MÉMOIRE

SUR

UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

ET

SUR LA SURFACE DES ONDES;

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

(Présenté à la classe des sciences le 7 novembre 1868.)

MÉMOIRE

SUR

UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

ET

SUR LA SURFACE DES ONDES.

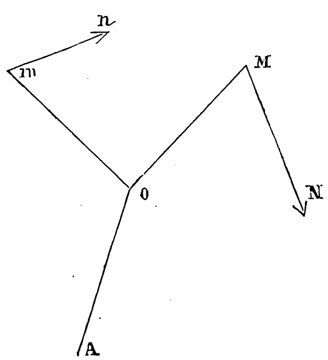
PREMIÈRE PARTIE.

TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE.

I. — Surfaces conjuguées.

1. Problème. — *Par un point fixe* O (fig. 1), *et dans le plan passant par la normale* mn *en un point quelconque* m *d'une surface donnée* s, *on mène la droite* OM, *égale et perpendiculaire à* Om. *Quel est le lieu du point* M?

Fig. 1.



Soit

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la surface s, rapportée à trois axes rectangulaires qui se croisent au *pôle* ou point fixe O. Soient l, m, n les cosinus des angles formés, avec les axes, par la normale mn : ces quantités, proportionnelles à $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$, vérifient les relations

$$ldx + mdy + ndz = 0, \tag{2}$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{3}$$

Si nous désignons par X, Y, Z les coordonnées du point M, nous aurons

$$Xx + Yy + Zz = 0, \tag{4}$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = u^2; \tag{5}$$

en supposant

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2. \tag{6}$$

Exprimant que le point M appartient au plan nOm, on trouve aisément

$$(ny - mz)X + (lz - nx)Y + (mx - ly)Z = 0 \text{ (*)}. \tag{7}$$

Dans chaque cas particulier, l'élimination de x, y, z, u, entre les équations (1), (4), (5), (6) et (7), donnera l'équation de la surface S.

2. *Valeurs de* x, y, z. — On tire, des relations (4) et (7),

$$\frac{X}{y(mx - ly) - z(lz - nx)} = \frac{Y}{z(ny - mz) - x(mx - ly)} = \frac{Z}{x(lz - nx) - y(ny - mz)}.$$

Le premier dénominateur devient, étant développé,

$$(my + nz)x - l(y^2 + z^2),$$

ou

$$(lx + my + nz)x - l(x^2 + y^2 + z^2),$$

ou encore

$$vx - lu^2;$$

pourvu que l'on fasse

$$v = lx + my + nz \text{ (**)}. \tag{8}$$

(*) L'équation (7), si l'on y regarde X, Y, Z comme des coordonnées *courantes*, représente le plan nOm. En effet, elle est vérifiée par ces trois systèmes de valeurs :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0;$$
$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z;$$
$$X = x + dl, \quad Y = y + dm, \quad Z = z + dn;$$

la distance d étant quelconque.

(**) *La quantité* v, que nous emploierons fréquemment, *représente*, abstraction faite du signe, *la distance du pôle au plan tangent en* m.

La double égalité ci-dessus devient donc

$$\frac{X}{vx - lu^2} = \frac{Y}{vy - mu^2} = \frac{Z}{vz - nu^2}.$$

De plus, la valeur commune des trois rapports est

$$\frac{u}{\sqrt{v^2u^2 - 2vu^2(lx + my + nz) + u^2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2}};$$

ainsi

$$\frac{X}{vx - lu^2} = \frac{Y}{vy - mu^2} = \frac{Z}{vz - nu^2} = \frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2}}. \tag{9}$$

A cause du radical, il y a deux systèmes de valeurs de X, Y, Z. Il est clair, en effet, qu'à chaque point m correspondent deux points M, M_1, symétriquement placés par rapport au pôle. Pour plus de simplicité, nous prendrons positivement le radical. Posant donc

$$k = +\sqrt{u^2 - v^2}, \tag{10}$$

en sorte que k, soit la *distance de l'origine à la normale* mn, nous avons

$$X = \frac{vx - lu^2}{k}, \quad Y = \frac{vy - mu^2}{k}, \quad Z = \frac{vz - nu^2}{k}. \tag{11}$$

3. *Axe des points correspondants.* — Pour passer du point m au point correspondant M (fig. 1), il suffit de faire exécuter, au premier point, un quart de révolution autour d'une droite OA, perpendiculaire au *plan normal n*O*m*.

Afin d'abréger, nous dirons que cette droite est l'*axe du plan normal*, ou l'*axe des points correspondants*.

Soient α, β, γ les cosinus des angles formés par OA avec les axes de coordonnées. L'équation (7) donne, immédiatement,

$$\frac{\alpha}{ny - mz} = \frac{\beta}{lz - nx} = \frac{\gamma}{mx - ly} = \frac{1}{\sqrt{(ny - mz)^2 + (lz - nx)^2 + (mx - ly)^2}}.$$

La quantité placée sous le radical peut être mise sous la forme

$$(l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (lx + my + nz)^2 = u^2 - v^2 = k^2;$$

donc

$$\frac{\alpha}{ny - mz} = \frac{\beta}{lz - nx} = \frac{\gamma}{mx - ly} = \frac{1}{k}. \tag{12}$$

4. *Perpendiculaire à la normale.* — Lorsque la normale mn a fait un quart de révolution autour de l'axe OA (fig. 1), elle vient prendre la position MN. Soient L, M, N les cosinus qui déterminent cette nouvelle droite. A cause des relations évidentes

$$lL + mM + nN = 0, \tag{13}$$

$$\alpha L + \beta M + \gamma N = 0, \tag{14}$$

nous avons

$$\frac{L}{m\gamma - n\beta} = \frac{M}{n\alpha - l\gamma} = \frac{N}{l\beta - m\alpha}.$$

Mais

$$m\gamma - n\beta = \frac{1}{k}\left[m(mx - ly) - n(lz - nx)\right] = \frac{x - vl}{k};$$

donc

$$\frac{L}{x - vl} = \frac{M}{y - vm} = \frac{N}{z - vn} = \frac{1}{k}: \tag{15}$$

en effet

$$k^2 = (x - vl)^2 + (y - vm)^2 + (z - vn)^2.$$

5. Théorème. — *Les normales aux surfaces* s, S, *en deux points correspondants* m, M, *sont contenues dans le plan des rayons vecteurs* **Om, OM.** *De plus, chacune d'elles est perpendiculaire à l'autre. Enfin, ces deux droites sont également distantes du pôle* (*).

Pour établir cette proposition fondamentale, il suffit de vérifier que la droite MN, considérée tout à l'heure, est normale, en M, à la surface S, ou que l'on a, *identiquement*,

$$LdX + MdY + NdZ = 0. \tag{16}$$

Or,

$$k \sum LdX = \sum (x - vl)\, dX = d\left[\sum (x - vl)\, X\right] - \sum X d(x - vl) \quad (^{**}).$$

De plus, à cause des relations (2), (3), (4), (6), (8) et (11) :

$$\sum (x - vl)\, X = -v \sum lX = vk,$$

$$\sum X d(x - vl) = \frac{1}{k} \sum (vx - lu^2)(dx - vdl - ldv) = \frac{1}{k}(vudu - 2v^2dv + u^2dv) = d(vk);$$

(*) La troisième propriété résulte des deux premières.

(**) Suivant l'usage, la lettre Σ désigne une somme de quantités qui se déduisent les unes des autres par une permutation tournante.

donc
$$\sum L dX = 0 \ (^*).$$

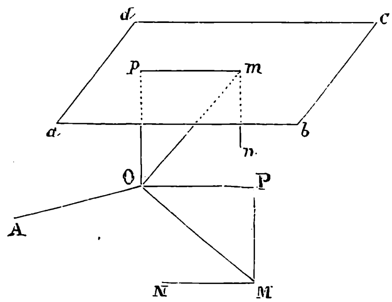
6. Corollaire. — *La surface* s *se déduit de la surface* S *comme celle-ci a été déduite de la première.*

Pour cette raison, nous dirons, désormais, que les deux surfaces sont *conjuguées.*

II. — Exemples de surfaces et de lignes conjuguées.

7. *Conjuguée d'un plan.* — Si la surface s est un plan $abcd$ (fig. 2), le plan normal Omn contient la perpendiculaire Op à s. Conséquemment, lorsque le triangle rectangle Opm a tourné autour de l'axe OA, perpendiculaire à $Opmn$, la droite Op vient se placer en OP, parallèlement à pm, et pm devient PM, perpendiculaire au plan $abcd$. De là résulte que :

Fig. 2.



La surface conjuguée d'un plan est un cylindre de révolution, dont l'axe est la perpendiculaire abaissée du pôle sur le plan, et dont le rayon de la section droite est égal à cette perpendiculaire.

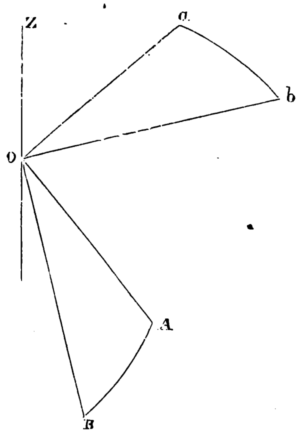
8. Réciproquement, *si la surface* s *est un cylindre de révolution, dont l'axe passe par le pôle, la surface conjuguée* S *se compose de deux plans parallèles, perpendiculaires à l'axe, symétriquement placés par rapport au pôle, et dont la distance à ce point est égale au rayon du cylindre.*

9. *Cas particulier.* — *Le lieu conjugué d'un plan passant au pôle est la perpendiculaire au plan, menée par le pôle;* et réciproquement.

(*) Au commencement de 1860, croyant le théorème nouveau, je le communiquai à M. Chasles, pendant une séance de l'Académie des sciences. M. Bertrand, présent à l'entretien, m'apprit qu'il avait donné ce théorème dans son cours, au Collége de France. La démonstration proposée par M. Bertrand se trouve dans le *Traité de calcul différentiel,* publié par ce géomètre.

10. *Conjuguée d'une surface de révolution.* — Soit *s* une pareille surface, ayant *ab* pour section méridienne (fig. 3), et dont l'axe **OZ** passe par le pôle. Si l'on fait exécuter un quart de révolution à *ab*, de manière à l'amener en **AB**, cette ligne **AB**, contenue dans le plan *ab***OZ**, appartient à la surface S. Donc :

Fig. 3.

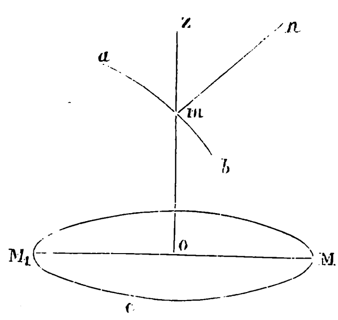


La surface S, *conjuguée d'une surface de révolution* s, *dont l'axe passe au pôle, est une seconde surface de révolution, ayant même axe que la première. De plus, les sections méridiennes des deux surfaces sont égales, et l'on obtient la seconde en faisant exécuter à la première, autour du pôle, un quart de révolution.*

Par exemple, *la conjuguée d'un ellipsoïde de révolution allongé, ayant pour centre le pôle, est un ellipsoïde de révolution aplati; la conjuguée d'un hyperboloïde de révolution, à une nappe, et dont le centre est au pôle, est un hyperboloïde de révolution, à deux nappes; la conjuguée d'une sphère est un tore; la conjuguée d'un tore dont le centre est au pôle se compose de deux sphères égales; la conjuguée d'un tore dont l'axe passe par le pôle se compose du système de deux tores égaux;* etc.

11. *Conjuguée d'un point.* — Soit *m* (fig. 4) un point de l'espace. Ce point *isolé* appartient à une infinité de surfaces, dont les normales sont toutes les droites *mn* passant en *m*. Si, dans le plan O*mn*, on prend **OM** égale et perpendiculaire à O*m*, le point **M** correspond à *m*; et, si ce plan tourne autour de O*m*, le point **M** décrit une circonférence C, dont l'axe est O*m*. Par conséquent :

Fig. 4.

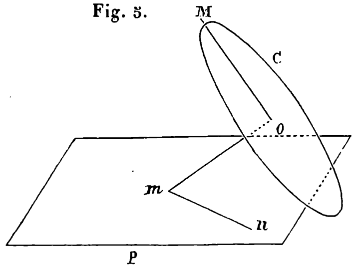


Le lieu conjugué d'un point isolé m *est la circonférence* C *décrite du pôle* O *comme centre, avec un rayon égal à* O*m*, *dans le plan perpendiculaire à* O*m* (*).

(*) On arrive au même résultat en regardant *m* comme une sphère dont le rayon est nul : le tore conjugué (10) se réduit à la circonférence C.

12. *Conjuguée d'une ligne.* — Le lieu des normales mn (fig. 4) à une ligne ab, en un point m, est le plan normal à ab.

Fig. 5.



Soit p ce plan (fig. 5) qui, généralement, ne contient pas le pôle. Si, par mO, on fait passer un plan quelconque Q, il coupe p suivant une droite mn, normale correspondante.

Dans le plan Q, prenons OM égale et perpendiculaire à OM : M correspond à m. Or, pour trouver toutes les normales telles que mn, on doit faire exécuter une révolution complète au plan Q; donc la conjuguée du point m, considéré comme appartenant à la ligne ab, est encore la circonférence C. Par suite :

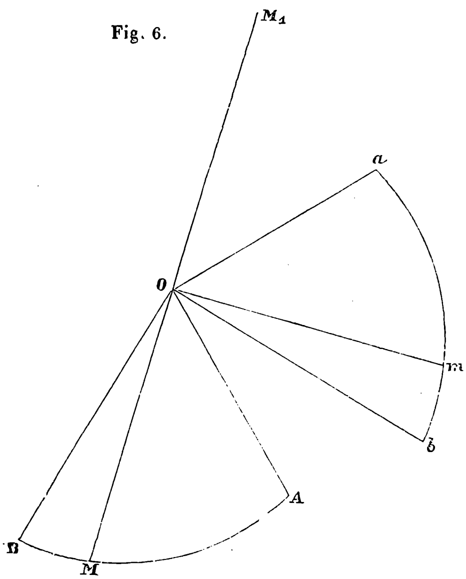
La conjuguée d'une ligne l *est la surface* Σ *engendrée par la circonférence* C, *conjuguée d'un point quelconque de* l.

Cette surface Σ, étant coupée suivant un cercle par tout plan passant au pôle, peut être désignée sous le nom de *surface cyclique.*

13. *Remarque.* — Si le plan normal p contenait le pôle, la circonférence C serait remplacée par *deux points,* situés dans ce plan, et symétriques relativement au pôle. En particulier, *le lieu conjugué d'une circonférence* c, *dont le centre est au pôle, se réduit à deux points, situés sur l'axe de la circonférence, à des distances du centre égales au rayon.*

14. *Conjuguée d'une ligne plane.* — Supposons que la ligne ab (fig. 6) soit située dans un plan passant au pôle, et prenons ce plan pour celui de la figure.

Fig. 6.



La conjuguée d'un point quelconque m est une circonférence projetée suivant la droite MM_1 perpendiculaire à Om (12). D'ailleurs, le lieu du point M est la ligne AB obtenue en faisant effectuer à ab un quart de révolution. Donc :

La surface cyclique Σ, *conjuguée d'une ligne* l *située dans un même plan avec le pôle, est en même temps une* *surface cyclotomique* (*); *les directrices sont la perpendiculaire au plan, menée par le pôle, et la ligne* l, *après qu'elle a tourné autour de cette perpendiculaire.*

15. *Transformée d'une intersection.* — Soit une ligne l, intersection de deux surfaces, s, s', dont les conjuguées sont S, S'. La normale à s, en chaque point m de l, est normale à l; donc le lieu du point M de S, correspondant à m, appartient à la surface cyclique Σ, conjuguée de l (12). Par conséquent :

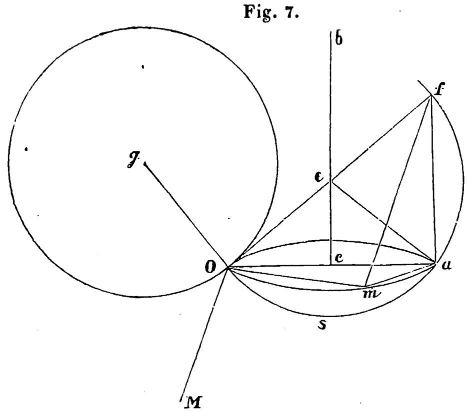
Une ligne l, *intersection de deux surfaces* s, s', *a deux transformées* L, L' : *la première est l'intersection de la conjuguée* S *de* s *avec la conjuguée* Σ *de* l (considérée isolément); *la seconde est l'intersection de* Σ *avec la conjuguée* S' *de* s'.

16. *Seconde génération de la surface cyclotomique.* — La propriété qui vient d'être démontrée appartient à toutes les surfaces que l'on peut faire passer par la ligne donnée l; donc :

La surface cyclique Σ, *conjuguée d'une ligne donnée* l, *est le lieu de la ligne* L *qui correspond à* l *sur la conjuguée* S *d'une surface quelconque* s *passant par* l.

17. Exemple : Supposons que la ligne l soit une circonférence Oma

Fig. 7.



(fig. 7), passant au pôle. Si, d'un point quelconque e, pris sur l'axe de cette ligne, comme centre, avec eO pour rayon, on construit une sphère s, elle contient la circonférence l. D'ailleurs, la conjuguée S de s est le tore engendré par la circonférence g, dont le rayon Og est égal et perpendiculaire à Oe, tournant autour de Oe (10).

Soit m un point quelconque de la circonférence donnée, point qui appartient à s. Pour trouver, sur S, le point M correspondant à m, il faut, dans le plan eOm, mener OM égale et perpendiculaire à Om : en effet, le rayon Om est normal à la sphère.

(*) Les surfaces cyclotomiques sont engendrées par une circonférence dont le centre est fixe, et qui s'appuie sur une droite fixe, passant par le centre donné, et sur une autre directrice donnée (*Traité élémentaire de géométrie descriptive*, p. 112; *Mélanges mathématiques*, p. 170).

Or, si l'on joint le point m à l'extrémité a du diamètre Oca, par la corde ma; que l'on élève af perpendiculaire au plan du cercle; que l'on prolonge cette droite jusqu'à sa rencontre, en f, avec Oe; et qu'enfin l'on mène la droite mf, cette ligne, d'après un théorème connu, est perpendiculaire à Om. Ainsi, *le rayon vecteur* OM, égal à Om, *est parallèle à* fm. Et comme le lieu des droites mf est le cône qui a pour sommet f et pour base la circonférence donnée, il s'ensuit que *la ligne* L, *correspondant à* l *sur le tore* S, *est l'intersection de ce tore avec un cône du second degré,* égal à celui dont il vient d'être question.

De plus, *la cyclotomique* Σ *à directrice circulaire, conjuguée de la circonférence* l, *est le lieu de l'intersection d'un tore et d'un cône du second degré, variables.*

18. Si l'on rapporte ces deux surfaces à trois axes rectangulaires passant par le pôle, on trouve aisément qu'elles peuvent être représentées par

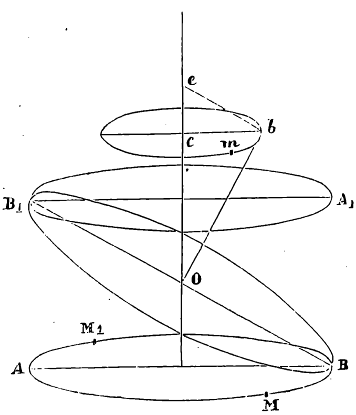
$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = 4\left[(hX - aZ)^2 + (a^2 + h^2)Y^2\right], \quad h(X^2 + Y^2) = aXZ:$$

a est le rayon Oc, h représente l'ordonnée ce du centre de la sphère. L'élimination de h conduit à l'équation

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)(X^2 + Y^2) = 4a^2Y^2, \tag{17}$$

laquelle représente la cyclotomique Σ (*).

Fig. 8.



19. *Remarque.* — Quand la ligne l est une circonférence dont l'axe passe au pôle, le Théorème ci-dessus (16) est en défaut: quelle que soit la sphère s, la transformée de l, sur le tore conjugué S, se compose du système de deux circonférences *fixes* BA, B_1A_1 (fig. 8) que l'on obtient en menant, dans le plan *méridien* bOc, les droites OB, OB_1 égales et perpendiculaires à Ob, et en faisant tourner BB_1 autour de Oe. Quant à la cyclotomique Σ, conjuguée de la circonférence donnée, elle se

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 175.

réduit à la *zone sphérique engendrée par la circonférence* BB_1, *conjuguée du point* b (11).

La cause de cette exception est visible : *les normales à toutes les sphères* s, *en un même point* m, *étant contenues dans le plan* mOe, *la transformée de* l, au lieu d'être une circonférence, *se compose de deux points* M, M_1 (13).

20. Théorème. — *Si deux surfaces* s, s′ *se touchent en un point* m, *leurs conjuguées* S, S′ *se touchent au point* M *correspondant à* m.

En effet, les normales en M, aux surfaces S, S′, coïncident.

21. Corollaire. — *Quand deux surfaces se touchent suivant une ligne* l, *leurs conjuguées se touchent suivant la transformée unique de* l.

Par exemple, soit un plan *p* touchant un tore *t* suivant un parallèle moyen *l* : le cylindre de révolution C, conjugué de *p*, touchera les tores T, T_1, conjugués de *t* (7, 10) suivant une certaine ligne L, transformée de *l*, soit sur le cylindre *c*, soit sur le système des deux tores. Nous verrons, plus loin, de quelle nature est cette ligne L.

22. Théorème. — *La conjuguée* S_1 *de l'enveloppe* s_1 *d'une surface* s, *est l'enveloppe de la surface* S *conjuguée* de *s ;* ou, sous une forme plus concise :

La conjuguée de l'enveloppe est l'enveloppe de la conjuguée.

23. Corollaires. — 1° *La conjuguée* S *d'une surface développable* s, *enveloppe d'un plan* p, *est l'enveloppe du cylindre de révolution qui a* p *pour conjuguée* (8);

2° *La conjuguée d'une ligne droite* d *est l'enveloppe du cylindre de révolution dont l'axe est la perpendiculaire abaissée du pôle sur un plan quelconque* p *passant par* d (7), *et qui a pour rayon la distance du pôle au plan. De plus, cette surface conjuguée est une cyclotomique à directrice rectiligne* (14);

3° *La conjuguée* C *d'un cylindre de révolution* c, *enveloppe d'une sphère* s, *est l'enveloppe du tore* S, *conjugué de* s : *cette surface* C *est*, en *même temps, l'enveloppe d'un cylindre de révolution* (10);

4° *La conjuguée d'un cône* c *dont le sommet est pris pour pôle, est le cône* C *supplémentaire de* c (*);

(*) En effet, la conjuguée de tout plan *p*, tangent à *c*, est la perpendiculaire à *p*, menée par le pôle (9).

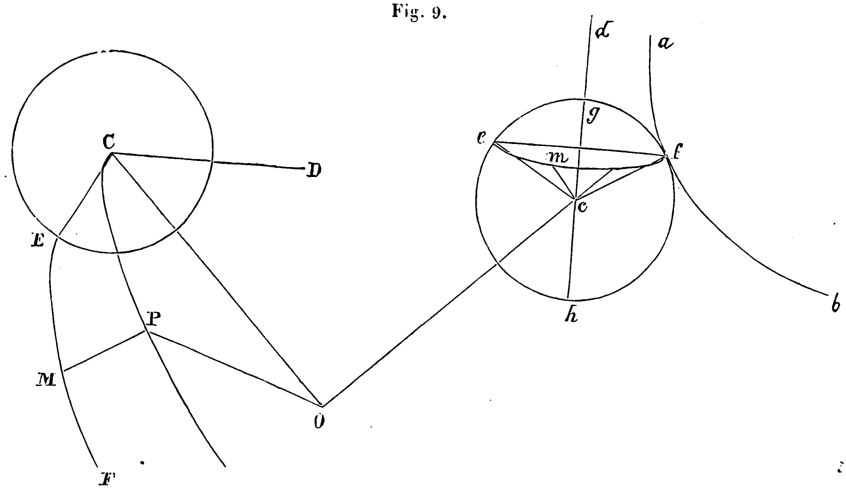
5° *La conjuguée d'une surface de révolution* s, *située d'une manière quelconque par rapport au pôle, est l'enveloppe d'une série de tores dont le centre commun est au pôle* (*);

6° *Plus généralement, la conjuguée d'une surface-canal est l'enveloppe d'une suite de tores;*

7° *En particulier, la conjuguée d'un tore quelconque est l'enveloppe d'une suite de tores* T *dont le centre commun est au pôle, dont les sections méridiennes sont égales, et dont les axes sont les génératrices d'un cône à base circulaire* (**).

24. *Conjuguée d'une surface de révolution.* — Nous pouvons compléter, comme il suit, ce que nous venons de dire à ce sujet.

Fig. 9.



Par le pôle et par l'axe *cd* de la surface donnée *s* (fig. 9), faisons passer le plan O*cd ;* soient *afb* la section méridienne qu'il détermine dans *s*, et *efgh* la circonférence de grand cercle suivant laquelle ce plan coupe une des sphères enveloppées. Soit encore *emf* le petit cercle de contact entre *s* et cette sphère *c*.

Dans le plan O*cd*, que nous pouvons considérer comme un *plan méridien*

(*) Pour démontrer cette proposition, il suffit de rappeler que *toute surface de révolution est l'enveloppe d'une sphère*, et que la conjuguée d'une sphère est un tore ayant pour centre le pôle.

(**) D'après le n° 10, si l'axe du tore donné passe par le pôle, l'enveloppe dont il s'agit se réduit au système de deux tores. C'est ce qu'il est facile de vérifier.

principal, prenons OC égale et perpendiculaire à O*c*, menons CD perpendiculaire à *cd*, et décrivons la circonférence CE, égale à *ce*.

En tournant autour de O*c*, cette circonférence CE engendre un tore T, enveloppé par la conjuguée S de *s*. On voit déjà que *les centres des sections méridiennes principales de tous les tores* T *sont situés sur la droite* CD.

La ligne conjuguée de *c* est la circonférence CP décrite du point O comme centre, avec CO pour rayon, dans le plan perpendiculaire à O*c* (11) : *cette circonférence est, en même temps, le lieu des centres des sphères dont l'enveloppe est le tore* T.

Par un point quelconque P de CP, et par l'axe O*c* du tore, faisons passer le plan PO*c*; soit *m* le point où ce plan coupe le *parallèle emf*. Si, dans ce même plan, on prend PM égale et perpendiculaire au rayon *cm*, le point M, situé sur la sphère dont le centre est en P, sera le point qui, sur le tore T, correspond à *m*. Autrement dit, la ligne EMF, lieu du point M, est la transformée de la circonférence *emf*, ou la *génératrice de l'enveloppe* S. Cette génératrice a d'ailleurs, pour *ligne diamétrale*, la circonférence CP; car chaque point P donne deux points M, M_1, symétriquement placés par rapport à P. De plus, *la corde* MM_1 *étant contenue dans le plan* PO*c*, *est normale à la circonférence* CD.

25. *Conjuguée d'une cyclide.* — Soit une sphère *s*, tangente à trois sphères données, s_1, s_2, s_3. Les conjuguées respectives sont des tores T, T_1, T_2, T_3, ayant pour centre commun le pôle (10).

On sait que l'enveloppe de *s* est une *cyclide c* (*); donc, d'après le dernier théorème (22), *la conjuguée de la cyclide* c *est l'enveloppe du tore* T.

26. *Cas particulier.* — Si les centres des sphères données sont sur une droite passant au pôle, la cyclide *c* se réduit à un tore *t* (**) dont l'axe est cette même droite; et, par conséquent (10), la conjuguée de *t* se compose de

(*) Voir, par exemple, un intéressant mémoire de M. Mannheim (*Nouvelles Annales de mathématiques*, t. XIX). Nous espérons pouvoir revenir, plus tard, sur la *discussion de la cyclide*. Quant à présent, nous ferons seulement cette remarque :

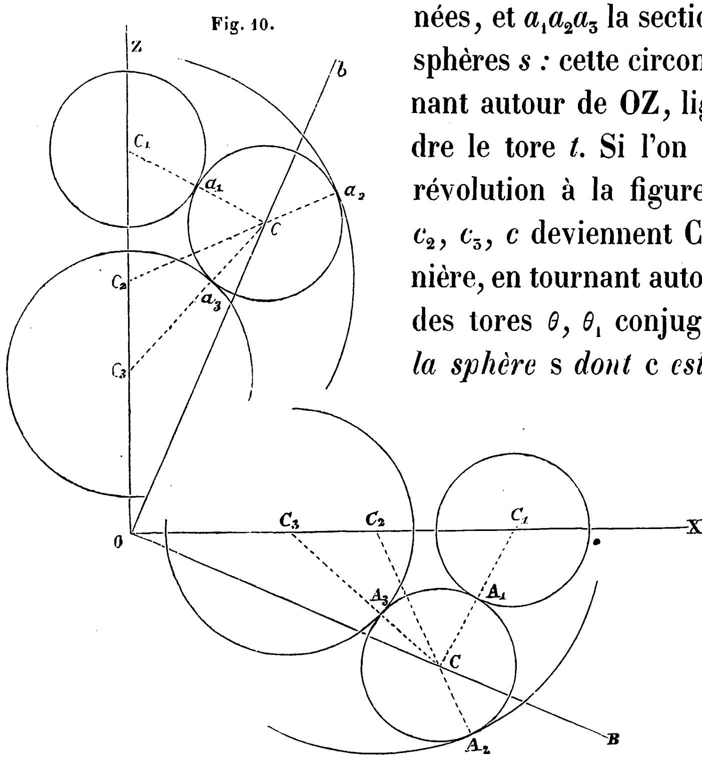
La cyclide pouvant, de deux manières différentes, être considérée comme l'enveloppe d'une série de sphères tangentes à trois sphères données (Mannheim), il s'ensuit que *la conjuguée de la cyclide est l'enveloppe commune de deux séries de tores tangents à trois tores.*

(**) Plus exactement, l'enveloppe de ces sphères se compose de *quatre tores* : chacun d'eux est une nappe de la cyclide (Mannheim).

deux tores égaux, θ, θ_1. Donc, dans ce cas particulier, *l'enveloppe du tore* T *est le système de huit tores, égaux deux à deux, ayant même centre et même axe.*

Soient c_1a_1, c_2a_2, c_3a_3 (fig. 10) les sections méridiennes des sphères données, et $a_1a_2a_3$ la section méridienne d'une des sphères s : cette circonférence $a_1a_2a_3$, en tournant autour de OZ, ligne des centres, engendre le tore t. Si l'on fait opérer un quart de révolution à la figure, les circonférences c_1, c_2, c_3, c deviennent C_1, C_2, C_3, C : cette dernière, en tournant autour de OZ, engendre l'un des tores θ, θ_1 conjugués, *non-seulement de la sphère* s *dont* c *est le centre, mais encore de toutes les sphères, égales à celles-ci, qui touchent les sphères données.* En effet, tout est symétrique autour de OZ.

Fig. 10.



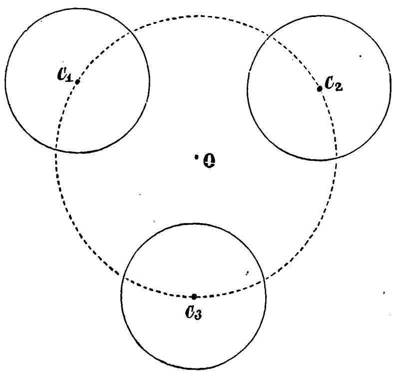
Quant au tore T, conjugué de la sphère s, il serait engendré par la circonférence C tournant autour de Oc : à chaque position de cette droite correspond un tore T qui touche, *suivant la section méridienne commune* A_1 A_2 A_3, le tore θ. De même, le tore variable T et le tore θ_1, symétrique de O relativement au pôle, se touchent suivant une section méridienne commune. Enfin, les axes de tous les tores T sont les génératrices d'un cône de révolution.

27. *Autre cas particulier.* — Supposons que les sphères données soient égales, et prenons pour pôle le centre O de la circonférence qui passe par les centres c_1, c_2, c_3 (fig. 11) (*). Soit t le tore *circonscrit* aux trois sphères.

(*) Si le plan $c_1\, c_2\, c_3$ est supposé *horizontal*, le centre O est la projection horizontale de la droite OZ, *axe* de la circonférence $c_1\, c_2\, c_3$; et cet axe est le lieu des points tels, que chacun d'eux soit également distant des centres c_1, c_2 c_3.

Il est visible que toute sphère s, qui touche ce tore suivant un parallèle, est tangente aux sphères données. Ainsi déjà, *une des nappes de la cyclide* c *se réduit au tore* t.

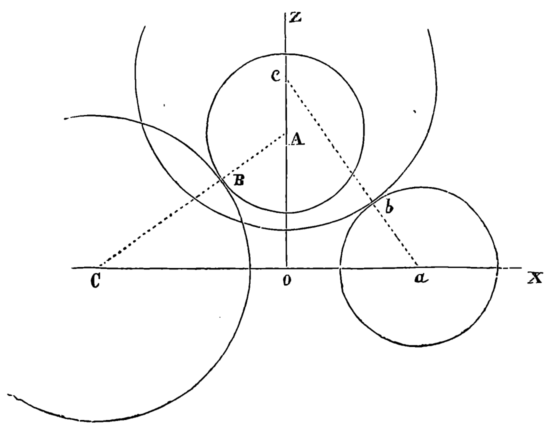
Fig. 11.



Soient ab, bc (fig. 12) les sections méridiennes de t et de s. Faisons exécuter un quart de révolution à ces circonférences, de manière à les amener en AB et BC. La conjuguée du tore t se compose de la sphère engendrée par AB tournant autour de OZ, et d'une seconde sphère, symétrique de la première relativement au pôle (10).

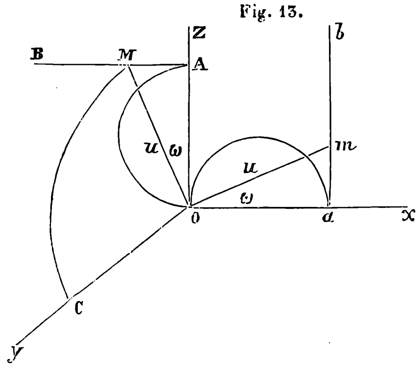
La conjuguée de la sphère s est le tore T qui a CB pour section méridienne. Par conséquent, *la conjuguée d'une des nappes de la cyclide déterminée par trois sphères égales, se compose de deux sphères égales aux premières, et dont les centres, situés sur l'axe de la circonférence qui passe par les trois centres donnés, sont à des distances du centre de celle-ci, égales au rayon de cette même circonférence.*

Fig. 12.



28. *Remarque.* — Dans la figure 12, *le tore* ab, *enveloppe des sphères* bc, *a pour conjuguée la sphère* AB, *enveloppe des tores* BC. *Le tore et la sphère sont donc,* pour ainsi dire, *des surfaces doublement conjuguées.*

Fig. 13.



28. *Équation de la conjuguée d'une droite.* — Par le pôle O (fig. 13), menons Ox perpendiculaire à la droite donnée ab, Oz parallèle à ab, puis Oy perpendiculaire à ces deux premiers axes. Faisons ensuite tourner ab autour de Oy, de manière que cette ligne prenne la position AB. La conjuguée cherchée est la surface

cyclotomique ayant Oy et AB pour directrices (14). Or, si d désigne la distance Oa, et que u, ω soient les coordonnées polaires des points correspondants m, M, on a

$$d = u \cos \omega. \tag{18}$$

De plus, les équations de la circonférence MC sont :

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2, \quad -x = z \operatorname{tg} \omega.$$

Éliminant u et ω, on trouve

$$(x^2 + y^2 + z^2) z^2 = d^2 (x^2 + z^2). \tag{19}$$

Telle est l'*équation de la cyclotomique à directrice rectiligne, conjuguée de la droite* ab.

29. *Remarque.* — Cette surface est plus simplement représentée par l'équation (18).

30. Si, sur Oa comme diamètre, et dans le plan zx, on décrivait une circonférence, la conjuguée de cette ligne serait la *cyclotomique à directrice circulaire,* représentée par

$$u_1 = d \cos \omega. \tag{20}$$

Or, à cause de $uu_1 = d^2$, la circonférence Oa et la droite ab sont, comme l'on sait, deux figures *réciproques ;* et il en est de même pour les deux cyclotomiques (*). Ainsi, dans ce cas particulier, *les conjuguées de deux figures réciproques sont réciproques.* On verra, plus loin, que cette propriété est générale.

31. *Autre génération de la cyclotomique à directrice rectiligne.* — On sait que *cette surface est l'enveloppe d'un cylindre de révolution* (23, 2°). Voici comment l'on peut vérifier cette propriété, et retrouver l'équation (19).

Équation d'un plan p *passant par* ab :

$$y = m(x - d).$$

Distance du pôle au plan p :

$$R = \frac{dm}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 188. L'équation (20), qui équivaut à $(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + z^2) = d^2 z^2$, ne diffère donc pas, au fond, de l'équation (17).

Équations de la section droite du cylindre :

$$y = mx, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{d^2m^2}{1 + m^2}.$$

Équations d'une génératrice :

$$y = -\frac{1}{m}(x - \alpha), \quad z = \gamma.$$

Équation de condition :

$$\alpha^2 + (1 + m^2)\gamma^2 = d^2m^2.$$

Équation du cylindre :

$$(my + x)^2 + (1 + m^2) z^2 = d^2m^2,$$

ou

$$(y^2 + z^2 - d^2) m^2 + 2mxy + x^2 + z^2 = 0. \tag{21}$$

L'équation de l'enveloppe est donc

$$x^2y^2 = (y^2 + z^2 - d^2)(x^2 + z^2),$$

ou

$$(x^2 + y^2 + z^2) z^2 = d^2(x^2 + z^2);$$

comme ci-dessus (28).

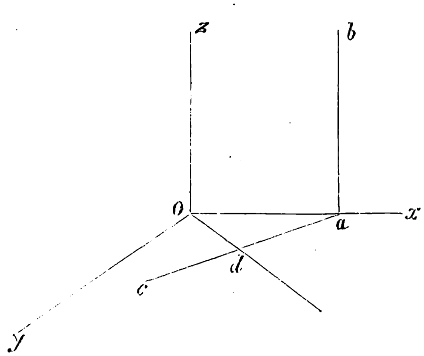
32. *Remarque.* — Si la surface est éclairée par des rayons perpendiculaires au plan p, l'*ombre portée* sur ce plan est un cercle. Quant à la *ligne de séparation d'ombre et de lumière,* elle est représentée par l'équation (21), jointe à

$$(y^2 + z^2 - d^2) m + xy = 0,$$

relation que l'on peut remplacer par

$$mxy + x^2 + z^2 = 0. \tag{22}$$

Fig. 14.



ac étant la trace du plan p, (fig. 14) soit Od une perpendiculaire à ac.

L'équation (21) représente le cylindre de révolution dont l'axe est od, et dont le rayon de la section droite est égal à la distance od.

Quant à l'équation (22), elle représente un cône ayant pour sommet le pôle, et pour génératrices *principales* les droites Od, Oy. De plus, les sections du cône, parallèles au plan zx, sont des cercles. L'intersection de ces deux surfaces variables est la ligne cherchée, génératrice de la cyclotomique. Cette ligne a pour projection, sur le plan de xy, l'hyperbole équilatère représentée par

$$(y - mx)\left(y + \frac{x}{m}\right) = d^2;$$

etc.

33. *Conjuguée d'une surface développable* s. — Cette conjuguée S, dont la cyclotomique à directrice rectiligne est un cas particulier, est l'enveloppe d'un cylindre de révolution C (23, 1°).

Pour reconnaître la nature de cette enveloppe, considérons une génératrice quelconque g de la surface s. La conjuguée de g est la cyclotomique Σ dont nous venons de parler. D'un autre côté, la conjuguée du plan p, tangent à s suivant g, est le cylindre C. Donc la génératrice G de l'enveloppe cherchée S est la ligne commune à ce cylindre et à la surface Σ.

Si la génératrice g et le plan p sont rapportés à trois axes rectangulaires, choisis comme on l'a vu ci-dessus (28, 31), les équations du cylindre et de la cyclotomique seront :

$$(y^2 + z^2 - d^2)\,m^2 + 2mxy + x^2 + z^2 = 0, \tag{21}$$
$$(x^2 + y^2 + z^2)\,z^2 = d^2\,(x^2 + z^2). \tag{19}$$

Éliminant y, on trouve que l'équation résultante peut être mise sous la forme

$$\left[x^2(d^2 - z^2)\,m^2 - z^2\,(x^2 + z^2)\right]^2 = 0.$$

Par conséquent, *le cylindre touche la cyclotomique suivant la génératrice* G, ce que l'on savait (31).

34. *Remarque.* — Les normales à la surface S, en tous les points de la génératrice G, rencontrent l'axe du cylindre C : *le lieu de ces normales est donc un conoïde droit.*

35. *Équation de la conjuguée* S. — Dans chaque cas particulier, on pourra d'abord écrire ainsi l'équation du plan p :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \lambda\,; \tag{25}$$

λ est un paramètre variable, et les fonctions α, β, γ vérifient la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

La génératrice rectiligne g est représentée par l'équation (23), jointe à

$$x\frac{d\alpha}{d\lambda} + y\frac{d\beta}{d\lambda} + z\frac{d\gamma}{d\lambda} = 0.$$

D'un autre côté, le cylindre C a pour équation, comme on le vérifie aisément :

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - \lambda^2. \tag{24}$$

Donc l'équation cherchée résulte de l'élimination de λ entre (24) et

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)\left(X\frac{d\alpha}{d\gamma} + Y\frac{d\beta}{d\lambda} + Z\frac{d\gamma}{d\lambda}\right) = -\lambda. \tag{25}$$

36. *Conjuguée d'un cylindre elliptique.* — Supposons, par exemple, que la surface s soit le cylindre représenté par

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Dans ce cas, l'équation (24) est

$$X\cos\lambda + Y\sin\lambda = \sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda},$$

et l'équation (25) :

$$(X\cos\lambda + Y\sin\lambda)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - a^2\cos^2\lambda - b^2\sin^2\lambda,$$

ou

$$(X^2 - Y^2 + a^2 - b^2)\cos 2\lambda + 2XY\sin 2\lambda = X^2 + Y^2 + 2Z^2 - a^2 - b^2. \tag{26}$$

Prenant la dérivée par rapport à λ, l'on obtient

$$(X^2 - Y^2 + a^2 - b^2)\sin 2\lambda - 2XY\cos 2\lambda = 0; \tag{27}$$

après quoi l'élimination de λ conduit à

$$(X^2 - Y^2 + a^2 - b^2)^2 + 4X^2Y^2 = (X^2 + Y^2 + 2Z^2 - a^2 - b^2)^2,$$

relation que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{X^2}{b^2 - Z^2} + \frac{Y^2}{a^2 - Z^2} = 1. \tag{28}$$

37. *Discussion.* — La surface S, représentée par cette équation (28), est assez curieuse : elle est coupée, par les plans ZX, ZY, suivant des parallèles au plan des XY, et suivant des circonférences ayant le pôle pour centre commun, et dont les rayons sont, respectivement, b, a. Les lignes de niveau et les lignes de plus grande pente, relatives au plan des XY, se projettent, sur ce plan, suivant des coniques homofocales. De plus, les lignes de contact de la surface avec les cylindres de révolution dont elle est l'enveloppe sont projetées, sur ce même plan, suivant des hyperboles équilatères passant toutes aux foyers des coniques dont il vient d'être question : cette propriété résulte de l'équation (27).

Enfin, si l'on écrit ainsi l'équation (28) :

$$\frac{a^2X^2}{u^2-a^2}+\frac{b^2Y^2}{u^2-b^2}=Z^2, \tag{29}$$

on voit que S peut être engendrée par une conique sphérique, variable de forme et de grandeur : la projection *horizontale* de cette courbe est la conique représentée par

$$\frac{X^2}{u^2-a^2}+\frac{Y^2}{u^2-b^2}=1\ (*).$$

38. *Conjuguée d'un cylindre de révolution.* — Ce cylindre s peut être considéré, soit comme l'enveloppe d'un plan, soit comme l'enveloppe d'une sphère. Par conséquent, la surface conjuguée S, enveloppe d'un cylindre de révolution, est aussi l'enveloppe d'un tore (10, 22).

Soit

$$(x-d)^2+y^2=a^2, \tag{30}$$

l'équation du cylindre, l'origine étant au pôle. Un plan tangent quelconque p peut être représenté par

$$x\cos\theta+y\sin\theta=d\cos\theta+a.$$

Par suite, l'équation du cylindre conjugué à p est

$$(X\cos\theta+Y\sin\theta)^2=X^2+Y^2+Z^2-(d\cos\theta+a)^2. \tag{31}$$

(*) La surface S est un cas particulier de la *surface des ondes*.

On tire de celle-ci, en prenant la dérivée,

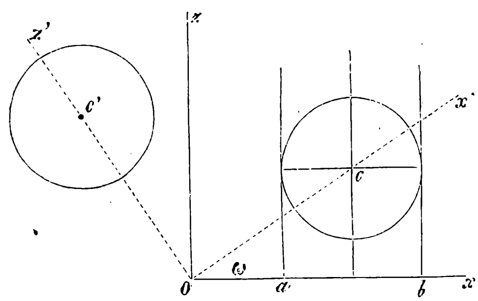
$$(X\cos\theta + Y\sin\theta)(Y\cos\theta - X\sin\theta) = d\,(d\cos\theta + a)\sin\theta. \tag{32}$$

L'ensemble de ces deux équations représente la transformée d'une génératrice quelconque du cylindre. Cette courbe, ligne de contact de deux cylindres consécutifs, se projette donc, sur le plan XY, suivant une hyperbole équilatère.

Pour avoir l'équation de la surface conjuguée, il faudrait éliminer θ entre (31) et (32). Ce calcul paraît laborieux. Au lieu de l'effectuer, nous allons chercher les équations des courbes qui, sur S, correspondent aux *parallèles* du cylindre.

39. La sphère enveloppée par le cylindre a pour équation

Fig. 15.



$$(x - d)^2 + y^2 + (z - d\,\operatorname{tg}\omega)^2 = a^2;$$

ω représentant l'angle variable cOx (fig. 15).

Faisons tourner le grand cercle c autour de l'axe Oy, et amenons-le en c'. Si le cercle c' tourne autour de Ocx', il engendre le tore conjugué de la sphère c. A cause de $Oc' = Oc = \frac{d}{\cos\omega}$, l'équation du tore est, comme l'on sait (*),

$$\left(X'^2 + X^2 + Z'^2 - \frac{d^2}{\cos^2\omega} - a^2\right)^2 = 4\frac{d^2}{\cos^2\omega}(a^2 - X'^2).$$

Mais, si l'on revient aux axes Ox, Oz, on a

$$X' = X\cos\omega + Z\sin\omega, \quad X'^2 + Z'^2 = X^2 + Z^2;$$

donc

$$\left(X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{d^2}{\cos^2\omega} - a^2\right)^2 = 4\frac{d^2}{\cos^2\omega}\left[a^2 - (X\cos\omega + Z\sin\omega)^2\right]. \tag{33}$$

L'équation dérivée est

$$\left.\begin{aligned}&\left(X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{d^2}{\cos^2\omega} - a^2\right)\left(X^2 + Y^2 + Z^2 + \frac{d^2}{\cos^2\omega} - a^2\right)\sin\omega\cos\omega\\ &= 4d^2(X\cos\omega + Z\sin\omega)(Z\cos\omega - X\sin\omega).\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

(*) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. II, p. 91. Cette équation a été employée ci-dessus (18).

Le système de ces deux équations représente la courbe suivant laquelle le tore touche son enveloppe, ou la *transformée de la circonférence génératrice du cylindre donné.*

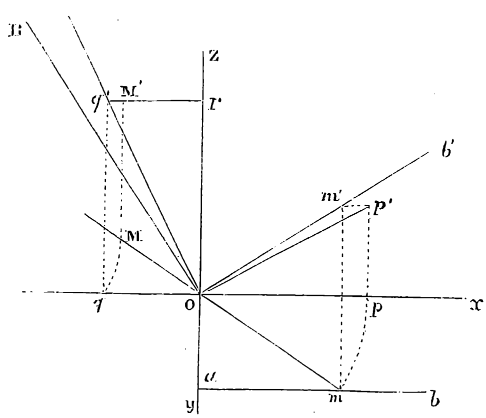
L'élimination de ω conduirait au même résultat que l'élimination de θ entre les équations (31) et (32); mais le nouveau calcul est encore plus compliqué que le premier.

40. *Conjuguée d'une surface gauche.* — On sait que le lieu des normales à une surface gauche s, aux points situés sur une même génératrice g, est un paraboloïde hyperbolique, c'est-à-dire *un conoïde droit, du second degré, ayant* g *pour axe ou pour directrice principale.* La conjuguée S est donc engendrée par la transformée de l'axe d'un pareil conoïde, dont les paramètres varieraient suivant une certaine loi.

Le calcul auquel conduit la recherche de cette transformée étant généralement fort compliqué, nous allons nous borner à l'effectuer dans le cas où s est un hyperboloïde gauche de révolution : la conjuguée S est alors un hyperboloïde de révolution, à deux nappes (10).

Ox (fig. 16) étant, à la fois, un axe des abscisses et une *ligne de terre,* supposons que l'axe de l'hyperboloïde s soit la droite (O, Oz), et que la génératrice *principale* g ait pour projections ab, Ob'. Soient O$a = a$, b'O$x = \theta$.

Fig. 16.



La normale à l'hyperboloïde, en un point quelconque (m, m'), se projette horizontalement suivant mO. Si l'on *rabat* ce point en p'; qu'on fasse tourner le triangle rectangle Opp' autour de O, de manière à l'amener en Orq'; et qu'enfin l'on construise les projections M, M$'$ du point rabattu en q'; ce point (M, M$'$) sera celui qui correspond à (m, m') sur la transformée de la génératrice principale.

Si l'on désigne par α l'angle variable mOy, on a

$$Z = \mathrm{O}r = \mathrm{O}p = \mathrm{O}m = \frac{a}{\cos\alpha}, \quad am = a \operatorname{tg}\alpha, \quad pp' = rq' = a \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\theta;$$

puis

$$X = -a \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta \sin \alpha, \quad Y = -a \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta \cos \alpha.$$

On conclut de ces équations, par l'élimination de α :

$$X^2 + Y^2 - Z^2 \operatorname{tg}^2 \theta = -a^2 \operatorname{tg}^2 \theta, \tag{35}$$

$$X^2 + Y^2 + XZ \operatorname{tg} \theta = 0. \tag{36}$$

Ainsi qu'on pouvait s'y attendre, l'équation (35) représente l'hyperboloïde à deux nappes, conjugué de l'hyperboloïde gauche donné. Quant à l'équation (36), elle appartient à un cône ayant pour traces, sur le plan *principal* Zx, les droites OZ, OB, perpendiculaires à Ox, Ob'. De plus, les sections circulaires de ce cône sont déterminées par des plans respectivement perpendiculaires aux génératrices principales OZ, OB.

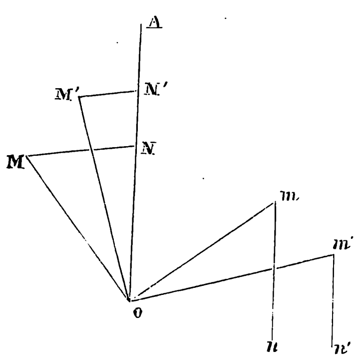
41. *Remarque.* — Le conoïde droit, lieu des normales à l'hyperboloïde gauche, a pour axe la génératrice g; et, pour *seconde directrice*, l'axe des deux hyperboloïdes. De plus, le pôle O est situé sur la commune perpendiculaire à ces deux droites. Donc

Étant donné un conoïde droit, du second degré; si l'on prend pour pôle le point où la seconde directrice d′ *rencontre la commune perpendiculaire aux deux directrices* d, d′; *la transformée de la première directrice* d *est l'intersection d'un hyperboloïde de révolution, à deux nappes, avec un cône du second degré, ayant son sommet au pôle : l'axe de l'hyperboloïde est* d′, *et les plans des sections circulaires du cône sont perpendiculaires, respectivement, à* d *et à* d′.

III. — Points singuliers et lignes singulières.

42. *Transformées de normales parallèles.* — Si, en divers point m, m', ... (fig. 17) de la surface s, les normales mn, $m'n'$, ... sont parallèles, les plans Omn, $Om'n'$, ... se coupent suivant une droite OA, parallèle à toutes ces normales. Conséquemment, *les normales* MN, M′N′, ... *transformées des premières, rencontrent orthogonalement* OA. Autrement dit, *à des plans tangents parallèles, correspondent des plans tangents, parallèles à une même droite.*

Fig. 17.



43. *Remarque.* — Pour que la réciproque soit vraie, *les normales données*, supposées parallèles à un même plan, *doivent couper orthogonalement une droite passant par le pôle.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, les normales à la surface conjuguée se projetant, sur le plan p, suivant des perpendiculaires respectives aux projections des normales données, les premières droites ne pourraient être parallèles entre elles.

Cette réciproque se vérifie pour tous les points de l'axe d'un conoïde droit, si le pôle est pris sur l'axe : dans ce cas, le lieu des normales est le conoïde même, après qu'il a effectué un quart de révolution autour de l'axe (*). De plus, si ce conoïde *normal* a pour équation

$$\frac{y}{x} = f(z), \tag{37}$$

la transformée de l'axe est une courbe située dans le plan directeur passant par le pôle, et représentée, en coordonnées polaires, par

$$\operatorname{tg} \omega = f(u). \tag{38}$$

Soit, par exemple, l'*héliçoïde à plan directeur,* dont l'équation est

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{a} :$$

la relation (37) devient

$$\frac{x}{y} = - \operatorname{tg} \frac{z}{a} \cdot$$

Par conséquent, la transformée de l'axe est la *spirale d'Archimède* représentée par

$$u = a\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \cdot$$

En tous les points de cette courbe, les normales à la surface conjuguée de l'héliçoïde sont parallèles à l'axe : autrement dit, *le plan des* xy *touche la conjuguée suivant cette spirale.*

(*) Il est peut-être bon de faire observer que le théorème sur le *paraboloïde normal* (40) n'est pas applicable à l'axe d'un conoïde : cette droite n'est effectivement pas une génératrice rectiligne de la surface.

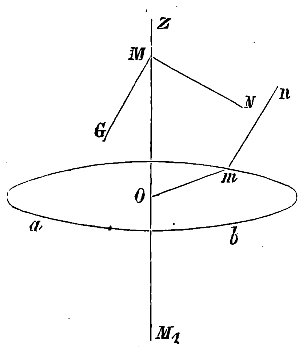
44. *Conjuguée d'une ligne de contact.* — Si les points $m, m', \ldots$ (fig. 17) sont dans un même plan, les points M, M', ... appartiennent à un cylindre de révolution, ayant pour axe OA : le rayon de la section droite égale la distance du pôle au plan (7). Donc

Si la surface s *est touchée, par un plan* p, *suivant une ligne* l, *la surface conjuguée* S *est touchée, suivant une ligne* L, *par le cylindre de révolution conjugué de* p; *et réciproquement* (*).

45. *Cas particulier.* — *Si la ligne* l *est une circonférence dont l'axe passe au pôle, la ligne* L *est une circonférence ayant même axe que la première. De plus, le rayon de l'une est égal à la distance du pôle au plan de l'autre.*

46. *Transformée d'une circonférence.* — Supposons que la surface s admette une circonférence ab (fig. 18), dont le centre soit au pôle. Tous les plans normaux Omn se coupant suivant l'axe OZ de la circonférence, il en résulte (13) que le lieu conjugué de celle-ci se réduit aux points M, M_1 obtenus en prenant, sur l'axe, $OM = OM_1 = Om$. Mais ce n'est pas tout : à chaque normale mn correspond une normale MN; donc M, M_1 *sont des points singuliers de la surface* S : *chacun d'eux est le sommet d'un cône normal et d'un cône tangent.* La réciproque est vraie. Nous appellerons ces points, *points coniques.*

Fig. 18.



47. *Cas particulier.* — Si les normales mn à la surface s, en tous les points de la circonférence ab (fig. 18), sont parallèles à un plan p, menons, par le point M (46), la droite MG parallèle à mn : le lieu de MG est un plan P parallèle à p.

Prenant P pour plan des xy, et le point M pour origine, nous pourrons représenter les droites OM, MG par les équations :

$$\left.\begin{array}{l} y = 0, \\ z = ax; \end{array}\right\} \text{(OM)} \qquad \left.\begin{array}{l} z = 0, \\ y = \alpha x. \end{array}\right\} \text{(MG)}.$$

Il en résulte l'équation du plan OMG :

$$a(y - \alpha x) + \alpha z = 0;$$

(*) Il est sous-entendu que l'axe du cylindre contient le pôle.

puis les équations de MN :

$$a(y-\alpha x)+\alpha z=0,\quad x+\alpha y=0.$$

Enfin, l'élimination de α conduit à

$$a(x^2+y^2)=xz.$$

Ainsi, *le lieu des normales* MN *est un cône du deuxième ordre, coupé suivant des cercles par les plans parallèles à* p, *et dont une des sections principales se compose de la droite* OM *et de la perpendiculaire au plan* p, *menée par le sommet* M (*).

48. L'équation du plan perpendiculaire à MN (fig. 18), mené par le point M, est

$$(x+az)\alpha^2-y\alpha+az=0.$$

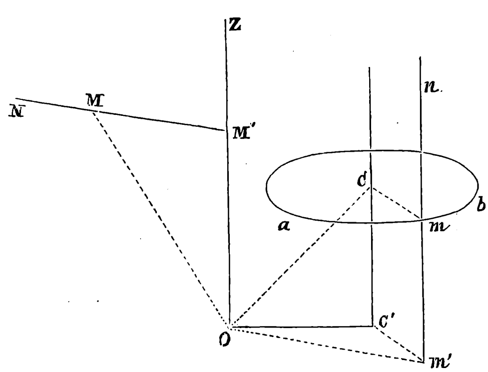
Le *cône tangent* est donc représenté par

$$y^2=4a(x+az)z.$$

49. *Cas particulier.* — Si les normales à la surface s, en tous les points de ab (fig. 18), sont perpendiculaires au plan de cette ligne, *le cône normal* (46), dont le sommet est en M, *se transforme en un plan perpendiculaire à* OM. Quant au *cône tangent, il se réduit à la droite* OM (**).

50. *Autre cas particulier.* — Supposons que les normales mn soient encore parallèles à l'axe cc' (fig. 19) de la circonférence ab suivant laquelle le plan de cette courbe touche la surface s, mais que ce plan ne contienne pas le pôle. Alors tous les plans Omn se coupent suivant une droite OZ parallèle à cc'.

Fig. 19.



Soit m' la projection de m sur un plan parallèle à ab, mené par le pôle. Quand le triangle rectangle O$m'm$

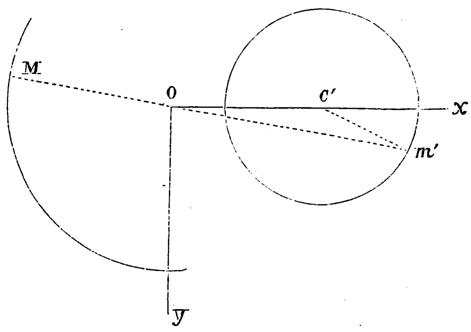
(*) Les plans des autres sections circulaires sont parallèles au plan de la circonférence ab. La transformée de l'hyperboloïde gauche nous a donné des résultats analogues à ceux-ci (40).

(**) Ce que nous disons du point M s'applique, bien entendu, au point M (fig. 18).

exécute un quart de révolution autour du pôle, dans le plan $ZOm'm$, la normale $m'n$ vient se placer en $M'M$, *parallèlement à* Om', *et perpendiculairement à* OZ. Par conséquent, *la transformée de la circonférence* ab *est située sur un cylindre de révolution, dont l'axe* OZ *est perpendiculaire au plan de* ab : *le rayon du cylindre égale la distance du pôle à ce plan. De plus, les normales* MM' *rencontrent* OZ *orthogonalement* (42).

51. Considérant la projection sur le plan $Oc'm'$ (fig. 20), et posant

Fig. 20.



$$cc' = h,\ cm = c'm' = a,\ Oc' = d,\ c'Om' = \theta,$$

nous avons :

$$x^2 + y^2 = h^2,\quad a^2 = d^2 + z^2 - 2dz\cos\theta,$$
$$\cos\theta = -\frac{x}{h};$$

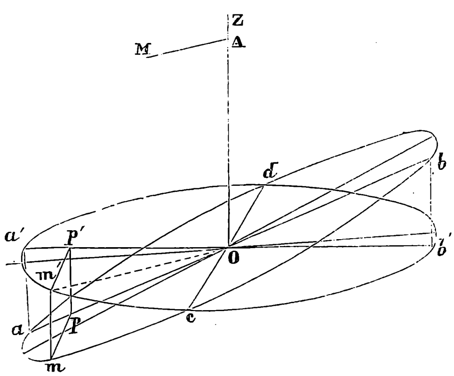
x, y, z étant les coordonnées du point M (fig. 19). Les équations du lieu de ce point sont donc

$$x^2 + y^2 = h^2,\quad z^2 + 2\frac{d}{h}zx + d^2 - a^2 = 0.$$

On voit que ce lieu, c'est-à-dire *la transformée de la circonférence donnée, est l'intersection d'un cylindre de révolution et d'un cylindre hyperbolique.*

52. *Transformée d'une ellipse de contact.* — Soit une surface s, touchée par un cylindre de révolution, suivant une ellipse $abcd$ (fig. 21) dont le centre soit au pôle. Cherchons, sur la surface conjuguée S, la transformée de cette courbe.

Fig. 21.



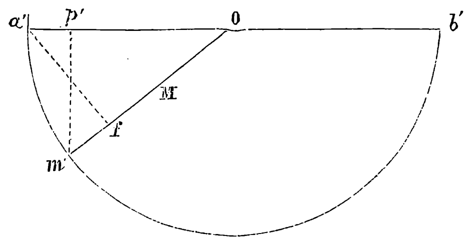
Soit OZ l'axe du cylindre; prenons $OA = Oa' = Om'$: la ligne cherchée est dans un plan perpendiculaire à OZ, passant par le point A. D'un autre côté, la normale au cylindre, en m, serait parallèle au rayon $m'O$. Si donc l'on mène AM parallèle à Om', et égale à mm', le point M correspond à m.

Faisons une projection *horizontale :* il s'agit de trouver (fig. 22) le lieu du point M tel que

$$OM = mm' = pp' = Op' \operatorname{tg} aOa' \text{ (fig. 21).}$$

Abaissons $a'f$ perpendiculaire à Om' (fig. 22). Si l'on avait $OM = Op' = Of$, le lieu cherché serait la circonférence décrite sur Oa' comme diamètre; donc, à cause du facteur constant $\operatorname{tg} aOa'$, *ce lieu est la circonférence qui, passant en* O, *a son centre sur* Oa', *et dont le diamètre égale* aa' (fig. 21). Revenant de la projection à la figure dans l'espace, on conclut que :

Fig. 22.

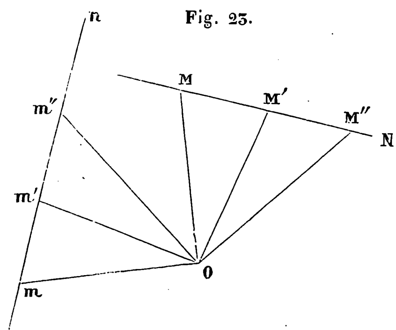


Si la surface s *est touchée, suivant une ellipse ayant son centre au pôle, par un cylindre de révolution dont l'axe contienne le pôle, la surface conjuguée* S *est touchée, par les deux plans conjugués du cylindre* (8), *suivant deux circonférences symétriques relativement au pôle, rencontrant l'axe du cylindre, et dont les plans sont perpendiculaires à l'axe. De plus, si* R *est le rayon de la section droite, et que* α *soit l'inclinaison du plan de l'ellipse sur le plan de la section droite, les diamètres des deux circonférences sont égaux à* $R \operatorname{tg}\alpha$. *Enfin, la distance du pôle aux plans des circonférences est* R.

IV. — Conjuguées de surfaces parallèles, de surfaces podaires, de surfaces réciproques, etc.

53. Théorème. — *Les conjuguées de surfaces parallèles sont des surfaces parallèles.*

Fig. 23.



Soient $m, m', m'', \ldots$ (fig. 23) des points situés sur la normale commune à plusieurs surfaces parallèles $s, s', s'', \ldots$ Soit M le point qui correspond à m sur la surface S conjuguée de s. Si l'on prend, sur la normale MN en M,

$$MM' = mm', \quad MM'' = mm'', \ldots,$$

il en résulte

$$OM' = Om', \quad OM'' = Om'', \ldots$$

De plus, les nouveaux rayons vecteurs sont perpendiculaires aux premiers. Donc MN, normale à la surface S, est normale à la surface S′ conjuguée de s', à la surface S″ conjuguée de s'', etc.

54. *Applications.* — 1° *Les conjuguées de cylindres de révolution autour d'une même droite sont parallèles à la surface cyclotomique conjuguée de cette droite* (28) (*).

2° *Les conjuguées des surfaces parallèles à l'ellipsoïde sont parallèles à la surface des ondes.*

3° *La conjuguée d'une surface-canal, ayant pour axe* (**) *une ligne* l, *est parallèle à la cyclique* Σ (12) *conjuguée de* l (***).

4° En particulier, *la conjuguée* T *d'un tore elliptique* t, *enveloppe d'une sphère* s *dont le centre parcourt une ellipse* e, *est parallèle à la cyclotomique* Σ *conjuguée* de *e* (14) (IV).

55. *Systèmes orthogonaux.* — On sait que :

1° *Toute surface* s *fait partie d'un système triple orthogonal;*

2° *Des surfaces parallèles* s, s′, s″,..., *appartiennent toujours à un pareil système;*

3° Il existe une infinité de systèmes orthogonaux, composés de surfaces parallèles s, s′, s″,..., de surfaces développables, σ_1, σ'_1, σ''_1... et d'autres surfaces développables σ_2, σ'_2, σ_2'', .. (V).

D'après le théorème précédent, les conjuguées S, S′, S″,... des surfaces parallèles s, s′, s'',... appartiennent à un système orthogonal; donc :

A tout système orthogonal composé de surfaces parallèles s, s′,... *de sur-*

(*) On a vu (38) d'autres définitions de ces surfaces.

(**) J'appelle *axe* la ligne décrite par le centre de la sphère dont la surface-canal est l'enveloppe (*Académie de Belgique, savants étrangers*, t. XXXII).

(***) Cette conjuguée, tangente à une infinité de sphères égales, est aussi l'enveloppe d'une suite de tores (23, 6°).

(IV) On suppose, comme pour la surface des ondes, que le centre est pris pour pôle. L'équation de la cyclotomique à directrice elliptique est

$$(a^2X^2 + b^2Y^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) = a^2b^2(X^2 + Y^2).$$

Dans une note insérée aux *Bulletins de l'Académie* (séance du 1er août 1868), j'ai indiqué une autre construction de la surface T.

(V) Voir la note et le mémoire cités.

faces développables σ_1, σ_1', σ_1'',.. *et d'autres surfaces développables* σ_2, σ'_2, σ''_2... *correspond un second système orthogonal composé de surfaces parallèles* S, S′, S″,..., *de surfaces développables* Σ_1, Σ'_1,... *et d'autres surfaces développables* Σ_2, Σ'_2, Σ''_2... (*).

56. EXEMPLES. — 1° *Si les surfaces* s, s′, s″,... *sont des cylindres de révolution, les surfaces* S, S′, S″,... *sont parallèles à une cyclotomique à directrice rectiligne* (54, 10);

2° *Si les surfaces* s, s′, s′,... *sont des tores elliptiques, les surfaces* S, S′, S″,... *sont parallèles à une cyclotomique à directrice elliptique* (54, 4°);

3° *Au système orthogonal déterminé par le cylindre ayant pour équation*

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

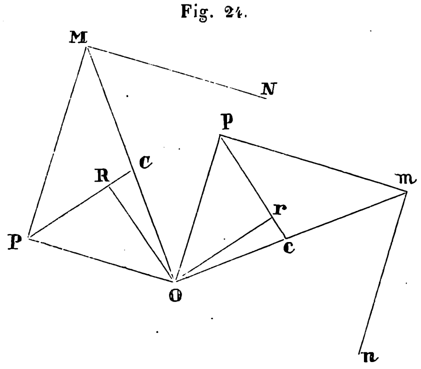
correspond le système déterminé par la surface dont l'équation est

$$\frac{X^2}{b^2 - Z^2} + \frac{Y^2}{a^2 - Z^2} = 1; \qquad (28)$$

etc.

57. THÉORÈME. — *Les podaires* s_1, S_1 *de deux surfaces conjuguées* s, S, *sont conjuguées* (**).

Fig. 24.



Soient m, M deux points correspondants; soient mn, MN les normales, en ces points, aux surfaces conjuguées s, S. Si, dans le plan mOM, on mène mp perpendiculaire à mn, et Op parallèle à mn, le point p est le point de la *podaire* s_1 de s, correspondant à m. De même, P est le point de la podaire S_1 de S, correspondant à M. D'ailleurs, la normale à s_1, en p, est la médiane pc du triangle Opm (***); et la normale en P, à la

(*) Les nouvelles surfaces développables ne sont évidemment pas conjuguées des premières. Observons, en passant, qu'*à deux plans tangents, perpendiculaires entre eux, correspondent deux cylindres de révolution, dont les axes sont perpendiculaires entre eux.*

(**) Les deux pôles de transformation sont supposés confondus.

(***) Voir, par exemple, le *Calcul différentiel* de M. Bertrand, p. 16.

podaire S_1, est la médiane PC du triangle OPM. Ces normales, situées dans le plan pOP, étant perpendiculaires entre elles, il s'ensuit que les podaires s_1, S_1 satisfont à la définition des surfaces conjuguées (6).

58. Applications. — 1° On sait que la podaire d'un ellipsoïde, le pôle étant au centre, est la *surface d'élasticité* (*). Par conséquent, *la podaire de la surface des ondes est conjuguée de la surface d'élasticité.*

2° *La podaire d'une surface développable* s *est, évidemment, une* certaine *ligne* l. D'ailleurs, la conjuguée S de s est l'enveloppe d'un cylindre de révolution, et la conjuguée de l est une surface cyclique Σ. Conséquemment

La podaire S_1 *d'une surface* S, *enveloppe d'un cylindre de révolution dont l'axe passe constamment par le pôle, est une surface cyclique* (**).

3° *La podaire d'une surface gauche* s *est le lieu* s_1 *d'une circonférence* c, *podaire des plans menés par une génératrice quelconque* g. Cette circonférence, contenue dans le plan perpendiculaire à g, mené par le pôle, a pour diamètre la perpendiculaire abaissée du pôle sur la génératrice.

59. *Podaire d'un hyperboloïde.* — Considérons le cas très-simple où la surface s serait un hyperboloïde de révolution. La perpendiculaire abaissée du centre sur une génératrice quelconque g est un rayon a du cercle de gorge. Par conséquent, si l'on conçoit une circonférence c décrite sur a comme diamètre, dans le plan perpendiculaire à g, et que l'on fasse tourner c autour de l'axe de l'hyperboloïde s, la surface s_1, ainsi engendrée, est la podaire de s. Cette surface s_1 a pour section méridienne la podaire de l'hyperbole méridienne. En outre, d'après le théorème ci-dessus (57), cette même surface podaire s_1 est conjuguée d'une surface de révolution S_1, podaire de l'hyperboloïde à deux nappes, S, conjugué de s (41). Enfin, de même que les sections méridiennes des deux hyperboloïdes sont égales (10), les sections méridiennes des deux surfaces podaires le sont aussi.

60. *Podaires successives.* — Si l'on projette le pôle O sur les médianes Oc, OC (fig. 24), les points z, R, ainsi déterminés, appartiennent à

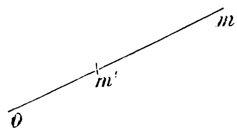
(*) Voir plus loin.

(**) Il est bon d'observer que : 1° *à chaque position du cylindre* C, *correspond un plan* p, *tangent à la surface* s; 2° *au moyen de la cyclique* Σ, *on peut facilement construire la conjuguée* l, *et, par suite, la surface développable* s, *conjuguée de* S.

deux nouvelles surfaces s_2, S_2, podaires respectives de s_1, S_1. Et ainsi de suite (*).

61. *Surfaces réciproques.* — On dit que deux surfaces s, s' sont *réciproques*, quand l'une se déduit de l'autre au moyen de la *transformation par rayons vecteurs réciproques* (**). Ainsi, m et m' (fig. 25) étant deux points *correspondants*, situés sur un même rayon vecteur Omm', on a toujours

Fig. 25.

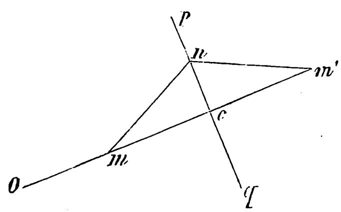


$$Om \,.\, Om' = \rho^2, \tag{39}$$

ρ étant une constante.

62. Lemme. — *Les normales* mn, m'n' (fig. 26) *à deux surfaces réciproques* s, s', *en deux points correspondants* m, m', *sont symétriques par rapport au plan* pq, *perpendiculaire au milieu* c *de la corde* mm' (***).

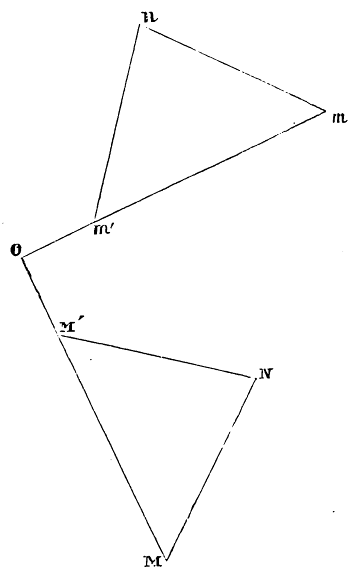
Fig. 26.



63. Théorème. — *Les conjuguées* S, S' *de deux surfaces réciproques* s, s', *sont réciproques.*

En effet, si le triangle isoscèle mnm' (fig. 27) effectue un quart de révolution autour du point O, les nouveaux points M, M' satisfont à la relation

Fig. 27.



$$OM \,.\, OM' = \rho^2.$$

64. Théorème. — *Les figures* s', S', *réciproques de deux figures conjuguées*, s, S, *sont conjuguées.*

(*) On peut consulter, sur la théorie des podaires successives, un remarquable mémoire de M. Hirst, intitulé : *Sur la courbure d'une série de surfaces et de lignes* (Annali di matematica pura ed applicata, 1859).

(**) Parmi les géomètres qui se sont occupés des figures réciproques, je citerai MM. Liouville (*Journal de mathématiques*, t. XII), Paul Serret (*Des méthodes en géométrie*), Hirst (*Sur la courbure...*).

(***) Hirst (mém. cité).

Cette proposition étant une réciproque de la précédente, nous pouvons nous contenter de l'énoncer.

65. *Application.* — Si la surface s est le cylindre représenté par

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

la surface conjuguée, S, a pour équation

$$\frac{X^2}{b^2 - Z^2} + \frac{Y^2}{a^2 - Z^2} = 1. \tag{28}$$

A cause de la relation (39, on a, comme l'on sait,

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'} = \frac{\rho^2}{u'^2}; \tag{40}$$

donc les équations des surfaces s', S′, réciproques des premières, sont :

$$(a^2y'^2 + b^2x'^2)\,\rho^4 = a^2b^2\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2, \tag{41}$$

$$\frac{X'^2}{b^2u'^2 - \rho^4Z'^2} + \frac{Y'^2}{a^2u'^2 - \rho^4Z'^2} = \frac{1}{\rho^4}; \tag{42}$$

et, d'après le dernier théorème, les surfaces s', S′ sont conjuguées.

66. *Discussion.* — Si, dans l'équation (41), on fait $z' = 0$, on a

$$(a^2y'^2 + b^2x'^2)\,\rho^4 = a^2b^2\,(x'^2 + y'^2)^2.$$

Soient

$$a = \frac{\rho^2}{a'}, \quad b = \frac{\rho^2}{b'}:$$

la dernière relation devient

$$a'^2x'^2 + b'^2y'^2 = (x'^2 + y'^2)^2,$$

équation de la podaire d'une ellipse dont les demi-axes sont a', b'.

Considérons les sections faites, dans le cylindre s et dans la surface s', par un même plan contenant l'axe OZ : la première est une génératrice ; conséquemment la seconde, que l'on peut appeler *section méridienne* de la surface réciproque s', est une circonférence tangente, en O, à l'axe OZ.

La surface s' est donc une sorte de tore dont la section équatoriale est une podaire d'ellipse, et dont les sections méridiennes, circulaires, sont tangentes à la surface, au centre de celle-ci. D'ailleurs, s' est un cas particulier de la *surface d'élasticité;* car l'équation (41) équivaut à

$$a'^2x'^2 + b'^2y'^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^2.$$

L'introduction des paramètres a', b', dans l'équation (42), la transforme en

$$\frac{b'^2X'^2}{u'^4 - b'^2Z'^2} + \frac{a'^2Y'^2}{u'^4 - a'^2Z'^2} = 1,$$

équation que l'on peut écrire ainsi :

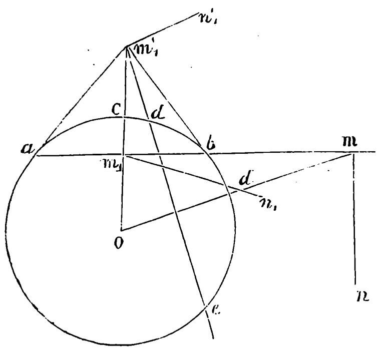
$$\frac{X'^2}{a'^2 - u'^2} + \frac{Y'^2}{b'^2 - u'^2} = \frac{Z'^2}{u'^2}.$$

Sous cette forme, on reconnaît que la surface S' est conjuguée de s'; car *la conjuguée de la surface d'élasticité est représentée par*

$$\frac{X^2}{a^2 - u^2} + \frac{Y^2}{b^2 - u^2} + \frac{Z^2}{c^2 - u^2} = 0 \text{ (*)}.$$

67. Lemme. — *Soient* s_1 *la podaire d'une surface* s, *et* s'_1 *la surface réciproque de* s_1 : s'_1 *est la polaire réciproque de* s_1, *relativement à la sphère qui a pour rayon* ρ *et pour centre le pôle.*

Fig. 28.



m, m_1, m'_1 (fig. 28) étant trois points correspondants, situés dans le plan *Omn;* décrivons, du pôle comme centre, avec un rayon égal à ρ, la circonférence *acb,* puis menons les droites m'_1a, m'_1b.

A cause de la relation

$$Om_1 . Om'_1 = \rho^2,$$

ces droites sont tangentes à la circonférence; donc *le plan* abm, *tangent en* m *à la surface* s, *a pour pôle le point* m'_1 *de la surface* s'_1 (**). C'est ce qu'il fallait démontrer.

(*) Voir plus loin.
(**) M. Hirst (mém. cité).

68. *Remarque.* — Le plan tangent en m'_1, à la surface s'_1, est le plan polaire du point m, lequel est perpendiculaire à Om; donc *la normale* m′ n′ *est parallèle au rayon vecteur* Om (*). Il est visible que cette normale est symétrique de la médiane m_1n_1 du triangle Om_1m, relativement au plan perpendiculaire au milieu de $m_1m'_1$; ce qui doit être (62).

69. Théorème. — *Les conjuguées* S, S'_1, *de deux surfaces polaires réciproques, sont polaires réciproques.*

70. Théorème. — *Les polaires réciproques,* s'_1, S'_1, *de deux surfaces conjuguées,* s, S, *sont conjuguées.*

Ces deux théorèmes résultent de la figure 28, à laquelle on ferait exécuter un quart de révolution.

71. *Application.* — Si la surface s est le cylindre représenté par

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \tag{43}$$

la polaire réciproque s' se réduit, comme l'on sait, à l'ellipse dont les équations sont

$$z' = 0, \quad a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'^2b'^2, \tag{44}$$

pourvu que l'on suppose

$$aa' = bb' = \rho^2.$$

Nous avons trouvé, pour équation de la conjuguée S du cylindre,

$$\frac{X^2}{b^2 - Z^2} + \frac{Y^2}{a^2 - Z^2} = 1. \tag{28}$$

D'un autre côté, la *cyclotomique à directrice elliptique* S′, conjuguée de l'ellipse s', est représentée par

$$(b'^2X'^2 + a'^2Y'^2)(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = a'^2b'^2(X'^2 + Y'^2): \tag{45}$$

il reste à vérifier que S′ est polaire réciproque de S.

Cette polaire réciproque est l'enveloppe du plan représenté par

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \rho^2, \tag{46}$$

les paramètres α, β, γ satisfaisant à la condition

$$\frac{\alpha^2}{b^2 - \gamma^2} + \frac{\beta^2}{a^2 - \gamma^2} = 1. \tag{47}$$

(*) De même, la normale mn est parallèle au rayon vecteur Om'_1.

On conclut de là, par la règle ordinaire,

$$\frac{x}{\left(\frac{\alpha}{b^2-\gamma^2}\right)}=\frac{y}{\left(\frac{\beta}{a^2-\gamma^2}\right)}=\frac{z}{\left[\left(\frac{\alpha}{b^2-\gamma^2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{a^2-\gamma^2}\right)^2\right]\gamma}.$$

La valeur commune des trois rapports est

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{b^2-\gamma^2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{a^2-\gamma^2}\right)^2}};$$

donc

$$\frac{\alpha^2}{(b^2-\gamma^2)^2}+\frac{\beta^2}{(a^2-\gamma^2)^2}=\frac{z^2}{(x^2+y^2)\gamma^2}.$$

En vertu de la relation (46), cette valeur commune est aussi

$$\frac{\rho^2}{\frac{\alpha^2}{b^2-\gamma^2}+\frac{\beta^2}{a^2-\gamma^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2}};$$

ou, d'après la condition (47) :

$$\frac{(x^2+y^2)\rho^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Conséquemment

$$\frac{x}{\left(\frac{\alpha}{b^2-\gamma^2}\right)}=\frac{y}{\left(\frac{\beta}{a^2-\gamma^2}\right)}=\frac{(x^2+y^2)\gamma}{z}=\frac{(x^2+y^2)\rho^2}{x^2+y^2+z^2}. \tag{48}$$

L'élimination des paramètres α, β, γ, entre les équations (46) et (48), est maintenant fort simple : elle conduit à

$$(b^2x^2+a^2y^2)(x^2+y^2+z^2)=(x^2+y^2)\rho^4,$$

équation qui ne diffère, de la relation (45), que par la notation.

SECONDE PARTIE.

SURFACE DES ONDES.

V. — QUELQUES SOMMATIONS (*).

72. Afin de n'avoir plus à y revenir, nous indiquerons, dès à présent, les valeurs (**) d'un certain nombre de *fonctions alternées*, fonctions qui se présenteront fréquemment dans la suite de ce mémoire.

Pour abréger, nous ferons (***)

$$(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2) = \mathrm{P}. \tag{49}$$

1° $a^2(b^2 - c^2) + b^2(c^2 - a^2) + c^2(a^2 - b^2) = \sum a^2(b^2 - c^2) = 0;$ (50)

2° $\sum a^2(b^4 - c^4) = -\sum a^4(b^2 - c^2) = -\sum b^2c^2(b^2 - c^2) = \mathrm{P};$ (51)

3° $\sum a^6(b^2 - c^2) = \sum (b^4 - c^4)\, b^2c^2 = -\mathrm{P}\sum a^2;$ (52)

4° $\sum a^6(b^4 - c^4) = -\sum a^4(b^6 - c^6) = \sum b^4c^4(b^2 - c^2) = -\mathrm{P}\sum b^2c^2;$ (53)

5° $\sum a^2(b^8 - c^8) = -\sum b^2c^2(b^6 - c^6) = -\sum a^8(b^2 - c^2) = \mathrm{P}\sum (a^4 + b^2c^2).$ (54)

73. *Remarque.* — Si l'on représente par H_{2p} la *fonction homogène entière,* du degré $2p$; savoir

$$\mathrm{H}_{2p} = \sum a^{2\alpha} b^{2\beta} c^{2\gamma}, \quad (\alpha + \beta + \gamma = p)$$

les relations (52), (54), peuvent être renfermées dans la formule générale

$$\sum a^{2p+4}(b^2 - c^2) = -\mathrm{PH}_{2p}. \tag{55}$$

(*) Nous continuons l'ordre des chapitres, des articles et des équations.

(**) M. Lamé en a donné quelques-unes (*Théorie de l'élasticité*, p. 257).

(***) On peut obtenir toutes ces formules au moyen de la théorie des *déterminants;* mais il est encore plus simple de les former directement, par la division.

Elle donne, par exemple,

$$a^{10}(b^2-c^2)+b^{10}(c^2-a^2)+c^{10}(a^2-b^2)=$$
$$-(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)\left[a^6+b^6+c^6+a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2)+a^2b^2c^2\right]\ (^*).$$

VI. Équation de la surface.

74. Fresnel, Ampère, Cauchy, Plücker et d'autres géomètres ont trouvé, par diverses méthodes, l'équation de la surface des ondes. Nous allons reproduire la plupart de ces méthodes, en essayant de les simplifier.

75. *Première méthode.* — Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{56}$$

l'équation d'un ellipsoïde *s*, *conjugué* à la surface cherchée.

En employant les notations et les formules du Chapitre I, on trouve, immédiatement,

$$l=\frac{vx}{a^2},\quad m=\frac{vy}{b^2},\quad n=\frac{vz}{c^2}; \tag{57}$$

$$\frac{1}{v^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}; \tag{58}$$

$$X=\frac{(a^2-u^2)\,vx}{a^2k},\quad Y=\frac{(b^2-u^2)\,vy}{b^2k},\quad Z=\frac{(c^2-u^2)\,vz}{c^2k}. \tag{59}$$

On conclut, des dernières valeurs,

$$\frac{\left(\dfrac{aX}{u^2-a^2}\right)}{\left(\dfrac{x}{a}\right)}=\frac{\left(\dfrac{bY}{u^2-b^2}\right)}{\left(\dfrac{y}{b}\right)}=\frac{\left(\dfrac{cZ}{u^2-c^2}\right)}{\left(\dfrac{z}{c}\right)}=-\frac{v}{k}. \tag{60}$$

Mais

$$Xx+Yy+Zz=0; \tag{4}$$

donc

$$\frac{a^2X^2}{u^2-a^2}+\frac{b^2Y^2}{u^2-b^2}+\frac{c^2Z^2}{u^2-c^2}=0; \tag{61}$$

équation de la surface des ondes.

(*) La relation (55) résulte, assez simplement, du *Théorème sur une fonction homogène entière* (Mélanges mathématiques, p. 168).

76. *Remarques.* — 1° On tire, des proportions (60), eu égard à l'équation (56), la formule

$$\sum \frac{a^2x^2}{(u^2-a^2)^2} = \frac{v^2}{k^2}. \tag{62}$$

2° L'équation (61) peut être écrite ainsi :

$$\sum \frac{(a^2-u^2+u^2)\,X^2}{u^2-a^2} = 0,$$

ou

$$-\sum u^2 + u^2 \sum \frac{X^2}{u^2-a^2} = 0;$$

ou enfin, après suppression du facteur u^2 :

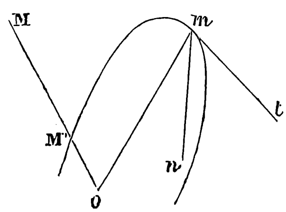
$$\frac{X^2}{u^2-a^2} + \frac{Y^2}{u^2-b^2} + \frac{Z^2}{u^2-c^2} = 1. \tag{63}$$

3° Une transformation analogue, effectuée sur la formule (62), la réduit à

$$\sum \frac{X^2}{(u^2-a^2)^2} = \frac{1}{k^2} \text{ (*)}. \tag{64}$$

77. *Deuxième méthode.* — Par un point quelconque m (fig. 29) de l'ellipsoïde s, menons mt perpendiculaire au plan Omn, puis coupons la surface par le plan diamétral Omt : la section est une ellipse dans laquelle *le rayon* Om *est perpendiculaire à la tangente* mt; c'est-à-dire que Om est un demi-axe de cette courbe. De là résulte cette construction connue :

Fig. 29.



Si, après avoir coupé l'ellipsoïde par un plan diamétral quelconque, on porte à partir du centre, sur le diamètre perpendiculaire à ce plan, des distances égales aux demi-axes de la section, le lieu des points ainsi déterminés est la surface des ondes.

78. Soient e, f, g, les cosinus des angles formés, avec les axes coordonnés, par la normale au plan Omt : l'équation de ce plan est

$$ex + fy + gz = 0. \tag{65}$$

(*) Celle-ci est une conséquence immédiate des relations (58) et (59).

On y doit joindre

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x^2+y^2+z^2=u^2.$$

Pour que Om soit un demi-axe de la section, le rayon vecteur u doit être maximum ou minimum; ainsi

$$xdx+ydy+zdz=0.$$

De plus,

$$edx+fdy+gdz=0, \quad \frac{x}{a^2}dx+\frac{y}{b^2}dy+\frac{z}{c^2}dz=0.$$

La méthode des multiplicateurs donne ensuite :

$$\lambda x+\mu e=\frac{x}{a^2}, \quad \lambda y+\mu f=\frac{y}{b^2}, \quad \lambda z+\mu g=\frac{z}{c^2}.$$

On tire de ces relations, en ayant égard aux équations données,

$$\lambda=\frac{1}{u^2},$$

$$x=\frac{a^2u^2\mu e}{u^2-a^2}, \quad y=\frac{b^2u^2\mu f}{u^2-b^2}, \quad z=\frac{c^2u^2\mu g}{u^2-c^2}; \tag{66}$$

puis

$$u^4\mu^2\sum\frac{a^2e^2}{(u^2-a^2)^2}=1, \quad u^2\mu^2\sum\frac{a^4e^2}{(u^2-a^2)^2}=1. \tag{67}$$

Pour éliminer μ^2, il suffit de retrancher membre à membre les deux dernières relations : on trouve ainsi

$$\frac{a^2e^2}{u^2-a^2}+\frac{b^2f^2}{u^2-b^2}+\frac{c^2g^2}{u^2-c^2}=0. \tag{68}$$

Telle est l'équation (*) dont les racines, prises en valeurs absolues, représentent les longueurs des demi-axes de la section.

79. A cause de $OM=u$ (fig. 29), les coordonnées du point M sont

$$X=ue, \quad Y=uf, \quad Z=ug;$$

donc l'équation (68) équivaut à

$$\frac{a^2X^2}{u^2-a^2}+\frac{b^2Y^2}{u^2-b^2}+\frac{c^2Z^2}{u^2-c^2}=0. \tag{61}$$

(*) Elle constitue le *Théorème de Sedley Taylor* (NOUVELLES ANN. DE MATHÉM., t. XX, p. 115).

80. *Remarques.* — 1° De même, les équations (67) deviennent

$$u^2\mu^2 \sum \frac{a^2X^2}{(u^2-a^2)^2} = 1, \quad \mu^2 \sum \frac{a^4X^2}{(u^2-a^2)^2} = 1.$$

La première somme égale $\frac{v^2}{k^2}$ (62); donc

$$\mu^2 = \frac{k^2}{u^2v^2},$$

et

$$\sum \frac{a^4X^2}{(u^2-a^2)^2} = \frac{u^2v^2}{k^2}. \tag{69}$$

2° Au moyen de cette valeur de μ^2, les formules (66) et (59) deviennent identiques. Il est, comme on le voit, très-facile de calculer les coordonnées des sommets de la section faite, dans l'ellipsoïde s, par un plan diamétral donné.

81. *Troisième méthode.* — Dans la théorie de la lumière (*), on est conduit au problème suivant :

α, β, γ, p *étant quatre paramètres* (**), *satisfaisant aux conditions*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \tag{70}$$

$$\frac{\alpha^2}{p^2-a^2} + \frac{\beta^2}{p^2-b^2} + \frac{\gamma^2}{p^2-c^2} = 0, \tag{71}$$

trouver l'enveloppe du plan représenté par

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = p. \tag{72}$$

Différentiant, et appliquant la méthode des multiplicateurs, on déduit, de ces équations :

$$\lambda X + \mu\alpha = \frac{\alpha}{p^2-a^2}, \quad \lambda Y + \mu\beta = \frac{\beta}{p^2-b^2}, \quad \lambda Z + \mu\gamma = \frac{\gamma}{p^2-c^2}, \tag{73}$$

$$\lambda = p \sum \frac{\alpha^2}{(p^2-a^2)^2}.$$

(*) Lamé (*Théorie de l'élasticité*), Sénarmont (*Journ. de l'École polytechnique*, 35ᵉ cah.), Frenet (*Exercices d'analyse*). J'ai suivi, à fort peu près, la marche adoptée par le dernier géomètre.

(**) Les lettres α, β, γ n'ont plus, bien entendu, la même signification que précédemment (3). D'après l'équation (72) :

$$\alpha = L, \quad \beta = M, \quad \gamma = N,$$

ainsi qu'on le verra tout à l'heure (82, 1°).

La substitution dans l'équation (72) donne, à cause des relations (70), (71),

$$\lambda p = -\mu.$$

On a ensuite

$$\lambda^2 u^2 = \mu^2 - 2\mu \sum \frac{\alpha^2}{p^2 - a^2} + \sum \frac{\alpha^2}{(p^2 - a^2)^2};$$

c'est-à-dire

$$\lambda^2 u^2 = \mu^2 + \frac{\lambda}{p};$$

puis

$$\lambda = \frac{1}{p(u^2 - p^2)}, \quad \mu = -\frac{1}{u^2 - p^2},$$

$$X = \frac{u^2 - a^2}{p^2 - a^2} p\alpha, \quad Y = \frac{u^2 - b^2}{p^2 - b^2} p\beta, \quad Z = \frac{u^2 - c^2}{p^2 - c^2} p\gamma. \tag{74}$$

Les équations (73) donnent aussi, après multiplication par X, Y, Z :

$$\lambda u^2 + \mu p = \sum \frac{\alpha X}{p^2 - a^2};$$

d'où résulte

$$\sum \frac{\alpha X}{p^2 - a^2} = \frac{1}{p}. \tag{75}$$

Enfin, la combinaison de cette formule avec les valeurs (74) conduit à

$$\frac{X^2}{u^2 - a^2} + \frac{Y^2}{u^2 - b^2} + \frac{Z^2}{u^2 - c^2} = 1. \tag{65}$$

L'enveloppe du plan mobile est donc la surface des ondes.

82. *Remarques.* — 1° Pour une même valeur attribuée à p, l'équation (71) représente un cône du deuxième degré, et l'équation (72), un plan P, perpendiculaire à la génératrice déterminée par les cosinus α, β, γ, et dont la distance au pôle est p. Ce plan étant tangent à S, on voit que le paramètre p est la variable désignée jusqu'ici par v, et que les paramètres α, β, γ sont égaux, respectivement, à L, M, N. On a donc, au lieu des formules (74) et (75) :

$$X = \frac{u^2 - a^2}{v^2 - a^2} vL, \quad Y = \frac{u^2 - b^2}{v^2 - b^2} vM, \quad Z = \frac{u^2 - c^2}{v^2 - c^2} vN, \tag{76}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{LX}{v^2 - a^2} + \frac{MY}{v^2 - b^2} + \frac{NZ}{v^2 - c^2} \text{ (*)}. \tag{77}$$

2° Le lieu du point où le plan P coupe la génératrice correspondante est la *conique sphérique* représentée par

$$\frac{X_1^2}{v^2 - a^2} + \frac{Y_1^2}{v^2 - b^2} + \frac{Z_1^2}{v^2 - c^2} = 0, \tag{78}$$

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = v^2. \tag{79}$$

3° Puisque le plan P touche la surface des ondes, S, au point (X, Y, Z), et qu'il touche la sphère au point (X_1, Y_1, Z_1), ce dernier point appartient à la podaire S_1 de S. En d'autres termes :

Le lieu de la conique sphérique représentée par les équations (78), (79), *est la podaire de la surface des ondes* (**);

4° On peut dire encore que :

Si un plan P *roule en touchant constamment la surface* S *et une sphère concentrique avec* S, *le lieu de ses points de contact avec la sphère est une conique.*

83. L'enveloppe de tous les plans P, relative à une même valeur de v, est une surface développable Σ (***), qui touche S suivant une courbe C dont l'une des équations résulte des formules (76), combinées avec la relation

$$L^2 + M^2 + N^2 = 1.$$

On trouve ainsi :

$$\sum \frac{(v^2 - a^2)^2}{(u^2 - a^2)^2} X^2 = v^2,$$

équation que l'on ramène aisément à la forme plus simple :

$$\frac{X^2}{(u^2 - a^2)^2} + \frac{Y^2}{(u^2 - b^2)^2} + \frac{Z^2}{(u^2 - c^2)^2} = \frac{1}{u^2 - v^2}. \tag{80}$$

(*) A cause des équations (63) et (76), la formule (77) se réduit à une identité.

(**) On verra, en effet, que l'équation de cette podaire est

$$\sum \frac{X_1^2}{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - a^2} = 0.$$

(***) Les génératrices rectilignes de Σ sont tangentes à la sphère et normales à l'ellipse sphérique. L'arête de rebroussement est donc une *développée* de cette courbe (Leroy, *Analyse appliquée*, p. 301).

La courbe C est donc l'intersection de S avec la surface représentée par la dernière équation : cette surface est du *dixième* degré (*).

84. *Remarque.* — Les conjuguées respectives de la sphère (79), de S et du plan P, sont la même sphère, l'ellipsoïde *s* et un cylindre de révolution, circonscrit à la sphère, et dont l'axe passe par le pôle. De plus, la conjuguée du cône (78) est le cône *supplémentaire* (23, 4°), représenté par l'équation

$$(v^2 - a^2)\,x^2 + (v^2 - b^2)\,y^2 + (v^2 - c^2)\,z^2 = 0.$$

Conséquemment, *si un cylindre de révolution, circonscrit à une sphère donnée, touche un ellipsoïde concentrique avec la sphère, l'enveloppe de la circonférence de contact entre les deux premières surfaces est une conique sphérique.*

VII. — Systèmes représentant la surface des ondes.

85. Si, dans l'équation (61), on fait disparaître les dénominateurs, elle devient, après suppression du facteur u^2 :

$$(a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2)\,u^2 - \left[(b^2 + c^2)\,a^2X^2 + (c^2 + a^2)\,b^2Y^2 + (a^2 + b^2)\,c^2Z^2\right] + a^2b^2c^2 = 0, \quad (81)$$

ou

$$Au^4 - Bu^2 + C = 0, \quad (82)$$

en supposant

$$A = \sum a^2e^2, \quad B = \sum (b^2 + c^2)\,a^2e^2, \quad C = a^2b^2c^2. \quad (83)$$

L'équation (81) est entre les coordonnées rectangulaires X, Y, Z ; l'équation (82), entre les *quatre* coordonnées polaires u, e, f, g.

86. Dans chacune des équations (61) ou (63), u^2 est une abréviation ; donc, en réalité, la surface S est représentée, soit par le système

(*) Si l'on veut chercher l'équation de la développable Σ, on est conduit à éliminer θ^2 entre les relations

$$\sum \frac{(v^2 - a^2)\,X^2}{(\theta^2 + v^2 - a^2)^2} = 0, \quad \sum \frac{X^2}{\theta^2 + v^2 - a^2} = \frac{u^2 - v^2}{\theta^2} :$$

le calcul paraît laborieux.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{a^2X^2}{u^2-a^2}+\frac{b^2Y^2}{u^2-b^2}+\frac{c^2Z^2}{u^2-c^2}=0, &&(61)\\ &X^2+Y^2+Z^2=u^2; &&(5)\end{aligned}\right\}(A)$$

soit par le système

$$\left.\begin{aligned}&\frac{X^2}{u^2-a^2}+\frac{Y^2}{u^2-b^2}+\frac{Z^2}{u^2-c^2}=1, &&(63)\\ &X^2+Y^2+Z^2=u^2. &&(5)\end{aligned}\right\}(B)$$

Si l'on attribue au paramètre u une valeur particulière, l'équation (61) représente un cône, et l'équation (63), un ellipsoïde ou un hyperboloïde (*). Donc *la surface des ondes est le lieu de la conique sphérique déterminée par l'un ou l'autre des deux systèmes* (A), (B) (**).

87. De même, si après avoir remplacé l'équation (81) par le système

$$\left.\begin{aligned}&\sum(b^2+c^2-u^2)\,a^2X^2=a^2b^2c^2, &&(84)\\ &X^2+Y^2+Z^2=u^2, &&(5)\end{aligned}\right\}(C)$$

On regarde u comme un paramètre, l'équation (84) représente une infinité d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes, *différents des premiers;* donc *la surface des ondes est le lieu de la conique sphérique représentée par le système* (C).

88. *Autre système.* — Dans l'équation (81), posons

$$a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2=abcw; \qquad (85)$$

elle devient

$$abcw\sum X^2-\sum(b^2+c^2)\,a^2X^2+a^2b^2c^2=0;$$

ou, si l'on multiplie par w et que l'on ait égard à la relation (85) :

$$abcw^2\sum X^2-w\sum(b^2+c^2)\,a^2X^2+abc\sum a^2X^2=0.$$

Le coefficient de X^2 est

$$abcw^2-w(b^2+c^2)\,a^2+a^3bc,$$

ou

$$a(bw-ca)(cw-ab);$$

donc

$$\sum a(bw-ca)(cw-ab)\,X^2=0;$$

ou, plus simplement,

$$\frac{aX^2}{aw-bc}+\frac{bY^2}{bw-ca}+\frac{cZ^2}{cw-ab}=0; \qquad (86)$$

(*) Comme, dans la surface des ondes, u a pour valeur maximum a, l'équation (63) ne peut représenter un ellipsoïde : c'est un hyperboloïde à une ou deux nappes. (Note du Rapporteur.)

(**) Ils sont équivalents.

en sorte que la surface est représentée par le système

$$\left.\begin{aligned} &a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 = abcw, &&(85)\\ &\frac{aX^2}{aw - bc} + \frac{bY^2}{bw - ca} + \frac{cZ^2}{cw - ab} = 0. &&(86)\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{D})$$

En d'autres termes :

La surface des ondes est le lieu de la conique ellipsoïdique (*) *déterminée par le système* (D).

89. *Valeurs de* X^2, Y^2, Z^2. — Reprenons les équations

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = u^2, \tag{5}$$

$$\frac{X^2}{u^2 - a^2} + \frac{Y^2}{u^2 - b^2} + \frac{Z^2}{u^2 - c} = 1, \tag{65}$$

$$\frac{X^2}{(u^2 - a^2)^2} + \frac{Y^2}{(u^2 - b^2)^2} + \frac{Z^2}{(u^2 - c^2)^2} = \frac{1}{u^2 - v^2}. \tag{80}$$

On en conclut, par un calcul inutile à reproduire :

$$\left.\begin{aligned} X^2 &= \frac{\left[- u^2v^2 + (b^2 + c^2)\, v^2 - b^2c^2\right](u^2 - a^2)^2}{(u^2 - v^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)},\\ Y^2 &= \frac{\left[- u^2v^2 + (c^2 + a^2)\, v^2 - c^2a^2\right](u^2 - b^2)^2}{(u^2 - v^2)(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)},\\ Z^2 &= \frac{\left[- u^2v^2 + (a^2 + b^2)\, v^2 - a^2b^2\right](u^2 - c^2)^2}{(u^2 - v^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}.\end{aligned}\right\}\ (87)$$

De même, les équations

$$\frac{a^2X^2}{u^2 - a^2} + \frac{b^2Y^2}{u^2 - b^2} + \frac{c^2Z^2}{u^2 - c^2} = 0, \tag{61}$$

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 + abcw, \tag{85}$$

$$\frac{aX^2}{aw - bc} + \frac{bY^2}{bw - ca} + \frac{cZ^2}{cw - ab} = 0 \tag{86}$$

donnent

$$\left.\begin{aligned} X^2 &= \frac{bc\,(u^2 - a^2)\,(aw - bc)}{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)},\\ Y^2 &= \frac{ca\,(u^2 - b^2)\,(bw - ca)}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)},\\ Z^2 &= \frac{ab\,(u^2 - c^2)\,(cw - ab)}{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}.\end{aligned}\right\}\ (88)$$

(*) C'est-à-dire située sur un ellipsoïde. Ce théorème est dû, paraît-il, à M. Lamé (*Théorie de l'élasticité*, p. 261).

Ainsi, les coordonnées d'un point quelconque M s'expriment facilement, soit en fonction des paramètres u, v, soit en fonction des paramètres u, w.

90. *Relation entre* u, v, w. — Un point quelconque de la surface des ondes étant déterminé par deux des paramètres u, v, w, il est évident qu'il existe, entre ces trois quantités, une équation de condition. Pour la découvrir, il suffit, par exemple, d'égaler les deux valeurs de X^2 (87), (88). On trouve ainsi

$$abc\,(u^2 - v^2)\,w = -u^4v^2 + u^2v^2 \sum a^2 - v^2 \sum b^2c^2 + a^2b^2c^2, \tag{89}$$

relation que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{v^2}{u^2 - v^2} = \frac{abc(abc - u^2w)}{(u^2 - a^2)(u^2 - b^2)(u^2 - c^2)}. \tag{90}$$

91. *Remarque.* — Si l'on substituait, dans les formules (88), les valeurs de u^2 tirées de l'avant-dernière équation, on exprimerait X^2, Y^2, Z^2 en fonction de v et de w. Ces nouvelles valeurs seraient beaucoup plus compliquées que les premières.

VIII. — Surfaces auxiliaires.

92. Appliquant, à la surface des ondes et à l'ellipsoïde conjugué, les théorèmes et les calculs indiqués dans le Chapitre IV, nous allons former, successivement, les équations des podaires de ces surfaces, les équations de leurs réciproques, etc.

93. *Podaire de l'ellipsoïde.* — Si l'on élimine x, y, z entre les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{s}$$

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1, \qquad \frac{x}{a^2x_1} = \frac{y}{b^2y_1} = \frac{z}{c^2z_1},$$

on trouve immédiatement, comme l'on sait,

$$a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + c^2z_1^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^2. \tag{s_1}$$

Cette équation représente la *surface d'élasticité*, podaire de l'ellipsoïde s.

94. *Podaire de la surface des ondes.* — Cette podaire est la conjuguée de la surface d'élasticité (58). Pour en trouver l'équation, posons

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = u_1^2,$$

et représentons par l_1, m_1, n_1, les cosinus qui déterminent la normale au point (x_1, y_1, z_1). Nous aurons d'abord, par l'équation (s_1) :

$$\frac{l_1}{(2u_1^2 - a^2)x_1} = \frac{m_1}{(2u_1^2 - b^2)y_1} = \frac{n_1}{(2u_1^2 - c^2)z_1}.$$

Chacun de ces rapports égale

$$\frac{1}{\sqrt{4u_1^4 \sum x_1^2 - 4u_1^2 \sum a^2x_1^2 + \sum a^4x_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{\sum a^4x_1^2}},$$

à cause de (s_1). De plus,

$$v_1 = l_1x_1 + m_1y_1 + n_1z_1 = \frac{1}{\sqrt{\sum a^4x_1^2}} \sum (2u_1^2 - a^2)x_1^2 = \frac{u_1^4}{\sqrt{\sum a^4x_1^2}}.$$

Au moyen de ces valeurs, les proportions

$$\frac{X_1}{v_1x_1 - l_1u_1^2} = \frac{Y_1}{v_1y_1 - m_1u_1^2} = \frac{Z_1}{v_1z_1 - n_1u_1^2} \tag{9}$$

deviennent

$$\frac{X_1}{(a^2 - u_1^2)x_1} = \frac{Y_1}{(b^2 - u_1^2)y_1} = \frac{Z_1}{(c^2 - u_1^2)z_1}.$$

On conclut de celles-ci, par l'équation (s_1) :

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{X_1}{a^2 - u_1^2}\right)^2} = \frac{y_1^2}{\left(\frac{Y_1}{b^2 - u_1^2}\right)^2} = \frac{z_1^2}{\left(\frac{Z_1}{c^2 - u_1^2}\right)^2} = \frac{u_1^2}{\sum\left(\frac{X_1}{a^2 - u_1^2}\right)^2} = \frac{u_1^4}{\sum\left(\frac{aX_1}{a^2 - u_1^2}\right)^2}.$$

L'équation demandée est donc

$$u_1^2 \sum \frac{X_1^2}{(a^2 - u_1^2)^2} = \sum \frac{a^2X_1^2}{(a^2 - u_1^2)^2};$$

ou, plus simplement,

$$\frac{X_1^2}{u_1^2 - a^2} + \frac{Y_1^2}{u_1^2 - b^2} + \frac{Z_1^2}{u_1^2 - c^2} = 0. \qquad (S_1)\ (*)$$

(*) Celle-ci a déjà été obtenue (82, 5°). La surface S_1 se rencontre dans la théorie de la double réfraction. M. Mac-Cullagh lui a donné le nom de *Surface des indices* (Journal de Liouville, t. VII, p. 225).

95. *Remarque.* — Si l'on rapproche cette équation de celle qui représente la surface des ondes, S :

$$\frac{X^2}{u^2-a^2}+\frac{Y^2}{u^2-b^2}+\frac{Z^2}{u^2-c^2}=1, \tag{S}$$

il semble, à cause de l'incompatibilité apparente, que S et S_1 n'ont aucun point commun. D'un autre côté, l'ellipsoïde s et sa podaire s_1 ont les mêmes sommets; donc il en doit être de même pour les surface S, S_1, conjuguées des premières. On résout cette difficulté en observant que les équations (S), (S_1) cessent d'être contradictoires si les termes correspondants des premiers membres prennent la forme $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire si l'on a, par exemple,

$$X = X_1 = 0, \quad u = u_1 = a.$$

En résumé, les surfaces S, S_1 se touchent en leurs *douze* sommets (*).

96. *Surface réciproque de l'ellipsoïde* s. — Les formules (40), appliquées à l'équation (s), donnent immédiatement

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=\frac{u'^4}{\rho^4};$$

ou, si l'on fait

$$a=\frac{\rho^2}{a'}, \quad b=\frac{\rho^2}{b'}, \quad c=\frac{\rho^2}{c'}: \tag{91}$$

$$a'^2x'^2+b'^2y'^2+c'^2z'^2=(x'^2+y'^2+z'^2)^2. \tag{s'}$$

La surface s', *réciproque de l'ellipsoïde* s, *est* donc *une surface d'élasticité, podaire de l'ellipsoïde* σ *dont les demi-axes sont* a', b', c'. De plus, *les deux ellipsoïdes sont polaires réciproques relativement à la sphère directrice* (67).

97. *Surface réciproque de la surface des ondes.* — Les formules (40), appliquées à l'équation.

$$\frac{a^2X^2}{u^2-a^2}+\frac{b^2Y^2}{u^2-b^2}+\frac{c^2Z^2}{u^2-c^2}=0, \tag{S}$$

la transforment en

$$\frac{X'^2}{u'^2-a'^2}+\frac{Y'^2}{u'^2-b'^2}+\frac{Z'^2}{u'^2-c'^2}=0. \tag{S'}$$

Comparant celle-ci à l'équation (S_1), on reconnaît que *la surface* S', *réciproque de* S, *est la podaire de la surface des ondes* Σ, *dont les demi-axes sont*

(*) Voir plus loin.

a', b', c', ce qui devait être (94). De plus, *les surfaces* S, Σ *sont polaires réciproques relativement à la sphère* ρ (67) (*). Enfin, *les surfaces* S′, Σ sont conjuguées respectives des surfaces s', σ (57).

98. *Résumé.* — Je reproduis ici les équations des huit surfaces dont il vient d'être question.

Premier ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (s)$$

Second ellipsoïde (**) :

$$\frac{\xi^2}{a'^2}+\frac{\eta^2}{b'^2}+\frac{\zeta^2}{c'^2}=1. \qquad (\sigma)$$

Première surface d'élasticité :

$$a^2x_1^2+b^2y_1^2+c^2z_1^2=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)^2. \qquad (s_1)$$

Seconde surface d'élasticité :

$$a'^2x'^2+b'^2y'^2+c'^2z'^2=(x'^2+y'^2+z'^2)^2. \qquad (s')$$

Première surface des ondes :

$$\frac{a^2X^2}{u^2-a^2}+\frac{b^2Y^2}{u^2-b^2}+\frac{c^2Z^2}{u^2-c^2}=0. \qquad (S)$$

Seconde surface des ondes :

$$\frac{a'^2\Xi^2}{v^2-a'^2}+\frac{b'^2H^2}{v^2-b'^2}+\frac{c'^2Z^2}{v^2-c'^2}=0. \qquad (\Sigma)$$

Première surface des indices (*) :

$$\frac{X_1^2}{u_1^2-a^2}+\frac{Y^2}{u_1^2-b^2}+\frac{Z_1^2}{u_1^2-c_1}=0. \qquad (S_1)$$

Seconde surface des indices (*) :

$$\frac{X'^2}{u'^2-a'^2}+\frac{Y'^2}{u'^2-b^2}+\frac{Z'^2}{u'^2-c'^2}=0. \qquad (S')$$

99. *Suite.* — 1° *Les quatre dernières surfaces sont, respectivement, conjuguées des quatre premières ;*

(*) La *surface des indices*, de Mac-Cullagh, est la polaire réciproque de la surface des ondes, S, relativement à la sphère ρ : c'est la surface Σ (note du Rapporteur).

(**) C'est ainsi que les désigne Plücker.

2° *Les surfaces d'élasticité*, s_1, s', *sont, respectivement, réciproques des ellipsoïdes* σ, s;

3° *Les surfaces des indices*, S_1, S' *sont, respectivement, réciproques des surfaces des ondes*, Σ, S (*);

4° *Les surfaces* s_1, s', S_1, S' *sont, respectivement, podaires des surfaces* s, σ, S, Σ;

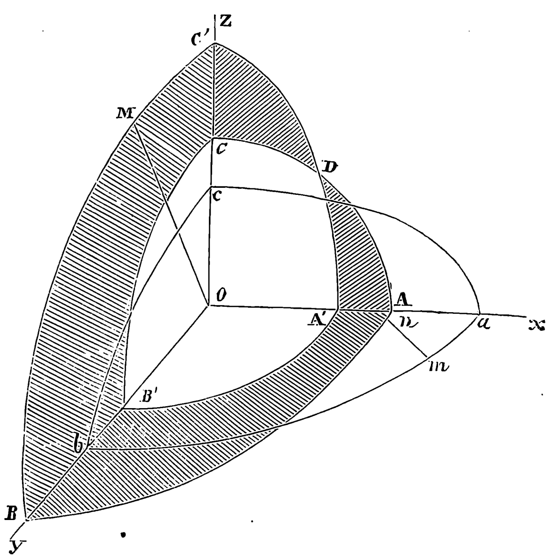
5° *Les ellipsoïdes* s, σ *sont polaires réciproques, relativement à la sphère* ρ;

6° *Les surfaces des ondes*, S, Σ, *sont polaires réciproques, relativement à la même sphère.*

IX. — Discussion de la surface des ondes.

100. *Sections principales.* — Soient ab, bc, ca (fig. 30) les sections principales de l'ellipsoïde s. La normale mn à cette surface, en un point quelconque de ab, étant contenue dans le plan xOy, il en résulte que le point correspondant à m s'obtiendrait en faisant exécuter à m un quart de révolution autour de Oz. Donc la section faite dans S, par le plan xOy, se compose d'abord de l'ellipse AB, égale à ab, et telle, que

Fig. 30.



$$\mathrm{OA} = \mathrm{O}b = b, \quad \mathrm{OB} = \mathrm{O}a = a.$$

De même, si l'on prend

$$\mathrm{OA}' = \mathrm{OC} = c, \quad \mathrm{OC}' = a, \quad \mathrm{OC} = b, \quad \mathrm{OB}' = c,$$

(*) Il faut bien remarquer que l'*ordre de correspondance* est celui-ci :

$$s, s'; \quad \sigma, s_1; \quad \mathrm{S}, \mathrm{S}'; \quad \Sigma, \mathrm{S}_1.$$

on aura les ellipses A′C′, B′C suivant lesquelles la surface est coupée par les deux autres plans coordonnés.

Si le point m vient en a, la normale mn se confond avec aO, et le *plan normal* Omn n'est plus déterminé : l'extrémité M du rayon vecteur OM, égal et perpendiculaire à Oa, décrit la circonférence BC′, situé dans le plan yOz. De même, les deux autres plans coordonnés coupent la surface des ondes suivant les circonférences A′B′, CA.

Si l'on suppose $a > b > c$: 1° la circonférence A′B′ est *intérieure* à l'ellipse AB; 2° la circonférence BC′ est *extérieure* à l'ellipse B′C; 3° la circonférence AC et l'ellipse A′C′ se coupent en un point D (*).

En A et en A′, le rayon vecteur est normal à la surface; donc ces points sont des sommets. De même pour B, B′, C, C′ et pour les six autres points symétriques de ceux-ci à l'égard du pôle. *La surface des ondes a* donc *douze sommets.*

101. *Remarque.* — Le rayon OM est normal en M; donc *tous les points de la circonférence* BC′ *pourraient être regardés comme des sommets.* De même pour les deux autres sections circulaires AC, A′B′. Les circonférences BC′, AC, A′B′ sont, par rapport à S, ce qu'est l'*équateur* relativement à une surface de révolution.

102. *Nappes.* — D'après le deuxième mode de génération de la surface (77), tout rayon vecteur la rencontre en quatre points, symétriques deux à deux à l'égard du pôle. Il n'y a d'exception que si ce rayon est perpendiculaire à une section circulaire de l'ellipsoïde s. *La surface des ondes se compose* donc *de deux nappes, lesquelles se coupent en quatre points, situés dans le plan de la section circulaire moyenne :* l'un de ces points est D (*fig.* 30).

103. *Points coniques.* — Les points dont il vient d'être question sont bien remarquables : *chacun est le sommet d'un cône tangent* (46). En effet, le point D, par exemple, correspond à une section circulaire de l'ellipsoïde, dont le plan est perpendiculaire à OD.

On sait que les sections circulaires de l'ellipsoïde sont représentées par

$$\frac{z}{x} = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = b^2;$$

(*) Il y a, évidemment, trois autres points d'intersection, non représentés sur la figure.

donc les équations des *points coniques* sont

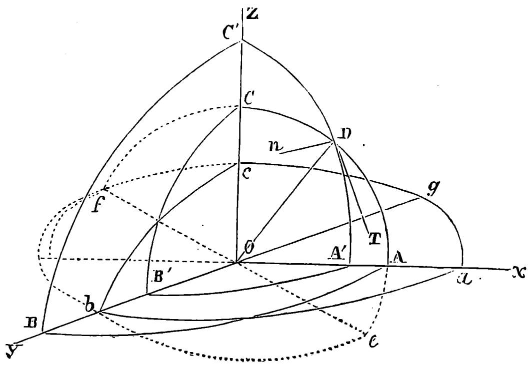
$$Y = 0, \quad \frac{Z}{X} = \mp \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}, \quad X^2 + Z^2 = b^2;$$

ou encore

$$Y = 0, \quad \frac{X^2}{c^2} + \frac{Z^2}{a^2} = 1, \quad X^2 + Z^2 = b^2.$$

104. *Cône normal.* — Soit *fbe* une section circulaire de l'ellipsoïde *s* (fig. 31), et soit O*g* le diamètre conjugué à cette section (*). Le cylindre circonscrit à *s*, suivant *fbe*, a ses génératrices parallèles à O*g*; donc les normales à *s*, en tous les points de *fbe*, sont parallèles à un plan *p*, perpendiculaire à O*g*. D'ailleurs ces normales rencontrent l'*axe* OD du cercle *fbe*. Conséquemment :

Fig. 31.



1° *Le lieu des normales à un ellipsoïde, en tous les points d'une section circulaire, est un conoïde;*

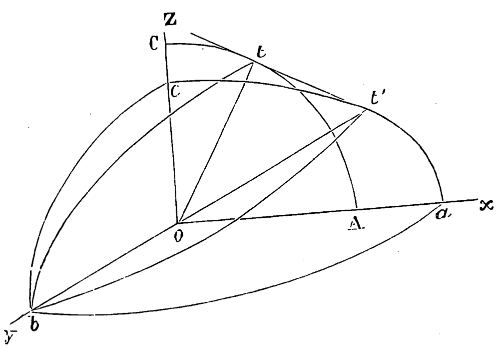
2° *Le lieu des normales en* D, *à la surface des ondes, est un cône du deuxième degré* (47);

3° *Les génératrices principales de ce cône sont le rayon* OD *et la normale* D*n* (**) *à l'ellipse* A′C′;

4° *Les plans perpendiculaires à l'une ou à l'autre de ces deux droites coupent le cône suivant des circonférences* (47).

105. *Cercles de contact* (***). — Dans le plan de la section principale *ac* (fig. 32), décrivons, comme précé-

Fig. 32.



(*) Le point *g* est un *ombilic*.

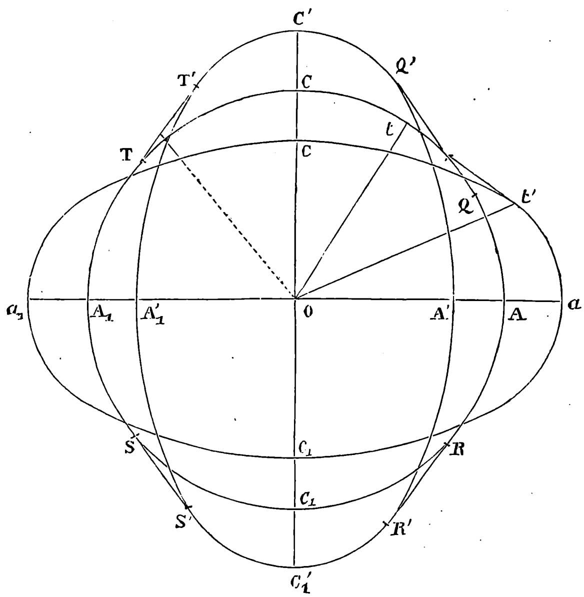
(**) Il est visible que D*n* est parallèle à O*g*.

(***) Dénomination proposée par M. Lamé (*Théorie de l'élasticité*, p. 258).

demment (100), la circonférence AC. Soit tt' une tangente commune à ces deux lignes. Il est facile de voir que le cylindre de révolution ayant pour section droite la circonférence bOt, touche l'ellipsoïde suivant l'ellipse bOt'. Nous rentrons donc dans un cas examiné antérieurement (52); et, en conséquence : *Un plan parallèle au plan* bOt, *mené à la distance* b *de celui-ci, touche* S *suivant une circonférence qui rencontre la parallèle à* tt', *menée par le pôle. De plus, le diamètre de cette circonférence égale* tt'.

106. *Remarque.* — Si l'on fait effectuer un quart de révolution à la tangente tt' (fig. 33), cette ligne devient TT', tangente commune à l'ellipse $C'A'C'_1A'_1$ et à la circonférence CAC_1A_1 : le cercle décrit sur TT' comme diamètre, dans le plan perpendiculaire à celui de la figure, est l'un des *cercles de contact*. Les autres sont projetés en SS', R'R, QQ'.

Fig. 33.



107. *Forme de la surface.* — Elle résulte clairement de la discussion précédente. « Les deux » nappes n'ont d'autres points » communs que les quatre ombilics (*). Si on les détachait en » ces points, la nappe externe ou » enveloppante figurerait une sorte de *coussin* ayant pour section moyenne » l'ellipse AOB (fig. 30), et quatre coins rentrants; tandis que la nappe » interne ou enveloppée présenterait la forme d'une *outre* ayant pour section » moyenne le cercle de rayon c, et quatre nœuds en saillie. Pour l'œil placé » au loin sur l'axe des y, le contour apparent externe est une sorte d'octo- » gone ayant quatre côtés linéaires (**) et non adjacents, réunis ou séparés » par deux arcs de cercle et par deux arcs d'ellipse auxquels ils sont tan-

(*) Les *ombilics* sont les *points coniques*.

(**) C'est-à-dire *rectilignes*.

» gents (fig. 33); tandis que le contour apparent de la nappe interne est un » quadrilatère convexe, à côtés courbes, deux circulaires et deux elliptiques, » formant angles aux quatre sommets. Les contours des mêmes nappes, pour » l'œil placé au loin sur l'axe des z ou sur l'axe des x, ne présentent aucune » discontinuité du même genre; ils sont ou complétement circulaires, ou com- » plétement elliptiques (*). »

108. *Points situés sur un même rayon.* — D'après l'équation (82), si u_1 u_2 sont les longueurs de deux rayons vecteurs ayant même direction,

$$Au_1^2u_2^2 = C;$$

ou

$$u_1^2u_2^2\sum a^2e^2 = a^2b^2c^2.$$

Mais

$$u_1^2\sum a^2e^2 = \sum a^2X_1^2 = abcw_1, \qquad u_2^2\sum a^2e^2 = abcw^2;$$

donc

$$u_2^2w_1 = abc, \quad u_1^2w_2 = abc. \tag{92}$$

109. *Coniques sphériques et coniques ellipsoïdiques.* — Reprenons les systèmes (A), (D) qui représentent, chacun, la surface des ondes; savoir :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a^2X^2}{u^2-a^2} + \frac{b^2Y^2}{u^2-b^2} + \frac{c^2Z^2}{u^2-c^2} = 0, &(61)\\ &X^2 + Y^2 + Z^2 = u^2; &(5)\end{aligned}\right\}\ (A)$$

$$\left.\begin{aligned} &a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 = abcw, &(85)\\ &\frac{aX^2}{aw-bc} + \frac{bY^2}{bw-ca} + \frac{cZ^2}{cw-ab} = 0. &(86)\end{aligned}\right\}\ (D)$$

Il est facile de vérifier que les cônes C, C_1, représentés par les équations (61), (86), sont orthogonaux. En effet, la condition d'*orthogonalité* est

$$\sum \frac{a^2X^2}{(a^2-a^2)(aw-bc)} = 0.$$

Mais (89)

$$\frac{X^2}{(u^2-a^2)(aw-bc)} = \frac{bc(b^2-c^2)}{P};$$

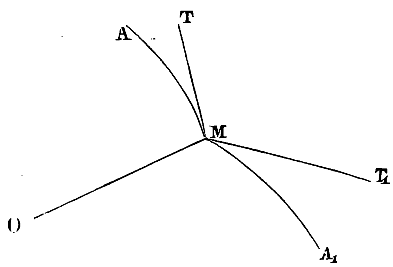
donc l'égalité précédente se réduit à l'identité

$$\sum a^2(b^2-c^2) = 0.$$

(*) Lamé, *Théorie de l'élasticité*, p. 261.

110. OM (fig. 34) étant la génératrice commune à C et C_1, soient MA, MA_1 les intersections de ces cônes avec la surface, MA étant la conique *sphérique;* et soient MT, MT_1 les tangentes correspondantes. On vient de voir que les *plans tangents* OMT, OMT_1 sont perpendiculaires entre eux. D'ailleurs la tangente MT, à la courbe sphérique, est perpendiculaire au rayon OM; donc, d'après un théorème connu, MT est perpendiculaire à MT_1. Autrement dit, *les coniques* c, c_1, *déterminées, sur la surface des ondes, par les cônes* C, C_1, *sont orthogonales* (*).

Fig. 34.



111. Si, dans les équations (61), (86), les paramètres u, w, au lieu d'être arbitraires, satisfont à la relation

$$u^2 w = abc,$$

ces équations rentrent l'une dans l'autre, et *les cônes* C, C_1 *coïncident*. Par suite, d'après les équations (92) qui donnent $w_2 = const.$ si $u_1 = const.$, $w_1 = const.$ si $u_2 = const.$:

Tout cône, qui coupe une des deux nappes suivant une courbe sphérique, coupe l'autre nappe suivant une courbe ellipsoïdique (**).

112. *Cônes supplémentaires.* — Les cônes supplémentaires de C, C_1 sont représentés par

$$\frac{u^2 - a^2}{a^2} X^2 + \frac{u^2 - b^2}{b^2} Y^2 + \frac{u^2 - c^2}{c^2} Z^2 = 0, \qquad (93)$$

$$\frac{aw - bc}{a} X^2 + \frac{bw - ca}{b} Y^2 + \frac{cw - ab}{c} Z^2 = 0. \qquad (94)$$

La première équation, combinée avec

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

conduit à

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = u^2.$$

L'équation (94) donne, pareillement,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{abc}{w}\cdot$$

(*) *Théorie de l'élasticité*, p. 264.

(**) *Idem*, p. 265.

Ainsi, en ayant égard au dernier théorème (111), on peut dire que:

Si un cône coupe la surface des ondes, S, *suivant une courbe sphérique, le cône supplémentaire coupe l'ellipsoïde* s *suivant une courbe sphérique;* ou, ce qui est équivalent:

La surface des ondes est le lieu des coniques sphériques supplémentaires des coniques sphériques tracées sur la surface de l'ellipsoïde (*).

113. *Points conjugués.* — La surface des ondes jouit d'une propriété bien remarquable: *elle est sa propre polaire réciproque, relativement à l'ellipsoïde* e *représenté par*

$$\frac{x^2}{bc}+\frac{y^2}{ca}+\frac{z^2}{ab}=1. \tag{95}$$

Si, d'un point M de la surface S, dont les coordonnées sont X, Y, Z, on mène des plans tangents à l'ellipsoïde, le plan P de la courbe de contact a pour équation

$$\frac{XX'}{bc}+\frac{YY'}{ca}+\frac{ZZ'}{ab}=1. \tag{96}$$

Quand le point M parcourt S, le plan P enveloppe une surface S'; à chaque point M, correspond un point M' de S': M et M' sont dits *conjugués* (**). Il s'agit de trouver les valeurs des coordonnées X', Y', Z' de M', et de vérifier ensuite que ces valeurs satisfont à l'équation de S (***).

En partant de l'équation (96), jointe à

$$\frac{a^2X^2}{u^2-a^2}+\frac{b^2Y^2}{u^2-b^2}+\frac{c^2Z^2}{u^2-c^2}=0, \tag{S}$$

et en effectuant le calcul ordinaire (78), on trouve d'abord

$$\lambda\frac{X'}{bc}=\left[\frac{a^2}{a^2-u^2}+\sum\frac{a^2X^2}{(a^2-u^2)^2}\right]X,$$

et deux autres équations de même forme. Or

$$\sum\frac{a^2X^2}{(a^2-u^2)^2}=\frac{v^2}{k^2}; \tag{62}$$

(*) DURRANDE, *Nouvelles Annales de mathématiques*, t. XXII, p. 200. Le théorème que nous venons de démontrer par le calcul est, du reste, une conséquence évidente de la propriété des cônes supplémentaires (23, 4°).

(**) Le mot *conjugué* n'a plus, on le voit, la signification que nous lui avons attribuée jusqu'à présent. Il en est de même des notations.

(***) Cette marche, moins naturelle que celle qu'a suivie M. Lamé, me paraît, cependant, plus simple que celle-ci.

donc

$$\lambda\frac{X'}{bc}=\frac{(a^2-v^2)u^2}{(a^2-u^2)k^2}X,\quad \lambda\frac{Y'}{ca}=\frac{(b^2-v^2)u^2}{(b^2-u^2)k^2}Y,\quad \lambda\frac{Z'}{ab}=\frac{(c^2-v^2)u^2}{(c^2-u^2)k^2}Z;$$

puis, à cause de la relation (96) :

$$\lambda=\frac{u^2v^2}{k^2};$$

et, par conséquent,

$$X'=\frac{(a^2-v^2)bc}{(a^2-u^2)v^2}X,\quad Y'=\frac{(b^2-v^2)ca}{(b^2-u^2)v^2}Y,\quad Z'=\frac{(c^2-v^2)ab}{(c^2-u^2)v^2}Z. \tag{97}$$

Nous avons trouvé (89)

$$X^2=\frac{\left[-u^2v^2+(b^2+c^2)v^2-b^2c^2\right](u^2-a^2)^2}{(u^2-v^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)};$$

donc, en particulier,

$$X'^2=-\frac{(a^2-v^2)^2b^2c^2\left[(b^2-v^2)(c^2-v^2)+k^2v^2\right]}{k^2v^4(c^2-a^2)(a^2-b^2)}. \tag{98}$$

De là résulte, par un calcul simple,

$$\sum X'^2=-\frac{1}{k^2v^2}\left[(a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2)-k^2v^4\right], \tag{99}$$

puis

$$\frac{a^2X'^2}{-a^2+\sum X'^2}=\frac{a^2b^2c^2(b^2-c^2)(a^2-v^2)}{P};$$

puis enfin

$$\sum\frac{a^2X'^2}{-a^2+\sum X'^2}=0.$$

Ainsi, *le point* M′ *est sur la surface* S. C'est ce qu'il fallait démontrer.

114. *Relations entre les points conjugués.* — 1° Si l'on représente par u' la valeur de u relative au point M′, on peut écrire ainsi l'équation (99) :

$$k^2v^2(v^2-u'^2)=(a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2); \tag{100}$$

d'où, en changeant M en M′ et M′ en M :

$$k'^2v'^2(v'^2-u^2)=(a^2-v'^2)(b^2-v'^2)(c^2-v'^2). \tag{101}$$

2° La même transformation, effectuée sur la première des formules (97), conduit à

$$(a^2-u^2)(a^2-u'^2)v^2v'^2=b^2c^2(a^2-v^2)(a^2-v'^2), \tag{102}$$

ou

$$a^4v^2v'^2-a^2(a^2+u'^2)v^2v'^2+u^2u'^2v^2v'^2=a^4b^2c^2-a^2b^2c^2(v^2+v'^2)+b^2c^2v^2v'^2.$$

Cette égalité donne, par une permutation tournante,

$$b^4v^2v'^2 - b^2(u^2 + u'^2)v^2v'^2 + u^2u'^2v^2v'^2 = a^2b^4c^2 - a^2b^2c^2(v^2 + v'^2) + c^2a^2v^2v'^2.$$

Retranchant membre à membre, et supprimant le facteur a^2-b^2, on trouve

$$(a^2 + b^2 + c^2 - u^2 - u'^2)v^2v'^2 = a^2b^2c^2. \tag{103}$$

3° L'élimination de $a^2b^2c^2$, entre cette nouvelle relation et l'une ou l'autre des deux précédentes, donne encore

$$(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - u^2u'^2)v^2v'^2 = a^2b^2c^2(v^2 + v'^2). \tag{104}$$

4° On tire, des deux dernières équations :

$$v^2k^2u'^2 = (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)v^2 + (u^2 - a^2 - b^2 - c^2)v^4 - a^2b^2c^2, \tag{105}$$

$$\left[(a^2 + b^2 + c^2 - u^2)u^2v^2 - (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)v^2 + a^2b^2c^2\right]v'^2 = a^2b^2c^2k^2. \tag{106}$$

5° Pour simplifier ces égalités, employons la relation entre les paramètres u, v, w :

$$abck^2w = -u^4v^2 + u^2v^2\sum a^2 - v^2\sum b^2c^2 + a^2b^2c^2. \tag{89}$$

Il en résulte :

$$(a^2 + b^2 + c^2 - u^2 - u'^2)v^2 = abc\,w, \tag{107}$$

$$v'^2w = abc; \tag{108}$$

puis, par un changement de lettres :

$$(a^2 + b^2 + c^2 - u^2 - u'^2)v'^2 = abc\,w', \tag{109}$$

$$v^2w' = abc. \tag{110}$$

6° On tire encore, des équations (104), (107), (108) et (109):

$$a^2 + b^2 + c^2 - u^2 - u'^2 = ww', \tag{111}$$

$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - u^2u'^2 = abc(w + w'). \tag{112}$$

7° Au moyen de la valeur de v^2 (110), les relations (89) et (100) deviennent :

$$(a^2 - u^2)(b^2 - u^2)(c^2 - u^2) = (abc - u^2w)(abc - u^2w'), \tag{113}$$

$$(a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)w'^3 = -abc(abc - u^2w')(abc - u'^2w'). \tag{114}$$

115. *Suite.* — 1° Si l'on fait, pour abréger,

$$\varphi(u^2) = (a^2 - u^2)(b^2 - u^2)(c^2 - u^2), \tag{115}$$

on a, au lieu des deux dernières équations :

$$\varphi(u^2) = (abc - u^2w)(abc - u^2w'), \tag{116}$$

$$\varphi(v^2) = -\frac{abc}{w'^3}(abc - u^2w')(abc - u'^2w'); \tag{117}$$

et, par une permutation,

$$\varphi(u'^2) = (abc - u'^2w')(abc - u'^2w), \tag{118}$$

$$\varphi(v'^2) = -\frac{abc}{w^3}(abc - u'^2w)(abc - u^2w). \tag{119}$$

2° Il résulte, de celles-ci :

$$\frac{\varphi(u^2)\varphi(u'^2)}{\varphi(v^2)\varphi(v'^2)} = \frac{w^3w'^3}{a^2b^2c^2}. \tag{120}$$

3° On tire, des formules (97) et (87),

$$\sum aXX' = -\frac{abc}{Pv^2k^2}\sum\left[(b^2 - v^2)(c^2 - v^2) + k^2v^2\right](a^2 - u^2)(a^2 - v^2)(b^2 - c^2).$$

La somme indiquée dans le second membre se décompose en

$$\varphi(v^2)\sum(a^2 - u^2)(b^2 - c^2) + k^2v^2\sum(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)(b^2 - c^2).$$

Donc, en négligeant les sommes nulles,

$$\sum aXX' = abc\ (^*). \tag{121}$$

4° On trouve, avec la même facilité,

$$\sum bcXX' = u^2u'^2\ (^{**}), \tag{122}$$

$$\sum a^3XX' = abcww'\ (^{**}). \tag{123}$$

(*) *Théorie de l'élasticité*, p. 251. Le calcul ci-dessus n'est qu'une vérification : le point M', appartenant au plan polaire de M, on doit trouver (115)

$$\sum\frac{XX'}{bc} = 1,$$

ou

$$\sum aXX' = abc.$$

Ce n'est pas tout : la distance du pôle à ce plan est donnée par la formule

$$v' = \frac{abc}{\sqrt{a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2}}.$$

A cause de (85), le second membre égale $\sqrt{\frac{abc}{w}}$; donc

$$v'^2w = abc. \tag{108}$$

On voit que cette relation très-simple pouvait être obtenue sans calcul.

(**) *Théorie de l'élasticité*, p. 251.

116. *Coordonnées des points conjugués.* — Les relations précédentes, qui nous serviront dans une suite à ce mémoire, peuvent être employées, dès à présent, à simplifier les formules (97), (98).

Celle-ci peut d'abord être écrite sous cette forme :

$$X'^2 = -\frac{(a^2 - v^2)b^2c^2\left[\varphi(v^2) + k^2v^2(a^2 - v^2)\right]}{k^2v^4(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}.$$

Mais, à cause de la relation (100) :

$$\varphi(v^2) + k^2v^2(a^2 - v^2) = k^2v^2(a^2 - u'^2);$$

donc

$$X'^2 = -\frac{(a^2 - v^2)b^2c^2(a^2 - u'^2)}{v^2(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)};$$

ou, si l'on fait usage de la formule (108),

$$X'^2 = \frac{bc(bc - aw')(a^2 - u'^2)}{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}. \tag{124}$$

Une simple permutation d'indices donne ensuite

$$X^2 = \frac{bc(bc - aw)(a^2 - u^2)}{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)};$$

valeur déjà trouvée (88).

117. *Autres relations.* — 1° Si l'on part des formules (11) et (13), et que l'on remplace l, m, n par leurs valeurs (57), elles deviennent

$$L = \frac{a^2 - v^2}{a^2 - u^2}\frac{X}{v}, \qquad M = \frac{b^2 - v^2}{b^2 - u^2}\frac{Y}{v}, \qquad N = \frac{c^2 - v^2}{c^2 - u^2}\frac{Z}{v}. \tag{125}$$

On a donc, pour le point M′ conjugué de M :

$$L' = \frac{a^2 - v'^2}{a^2 - u'^2}\frac{X'}{v'}, \qquad M' = \frac{b^2 - v'^2}{b^2 - u'^2}\frac{Y'}{v'}, \qquad N' = \frac{c^2 - v'}{c^2 - u'^2}\frac{Z'}{v'}. \tag{126}$$

Par conséquent,

$$\frac{L}{L'} = \frac{(a^2 - v^2)(a^2 - u'^2)v'}{(a^2 - u^2)(a^2 - v'^2)v}\frac{X}{X'}.$$

Mais, d'après la première des relations (97),

$$\frac{X}{X'} = \frac{(a^2 - v'^2)bc}{(a^2 - u'^2)v'^2};$$

donc

$$\frac{L}{L'} = \frac{(a^2 - v^2)\, bc}{(a^2 - u^2)\, vv'}, \quad \frac{M}{M'} = \frac{(b^2 - v^2)\, ca}{(b^2 - u^2) vv'}, \quad \frac{N}{N'} = \frac{(c^2 - v^2)\, ab}{(c^2 - u^2) vv'}; \tag{127}$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\frac{L'}{L} = \frac{(a^2 - v'^2)\, bc}{(a^2 - u'^2) vv'}, \quad \frac{M'}{M} = \frac{(b^2 - v'^2)\, ca}{(b^2 - u'^2) vv'}, \quad \frac{N'}{N} = \frac{(c^2 - v'^2)\, ab}{(c^2 - u'^2) vv'} \ (^*). \tag{128}$$

2° Soient M_1, M_2 deux points situés sur un même rayon vecteur. Soient M'_1 le point conjugué de M_1, et M'_2 le point conjugué de M_2. On a simultanément (92) et (108) :

$$u_1^2 w_2 = abc, \quad u_2^2 w_1 = abc,$$
$$v'^2_2 w_2 = abc, \quad v'^2_1 w_1 = abc;$$

donc

$$v'_2 = u_1, \quad v'_1 = u_2. \tag{129}$$

Par conséquent :

M_1, M_2 *étant deux points situés sur un même rayon vecteur, le plan polaire du premier est tangent à la sphère qui, passant par le second, a pour centre le pôle;* ET VICE VERSA.

118. *Lignes conjuguées des points coniques.* — M. Lamé a démontré (**) que si M est un *point conique* (103), son conjugué M′ est un point quelconque de la *circonférence de contact* correspondante (105).

Nous ne reproduirons pas le calcul développé par notre illustre maître.

(*) La comparaison de ces rapports inverses donne, par exemple,

$$(a^2 - v^2)(a^2 - v'^2)\, b^2c^2 = (a^2 - u^2)(a^2 - u'^2)\, v^2 v'^2;$$

ce qui est exact (102).

(**) *Théorie de l'élasticité*, p. 258.

Liége, 4 novembre 1868.

ADDITION.

119. Aux relations démontrées ci-dessus (116, 117), on en peut joindre d'autres, excessivement simples, qui résultent de la définition des points conjugués (113). En conservant les notations précédentes, j'observe que *le plan polaire de* M′, *relativement à l'ellipsoïde directeur, est représenté par chacune des équations*

$$\frac{X'}{bc}\xi + \frac{Y'}{ca}\eta + \frac{Z'}{ab}\zeta = 1,$$

$$(\xi - X)L + (\eta - Y)M + (\zeta - Z)N = 0;$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées *courantes*. Identifiant, on a donc

$$\frac{X'}{bcL} = \frac{Y'}{caM} = \frac{Z'}{abN} = \frac{1}{LX + MY + NZ} = \frac{1}{v};$$

ou

$$X' = \frac{bc}{v}L, \quad Y' = \frac{ca}{v}M, \quad Z' = \frac{ab}{v}N; \tag{150}$$

puis, par une permutation d'indices :

$$X = \frac{bc}{v'}L', \quad Y = \frac{ca}{v'}M', \quad Z = \frac{ab}{v'}N' \tag{151}$$

120. *Remarque*. — Il est aisé de voir que ces nouvelles relations s'accordent avec les premières.

Avril 1870.

FIN.