}\frac{d\omega}{\omega} + \frac{1}{12}\frac{dk}{k} + \frac{1}{3}\frac{dk'}{k'} - \frac{1}{24}\frac{dq}{q}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (356)$$

On sait que (*)

$$d\omega = \frac{dk}{kk'^2}\left[E_1(k) - k'^2\omega\right], \quad d\omega' = -\frac{dk}{kk'^2}\left[E_1(k') - k^2F_1(k')\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (357)$$

De plus,

$$\frac{dk'}{k'} = -\frac{k}{k'^2}\,dk.$$

Pour évaluer $\frac{dq}{q}$, reportons-nous à la définition (2) : il en résulte

$$\frac{dq}{q} = \frac{\pi dk}{\omega^2 kk'^2}(\omega' d\omega - \omega d\omega');$$

ou, par les formules (357),

$$\frac{dq}{q} = \frac{\pi}{\omega^2 kk'^2}\left\{F_1(k')\left[E_1(k) - k'^2F_1(k)\right] + F_1(k)\left[E_1(k') - k^2F_1(k')\right]\right\} dk;$$

(*) Legendre, t. I, p. 62.

ou enfin

$$\frac{dq}{q} = \frac{\pi^2}{2\omega^2 kk'^2}\, dk. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (358)\ (^*)$$

La formule (356) devient

$$\frac{d(\alpha\alpha')}{\alpha\alpha'} = \left[\frac{E_1(k)\,\omega}{\pi^2} - \frac{1}{6}(4k^2 + 5k'^2)\frac{\omega^2}{\pi^2} - \frac{1}{24}\right]\frac{dq}{q}; \quad \ldots\ldots \quad (359)$$

et la formule (355) :

$$q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots + q^n \int n + \cdots = \frac{1}{24} + \frac{2}{3}\frac{k^2\omega^2}{\pi^2} + \frac{5}{6}\frac{k'^2\omega^2}{\pi^2} - \frac{E_1(k)\,\omega}{\pi^2}. \quad (360)$$

Telle est la sommation de la série

$$\frac{q}{1-q} + 2\frac{q^2}{1-q^2} + 3\frac{q^3}{1-q^3} + \cdots + n\frac{q^n}{1-q^n} + \cdots$$

189. On trouve, par un calcul semblable au précédent :

$$\frac{d(\beta\beta')}{\beta\beta'} = \left[\frac{1}{6}(2k^2 + k'^2)\frac{\omega^2}{\pi^2} - \frac{1}{24}\right]\frac{dq}{q}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (361)$$

$$\frac{q}{1+q} + 2\frac{q^2}{1+q^2} + 3\frac{q^3}{1+q^3} + \cdots = -\frac{1}{24} + \frac{1}{3}\frac{k^2\omega^2}{\pi^2} + \frac{1}{6}\frac{k'^2\omega^2}{\pi^2}; \quad \ldots \quad (362)\ (^{**})$$

puis, à cause de la relation (360),

$$\frac{q}{1-q^2} + 2\frac{q^2}{1-q^4} + 3\frac{q^3}{1-q^6} + \cdots = \frac{\omega}{2\pi^2}\left[\omega - E_1(k)\right], \quad \ldots\ldots \quad (363)$$

formule connue (***).

190. Le développement du premier membre est

$$q + 2q^2 + 4q^3 + 4q^4 + 6q^5 + 8q^6 + \cdots + \frac{n}{i}q^n \int i + \cdots,$$

(*) Au lieu de cette valeur, que j'ai vérifiée plusieurs fois, LEGENDRE donne celle-ci : $\frac{dq}{q} = -\frac{\pi}{2\omega^2 kk'^2}\, dk$ (t. III, p. 110), sans indiquer comment il y parvient.

(**) Voir la note du numéro **166**.

(***) Elle résulte de la combinaison des égalités (302), (324).

i désignant, comme *ci-dessus, le plus grand nombre impair qui divise* n (**). Ainsi

$$q + 2q^2 + 4q^3 + 4q^4 + \cdots + \frac{n}{i} q^n \int i + \cdots = \frac{\omega}{2\pi^2}\left[\omega - \mathrm{E}_1(k)\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (364)$$

191. En opérant d'une manière un peu différente, on trouve, au lieu de l'équation (363) :

$$\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{q^5}{(1-q^5)^2} + \cdots = \frac{\omega}{2\pi^2}\left[\omega - \mathrm{E}_1(k)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (365)$$

Conséquemment,

$$\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{q^5}{(1-q^5)^2} + \cdots = \frac{q}{1-q^2} + 2\frac{q^2}{1-q^4} + 3\frac{q^3}{1-q^6} + \cdots, \quad (366)$$

identité presque évidente.

192. On a

$$\frac{q}{1-q} + 2\frac{q^2}{1+q^2} + 3\frac{q^3}{1-q^3} + 4\frac{q^4}{1+q^4} + \cdots = \frac{\omega^2}{2\pi^2} - \frac{1}{8}, \quad . \quad . \quad . \quad (321)$$

$$\frac{q^2}{1-q^2} - 2\frac{q^4}{1-q^4} + 3\frac{q^6}{1-q^6} - 4\frac{q^8}{1-q^8} + \cdots = \frac{\omega \mathrm{E}_1}{2\pi^2} - \frac{1}{8} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad (324)$$

Il résulte, de ces égalités,

$$\frac{q}{1+q} + 2\frac{q^2}{1-q^2} + 3\frac{q^3}{1+q^3} + 4\frac{q^4}{1-q^4} + \cdots = \frac{\omega^2}{2\pi^2} - \frac{\omega \mathrm{E}_1}{\pi^2} + \frac{1}{8} \cdot \quad . \quad . \quad (367)$$

Le premier membre, étant développé, devient

$$q + (2-1)\,q^2 + (3+1)\,q^3 + (4+2-1)\,q^4 + (5+1)\,q^5 + (6-3+2-1)\,q^6 + \cdots$$

On voit que *le coefficient de* q^{n} *est égal à l'excès de la somme des diviseurs de* n, *de même parité que* n, *sur la somme des diviseurs de parité contraire.* Cette loi paraît assez simple, surtout si on la rapproche de celle que nous avons trouvée ci-dessus (175). [*Ad.*]

(*) Autrement dit, *le coefficient de* q^{n} *est égal à la somme des diviseurs de* n *qui donnent des quotients impairs.*

193. Dans la dernière équation, supposons $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$, ou $q=e^{-\pi}$. Il vient, à cause de

$$\mathrm{E}_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\pi}{4\omega}+\frac{\omega}{2}:$$

$$\frac{q}{1+q}+2\frac{q^2}{1-q^2}+3\frac{q^3}{1+q^3}+4\frac{q^4}{1-q^4}+\cdots=\frac{1}{8}-\frac{1}{4\pi},$$

ou

$$\frac{1}{e^{\pi}+1}+\frac{2}{e^{2\pi}-1}+\frac{3}{e^{3\pi}+1}+\frac{4}{e^{4\pi}-1}+\cdots=\frac{1}{8}-\frac{1}{4\pi}; \quad \ldots \quad (368)$$

ou enfin, d'après la remarque précédente,

$$e^{-\pi}+e^{-2\pi}+4e^{-3\pi}+5e^{-4\pi}+6e^{-5\pi}+4e^{-6\pi}+\cdots=\frac{1}{8}-\frac{1}{4\pi}. \quad \ldots \quad (369)\ (^*)$$

VII.

QUELQUES THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE.

194. Les problèmes relatifs à la Partition des nombres, à l'Analyse indéterminée, etc., auxquels donne lieu la considération des produits indéfinis ou des séries, sont fort nombreux, comme le prouvent les travaux d'Euler, Legendre, Jacobi, Dirichlet, etc. Dans plusieurs paragraphes de ce Mémoire, nous avons rencontré quelques-unes de ces questions; dans celui-ci, nous en traiterons d'autres, aussi simples que les premières.

195. L'identité

$$(1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots)^2-(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^2=8q(1+q^4+q^{12}+q^{24}+\cdots)^2, \quad (31)$$

donne, immédiatement, ce théorème connu et presque évident :

Si un nombre impair, N, *est la somme de deux carrés,* $\frac{N-1}{4}$ *est la somme de deux nombres triangulaires; et réciproquement* (**).

(*) Cette *équation entre les incommensurables* π, e a-t-elle été remarquée? [*Ad.*]

(**) Les équations

$$\frac{N-1}{4}=\frac{x(x+1)}{2}+\frac{y(y+1)}{2}, \qquad N=(x+y+1)^2+(x-y)^2,$$

rentrent l'une dans l'autre.

196. L'identité

$$(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^2+(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^2=2\,(1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots)^2, \quad (30)$$

si on la simplifie autant que possible, prend la forme

$$\sum q^{p^2+p'^2}+\sum q^{i^2+i'^2}=\sum q^{2n^2+2n'^2}. \ (*)$$

On conclut, de cette nouvelle égalité, la proposition suivante :

Si un nombre N *est la somme de deux carrés,* 2N *est aussi la somme de deux carrés; et réciproquement* (**).

197. Dans la relation

$$(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^4-(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^4=16q\,(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4, \quad (29)$$

conséquence des identités (30) et (31), posons

$$x=q+q^4+q^9+q^{16}+\cdots; \quad y=-q+q^4-q^9+q^{16}-\cdots.$$

Le premier membre devient

$$8\,(x-y)+24\,(x^2-y^2)+32\,(x^3-y^3)+16\,(x^4-y^4).$$

Représentons par $\sum_p$ une somme de termes dans lesquels les exposants de q soient *pairs,* et par $\sum_i$ une somme dans laquelle les exposants soient *impairs.* Nous aurons

$$x=\sum_p q^{n^2}+\sum_i q^{n^2}, \quad x^2=\sum_p q^{n^2+n'^2}+\sum_i q^{n^2+n'^2}, \text{ etc.}$$
$$y=\sum_p q^{n^2}-\sum_i q^{n^2}, \quad y^2=\sum_p q^{n^2+n'^2}-\sum_i q^{n^2+n'^2}, \text{ etc.};$$

puis, au lieu de l'égalité (29) :

$$\sum_i q^{n^2}+3\sum_i q^{n^2+n'^2}+4\sum_i q^{n^2+n'^2+n''^2}+2\sum_i q^{n^2+n'^2+n''^2+n'''^2}=q\,(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4;$$

(*) Nous n'avons peut-être pas besoin de rappeler que p, p' désignent des nombres *pairs;* i, i', des nombres *impairs;* etc.

(**) Genocchi, *Nouvelles Annales,* t. XIII, p. 158.

ou encore, par le changement de q en q^4 :

$$\sum q^{4n^2}+5\sum q^{4(n^2+n'^2)}+4\sum q^{4(n^2+n'^2+n''^2)}+2\sum q^{4(n^2+n'^2+n''^2+n'''^2)}=(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots)^4. \quad (370)\,(*)$$

Cette identité démontre le théorème suivant :

Soit N *un nombre donné, impair. Soient les équations* ISOLÉES

$$w^2=\text{N},\ w^2+x^2=\text{N},\ w^2+x^2+y^2=\text{N},\ w^2+x^2+y^2+z^2=\text{N},\ w^2+x^2+y^2+z^2=4\text{N}, \quad (371)$$

dans lesquelles les mêmes lettres désignent des inconnues DIFFÉRENTES. *Si* a, b, c, d, λ *sont, respectivement : le nombre des solutions entières positives de la première équation* (**), *de la deuxième,* etc.; *on a, entre ces cinq nombres, la relation*

$$\lambda=a+5b+4c+2d \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (372)$$

Soit, par exemple, N = 19. Les équations (371) sont

$$w^2=19,\ w^2+x^2=19,\ w^2+x^2+y^2=19,\ w^2+x^2+y^2+z^2=19,\ w^2+x^2+y^2+z^2=76.$$

Les deux premières n'admettent aucune solution. D'ailleurs

$$19=9+9+1=16+1+1+1,\quad 76=25+25+25+1=49+9+9+9=49+25+1+1;$$

donc

$$c=3,\quad d=4,\quad \lambda=4+4+4.3=20.\ (***)$$

On doit avoir

$$4.3+2.4=20;$$

ce qui est vrai.

Soit encore N = 25. De là résultent les équations

$$w^2=25,\ w^2+x^2=25,\ w^2+x^2+y^2=25,\ w^2+x^2+y^2+z^2=25,\ w^2+x^2+y^2+z^2=100.$$

La troisième est impossible. Les solutions des quatre autres, *essentiellement différentes,* sont

1° $w=5$; 2° $w=3, x=4$; 4° $w=4, x=2, y=2, z=1$; 5° $w=9, x=3, y=3, z=1$;
$w=7, x=7, y=1, z=1$; $w=5, x=5, y=5, z=1$; $w=7, x=5, y=5, z=1$.

(*) Dans ces nouvelles sommes, chacun des exposants a la forme $4i$.

(**) a est nécessairement 0 ou 1. En outre, dans la dernière équation, les inconnues ne doivent recevoir que des valeurs *impaires*.

(***) Les nombres 9, 9, 1 donnent lieu à *trois* permutations; les nombres 16, 1, 1, 1, à *quatre* permutations; etc.

Donc

$$a=1,\ b=2,\ c=0,\ d=\frac{1.2.3.4}{1.2}=12,\ \lambda=12+\frac{1.2.3.4}{2.2}+1+\frac{1.2.3.4}{1.2}=31;$$

et l'on a bien

$$31=1+2.3+2.12.$$

198. *Remarques.* I. Si, dans l'équation (302), on change q en $-q$, on trouve

$$(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^4-(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^4=16\sum_1^\infty q^i\int i.$$

Donc, à cause de l'identité (29) :

$$q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4=\sum_1^\infty q^i\int i;$$

ou par le changement de q en q^4 :

$$(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots)^4=\sum_1^\infty q^{4i}\int i. \quad \ldots\ldots \quad (373)$$

Ainsi, λ, *nombre des solutions, en nombres impairs, de l'équation*

$$w^2+x^2+y^2+z^2=4N,$$

est égal à la somme des diviseurs de N : c'est le beau théorème de Jacobi.

II. D'après un théorème de Gauss (*), *si l'on appelle* N′ *le nombre des diviseurs de* N, *formés seulement des facteurs premiers ayant la forme* $4\mu+1$, *on a :* $\mathrm{b}=N'$ *ou* $\mathrm{b}=N'-1$, *suivant que* N′ *est pair ou impair.* Si donc d était connu, l'équation (372) donnerait c, ou le nombre des solutions de l'équation

$$w^2+x^2+y^2=N.$$

J'ignore si M. Liouville, qui s'est beaucoup occupé de la décomposition en trois carrés, a résolu cette question particulière (**).

(*) Voir la démonstration donnée par M. Genocchi (*Nouvelles annales*, t. XIII).

(**) Dans le *Journal de Mathématiques* (t. XXVII, p. 43), M. Liouville donne cet énoncé : *Soit* N *un nombre de la forme* $8\mu+3$. *Le nombre des solutions de*

$$x^2+y^2+z^2=N,$$

199. L'équation (302) peut encore être transformée ainsi :

$$\left.\begin{aligned}&(q^4+q^{16}+q^{36}+\cdots)+3(q^4+q^{16}+q^{36}+\cdots)^2+4(q^4+q^{16}+q^{36}+\cdots)^3+2(q^4+q^{16}+q^{36}+\cdots)^4\\=&(q+q^9+q^{25}+\cdots)^4+3(q^2+q^{18}+q^{50}+\cdots)^4+3(q^4+q^{36}+q^{100}+\cdots)^4+3(q^8+q^{72}+q^{200}+\cdots)^4+\cdots\end{aligned}\right\}(374)$$

Celle-ci, qui ne diffère pas des relations (318), (319) donne le théorème suivant :

Soit N *un nombre donné,* PAIR OU IMPAIR. *Soient les équations* ISOLÉES

$$w^2=\mathrm{N},\quad w^2+x^2=\mathrm{N},\quad w^2+x^2+y^2=\mathrm{N},\quad w^2+x^2+y^2+z^2=\mathrm{N};$$
$$w^2+x^2+y^2+z^2=4\mathrm{N},\ w^2+x^2+y^2+z^2=2\mathrm{N},\ w^2+x^2+y^2+z^2=\mathrm{N},\ w^2+x^2+y^2+z^2=\frac{\mathrm{N}}{2},\ \text{etc.}$$

dans lesquelles les mêmes lettres désignent des inconnues DIFFÉRENTES. *Soient* a_1, b_1, c_1, d_1 *les nombres de solutions des quatre premières ; et* μ, μ_1, μ_2, ... *les nombres de solutions des dernières, dans lesquelles les inconnues ne doivent recevoir que des valeurs* IMPAIRES. *On a, entre ces nombres, la relation*

$$a_1+3b_1+4c_1+2d_1=\mu+3(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\cdots)\ldots\ldots\quad(375)$$

200. APPLICATION. Soit N = 24. Les équations à résoudre sont :

$$w^2=24,\ w^2+x^2=24,\ w^2+x^2+y^2=24,\ w^2+x^2+y^2+z^2=24;$$
$$w^2+x^2+y^2+z^2=96;\ w^2+x^2+y^2+z^2=48,\ w^2+x^2+y^2+z^2=24,\ w^2+x^2+y^2+z^2=12,$$
$$w^2+x^2+y^2+z^2=6,\quad w^2+x^2+y^2+z^2=3.$$

On trouve

$$a_1=0,\ b_1=0,\ c_1=3,\ d_1=0,\ \mu=0,\ \mu_1=0,\ \mu_2=0,\ \mu_3=4,\ \mu_4=0,\ \mu_5=0;$$

après quoi, l'équation de condition devient

$$4.3=3.4.$$

201. *Remarque.* La somme de quatre carrés impairs a la forme $4(2\nu+1)$.

x, y, z *étant impairs et positifs, est*

$$\mathrm{X}=\varepsilon\left(\frac{\mathrm{N}-1}{2}\right)+\varepsilon\left(\frac{\mathrm{N}-9}{2}\right)+\varepsilon\left(\frac{\mathrm{N}-25}{2}\right)+\cdots:$$

ε désigne l'excès du nombre des diviseurs ayant la forme $4\mu+1$, sur le nombre de ceux qui ont la forme $4\mu-1$.

Si donc $N = 2^{\alpha} i$, i étant impair, les équations formant le second groupe sont impossibles, excepté celle-ci :

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 2^2 . i.$$

De là résulte que la relation (375) peut être réduite à

$$a_1 + 3b_1 + 4c_1 + 2d_1 = 3\mu_\alpha . \qquad (376)$$

202. La relation (373) peut, on l'a vu, être écrite sous cette forme :

$$\frac{q^4}{1-q^8} + 3\frac{q^{12}}{1-q^{24}} + 5\frac{q^{20}}{1-q^{40}} + \cdots = (q + q^9 + q^{25} + \cdots)^4 . \qquad (342)\ (^*)$$

Une identité analogue à celle-ci va nous donner d'autres théorèmes.

On a, simultanément :

$$\frac{q}{1-q^2} + 2^3\frac{q^2}{1-q^4} + 3^3\frac{q^3}{1-q^6} + 4^3\frac{q^4}{1-q^8} + \cdots = \frac{k^2\omega^2}{4\pi^4},\ (^{**})$$

$$1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + q^{15} + \cdots = q^{-\frac{1}{8}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}\sqrt{k}}; \qquad (20)$$

donc

$$\frac{1}{1-q^2} + 2^3\frac{q}{1-q^4} + 3^3\frac{q^2}{1-q^6} + 4^3\frac{q^3}{1-q^8} + \cdots = (1 + q + q^3 + q^6 + \cdots)^4; \qquad (378)$$

ou bien,

$$\frac{q^8}{1-q^{16}} + 2^3\frac{q^{16}}{1-q^{32}} + 3^3\frac{q^{24}}{1-q^{48}} + 4^3\frac{q^{32}}{1-q^{64}} + \cdots = (q + q^9 + q^{25} + \cdots)^8 . \qquad (379)$$

En outre, à cause de la relation (342),

$$\left[\frac{q^4}{1-q^8} + 3\frac{q^{12}}{1-q^{24}} + 5\frac{q^{20}}{1-q^{40}} + 7\frac{q^{28}}{1-q^{56}} + \cdots\right]^2 = \frac{q^8}{1-q^{16}} + 2^3\frac{q^{16}}{1-q^{32}} + 3^3\frac{q^{24}}{1-q^{48}} + \cdots; \quad (380)$$

(*) LEGENDRE, t. III, p. 133. L'illustre auteur ajoute, en note : « Il suit immédiatement de » cette formule, que tout nombre $8n + 4$ est la somme de quatre carrés impairs; et de plus, » qu'*il est autant de fois de cette forme, qu'il y a d'unités dans la somme des diviseurs de* » $2n + 1$. » La seconde partie de cet énoncé doit, je pense, être rectifiée ainsi : *l'équation*

$$i^2 + i'^2 + i''^2 + i'''^2 = 8n + 4,$$

dans laquelle i, i', i'', i''' *sont des nombres impairs, a autant de solutions que l'indique le nombre des diviseurs de* 2n + 1. (Voir ci-dessus.)

(**) *Fundamenta*, p. 111.

ou, plus simplement,

$$\left[\frac{q}{1-q^2}+3\frac{q^3}{1-q^6}+5\frac{q^5}{1-q^{10}}+7\frac{q^7}{1-q^{14}}+\cdots\right]^2=\frac{q^2}{1-q^4}+2^3\frac{q^4}{1-q^8}+3^3\frac{q^6}{1-q^{12}}+\cdots.\ [Ad.]\ (381)$$

203. Les identités (379) et (381) démontrent les théorèmes suivants :

1° *Tout multiple de* 8 *est la somme de huit carrés impairs* (*).

2° *Si l'on fait* n = di, *le nombre des solutions de l'équation*

$$i_1^2+i_2^2+\cdots+i_8^2=8n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (382)$$

est égal à la somme des cubes des diviseurs d.

3° *Si, de plus,* $4n = i'+i''$, *alors*

$$\sum\left(\int i'\times\int i''\right)=8\sum d^3. \quad \ldots\ldots \quad [Ad.]\ (383)$$

204. Application. $n=6=1.6=3.2$: l'équation

$$i_1^2+i_2^2+\cdots+i_8^2=48$$

doit admettre (6^3+2^3) solutions. En effet,

$$48=25+9+9+1+1+1+1+1=9+9+9+9+9+1+1+1;$$

donc, x étant le nombre de ces solutions,

$$x=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.1.2.1.2.3.4.5}+\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5.1.2.3}=224=6^3+2^3.$$

En outre,

$$\begin{array}{rl}
i' = & 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23; \\
i'' = & 23,\ 21,\ 19,\ 17,\ 15,\ 13,\ 11,\ 9,\ 7,\ 5,\ 3,\ 1; \\
\int i' = & 1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 13,\ 12,\ 14,\ 24,\ 18,\ 20,\ 32,\ 24; \\
\int i'' = & 24,\ 32,\ 20,\ 18,\ 24,\ 14,\ 12,\ 13,\ 8,\ 6,\ 4,\ 1;
\end{array}$$

(*) Cette proposition ne diffère pas de celle que nous avons rappelée tout à l'heure : *tout nombre* 8n + 4 *est la somme de quatre carrés impairs;* mais cet énoncé, même rectifié, ne fait pas connaître le *nombre des décompositions en huit carrés.*

donc

$$\sum\left(\int i' \times \int i''\right) = 2(1.24 + 4.52 + 6.20 + 8.18 + 13.24 + 12.14)$$
$$= 16(3 + 16 + 15 + 18 + 39 + 21) = 16.112 = 8(6^3 + 2^3). \ [Ad.]$$

205. *Remarque.* Si n est premier, le nombre des solutions de l'équation (382) est n^3 (*). En même temps, l'équation (383) se réduit à

$$\sum\left(\int i' \times \int i''\right) = 8(n^3 + 1). \ [Ad.]$$

206. *Sommation d'une série.* Dans la relation (378), changeons q en $-q$: elle devient

$$\frac{1}{1-q^2} - 2^3\frac{q}{1-q^4} + 3^3\frac{q^2}{1-q^8} - 4^3\frac{q^3}{1-q^{12}} + \cdots = (1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots)^8,$$

ou

$$\frac{q^8}{1-q^{16}} - 2^3\frac{q^{16}}{1-q^{32}} + 3^3\frac{q^{24}}{1-q^{48}} - 4^3\frac{q^{32}}{1-q^{64}} + \cdots = (q - q^9 - q^{25} + q^{49} + q^{81} - \cdots)^8. \quad (384)$$

Pour évaluer le second membre, on peut partir de la formule

$$\left(q^{\frac{1}{4}} - q^{\frac{9}{4}} - q^{\frac{25}{4}} + q^{\frac{49}{4}} + \cdots\right)^8 = \frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 (1-k')^2 k'. \ (**)$$

Si l'on y remplace q par $q_1 = q^2$, puis q_1 par $q_2 = q^4$, elle devient

$$(q - q^9 - q^{25} + q^{49} + \cdots)^8 = \frac{1}{4}\left(\frac{\omega_2}{\pi}\right)^4 (1 - k_2') k_2'.$$

Or,

$$\omega_1 = \frac{1+k'}{2}\omega, \quad k_1' = 2\frac{\sqrt{k'}}{1+k'}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (59)$$

donc

$$\omega_2 = \frac{1+k_1'}{2}\omega_1 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{k'})^2\omega, \quad k_2' = 2\frac{\sqrt{k_1'}}{1+k_1'} = 2\frac{\sqrt{2(1+k')\sqrt{k'}}}{(1+\sqrt{k'})^2};$$

(*) « ... l'on peut dire de combien de manières un nombre donné N sera la somme de huit » nombres triangulaires. Si le nombre $N+1$ est premier, le nombre des combinaisons dont il » s'agit sera $(N+1)^3+1$. » (LEGENDRE, t. III, p. 133.)

(**) *Fonctions elliptiques*, t. III, p. 110.

et, après quelques réductions,

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\omega_2}{\pi}\right)^4(1-k_2')^2 k_2' = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)^4\left(1+\sqrt{k'}\right)^2\sqrt{1+k'}\sqrt{2\sqrt{k'}}\left[\sqrt{1+k'}-\sqrt{2\sqrt{k'}}\right]^4.$$

Par suite,

$$(q-q^9-q^{25}+q^{49}+q^{81}-\cdots)^8=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)^4}\left(1+\sqrt{k'}\right)^2\sqrt{1+k'}\sqrt[4]{k'}\left[\sqrt{1+k'}-\sqrt{2\sqrt{k'}}\right]^4. \quad (585)$$

Cette formule est bien plus compliquée que celle qui se rapporte à la huitième puissance de $q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots$: Legendre donne, d'après Jacobi,

$$(q+q^9+q^{25}+q^{49}+q^{81}+\cdots)^8=\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^4\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{4}\right)^8. \quad [Ad.]$$

207. *Identité remarquable.* Soient

$$q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots=\mathrm{A},\quad q-q^9-q^{25}+q^{49}+\cdots=\mathrm{B}.$$

Nous avons trouvé (202, 206, 184) :

$$\mathrm{A}^8=\frac{q^8}{1-q^{16}}+2^3\frac{q^{16}}{1+q^{32}}+3^3\frac{q^{24}}{1+q^{48}}+4^3\frac{q^{32}}{1-q^{64}}+\cdots,$$

$$\mathrm{B}^8=\frac{q^8}{1-q^{16}}-2^3\frac{q^{16}}{1-q^{32}}+3^3\frac{q^{24}}{1-q^{48}}-4^3\frac{q^{32}}{1-q^{64}}+\cdots,$$

$$\mathrm{A}^4=\frac{q^4}{1-q^8}+3\frac{q^{12}}{1-q^{24}}+5\frac{q^{20}}{1-q^{40}}+7\frac{q^{28}}{1-q^{56}}+\cdots,$$

$$\mathrm{B}^4=\frac{q^4}{1-q^8}-3\frac{q^{12}}{1-q^{24}}+5\frac{q^{20}}{1-q^{40}}-7\frac{q^{28}}{1-q^{56}}+\cdots.$$

Donc, à cause de $\mathrm{A}^8-\mathrm{B}^8=(\mathrm{A}^4+\mathrm{B}^4)(\mathrm{A}^4-\mathrm{B}^4)$, et par le changement de q^4 en q :

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{q}{1-q^4}+3\frac{q^{3+6}}{1-q^{12}}+5\frac{q^5}{1-q^{20}}+7\frac{q^{7+14}}{1-q^{28}}+\cdots\right]\\ \times&\left[\frac{q^{1+2}}{1-q^4}+3\frac{q^3}{1-q^{12}}+5\frac{q^{5+10}}{1-q^{20}}+7\frac{q^7}{1-q^{28}}+\cdots\right]\\ =4&\left[\frac{q^4}{1-q^8}+2^3\frac{q^8}{1-q^{16}}+3^3\frac{q^{12}}{1-q^{24}}+4^3\frac{q^{16}}{1-q^{32}}+\cdots\right].\end{aligned}\right\} \quad [Ad.]\ (586)$$

208. *Remarque.* Le développement du premier facteur est $\sum_1^{\infty} q^i \int' i$,

i ayant la forme $4\mu + 1$; celui du second facteur : $\sum_1^\infty q^{i'} \int i'$, i' ayant la forme $4\mu - 1$. Enfin, le développement du second membre serait

$$4\sum_1^\infty (d^3 + d'^3 + d''^3 + \cdots) q^{4n};$$

$d, d', d'', \ldots$ étant *les quotients de* n *par ses diviseurs impairs*. Par conséquent,

$$\sum \left(\int i \times \int i'\right) = 4\sum d^3.$$

Cette égalité ne diffère pas de celle que nous avons démontrée ci-dessus (203); car si $4n$ est décomposé en deux parties impaires, l'une a la forme $4\mu + 1$, et l'autre la forme $4\mu - 1$ (*).

209. Prenons l'identité

$$\left.\begin{aligned} &(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - \cdots)(1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + \cdots) \\ =\; &(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - \cdots)(1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (143)$$

Si l'on suppose les produits effectués, elle devient

$$\sum (-1)^l q^{\frac{3l^2 \mp l}{2}} \times (-1)^{l'} (-q)^{\frac{3l'^2 \mp l'}{2}} = \sum (-1)^{l''} q^{3l''^2 \mp l''} + 2\sum (-1)^{l''} q^{3l''^2 \mp l''} \times (-1)^x q^{2x^2}, \quad (387)$$

Soit, comme au numéro 88,

$$n = \frac{3l^2 \mp l}{2} + \frac{3l'^2 \mp l'}{2},$$

ou

$$24n + 2 = (6l \mp 1)^2 + (6l' \mp 1)^2. \quad \ldots \ldots \ldots (199)$$

Dans le premier membre de l'identité (387), le coefficient de q^n est

$$A = \sum (-1)^{l + l' + \frac{3l'^2 \mp l'}{2}};$$

la somme $\sum$ s'étendant, bien entendu, à toutes les valeurs de l, l', positives ou nulles, qui satisfont à l'équation (199).

(*) Soit, comme à l'endroit cité, $4n = 24$. Les valeurs de i sont 1, 5, 9, 13, 17, 21 ; celles de i' : 23, 19, 15, 11, 1, 3. Donc l'égalité précédente devient

$$1.24 + 6.20 + 13.24 + 14.12 + 18.8 + 32.4 = 4(2^3 + 6^3);$$

etc.

Si, pour plus de régularité dans la notation, on change l'' en y, on trouve

$$12n + 1 = 24x^2 + (6y \mp 1)^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (388)$$

En outre, le coefficient de q^n, dans le second membre de l'identité, a pour valeur

$$B = (-1)^{y_0} + 2\sum(-1)^{x+y}$$

ou

$$B = 2\sum(-1)^{x+y},$$

selon que le nombre donné, n, est ou n'est pas le double d'un nombre pentagonal : j'appelle y_0 la valeur de y qui répond à $x = 0$. Pour plus de simplicité, admettons que le second cas ait lieu. Comme $A = B$, l'on a, entre les solutions des équations (199), (388), la relation

$$\sum(-1)^{l+l'+\frac{3l'^2 \mp l'}{2}} = 2\sum(-1)^{x+y}. \quad \ldots\ldots \quad (389)\ (^*)$$

210. *Remarque.* Si l'équation (388) est impossible, $B = 0$; et alors

$$\sum(-1)^{l+l'+\frac{3l'^2 \mp l'}{2}} = 0,$$

c'est-dire que *le nombre* $l + l' + \frac{3l'^2 \mp l'}{2}$ *a autant de valeurs paires que de valeurs impaires.* De même, si l'équation (199) est impossible, $A = 0$, et

$$\sum(-1)^{x+y} = 0.$$

Dans ce cas, *ou l'équation* (388) *n'admet aucune solution, ou la somme* $x + y$ *a un même nombre de valeurs paires et de valeurs impaires.*

211. Applications. 1° Soit, comme au n° 89, $n = 40$. Les solutions de l'équation (199) sont :

$$l = 5,\ l' = 0; \quad l = 0,\ l' = 5; \quad l = 5,\ l' = 2; \quad l = 2,\ l' = 5.$$

En même temps :

$$\frac{3l'^2 \mp l'}{2} = 0, \qquad 40, \qquad 5, \qquad 35.$$

(*) Il ne faut pas oublier que *n n'est pas double d'un nombre pentagonal.*

Donc $$A = (-1)^5 + (-1)^{45} + (-1)^{12} + (-1)^{42} = 0.$$

Ce résultat est exact; car l'équation

$$481 = 24x^2 + (6y \mp 1)^2,$$

n'admet aucune solution.

2° Soit $n = 80$. Les équations à résoudre sont :

$$1\,922 = (6l \mp 1)^2 + (6l' \mp 1)^2, \quad 961 = 24x^2 + (6y \mp 1)^2.$$

La première est vérifiée seulement par $l = 5$, $l' = 5$; d'où $\frac{3l'^2 + l'}{2} = 40$. On trouve ensuite $x = 0$, $y = 5$; $x = 5$, $y = 3$; puis, 80 étant le double d'un nombre pentagonal :

$$A = \sum (-1)^{l+l'+\frac{3l'^2 \mp l'}{2}} = 1, \quad B = (-1)^5 + 2(-1)^8 = 1 = A.$$

212. Par un calcul semblable au précédent, on conclut, de l'identité

$$(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots)^2 = (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots)(1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots), \quad (159)$$

la proposition suivante :

Les solutions des équations

$$24n + 2 = (6l \mp 1)^2 + (6l' \mp 1)^2, \quad 12n + 1 = 12x^2 + (6y \mp 1)^2,$$

vérifient l'égalité

$$\sum (-1)^{l+l'} = (-1)^\lambda + 2 \sum (-1)^{x+y};$$

lorsque n *égale* $3\lambda^2 \mp \lambda$ (*); *et, dans le cas contraire, ces valeurs satisfont à la condition*

$$\sum (-1)^{l+l'} = 2 \sum (-1)^{x+y}.$$

Par exemple, $n = 80 = 3 \cdot 5^2 + 5$ donne, comme ci-dessus :

$$l = 5, \quad l' = 5;$$

puis

$$x = 0, \quad y = 5; \quad x = 6, \quad y = 4.$$

(*) Dans la seconde somme, on ne compte pas la valeur de $x + y$ qui répond à $x = 0$, $y = \lambda$.

On doit trouver

$$(-1)^{10} = (-1)^5 + 2(-1)^{10};$$

ce qui a lieu.

213. Les diverses identités que nous avons démontrées dans les numéros 72 et suivants, donneraient des théorèmes analogues aux précédents; mais il n'y a pas un grand intérêt à les chercher. Nous rapporterons cependant celui-ci, qui résulte de l'identité (146) :

Soient les équations

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 = 8n+2, \quad 2(2x'+1)^2 + (4y')^2 = 8n+2 \; . \; . \; . \quad (590)$$

Soit ε *l'excès du nombre des valeurs paires sur le nombre des valeurs impaires de* y. *Soit, semblablement,* ε' *l'excès du nombre des valeurs paires sur le nombre des valeurs impaires de* y'. *On a* $\varepsilon = 2\varepsilon' - 1$ *ou* $\varepsilon = 2\varepsilon'$, *suivant que* N *est ou n'est pas le double d'un nombre triangulaire.*

Si, par exemple, $n = 21$, les équations à résoudre sont :

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 = 170, \quad 2(2x'+1)^2 + (4y')^2 = 170.$$

La première est vérifiée par $y = 0$, $y = 3$, $y = 5$, $y = 6$; donc $\varepsilon = 0$. La seconde équation est impossible : $\varepsilon' = 0$.

Soit encore $N = 20$: N est le double du nombre triangulaire 10. Les équations (590) deviennent

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 = 162, \quad 2(2x'+1)^2 + (4y')^2 = 162.$$

Elles ne sont vérifiées que par $y = 4$, $y' = 0$; donc $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = 1$; et ces nombres satisfont à la relation énoncée

214. Les diverses décompositions de la série

$$1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + 9q^{20} - \cdots = q^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2kk'} = S, \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

obtenues ci-dessus (84, 161), conduisent à des résultats intéressants. Rappelons d'abord les identités dont il s'agit :

$$S = \alpha'^3 = (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots)^3, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (54)$$

$$S = (1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots)\,(1 + q + q^3 + q^6 + \cdots)\,(1 - q - q^3 + q^6 + \cdots), \quad (183)$$
$$S = (1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots)^2\,(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots), \quad \ldots \ldots \quad (184)$$
$$S = (1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots)\,(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots)\,(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots), \quad (185)$$
$$S = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)\,(1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots)\,(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots), \quad (186)$$
$$S = (1 + q + q^3 + q^6 + \cdots)^2\,(1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots), \quad \ldots \ldots \quad (187)$$
$$S = (1 - q - q^3 + q^6 + \cdots)^2\,(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots), \quad \ldots \ldots \quad (188)$$
$$S = (1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \cdots)\,(1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots)\,(1 - q^2 - q^6 + q^{12} + q^{20} - \cdots), \quad (190)$$
$$S = (1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots)\,(1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - \cdots)\,(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots), \quad (191)$$
$$S = (1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + \cdots)\,(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \cdots)\,(1 - q - q^3 + q^6 + \cdots), \quad \ldots \quad (192)$$
$$S = (1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} + \cdots)\,(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \cdots)\,(1 + q + q^3 + q^6 + \cdots), \quad \ldots \quad (193)$$
$$S = \sum_0^\infty \varphi_i(n)\,(-q^n) \times \sum_0^\infty (-1)^l q^{\frac{3l^2 \mp l}{2}} \times \sum_0^\infty \varepsilon_{4m+1}\, q^m. \quad \ldots \ldots \quad (297)$$

L'égalité entre les deux premières valeurs de S a été trouvée par Jacobi (*) : elle constitue, suivant l'illustre Géomètre, « *un résultat remarquable ; et, jusqu'à ce jour, unique dans l'analyse* (**). »

Si, en premier lieu, on égale le terme général de S au terme général de chacun des produits (54), (191), on trouve les deux formules :

$$\sum (-1)^{x+y+z} q^{(3x^2 \mp x) + (3y^2 \mp y) + (3z^2 \mp z)} = (2n+1)\,(-1)^n\, q^{n(n+1)},$$
$$\sum (-1)^{x+y+z+\frac{3y^2 \mp 1}{2}}\, q^{\frac{3x^2 \mp x}{2} + \frac{3y^2 \mp y}{2} 6z^2+z} = (2n+1)\,(-1)^n\, q^{n(n+1)}.$$

De la première, on conclut les théorèmes suivants :

I. *Soit l'équation*

$$(6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + (6z \mp 1)^2 = 3\,(2n+1)^2, \quad \ldots \ldots \quad (391)$$

dans laquelle les inconnues ne peuvent recevoir que des valeurs entières,

(*) *Nova Fundamenta*, p. 186.

(**) *Journal de Liouville*, t. VII, p. 86. Dans ce beau mémoire, Jacobi développe diverses conséquences de sa formule. Nous citerons seulement celle-ci (p. 96) :

Soit l'équation

$$(6x \pm 1)^2 + (6y \pm 1)^2 + (6z \pm 1)^2 = 24n + 3,$$

dans laquelle le second membre n'est pas le triple d'un carré. Il y autant de solutions pour lesquelles une ou trois des inconnues ont des valeurs paires, que de solutions pour lesquelles une ou trois des inconnues ont des valeurs impaires.

nulles ou positives. L'excès du nombre des valeurs paires sur le nombre des valeurs impaires de x + y + z, *égale* $(2n+1)(-1)^n$.

II. *Soit l'équation*

$$(6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + (6z \mp 1)^2 = 24N + 3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (392)$$

dans laquelle les valeurs des inconnues sont encore assujetties aux conditions précédentes. Si le second membre n'est pas le triple d'un carré, la somme x + y + z *admet autant de valeurs paires que de valeurs impaires* (*).

III. *Le triple d'un carré impair est toujours décomposable en trois carrés, de la forme* $(6\mu \mp 1)^2$. *Si le nombre donné est* $3(2n+1)^2$, *il y a au moins autant de décompositions que l'indique le plus grand nombre entier contenu dans* $\frac{2n+1}{6}$ (**).

215. La seconde formule écrite ci-dessus donne lieu à ces nouveaux théorèmes :

IV. *Soit l'équation*

$$(6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + 4(6z \mp 1)^2 = 6(2n+1)^2. \quad . \quad . \quad . \quad (393)\ (***)$$

L'excès du nombre des valeurs paires sur le nombre des valeurs impaires de $x + y + z + \frac{3y^2 \mp y}{2}$, *égale* $(2n+1)(-1)^n$.

V. *Soit l'équation*

$$(6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + 4(6z \mp 1)^2 = 24N + 6. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (394)$$

Si le second membre n'est pas le sextuple d'un carré, la quantité

$$x + y + z + \frac{3y^2 \mp y}{2}$$

admet autant de valeurs paires que de valeurs impaires.

VI. *Le sextuple d'un carré impair est toujours décomposable en trois carrés. Les deux premiers ont la forme* $(6\mu \mp 1)^2$, *et le troisième,* $4(6\mu \mp 1)^2$.

(*) C'est le théorème de Jacobi, cité tout à l'heure.

(**) Cette proposition est un corollaire du Théorème II.

(***) Les conditions relatives aux valeurs que peuvent recevoir les inconnues sont les mêmes que précédemment.

216. Dans la formule (183), le produit des deux derniers facteurs peut être représenté par

$$\sum (-1)^{\frac{y(y+1)}{2}} q^{\frac{x(x+1)}{2}+\frac{y(y+1)}{2}}.$$

Conséquemment,

$$\sum (-1)^{\frac{y(y+1)}{2}} q^{\frac{x(x+1)}{2}+\frac{y(y+1)}{2}} + 2\sum (-1)^{\frac{y(y+1)}{2}+z} q^{\frac{x(x+1)}{2}+\frac{y(y+1)}{2}+2z^2} = \sum (2n+1)(-1)^n q^{n(n+1)}.$$

Posons l'équation

$$\frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + 2z^2 = n(n+1),$$

ou bien

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 + 16z^2 = 2(2n+1)^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (395)$$

nous aurons le théorème suivant :

VII. *Soit, pour* z = 0, ε *l'excès du nombre des valeurs paires sur le nombre des valeurs impaires de* $\frac{y(y+1)}{2}$. *Soit, semblablement,* ε' *l'excès du nombre des valeurs paires sur le nombre des valeurs impaires de* $\frac{y(y+1)}{2} + z$, z *étant positif. On a*

$$\varepsilon + 2\varepsilon' = (2n+1)(-1)^n.$$

217. Les formules (184), (186) conduisent, on le comprend bien, à des théorèmes identiques au fond (*). Pour avoir un énoncé simple, prenons la seconde.

Le produit des deux premiers facteurs égale

$$\begin{aligned}&(1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \cdots)^2 - 4(q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \cdots)^2 \\ = {}& 1 + 4(q^4 + q^{16} + q^{36} + \cdots) + 4(q^4 + q^{16} + q^{36} + \cdots)^2 - 4(q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \cdots)^2.\end{aligned}$$

Cette fonction peut être représentée par $1 + 4\sum(-1)^x q^{x^2+y^2}$, pourvu que l'on suppose x *et* y *de même parité, et* x *positif.*

Un terme quelconque du troisième facteur a la forme $z(z+1)$. Par conséquent,

$$\sum q^{z(z+1)} + 4\sum (-1)^x q^{x^2+y^2+z(z+1)} = \sum (2n+1)(-1)^n q^{n(n+1)};$$

puis :

(*) Cette conclusion résulte de l'identité (142).

VIII. *L'excès du nombre des valeurs paires de* x, *satisfaisant à l'équation*

$$4x^2+4y^2+(2z+1)^2=(2n+1)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (396)$$

sur le nombre des valeurs impaires, est

$$\varepsilon=\frac{(2n+1)(-1)^n-1}{4}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (397)\ (^*)$$

218. *Exemples.* I. $n=7$. Faisant $z=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, on trouve

$$x^2+y^2=56,\ x^2+y^2=54,\ x^2+y^2=50,\ x^2+y^2=44,\ x^2+y^2=36,\ x^2+y^2=26,\ x^2+y^2=14.$$

Aucun des nombres 56, 54, 44, 14, n'est décomposable en deux carrés;

$$50=1+49=25+25=49+1,\quad 36=6^2+0^2,\quad 26=1+25=25+1.$$

Ainsi, les valeurs de x sont 1, 5, 7, 6, 1, 5. Donc $\varepsilon=1-5=-4$; conformément à ce que donne la formule.

II. $n=13$. On a, successivement :

$$x^2+y^2=182,\ x^2+y^2=180,\ x^2+y^2=176,\ x^2+y^2=170,\ x^2+y^2=162,\ x^2+y^2=152,$$
$$x^2+y^2=140,\ x^2+y^2=126,\ x^2+y^2=110,\ x^2+y^2=72,\ x^2+y^2=50,\ x^2+y^2=26;$$
$$180=36+144=144+36,\quad 170=1+169=49+121=121+49=169+1,$$
$$162=81+81,\ 72=36+36,\ 50=1+49=25+25=49+1,\ 26=1+25=25+1;$$
$$\varepsilon=1+1-1-1-1-1-1+1-1-1-1-1-1=-7=\frac{-27-1}{4}.$$

219. Le Théorème VIII paraît avoir des conséquences assez importantes, sur lesquelles je reviendrai peut-être plus tard. Dès à présent, je crois pouvoir signaler celles-ci :

(*) Il ne faut pas oublier, dans l'application de ce théorème, que l'on peut faire $y=0$, mais non $x=0$. Ajoutons que, *si un carré impair est égal à la somme de trois carrés, ceux-ci ont les formes* $4x^2$, $4y^2$ et $(2z+1)^2$. En effet, l'équation

$$(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2=(2n+1)^2$$

donne

$$\mathcal{M}.4+2=\mathcal{M}.4.$$

IX. *Si un nombre premier,* p, *n'est pas la somme de deux carrés,* p^2 *est décomposable en trois carrés.*

X. *Si un nombre premier,* p, *est égal à la somme de trois carrés,* p^2 *est généralement égal aussi à la somme de trois carrés : il ne pourrait y avoir exception que si* p *était décomposable en deux carrés* (*).

Pour démontrer le premier théorème, il suffit d'observer que si l'équation (596) était vérifiée par $y = 0$, les valeurs de x, z, n seraient données par les formules connues :

$$2x = ab, \quad 2z + 1 = a^2 - b^2, \quad 2n + 1 = a^2 + b^2;$$

et celle-ci est contraire à l'hypothèse (**).

220. Si, dans le développement considéré ci-dessus (217), on suppose $x^2 + y^2 + z(z+1) = 2N$, N *n'étant pas triangulaire,* le coefficient de q^{2N} est nul ; donc

XI. *L'équation*

$$4x^2 + 4y^2 + (2z+1)^2 = 8N + 1, \qquad (598)$$

dans laquelle le second membre n'est pas carré, est vérifiée par un même nombre de valeurs paires et de valeurs impaires de x (***).

Soit, par exemple, l'équation

$$4x^2 + 4y^2 + (2z+1)^2 = 17.$$

Elle admet, comme solutions :

$$x = 1,\ y = 1,\ z = 1; \quad x = 2,\ y = 0,\ z = 0.$$

Donc $\varepsilon = 0$, conformément au théorème.

221. Les égalités (187), (188), qui n'en font réellement qu'une, donnent lieu à ce nouveau théorème, moins simple que les précédents :

(*) Encore n'est-il pas sûr que ce cas d'exception puisse se présenter : le nombre premier $29 = 16 + 9 + 4 = 25 + 4$; néanmoins, $29^2 = 24^2 + 16^2 + 3^2$.

(**) Le Théorème X, compris dans celui-ci, semblera peut-être digne d'attention, si l'on se rappelle que *le produit de deux facteurs, égaux chacun à la somme de trois carrés, n'est pas toujours égal à la somme de trois carrés* (Legendre, *Théorie des Nombres,* t. I, p. 215).

(***) On fait toujours abstraction de $x = 0$.

XII. a *étant le nombre des solutions de l'équation*

$$(2x+1)^2+(2y+1)^2=2(2n+1)^2;$$

l'excès du nombre des valeurs paires de z *qui vérifient*

$$(2x+1)^2+(2y+1)^2+8z^2=2(2n+1)^2,$$

sur le nombre des valeurs impaires, est

$$\varepsilon=\frac{(2n+1)(-1)^n-a}{2}.$$

222. *Exemple.* Soit $n=3$. Les deux équations deviennent

$$(2x+1)^2+(2y+1)^2=98,\quad (2x+1)^2+(2y+1)^2+8z^2=98.$$

La première n'est vérifiée que par $x=3$, $y=3$; ainsi $a=1$. Les solutions de la seconde sont

$$x=4,\ y=1,\ z=1;\quad x=1,\ y=4,\ z=1;\quad x=2,\ y=0,\ z=3;\quad x=0,\ y=2,\ z=3.$$

Par suite,

$$\varepsilon=-4=\frac{-7-1}{2}\cdot\ (*)$$

ADDITIONS AUX PARAGRAPHES VI ET VII (**).

223. *Développement de* f(q). En continuant le calcul indiqué précédemment (156), on trouve

$$\begin{aligned}f(q)=q&+q^2+q^4+2q^5+q^8+q^9+2q^{10}+2q^{13}+q^{16}+2q^{17}+q^{18}+2q^{20}+3q^{25}+2q^{26}+2q^{29}\\&+q^{32}+2q^{34}+q^{36}+2q^{37}+2q^{40}+2q^{41}+2q^{45}+q^{49}+3q^{50}+2q^{52}+2q^{53}+2q^{58}+2q^{61}+q^{64}\\&+4q^{65}+2q^{68}+q^{72}+2q^{73}+2q^{74}+2q^{80}+q^{81}+2q^{82}+4q^{85}+2q^{89}+2q^{90}+2q^{97}+q^{98}+\cdots.\end{aligned}$$

(*) On voit qu'*une même valeur de* z *doit être comptée autant de fois qu'il y a de solutions dont cette valeur fait partie.* Les énoncés de tous nos théorèmes doivent être entendus avec des restrictions analogues à celle-ci.

(**) Rédigées pendant l'impression du Mémoire.

224. *Valeurs de* ε_n (157, 158). Elles résultent de la formule précédente; savoir :

$$\begin{array}{lll}
\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_4=\cdots=1, & \varepsilon_5=\varepsilon_{10}=\varepsilon_{20}=\cdots=2, & \varepsilon_9=\varepsilon_{18}=\varepsilon_{36}=\cdots=1,\\
\varepsilon_{13}=\varepsilon_{26}=\varepsilon_{52}=\cdots=2, & \varepsilon_{17}=\varepsilon_{34}=\varepsilon_{68}=\cdots=2, & \varepsilon_{25}=\varepsilon_{50}=\varepsilon_{100}=\cdots=3,\\
\varepsilon_{29}=\varepsilon_{58}=\varepsilon_{116}=\cdots=2, & \varepsilon_{37}=\varepsilon_{74}=\varepsilon_{148}=\cdots=2, & \varepsilon_{41}=\varepsilon_{82}=\varepsilon_{164}=\cdots=2,\\
\varepsilon_{45}=\varepsilon_{90}=\varepsilon_{180}=\cdots=2, & \varepsilon_{49}=\varepsilon_{98}=\varepsilon_{196}=\cdots=1, & \varepsilon_{53}=\varepsilon_{106}=\varepsilon_{212}=\cdots=2,\\
\varepsilon_{61}=\varepsilon_{122}=\varepsilon_{244}=\cdots=2, & \varepsilon_{65}=\varepsilon_{130}=\varepsilon_{260}=\cdots=4, & \varepsilon_{73}=\varepsilon_{146}=\varepsilon_{192}=\cdots=2,\\
\varepsilon_{81}=\varepsilon_{162}=\varepsilon_{324}=\cdots=1, & \varepsilon_{85}=\varepsilon_{170}=\varepsilon_{340}=\cdots=4, & \varepsilon_{89}=\varepsilon_{178}=\varepsilon_{356}=\cdots=2,\\
\varepsilon_{97}=\varepsilon_{194}=\varepsilon_{384}=\cdots=2,\ldots & &
\end{array}$$

225. *Théorème d'arithmétique.* L'équation

$$(1+q^4+q^{12}+q^{24}+\cdots)^2=\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^{4n}, \quad \ldots\ldots \quad (293)$$

peut être mise sous la forme

$$(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots)^2=\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^{8n+2}.$$

D'ailleurs

$$(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots)^4=\sum_0^\infty q^{4i}\int i; \quad \ldots\ldots \quad (375)$$

donc

$$\left[\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^{8n+2}\right]^2=\sum_0^\infty q^{4i}\int i. \quad \ldots\ldots \quad (399)$$

Par conséquent, si $2i=i'+i''$, i' *et* i'' *ayant la forme* $4\mu+1$:

$$\int i=\sum \varepsilon_{i'}\varepsilon_{i''}; \quad \ldots\ldots \quad (400)$$

résultat que l'on peut énoncer ainsi :

La somme des diviseurs d'un nombre impair, i, *est égale à la somme des produits deux à deux des excès relatifs aux nombres impairs dont la somme est* 2i.

226. *Remarques.* I. Ce théorème est plus simple que celui qui a été démontré dans le numéro 171.

II. Suivant que i a la forme $4\mu - 1$ ou la forme $4\mu + 1$, l'équation (400) est réductible à

$$\int i = 2 \sum_{i'=1}^{i'=i-2} \varepsilon_{i'} \varepsilon_{2i-i'}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (401)$$

ou à

$$\int i = (\varepsilon_i)^2 + 2 \sum_{i'=1}^{i'=i-4} \varepsilon_{i'} \varepsilon_{2i-i'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (402)\ (*)$$

III. Admettons que i ait la première forme; alors, la comparaison des équations (312), (401) donne celle-ci :

$$\sum_{i'=1}^{i'=i-2} \varepsilon_{i'} \varepsilon_{2i-i'} = 2 \sum_{n=1}^{n=\frac{i-1}{2}} \varepsilon_n \varepsilon_{i-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (403)$$

227. *Vérifications.* 1° Soit, comme au numéro **171**, $i = 45$: l'égalité (402) devient

$$\int 45 = (\varepsilon_{45})^2 + 2\left[\varepsilon_1\varepsilon_{89} + \varepsilon_5\varepsilon_{85} + \varepsilon_9\varepsilon_{81} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{77} + \varepsilon_{17}\varepsilon_{73} + \varepsilon_{21}\varepsilon_{69} + \varepsilon_{25}\varepsilon_{65} + \varepsilon_{29}\varepsilon_{61} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{57} + \varepsilon_{37}\varepsilon_{53} + \varepsilon_{41}\varepsilon_{49}\right];$$

ou, d'après le tableau ci-dessus (224),

$$78 = 4 + 2\,[1.2 + 2.4 + 1.1 + 0 + 2.2 + 0 + 3.4 + 2.2 + 0 + 2.2 + 2.1].$$

2° Prenons $i = 27 = 4.7 - 1$. D'après l'égalité (403),

$$\varepsilon_1 . \varepsilon_{53} + \varepsilon_5 . \varepsilon_{49} + \varepsilon_9\varepsilon_{45} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{41} + \varepsilon_{17}\varepsilon_{37} + \varepsilon_{21}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{25}\varepsilon_{29} = 2\left[\varepsilon_1 . \varepsilon_{26} + \varepsilon_2 . \varepsilon_{25} + \varepsilon_9\varepsilon_{18} + \varepsilon_{10}\varepsilon_{17}\right]\ (**);$$

ou

$$2 + 2 + 2 + 2.2 + 2.2 + 0 + 3.2 = 2\,[2 + 3 + 1 + 2.2].$$

228. *Développements de* $\frac{\omega}{\pi}\sqrt{k}$. D'après les formules (278), (279) et (292), on a

$$f(q) - f(q^2) = \frac{(1-k')\,\omega}{4\pi} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \cdots = \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} q^{4n+1}; \quad (404)$$

(*) Encore, dans l'application de ces formules, doit-on rejeter les valeurs de i' qui ont la forme $4\mu - 1$: les *excès* correspondants sont nuls (**155**).

(**) Cette seconde somme ne contient pas les *excès* nuls.

et, par le changement de q en $q^{\frac{1}{4}}$ (160) :

$$q^{\frac{1}{4}}\frac{\omega}{\pi}\sqrt{k}=\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}q^{\frac{1}{2}}=\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q^{\frac{1}{2}}}-\frac{q}{1-q^{\frac{3}{2}}}+\frac{q^{\frac{3}{2}}}{1-q^{\frac{5}{2}}}-\frac{q^2}{1-q^{\frac{7}{2}}}+\cdots=\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^{n+\frac{1}{2}}. \quad (405)\ (*)$$

229. *Nouvelle expression de* $\sqrt{k}$. On sait que

$$\frac{\omega k}{2\pi}=\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^{2n+\frac{1}{2}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (406)\ (**)$$

Donc, par la formule précédente,

$$\sqrt{k}=2q^{\frac{1}{4}}\frac{\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^{2n}}{\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^{n}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (407)$$

ou

$$\sqrt{k}=2q^{\frac{1}{4}}\frac{1+\varepsilon_5q^2+\varepsilon_9q^4+\varepsilon_{13}q^6+\varepsilon_{17}q^8+\cdots}{1+\varepsilon_5q^1+\varepsilon_9q^2+\varepsilon_{13}q^3+\varepsilon_{17}q^4+\cdots}. \quad \ldots\ldots \quad (408)$$

Il est aisé de reconnaître que cette forme de $\sqrt{k}$ est identique, au fond, avec la valeur connue (26).

230. *Transformation d'une série.* Reprenons l'égalité

$$\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q^{\frac{1}{2}}}-\frac{q}{1-q^{\frac{3}{2}}}+\frac{q^{\frac{3}{2}}}{1-q^{\frac{5}{2}}}-\frac{q^2}{1-q^{\frac{7}{2}}}+\cdots=\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^{n+\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (405)$$

Le développement du premier membre ne doit renfermer aucune puissance entière de q. Par conséquent, nous pouvons remplacer les fractions

$$\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{q}{1-q^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{q^{\frac{3}{2}}}{1-q^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{q^2}{1-q^{\frac{7}{2}}},\ldots$$

respectivement par

$$\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q},\quad \frac{q^{\frac{5}{2}}}{1-q^3},\quad \frac{q^{\frac{3}{2}}}{1-q^5},\quad \frac{q^{\frac{11}{2}}}{1-q^7},\ldots$$

(*) Je n'ai trouvé nulle part ces développements de $\frac{\omega}{\pi}\sqrt{k}$. Il n'est cependant pas probable qu'ils soient nouveaux.

(**) *Fundamenta*, p. 105.

D'après cette remarque, la relation (405) devient

$$q^{-\frac{1}{4}}\frac{\omega}{\pi}\sqrt{k}=\frac{1}{1-q}-\frac{q^2}{1-q^3}+\frac{q}{1-q^5}-\frac{q^5}{1-q^7}+\frac{q^2}{1-q^9}-\cdots=\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^n; \quad (409)$$

ou, sous une forme plus simple,

$$q^{-\frac{1}{4}}\frac{\omega}{\pi}\sqrt{k}=\sum_0^\infty\left(\frac{q^a}{1-q^{4a+1}}-\frac{q^{3a+2}}{1-q^{4a+3}}\right)=\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (410)$$

231. *Remarque.* Si l'on exprime que, dans le développement de la première série, les termes renfermant des puissances entières se détruisent, on retombe sur l'identité (340).

232. *Développement de* $\frac{\omega k}{2\pi}$. Le changement de q en q^2, dans la formule précédente, donne

$$q^{-\frac{1}{2}}\frac{\omega k}{2\pi}=\sum_0^\infty\left(\frac{q^{2a}}{1-q^{8a+2}}-\frac{q^{6a+4}}{1-q^{8a+6}}\right)=\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^{2n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (411)$$

attendu que $\omega_1\sqrt{k_1}=\frac{\omega k}{2}$ (59).

233. *Décompositions de* α'^2 *et de* α'^3. D'après la formule (39), la décomposition de α'^3, non effectuée dans le numéro 161, est

$$(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)^2=\left[\sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q)^n\right]^2\times\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^n \quad . \quad . \quad (412)$$

Si l'on se rappelle que

$$\alpha^2=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots}{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (178)$$

on peut remplacer la relation précédente par

$$(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)^3=(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)\times\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}q^n,$$

ou

$$\left.\begin{aligned}&1-3q^2+5q^6-7q^{12}+9q^{20}-11q^{30}+13q^{42}-15q^{56}+\cdots\\&=(1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots)(1+\varepsilon_5q+\varepsilon_9q^2+\varepsilon_{13}q^3+\varepsilon_{17}q^4+\varepsilon_{21}q^5+\cdots).\end{aligned}\right\} \quad (413)$$

Voici donc une *treizième* décomposition de S (214), non moins curieuse, semble-t-il, que toutes les précédentes. Elle donne lieu au théorème suivant, qui permet de calculer, d'une manière assez simple, les *excès* $\varepsilon_5, \varepsilon_9, \varepsilon_{13}, \ldots$:

La fonction

$$\varepsilon_{4n+1} - 2\varepsilon_{4n-3} + 2\varepsilon_{4n-15} - 2\varepsilon_{4n-35} + 2\varepsilon_{4n-63} - \cdots,$$

égale à $(-1)^\lambda(2\lambda+1)$ *si* $n=\lambda(\lambda+1)$, *est nulle dans le cas contraire* (*).

234. *Vérifications.* 1° $n=12=3.4$. On doit trouver

$$\varepsilon_{49} - 2\varepsilon_{45} + 2\varepsilon_{33} - 2\varepsilon_{13} = -7;$$

ou (224)

$$1 - 2.2 + 0 - 2.2 = -7;$$

ce qui est exact.

2° $n=20=4.5$:

$$\varepsilon_{81} - 2\varepsilon_{77} + 2\varepsilon_{65} - 2\varepsilon_{45} + 2\varepsilon_{17} = 9;$$

ou

$$1 - 0 + 2.4 - 2.2 + 2.2 = 9.$$

3° $n=22$:

$$\varepsilon_{89} - 2\varepsilon_{85} + 2\varepsilon_{73} - 2\varepsilon_{53} + 2\varepsilon_{25} = 0;$$

ou

$$2 - 2.4 + 2.2 - 2.2 + 2.3 = 0.$$

235. *Théorèmes d'arithmétique.* I. *Soit un nombre* $n=4\mu+1$, *que l'on décompose, de toutes les manières possibles, en* $4i+i'^2$, i *et* i' *étant impairs. On a*

$$n\sum\int i = 5\sum i\int i.$$

II. *Soit* $n=2^\alpha i+i'$, i *et* i' *étant impairs. Soient,* conformément à la notation de M. Liouville, $\zeta_1(n)=\int n$, $\zeta_3(n)$ *la somme des cubes des diviseurs de* n. *On a*

$$\sum\left[\zeta_1(i)\zeta_1(i')\right] = \frac{\zeta_3(n)-\zeta_1(n)}{24}. \quad (**)$$

236. APPLICATIONS.

1° $n=69=4.5+7^2=4.11+5^2=4.15+3^2=4.17+1^2$; $\int i = 6, 12, 24, 18.$

(*) *Si* $n=\lambda(\lambda+1)$, *l'indice* $4n+1$ *est un carré, et chacun des autres indices est la différence de deux carrés.*

(**) Nous supprimons les démonstrations, d'ailleurs très-simples, parce que ces théorèmes sont probablement connus.

Donc $69(6+12+24+18)=5(5.6+11.12+15.24+17.18)=4\,140.$

2° $n=15=2+13=4+11=6+9=8+7=10+5=12+3=14+1;$

$i=1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 5,\ 3,\ 7;\qquad \zeta_1(i)=1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 6,\ 4,\ 8;$

$i'=13,\ 11,\ 9,\ 7,\ 5,\ 3,\ 1;\qquad \zeta_1(i')=14,\ 12,\ 13,\ 8,\ 6,\ 4,\ 1;$

$\zeta_1(15)=1+3+5+15=24;\qquad \zeta_3(15)=1+27+125+3\,375=3\,528.$

Donc $$1.14+1.12+4.13+1.8+6.6+4.4+8.1=\frac{3\,528-24}{24}=146.$$

237. *Décompositions de séries.* Soient

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{q}{1+q}+3\frac{q^3}{1+q^3}+5\frac{q^5}{1+q^5}+\cdots=\mathrm{A},\\
&\frac{q^2}{1-q^2}+2\frac{q^4}{1-q^4}+3\frac{q^6}{1-q^6}+\cdots=\mathrm{B},\\
&\frac{q}{1-q}+2\frac{q^2}{1-q^2}+3\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots=\mathrm{C},\\
&\frac{q}{1-q}+3\frac{q^3}{1-q^3}+5\frac{q^5}{1-q^5}+\cdots=\mathrm{D}.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(414)$$

Nous avons trouvé (188, 192) :

$$\mathrm{C}=\frac{1}{24}+\frac{2}{3}\frac{k^2\omega^2}{\pi^2}+\frac{5}{6}\frac{k'^2\omega^2}{\pi^2}-\frac{\mathrm{E}_1\omega}{\pi^2},$$

$$\mathrm{A}+2\mathrm{B}=\frac{\omega^2}{2\pi^2}-\frac{\omega\mathrm{E}_1}{\pi^2}+\frac{1}{8}.$$

Il est visible que

$$\mathrm{D}=\mathrm{C}-2\mathrm{B}.$$

De plus,

$$\mathrm{D}-\mathrm{A}=2\left[\frac{q^2}{1-q^2}+3\frac{q^6}{1-q^6}+5\frac{q^{10}}{1-q^{10}}+\cdots\right];$$

et cette série se déduit de D, par le changement de q en q^2. Par conséquent, si l'on pose, pour plus de clarté, $\mathrm{C}=\psi(q)$, on a

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{B}=\psi(q^2),\ \mathrm{D}=\psi(q)-2\psi(q^2),\ \mathrm{D}-\mathrm{A}=2\psi(q^2)-4\psi(q^4),\\
&\mathrm{A}=\psi(q)-4\psi(q^2)+4\psi(q^4),\ \mathrm{A}+2\mathrm{B}=\psi(q)-2\psi(q^2)+4\psi(q^4).
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ (415)$$

Ainsi, en particulier, *la série* (367) :

$$\frac{q}{1+q}+2\frac{q^2}{1-q^2}+3\frac{q^3}{1+q^3}+4\frac{q^4}{1-q^4}+\cdots,$$

est équivalente : 1° *à*

$$\begin{aligned}&\left[\frac{q}{1-q}+2\frac{q^2}{1-q^2}+3\frac{q^3}{1-q^3}+4\frac{q^4}{1-q^4}+\cdots\right]\\ -2&\left[\frac{q^2}{1-q^2}+2\frac{q^4}{1-q^4}+3\frac{q^6}{1-q^6}+4\frac{q^8}{1-q^8}+\cdots\right]\\ +4&\left[\frac{q^4}{1-q^4}+2\frac{q^8}{1-q^8}+3\frac{q^{12}}{1-q^{12}}+4\frac{q^{16}}{1-q^{16}}+\cdots\right];\end{aligned}$$

2° *à*

$$\frac{q}{1-q}+2\frac{q^3}{1-q^3}+5\frac{q^5}{1-q^5}+\cdots+4\left[\frac{q^4}{1-q^4}+2\frac{q^8}{1-q^8}+3\frac{q^{12}}{1-q^{12}}+\cdots\right].$$

238. *Remarques.* **I.** A cause de

$$C=\psi(q)=q+3q^2+4q^3+\cdots+q^n\int n+\cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (360)$$

le coefficient de q^n, dans le développement de la première série, *est*

$$\int n-2\int\frac{n}{2}+4\int\frac{n}{2}\cdot \text{ (*)}$$

II. Ce coefficient égale aussi $\pm(S_i-S_p)$, selon que n est *impair* ou *pair*, (192, 175). Par conséquent

$$(-1)^{n-1}(S_i-S_p)=\int n-2\int\frac{n}{2}+4\int\frac{n}{2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (416)$$

relation presque évidente.

(*) Cette quantité se réduit à $\int n-2\int\frac{n}{2}$ si n est *simplement impair ;* etc.

VIII.

SOMMATIONS PAR INTÉGRALES DÉFINIES.

239. Les *séries à termes fractionnaires,* qui ont pour type la *série de Lambert* (185), se rencontrent fréquemment dans la théorie des fonctions elliptiques ; et Jacobi en a conclu un grand nombre de beaux théorèmes. Si l'on transformait ces suites en intégrales définies, on trouverait des relations simples entre des transcendantes d'espèces fort différentes. Nous allons effectuer quelques-unes de ces transformations, en commençant par la série de Lambert, la plus simple de toutes celles dont il s'agit, et qui, cependant, n'a pas encore été sommée (*).

240. On a (**), pour toute valeur positive de p :

$$\frac{1+e^{-p}}{1-e^{-p}}-\frac{2}{p}=4\int_0^\infty \frac{\sin(p\alpha)\,d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}. \qquad (417)$$

Si l'on fait $e^{-p}=q^n$, cette formule, due à Poisson, devient

$$\frac{1+q^n}{1-q^n}+\frac{2}{nlq}=-4\int_0^\infty \frac{\sin(n\alpha lq)\,d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1},$$

ou

$$-q^n+2\frac{q^n}{1-q^n}+2\frac{q^n}{nlq}=-4\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}q^n\sin n(\alpha lq). \qquad (418)$$

Conséquemment,

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\cdots+\frac{q^n}{1-q^n}+\cdots=\frac{1}{2}\frac{q}{1-q}+\frac{l(1-q)}{lq}-2\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}\sum_1^\infty q^n\sin n(\alpha lq).$$

(*) Cette question a été traitée dans les *Annali di Matematica;* mais l'auteur est arrivé à des résultats inexacts, parce qu'il a fait usage d'intégrales *indéterminées.* Il y a environ trois ans, j'ai adressé, au savant rédacteur des *Annali,* une Note dans laquelle je signalais les erreurs dont il s'agit : ma lettre n'a pas été mentionnée.

(**) *Mélanges mathématiques,* p. 188.

Mais par une formule connue, dont la vérification est facile :

$$\sum_1^\infty q^n \sin n(\alpha lq) = \frac{q \sin(\alpha lq)}{1 - 2q\cos(\alpha lq) + q^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (419)\ (*)$$

donc enfin,

$$\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^n} = \frac{1}{2}\frac{q}{1-q} + \frac{l(1-q)}{lq} - 2q\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha lq)}{1-2q\cos(\alpha lq)+q^2}\frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}. \quad . \quad (420)$$

241. Dans cette égalité, changeons q en q^2; multiplions par 2; puis retranchons membre à membre : il vient

$$\frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^3} - \frac{q^4}{1-q^4} + \cdots = \frac{1}{2}\frac{q}{1+q} - \frac{l(1+q)}{lq}$$
$$-2\int_0^\infty \left[\frac{q\sin(\alpha lq)}{1-2q\cos(\alpha lq)+q^2} - \frac{2q^2\sin 2(\alpha lq)}{1-2q^2\cos 2(\alpha lq)+q^4}\right]\frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}$$

La quantité entre parenthèses est réductible à $\frac{q\sin(\alpha lq)}{1+2q\cos(\alpha lq)+q^2}$. Donc

$$\frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^3} - \cdots = \frac{1}{2}\frac{q}{1+q} - \frac{l(1+q)}{lq} - 2q\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha lq)}{1+2q\cos(\alpha lq)+q^2}\frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}. \quad (421)$$

Si l'on suppose le premier membre développé suivant les puissances de q, *le coefficient de* q^n *est*, comme l'on sait, *égal à l'excès du nombre des diviseurs impairs de* n *sur le nombre des diviseurs pairs.*

242. On tire, de la relation (418) :

$$\sum_1^\infty n\frac{q^n}{1-q^n} = \frac{1}{2}\sum_1^\infty nq^n - \frac{1}{lq}\sum_1^\infty q^n - 2\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}\sum_1^\infty nq^n \sin n(\alpha lq),$$

ou

$$\sum_1^\infty n\frac{q^n}{1-q^n} = \frac{1}{2}\frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q}{(1-q)\,lq} - 2\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}\sum_1^\infty nq^n\sin n(\alpha lq). \quad . \quad (422)$$

Soient, pour un instant :

$$y = \sum_1^\infty q^n \sin n(\alpha lq), \qquad z = \sum_1^\infty q^n \cos n(\alpha lq);$$

(*) Euler, *Introduction à l'Analyse*, p. 174.

d'où résulte

$$\sum_1^\infty nq^n \sin n(\alpha lq) = \frac{q}{1+\alpha^2}\left(\frac{dy}{dq} - \alpha\frac{dz}{dq}\right).$$

On sait que

$$y = \frac{q\sin(\alpha lq)}{1-2q\cos(\alpha lq)+q^2},\qquad z = \frac{q\cos(\alpha lq)-q^2}{1-2q\cos(\alpha lq)+q^2}.$$

Conséquemment

$$\frac{dy}{dq} - \alpha\frac{dz}{dq} = \frac{(1-q^2)(1+\alpha^2)\sin(\alpha lq)}{[1-2q\cos(\alpha lq)+q^2]^2};$$

puis

$$\sum_1^\infty nq^n \sin n(\alpha lq) = \frac{q(1-q^2)\sin(\alpha lq)}{[1-2q\cos(\alpha lq)+q^2]^2}. \quad \ldots\ldots \quad (423)$$

La formule (422) devient donc

$$\left.\begin{aligned} &\frac{q}{1-q} + 2\frac{q^2}{1-q^2} + 3\frac{q^3}{1-q^3} + 4\frac{q^4}{1-q^4} + 5\frac{q^5}{1-q^5} + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q}{(1-q)lq} - 2q(1-q^2)\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha lq)}{[1-2q\cos(\alpha lq)+q^2]^2}\frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}. \end{aligned}\right\} (424)$$

243. Si l'on égale les seconds membres des formules (363), (424), on trouve l'une des relations annoncées :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{24} + \frac{2}{3}\frac{k^2\omega^2}{\pi^2} + \frac{5}{6}\frac{k'^2\omega^2}{\pi^2} - \frac{E_1\omega}{\pi^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q}{(1-q)lq} - 2q(1-q^2)\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha lq)}{[1-2q\cos(\alpha lq)+q^2]^2}\frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}. \end{aligned}\right\} (425)$$

244. On parvient à un résultat assez simple en partant de la formule

$$f(q) = \frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi} - 1\right), \quad \ldots\ldots \quad (280)$$

dans laquelle

$$f(q) = \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \cdots \quad \ldots\ldots \quad (278)$$

En effet, la relation (418) donne d'abord, si l'on pose $\alpha lq = a$:

$$\begin{aligned} f(q) = &\frac{1}{2}(q - q^3 + q^5 - \cdots) - \frac{1}{lq}\left(q - \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} - \cdots\right) \\ &- 2\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}(q\sin a - q^3\sin 3a + q^5\sin 5a - \cdots). \end{aligned}$$

La première série égale $\frac{q}{1+q^2}$; la deuxième représente arc tg q. Quant à la troisième, on trouve aisément qu'elle a pour somme

$$\frac{(q-q^3)\sin a}{1+2q^2\cos 2a+q^4}=\frac{(q-q^3)\sin(\alpha lq)}{1+2q^2\cos(2\alpha lq)+q^4}.$$

Par suite,

$$f(q)=\frac{1}{2}\frac{q}{1+q^2}-\frac{\operatorname{arc\,tg} q}{lq}-2q(1-q^2)\int_0^{\infty}\frac{\sin(\alpha lq)}{1+2q^2\cos(2\alpha lq)+q^4}\frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}; \quad (426)$$

ou encore

$$\frac{2\omega}{\pi}=1+2\frac{q}{1+q^2}-4\frac{\operatorname{arc\,tg} q}{lq}-8q(1-q^2)\int_0^{\infty}\frac{\sin(\alpha lq)}{1+2q^2\cos(2\alpha lq)+q^4}\frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}. \quad (427)$$

Ainsi, l'intégrale elliptique de première espèce est exprimable au moyen d'une intégrale définie ayant une tout autre forme, et de la transcendante $\frac{\operatorname{arc\,tg} q}{lq}$. Si l'on pouvait développer en série cette fraction, on aurait, par cela même, le développement de l'intégrale définie.

245. Une seconde formule de Poisson va nous donner de nouveaux résultats. Cette formule est

$$\frac{e^p-e^{-p}}{e^p+2\cos\theta+e^{-p}}=2\int_0^{\infty}\frac{e^{\theta x}+e^{-\theta x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\sin px\,dx. \text{ (*)}$$

Pour $\theta=0$, elle se réduit à

$$\frac{e^p-1}{e^p+1}=4\int_0^{\infty}\frac{\sin p\alpha d\alpha}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (428)$$

Soit, comme ci-dessus (240), $p=-nlq$: il vient

$$\frac{1-q^n}{1+q^n}=-4\int_0^{\infty}\frac{\sin n(\alpha lq)}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}}d\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (429)$$

Si l'on multiplie les deux membres par q^n, que l'on décompose la fraction en

$$2\frac{q^n}{1+q^n}-q^n,$$

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 18e Cahier, p. 297.

et que l'on fasse varier n de 1 à $+\infty$, on obtient

$$2\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^n} - \frac{q}{1-q} = -4\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}} \sum_1^\infty q^n \sin n(\alpha l q);$$

ou, par la formule (419) :

$$\frac{q}{1+q}+\frac{q^2}{1+q^2}+\cdots+\frac{q^n}{1+q^n}+\cdots = \frac{1}{2}\frac{q}{1-q} - 2q\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha l q)}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}} \frac{d\alpha}{1-2q\cos(\alpha l q)+q^2}. \quad (430)$$

246. On sait, et il est facile de démontrer, que le développement du premier membre a la forme $\sum_1^\infty (I_n - P_n)\,q^n$, I_n désignant le nombre des diviseurs *impairs* de n, et P_n le nombre des diviseurs *pairs*. Par conséquent

$$4\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha l q)}{1-2q\cos(\alpha l q)+q^2} \frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}} = \sum_1^\infty (1+2P_n-2I_n)\,q^{n-1} \quad . \quad . \quad (431)$$

247. Quand n est *premier impair*, et dans ce cas seulement, $I_n - P_n = 2$; de sorte que le coefficient de q^{n-1} est -3. Si donc l'on pouvait développer, suivant les puissances de q, la fonction contenue sous le signe $\int$, on aurait la *loi des nombres premiers* (*).

248. La combinaison des formules (420), (430) donne ces deux autres égalités :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{q^2}{1-q}+\frac{q^4}{1-q^2}+\cdots+\frac{q^{2n}}{1-q^n}+\cdots \\ &= \frac{1}{2}\frac{q}{1-q}+\frac{1}{2}\frac{l(1-q)}{lq} - q\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha l q)}{1-2q\cos(\alpha l q)+q^2}\frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha}-1}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (432)$$

$$\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^4}{1-q^4}+\cdots+\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}+\cdots = \frac{1}{2}\frac{l(1-q)}{lq} + q\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha l q)}{1-2q\cos(\alpha l q)+q^2}\frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha}+1}. \quad (433)$$

Le premier membre de celle-ci est la série de Lambert, dans laquelle q serait remplacé par q^2. Conséquemment,

(*) Cette idée appartient au Géomètre à qui j'ai fait allusion précédemment. Elle mérite d'être approfondie.

$$\frac{1}{2}\frac{l(1-q)}{lq} + q\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha lq)}{1-2q\cos(\alpha lq)+q^2}\frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha}+1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{1}{2}\frac{l(1-q^2)}{lq} - 2q^2\int_0^\infty \frac{\sin(2\alpha lq)}{1-2q^2\cos(2\alpha lq)+q^4}\frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1};$$

ou, après quelques réductions :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha lq)\,d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}\left[\frac{e^{\pi\alpha}}{1-2q\cos(\alpha lq)+q^2} - \frac{1}{1+2q\cos(\alpha lq)+q^2}\right] = \frac{1}{2q}\left[\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{l(1+q)}{lq}\right]. \quad (434)$$

249. Dans cette formule générale, prenons $q = e^{-\pi}$, ce qui revient à supposer $\omega = \omega'$, $k = k'$ (193). Elle devient, par le changement de α en $\frac{\alpha}{\pi}$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha d\alpha}{e^{2\alpha}-1}\left[\frac{e^{\alpha}}{e^{\pi}-2\cos\alpha+e^{-\pi}} - \frac{1}{e^{\pi}+2\cos\alpha+e^{-\pi}}\right] = \frac{1}{2}\left[l(1+e^{-\pi}) - \frac{\pi}{e^{2\pi}-1}\right]. \quad (435)$$

250. Des relations

$$\frac{1+q^n}{1-q^n} = -\frac{2}{nlq} - 4\int_0^\infty \frac{\sin(n\alpha lq)\,d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}, \quad \frac{1-q^n}{1+q^n} = -4\int_0^\infty \frac{\sin(n\alpha lq)\,d\alpha}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}},$$

trouvées ci-dessus (240, 245), on conclut, par soustraction,

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}} = -\frac{1}{2nlq} + \int_0^\infty \frac{\sin n(\alpha lq)\,d\alpha}{e^{\pi\alpha}+1}.$$

Donc

$$\frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \cdots = \frac{1}{2lq}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$
$$+ \int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha}+1}\left[\sin(\alpha lq) - \sin(3\alpha lq) + \sin(5\alpha lq) - \cdots\right];$$

ou, à cause de la formule (279) :

$$\frac{(1-k')\,\omega}{4\pi} + \frac{\pi}{8lq} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha}+1}\left[\sin(\alpha lq) - \sin(3\alpha lq) + \sin(5\alpha lq) - \cdots\right]. \quad (436)$$

Cette équation offre une particularité assez remarquable : le second membre a une valeur connue, bien que la série contenue sous le signe $\int$ soit *indéterminée* (*). Du reste, on peut remplacer l'intégrale par une autre, qui ne présente pas cette espèce de paradoxe.

L'identité

$$\frac{1-q^n}{1+q^n}+\frac{1+q^n}{1-q^n}=-2+\frac{4}{1-q^{2n}}$$

donne, si l'on a égard aux formules ci-dessus,

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}}=\frac{1}{2}q^n-\frac{1}{2lq}\frac{q^n}{n}-q^n\int_0^\infty \frac{\sin n\,(\alpha lq)\,d\alpha}{e^{\pi\alpha}-1}; \quad \ldots\ldots \quad (437)$$

puis, par un calcul déjà effectué (244) :

$$\frac{(1-k')\,\omega}{4\pi}+\left[\frac{\operatorname{arc\,tg} q}{lq}-\frac{q}{1+q^2}\right]=-(q-q^3)\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha lq)}{1+2q^2\cos(2\alpha lq)+q^4}\frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha}-1}. \quad (438)$$

251. De cette relation, combinée avec la formule (427), on conclut ce résultat assez simple :

$$\frac{2k'\omega}{\pi}=\frac{(1-q)^2}{1+q^2}+8(q-q^3)\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha lq)}{1+2q^2\cos 2(\alpha lq)+q^4}\frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}}. \quad \ldots \quad (439)$$

252. Comme dernière application, cherchons, sous forme d'intégrale définie, la somme de la série

$$\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q}-\frac{q^{\frac{3}{2}}}{1-q^3}+\frac{q^{\frac{5}{2}}}{1-q^5}-\cdots=\frac{k\omega}{2\pi}. \quad \ldots\ldots \quad (440)\ (^{**})$$

A cet effet, remplaçons q par $q^{\frac{1}{2}}$, dans la formule (437) : elle devient

$$\frac{q^{\frac{n}{2}}}{1-q^n}=\frac{1}{2}q^{\frac{n}{2}}-\frac{1}{lq}\frac{q^{\frac{n}{2}}}{n}-q^{\frac{n}{2}}\int_0^\infty \frac{\sin n\left(\frac{1}{2}\alpha lq\right)d\alpha}{e^{\pi\alpha}-1}.$$

On conclut, de celle-ci :

$$\frac{k\omega}{2\pi}=\frac{1}{2}\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1+q}-\frac{1}{lq}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{q}\right)-\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha}-1}\left[q^{\frac{1}{2}}\sin\frac{a}{2}-q^{\frac{3}{2}}\sin\frac{3a}{2}+q^{\frac{5}{2}}\sin\frac{5a}{2}-\cdots\right].$$

(*) J'ai signalé, autrefois, un exemple analogue à celui-ci (*Mélanges mathématiques*, p. 127).
(**) *Fundamenta nova*, p. 103.

La série entre parenthèses a pour somme (244)

$$\frac{\left(q^{\frac{1}{2}}-q^{\frac{3}{2}}\right)\sin\frac{a}{2}}{1+2q\cos a+q^2}=\frac{(1-q)\sqrt{q}\sin\frac{1}{2}(\alpha lq)}{1+2q\cos(\alpha lq)+q^2}.$$

Donc,

$$\frac{k\omega}{2\pi}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{q}}{1+q}-\frac{1}{lq}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{q}\right)-(1-q)\sqrt{q}\int_0^\infty\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha lq)}{1+2q\cos(\alpha lq)+q^2}\frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha}-1}.\quad(441)$$

A cause des relations (59), cette formule ne diffère pas de celle qui donne $(1-k')\,\omega$ (438).

ERRATUM.

Page 30, ligne 4, en remontant, *au lieu de :* $\alpha\alpha'.\alpha$; *lisez :* $\alpha\alpha'.\alpha'$.