SUR

LES NOMBRES DE BERNOULLI ET D'EULER

ET

SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES,

PAR

E. CATALAN.

(Mémoire présenté à la classe des sciences, le 6 avril 1867.)

SUR

LES NOMBRES DE BERNOULLI ET D'EULER

ET

SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES.

I. Dans une *Note sur le calcul des Nombres de Bernoulli* (*), j'ai démontré :

1° Que si l'on suppose

$$B_{2q-1} = \pm \frac{P_{2q-1}}{2(4^q-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

on a

$$P_{2q-1} - \frac{2q(2q-1)}{2.3} P_{2q-3} + \frac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-3)}{2.3.4.5} P_{2q-5} - \ldots \pm \frac{2q}{2} P_1 = \pm 1 \quad (2)(^{**});$$

2° Que *les nombres* P_1, P_3, P_5, ..., *dont dépendent les Nombres de Bernoulli*, B_1, B_3, ..., *sont entiers impairs* (***).

D'ailleurs (****),

$$tg x = 4(4-1)\frac{B_1}{1.2}x - 4^2(4^2-1)\frac{B_3}{1.2.3.4}x^3 + \ldots \pm 4^q(4^q-1)\frac{B_{2q-1}}{1.2.3\ldots.2q}x^{2q-1} \mp \ldots (3);$$

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris*, t. LVIII, p. 1106.

(**) On doit prendre les signes supérieurs lorsque q est *impair*.

(***) Postérieurement à la publication de cette Note, j'ai appris qu'Euler s'est occupé des nombres P.

(****) *Comptes rendus*, t. LIV, p. 1031.

donc

$$tg\,\frac{1}{2}x = \frac{P_1}{1.2}x + \frac{P_3}{1.2.3.4}x^3 + \ldots + \frac{P_{2q-1}}{1.2.3\ldots 2q}x^{2q-1} + \ldots,$$

ou

$$tg\,\frac{1}{2}x = \sum_1^\infty \frac{P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)}x^{2q-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

II. A cause de $P_1 = 1$, on trouve, en prenant les dérivées des deux membres :

$$tg^2\,\frac{1}{2}x = 2\sum_2^\infty \frac{(2q-1)P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)}x^{2q-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Par conséquent,

$$2\sum_2^\infty \frac{(2q-1)P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)}x^{2q-2} = \left\{\sum_1^\infty \frac{P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)}x^{2q-1}\right\}^2,$$

ou

$$2\sum_1^\infty \frac{(2q+1)P_{2q+1}}{\Gamma(2q+3)}x^{2q-2} = \left\{\sum_1^\infty \frac{P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)}x^{2q-2}\right\}^2 \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Dans le second membre, le coefficient de x^{2q-2} est

$$\frac{P_1\,P_{2q-1}}{\Gamma(3)\Gamma(2q+1)} + \frac{P_3\,P_{2q-3}}{\Gamma(3)\Gamma(2q-1)} + \ldots + \frac{P_{2q-1}\,P_1}{\Gamma(2q+1)\Gamma(3)};$$

donc

$$P_{2q+1} = \frac{1}{2(2q+1)}\left[\frac{\Gamma(2q+3)}{\Gamma(3)\Gamma(2q+1)}P_1\,P_{2q-1} + \frac{\Gamma(2q+3)}{\Gamma(3)\Gamma(2q-1)}P_3\,P_{2q-3} + \ldots + \frac{\Gamma(2q+3)}{\Gamma(2q+1)\Gamma(3)}P_{2q-1}\,P_1\right];$$

ou, plus simplement,

$$\left.\begin{aligned} P_{2q+1} = \frac{q+1}{2}\Big[P_{2q-1} &+ \frac{2q(2q-1)}{3.4}P_3\,P_{2q-3} + \frac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-3)}{3.4.5.6}P_5\,P_{2q-5} + \ldots \\ &+ \frac{2q(2q-1)}{3.4}P_{2q-3}\,P_3 + P_{2q-1}\Big] \end{aligned}\right\} (7).$$

III. Le nombre des termes contenus dans la parenthèse est égal à q. Si q est *pair*, on peut écrire, au lieu de la formule (7) :

$$P_{2q+1} = (q+1)\left[P_{2q-1} + \frac{2q(2q-1)}{3.4}P_3\,P_{2q-3} + \ldots + \frac{2q(2q-1)\ldots(q+3)}{3.4\ldots q}P_{q-1}\,P_{q+1}\right] \,.\ (8).$$

Si q est *impair*, il y a un *terme du milieu*, ayant pour expression

$$\frac{2q(2q-1)\ldots(q+2)}{3.4 \quad \ldots(q+1)} P_q P_q;$$

donc, dans ce cas,

$$\left.\begin{array}{l} P_{2q+1} = (q+1)\left[P_{2q-1} + \dfrac{2q(2q-1)}{3.4} P_3 P_{2q-3} + \ldots + \dfrac{2q(2q-1)\ldots(q+4)}{3.4 \quad \ldots(q-1)} P_{q-2} P_{q+2} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{2}\dfrac{2q(2q-1)\ldots(q+2)}{3.4 \quad \ldots(q+1)}(P_q)^2\right] \end{array}\right\} \quad (9).$$

Le calcul des nombres P, par les formules (7), (8), (9), est plus simple que par la relation (2) (*).

IV. D'après la *définition* (1), jointe à une formule de Plana,

$$P_{2q-1} = 8q(4^q-1)\int_0^\infty \frac{t^{2q-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Au moyen de cette valeur, l'équation (5) devient

$$tg^2 \frac{1}{2} x = 16 \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \sum_2^\infty \frac{q(2q-1)(4^q-1)\,t^{2q-1}\,x^{2q-2}}{\Gamma(2q+1)};$$

ou

$$tg^2 \frac{1}{2} x = 8 \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \sum_1^\infty \frac{(4^{q+1}-1)\,t^{2q+1}\,x^{2q}}{\Gamma(2q+1)} \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

On a, identiquement,

$$\sum_1^\infty \frac{(4^{q+1}-1)\,t^{2q+1}\,x^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = 4t \sum_1^\infty \frac{(2tx)^{2q}}{\Gamma(2q+1)} - t\sum_1^\infty \frac{(tx)^{2q}}{\Gamma(2q+1)};$$

donc, à cause de

$$e^x + e^{-x} = 2\sum_0^\infty \frac{x^{2q}}{\Gamma(2q+1)}:$$

(*) On trouve :

$P_1 = 1,\ P_3 = 1,\ P_5 = 3,\ P_7 = 17,\ P_9 = 155,\ P_{11} = 2\,073,\ P_{13} = 38\,227, \ldots$

En général, *si* $q = 2^n q'$, q' *étant impair*, P_{2q-1} *est divisible par* q'.

$$\sum_1^{\infty} \frac{(2tx)^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = \frac{1}{2}(e^{2tx} + e^{-2tx}) - 1,$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{(tx)^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = \frac{1}{2}(e^{tx} + e^{-tx}) - 1;$$

et, par conséquent,

$$\sum_1^{\infty} \frac{(4^{q+1}-1)\, t^{2q+1} x^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = 2t\,(e^{2tx} + e^{-2tx} - 2) - \frac{t}{2}(e^{tx} + e^{-tx} - 2),$$

ou

$$\sum_1^{\infty} \frac{(4^{q+1}-1)\, t^{2q+1} x^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = \frac{1}{2}\, t \left(e^{\frac{tx}{2}} - e^{-\frac{tx}{2}}\right)^2 (4e^{tx} + 7 + 4e^{-tx}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

La substitution dans l'équation (11) donne

$$\int_0^{\infty} \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1} \left(e^{\frac{tx}{2}} - e^{-\frac{tx}{2}}\right)^2 (4e^{tx} + 7 + 4e^{-tx}) = \frac{1}{4}\, tg^2 \frac{1}{2} x;$$

ou, par le changement de x en $2x$:

$$\int_0^{\infty} \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1} (e^{tx} - e^{-tx})^2 (4e^{2tx} + 7 + 4e^{-2tx}) = \frac{1}{4}\, tg^2 x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

Cette intégrale définie, que je ne trouve pas dans les *Tables* dues à M. Bierens de Haan, peut en donner beaucoup d'autres, dont quelques-unes sont connues.

V. Soit, par exemple, $x = \frac{\pi}{8}$: la formule (A) devient

$$\int_0^{\infty} \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1} \left(e^{\frac{\pi t}{8}} - e^{-\frac{\pi t}{8}}\right)^2 \left(4e^{\frac{\pi t}{4}} + 7 + 4e^{-\frac{\pi t}{4}}\right) = \frac{1}{4}(3 - 2\sqrt{2});$$

et, si l'on pose

$$e^{\frac{\pi t}{4}} = \frac{1}{z} :$$

$$\int_0^{1} \frac{z^5(1-z)(4+7z+4z^2)}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}\, lzdz = -\frac{\pi^2}{64}(3 - 2\sqrt{2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

La fraction

$$\frac{z^3(1-z)(4+7z+4z^2)}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}$$

est décomposable en

$$1-4z-\frac{1}{2(1+z)}+\frac{7z}{2(1+z^2)}-\frac{1-z^2}{2(1+z^4)}+\frac{3z^3}{1+z^4}.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 lzdz-4\int_0^1 zlzdz-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{lzdz}{1+z}+\frac{7}{2}\int_0^1\frac{zlzdz}{1+z^2}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-z^2)\,lzdz}{1+z^4}$$
$$+3\int_0^1\frac{z^3lzdz}{1+z^4}=-\frac{\pi^2}{64}(3-2\sqrt{2});$$

ou, à cause des valeurs connues :

$$\int_0^1 lzdz=-1,\int_0^1 zlzdz=-\frac{1}{4},\int_0^1\frac{lzdz}{1+z}=-\frac{\pi^2}{12},\int_0^1\frac{zlzdz}{1+z^2}=-\frac{\pi^2}{48},$$

$$\int_0^1\frac{(1-z^2)\,lzdz}{1+z^4}=-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16},\int_0^1\frac{z^3lzdz}{1+z^4}=-\frac{\pi^2}{192}:$$

$$-1+1+\frac{\pi^2}{24}-\frac{7\pi^2}{96}+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}-\frac{\pi^2}{64}=-\frac{\pi^2}{64}(3-2\sqrt{2});$$

ce qui est identique. On a ainsi une vérification de (A).

VI. En passant, nous signalerons une sommation de série, probablement connue.

Il est visible que

$$-\int_0^1\frac{lzdz}{1+z^4}=\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{(4n+1)^2},\quad -\int_0^1\frac{z^2lzdz}{1+z^4}=\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{(4n+3)^2}.$$

D'ailleurs,

$$\int_0^1\frac{(1-z^2)\,lzdz}{1+z^4}=-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}\ (*);$$

(*) Cette intégrale remarquable a été déterminée par Euler (Bierens de Haan, t. 152). On voit qu'elle résulte de la formule (A).

donc

$$\sum_{0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+1}{\left[(4n+1)(4n+3)\right]^{2}}=\frac{\pi^{2}\sqrt{2}}{128}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(14).$$

VII. Dans la relation (A), supposons

$$x=\frac{\pi}{3},\quad e^{\frac{\pi i}{3}}=\frac{1}{\sqrt{z}}:$$

elle devient

$$\int_{0}^{1}\frac{(1-z)(4+7z+4z^{2})}{1+z+z^{2}}\,lzdz=-\frac{\pi^{2}}{3}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(15).$$

La fraction

$$\frac{(1-z)(4+7z+4z^{2})}{1+z+z^{2}}=1-4z+3\,\frac{2z+1}{1+z+z^{2}}.$$

Par suite, la formule (15) se réduit à

$$\int_{0}^{1}\frac{2z+1}{1+z+z^{2}}\,lzdz=-\frac{\pi^{2}}{9};$$

ce qui est exact (*).

VIII. Plus généralement, soit $x=\frac{\pi}{n}$, n étant un nombre entier. Si l'on fait

$$e^{ix}=e^{\frac{\pi i}{n}}=\frac{1}{\sqrt{z}},$$

on transforme la relation (A) en celle-ci :

$$\int_{0}^{1}\frac{z^{n-3}(1-z)(4+7z+4z^{2})}{1+z+z^{2}+\,..\,+z^{n-1}}\,lzdz=-\frac{\pi^{2}}{n^{2}}\,tg^{2}\frac{\pi}{n}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(B).$$

La fraction

$$\frac{z^{n-3}(1-z)(4+7z+4z^{2})}{1+z+z^{2}+\,..\,+z^{n-1}}=1-4z+\frac{6z^{n-2}+7z^{n-3}+3z^{n-4}+3z^{n-5}+\,..\,+3z-1}{1+z+z^{2}+\,..\,+z^{n-1}};$$

de plus,

$$\int_{0}^{1}(1-4z)\,lzdz=0;$$

(*) Bierens, t. 153.

donc

$$\int_0^1 \frac{6z^{n-2}+7z^{n-3}+5z^{n-4}+5z^{n-5}+\ldots+5z-1}{1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}}\, lzdz = -\frac{\pi^2}{n^2}\, tg^2\frac{\pi}{n} \; . \; . \quad (C).$$

Cette formule, qui en donne une infinité d'autres, n'est encore qu'un cas particulier : en remplaçant, dans (A), e^{tx} par $\frac{1}{\sqrt{z}}$, on trouve la relation générale

$$\int_0^1 \frac{z^{\frac{\pi}{x}-3}(1-z)^2(4+7z+4z^2)}{1-z^{\frac{\pi}{x}}}\, lzdz = -x^2\, tg^2 x \; . \; . \; . \; . \; . \quad (D).$$

Celle-ci subsiste pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On en trouverait d'autres, aussi générales, en différenciant ou en intégrant par rapport à x. Enfin, l'égalité

$$\frac{z^{n-3}(1-z)(4+7z+4z^2)}{1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}} = z^{n-3}(1-z)^2(4+7z+4z^2)\sum_{i=0}^{i=\infty} z^{in}$$

conduit à un développement de $\left(\frac{\pi}{n}\, tg\, \frac{\pi}{n}\right)^2$, assez remarquable. Je laisse de côté ces détails, afin de passer à un autre sujet.

IX. Si l'on suppose

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_0^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)}\, x^{2n} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16),$$

on trouve

$$E_0 = 1,\ E_2 = 1,\ E_4 = 5,\ E_6 = 61,\ E_8 = 1385, \ldots$$

puis (*)

$$E_{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1.2}E_{2n-2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4}E_{2n-4} - \ldots \pm \frac{2n(2n-1)}{1.2}E_2 \mp E_0 = o \quad (17).$$

Les nombres *entiers* E sont appelés, par M. Sylvester, *Nombres d'Euler* (**). De la relation (17), on conclut qu'il sont *impairs* (***). On peut représenter E_{2n} par une intégrale définie.

(*) *Comptes rendus*, t. LIV, p. 1035.

(**) *Comptes rendus*, t. LII, p. 161.

(***) La démonstration est plus simple que pour les nombres P (*Comptes rendus*, t. LVIII, p. 1108). On vérifie aisément que les Nombres d'Euler ont la forme $4k+1$. Cette propriété a été signalée par M. Sylvester.

A cet effet, j'observe que la formule connue

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2\int_0^\infty \frac{(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x} - 1)}{e^{2\pi\alpha} - 1}\,d\alpha$$

devient, par le changement de x en $\frac{\pi}{2} - x$:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1 - \frac{2x}{\pi}} + 2\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1}\left[e^{\alpha(\pi - 2x)} - e^{-\alpha(\pi - 2x)} - e^{\alpha\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + e^{-\alpha\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\right] \quad (18).$$

Si l'on suppose le second membre ordonné suivant les puissances croissantes de x, le coefficient de x^{2n} est

$$C_{2n} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1} + \frac{2}{\Gamma(2n+1)}\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n}\,d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1}\left[2^{2n}(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}) - \left(e^{\alpha\frac{\pi}{2}} - e^{-\alpha\frac{\pi}{2}}\right)\right].$$

L'intégrale se décompose en

$$2^{2n}\int_0^\infty e^{-\pi\alpha}\alpha^{2n}\,d\alpha - \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\frac{\pi}{2}}\alpha^{2n}\,d\alpha}{e^{\pi\alpha} + 1} = \frac{2^{2n}}{\pi^{2n+1}}\Gamma(2n+1) - \frac{2^{2n+1}}{\pi^{2n+1}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}u^{2n}\,du}{e^{2u} + 1};$$

donc

$$C_{2n} = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1} - \frac{2}{\Gamma(2n+1)}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}\int_0^\infty \frac{e^{-u}u^{2n}\,du}{e^{2u} + 1}.$$

Et comme

$$C_{2n} = \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)},$$

on a

$$E_{2n} = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}\Gamma(2n+1) - 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}\int_0^\infty \frac{e^{-u}u^{2n}\,du}{e^{2u} + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Pour simplifier cette expression, je remplace $\Gamma(2n+1)$ par $\int_0^\infty e^{-u}u^{2n}\,du$: j'obtiens

$$= 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}\int_0^\infty \frac{u^{2n}\,du}{e^{u} + e^{-u}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20);$$

ou, en posant $u = \pi t$:

$$E_{2n} = 4^{n+1} \int_0^\infty \frac{t^{2n}\, dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(E)},$$

formule analogue à celle de Plana :

$$B_{2n-1} = \pm 4n \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\, dt}{e^{2\pi t} - 1} \cdot$$

X. Dans le second membre de l'équation (18), le coefficient de x^{2n-1} est

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} + 2 \int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} \left[- \frac{(e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi})\,(2\alpha)^{2n-1}}{\Gamma(2n)} + \frac{\left(e^{\alpha\frac{\pi}{2}} + e^{-\alpha\frac{\pi}{2}}\right)\alpha^{2n-1}}{\Gamma(2n)} \right].$$

Il doit être nul, car $\frac{1}{\cos x}$ est une *fonction paire ;* donc

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n-1}\, d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} \left[2^{2n-1} (e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}) - \left(e^{\alpha\frac{\pi}{2}} + e^{-\alpha\frac{\pi}{2}}\right) \right] = \frac{2^{2n-1}\,\Gamma(2n)}{\pi^{2n}} \cdot$$

On reconnaît facilement que cette relation est une identité.

XI. On peut déterminer les Nombres de Bernoulli au moyen des Nombres d'Euler ; et réciproquement.

1° Écrivons ainsi la formule (4) :

$$tg\, x = \sum_0^\infty \frac{P_{2n+1}}{\Gamma(2n+3)} (2x)^{2n+1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21),$$

puis prenons les dérivées des deux membres ; nous aurons

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \sum_0^\infty \frac{(2n+1)\, P_{2n+1}}{\Gamma(2n+3)}\, 2^{2n+1}\, x^{2n}.$$

Ainsi, le coefficient de x^{2n}, dans le développement de $\frac{1}{\cos^2 x}$, est

$$\frac{(2n+1)\, P_{2n-1}}{\Gamma(2n+3)}\, 2^{2n+1}.$$

D'après l'équation (16), ce coefficient a pour valeur

$$\frac{E_0 E_{2n}}{\Gamma(1)\Gamma(2n+1)}+\frac{E_2 E_{2n-2}}{\Gamma(3)\Gamma(2n-1)}+\ldots+\frac{E_{2n} E_0}{\Gamma(2n+1)\Gamma(1)};$$

donc

$$P_{2n+1}=\frac{n+1}{4^n}\Gamma(2n+1)\left[\frac{E_0 E_{2n}}{\Gamma(1)\Gamma(2n+1)}+\frac{E_2 E_{2n-2}}{\Gamma(3)\Gamma(2n-1)}+\ldots+\frac{E_{2n} E_0}{\Gamma(2n+1)\Gamma(1)}\right];$$

ou, avec la notation des combinaisons :

$$P_{2n+1}=\frac{n+1}{4^n}\left[E_0 E_{2n}+C_{2n,2} E_2 E_{2n-2}+C_{2n,4} E_4 E_{2n-4}+\ldots+E_{2n} E_0\right] (*) \qquad \text{(F)}.$$

2° On tire de l'équation (16), en prenant les dérivées des deux membres :

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sum_1^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)} x^{2n-1}.$$

Le premier membre égale $(1+tg^2x)\sin x$. Par conséquent, si l'on multiplie les deux séries

$$\frac{P_1}{\Gamma(3)}2+\frac{3P_3}{\Gamma(5)}2^3x^2+\frac{5P_5}{\Gamma(7)}2^5x^4+\ldots+\frac{(2n-1)P_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)}2^{2n-1}x^{2n-2}+\ldots=1+tg^2x,$$

$$\frac{x}{\Gamma(2)}-\frac{x^3}{\Gamma(4)}+\frac{x^5}{\Gamma(6)}-\ldots\pm\frac{x^{2n-1}}{\Gamma(2n)}\mp\ldots=\sin x,$$

le coefficient de x^{2n-1}, dans le produit, sera $\frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)}$. De là résulte la formule

$$E_{2n}=(2n-1)2^{2n-1}\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(2)\Gamma(2n+1)}P_{2n-1}-(2n-3)2^{2n-3}\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(4)\Gamma(2n-1)}P_{2n-3}+\ldots\pm 2\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(2n)\Gamma(3)}P_1,$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$E_{2n}=\frac{1}{n(2n+1)}\left[(2n-1)4^{n-1}C_{2n+1,1}P_{2n-1}-(2n-3)4^{n-2}C_{2n+1,3}P_{2n-3}+\ldots\pm C_{2n+1,2n-1}P_1\right] \text{(G)}.$$

(*) D'après la relation (F) : 1° *le nombre entre parenthèses est divisible par* 4^n, et *le quotient est un nombre impair ;* 2° P_{2n+1} *est divisible par* $n+1$.

Par exemple,

$$E_8 = \frac{1}{4 \cdot 9}[7 \cdot 4^3 \cdot 9 \cdot 17 - 5 \cdot 4^2 \cdot 84 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 126 \cdot 1 - 36 \cdot 1];$$

ou, en effectuant,

$$E_8 = 1\,385.$$

XII. Les relations (F), (G) ne sont pas les seules qui existent entre les Nombres d'Euler et les Nombres de Bernoulli : 1° A cause de

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{tg\,x}{\cos x} = \sum_1^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22),$$

on a, par les formules (16) et (21)

$$\sum_0^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)} x^{2n} \times \sum_1^\infty \frac{P_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)} (2x)^{2n-1} = \sum_1^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)} x^{2n-1};$$

donc

$$\frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)} = \frac{P_{2n-1} E_0}{\Gamma(2n+1)\Gamma(1)} 2^{2n-1} + \frac{P_{2n-3} E_2}{\Gamma(2n-1)\Gamma(3)} 2^{2n-3} + \ldots + \frac{P_1 E_{2n-2}}{\Gamma(3)\Gamma(2n-1)} 2,$$

ou

$$E_{2n} = \frac{1}{n}[4^{n-1} P_{2n-1} E_0 + 4^{n-2} C_{2n,2} P_{2n-3} E_2 + 4^{n-3} C_{2n,4} P_{2n-5} E_4 + \ldots + C_{2n,2} P_1 E_{2n-2}] \quad (H).$$

2° L'équation (22) donne aussi

$$\sum_1^\infty \frac{P_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)} (2x)^{2n-1} = \sum_1^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} \times \sum_0^\infty \frac{(-x)^{2n}}{\Gamma(2n+1)};$$

et, par conséquent,

$$P_{2n-1} = \frac{n}{4^n - 1}[E_{2n} - C_{2n-1,2} E_{2n-2} + C_{2n-1,4} E_{2n-4} - \ldots \pm C_{2n-1,1} E_2] \quad . \quad . \quad (K).$$

XIII. Dans les relations (G), (K), qui sont, pour ainsi dire, *conjuguées* l'une de l'autre, substituons, aux nombres P, E, les intégrales dont ils représentent les valeurs. En commençant par l'équation (K), nous trouvons

$$\frac{4^{n-2}}{n} P_{2n-1} = 2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \left[(2t)^{2n-1} - C_{2n-1,2}(2t)^{2n-3} + \ldots \pm C_{2n-1,1}\, 2t\right].$$

La quantité entre parenthèses égale

$$\frac{1}{2}\left[\left(2t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1}+\left(2t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}\right].$$

Conséquemment,

$$\frac{4^{n-2}}{n}\mathrm{P}_{2n-1}=\int_0^\infty \frac{tdt}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}\left[\left(2t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1}+\left(2t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}\right] \quad . \quad (23).$$

Soit $2t=\cot\omega$; d'où

$$tdt=-\frac{1}{4}\frac{\cos\omega}{\sin^3\omega}d\omega,\ \left(2t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1}+\left(2t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}=2\frac{\cos(2n-1)\omega}{\sin^{2n-1}\omega}:$$

l'équation (23) devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega\cos(2n-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega}+e^{-\frac{\pi}{2}\cot\omega}}\frac{d\omega}{\sin^{2n+2}\omega}=\frac{2^{2n-3}}{n}\mathrm{P}_{2n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{L})\ (*).$$

XIV. La formule (G), traitée de la même manière, devient d'abord

$$n(2n+1)\mathrm{E}_{2n}=\int_0^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}\mathrm{T},$$

T représentant le polynôme

$$2n(2n-1)4^n(4^n-1)\mathrm{C}_{2n+1,1}t^{2n-2}-(2n-2)(2n-3)4^{n-1}(4^{n-1}-1)\mathrm{C}_{2n+1,3}t^{2n-4}$$
$$+(2n-4)(2n-5)4^{n-2}(4^{n-2}-1)\mathrm{C}_{2n+1,5}t^{2n-6}-\ldots\pm 2.1.4(4-1)\mathrm{C}_{2n+1,2n-1}.$$

Pour simplifier cette quantité, je suppose

$$\varphi(t)=\mathrm{C}_{2n+1,1}(4t)^{2n}-\mathrm{C}_{2n+1,3}(4t)^{2n-2}+\mathrm{C}_{2n+1,5}(4t)^{2n-4}-\ldots\pm\mathrm{C}_{2n+1,2n-1}(4t)^2,$$
$$\psi(t)=\mathrm{C}_{2n+1,1}(2t)^{2n}-\mathrm{C}_{2n+1,3}(2t)^{2n-2}+\mathrm{C}_{2n+1,5}(2t)^{2n-4}-\ldots\pm\mathrm{C}_{2n+1,2n-1}(2t)^2:$$

il est visible que

$$\mathrm{T}=\varphi''(t)-\psi''(t).$$

(*) D'après la note de la page 12, *cette intégrale définie est égale à un nombre entier pair,* excepté quand $n=1$.

Mais

$$\varphi(t)=\frac{(4t+\sqrt{-1})^{2n+1}-(4t-\sqrt{-1})^{2n+1}}{2\sqrt{-1}},\quad \psi(t)=\frac{(2t+\sqrt{-1})^{2n+1}-(2t-\sqrt{-1})^{2n+1}}{2\sqrt{-1}};$$

donc

$$\varphi''(t)=4n(2n+1)\frac{(4t+\sqrt{-1})^{2n-1}-(4t-\sqrt{-1})^{2n-1}}{\sqrt{-1}},$$

$$\psi''(t)=2n(2n+1)\frac{(2t+\sqrt{-1})^{2n-1}-(2t-\sqrt{-1})^{2n-1}}{\sqrt{-1}};$$

et, par conséquent,

$$E_{2n}=2\int_0^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}$$

$$\left[2\frac{(4t+\sqrt{-1})^{2n-1}-(4t-\sqrt{-1})^{2n-1}}{\sqrt{-1}}-\frac{(2t+\sqrt{-1})^{2n-1}-(2t-\sqrt{-1})^{2n-1}}{\sqrt{-1}}\right];$$

ou

$$E_{2n}=4\int_0^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}\frac{(4t+\sqrt{-1})^{2n-1}-(4t-\sqrt{-1})^{2n-1}}{\sqrt{-1}}$$

$$-2\int_0^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}\frac{(2t+\sqrt{-1})^{2n-1}-(2t-\sqrt{-1})^{2n-1}}{\sqrt{-1}}\quad .\ .\ .\ .\ (24).$$

Si, dans la première intégrale, on fait $t=\frac{1}{4}\cot\omega$; et, dans la seconde, $t=\frac{1}{2}\cot\omega$, on change cette équation en

$$E_{2n}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)\omega\cos\omega d\omega}{\left(e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega}-1\right)\sin^{2n+2}\omega}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)\omega\cos\omega d\omega}{(e^{\pi\cot\omega}-1)\sin^{2n+2}\omega}.$$

Le second membre est réductible à

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)\omega\cos\omega d\omega}{\left(e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega}+1\right)\sin^{2n+2}\omega};$$

donc enfin

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)\omega \cos\omega d\omega}{\left(e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega}+1\right)\sin^{2n+2}\omega} = 2E_{2n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(M) (*)}.$$

XV. Dans la Note citée au commencement de ce Mémoire, j'ai démontré la formule remarquable

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\omega d\omega}{(e^{\pi\cot\omega}-e^{-\pi\cot\omega})\sin^{2n+2}\omega} = \pm\frac{1}{4} \quad \ldots\ldots \quad \text{(N) (**)},$$

que l'on peut regarder comme une conséquence des relations (2) et (10). De même, la combinaison des équations (17) et (E) donne d'abord

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}\left[(2t)^{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1.2}(2t)^{2n-2} + \ldots \pm \frac{2n(2n-1)}{1.2}(2t) \mp 1\right] = 0;$$

puis, par la transformation employée plusieurs fois,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2n\omega d\omega}{\left(e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega}+e^{-\frac{\pi}{2}\cot\omega}\right)\sin^{2n+2}\omega} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(P)}.$$

XVI. Cette intégrale étant nulle (excepté lorsque $n=0$), il s'ensuit que la formule (L) peut être remplacée par celle-ci :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\omega\sin(2n-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega}+e^{-\frac{\pi}{2}\cot\omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2n+2}\omega} = \frac{2^{2n-3}}{n} P_{2n-1} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Q)};$$

d'où l'on conclut aisément

$$\frac{4^{n-1}}{n} P_{2n-1} = C_{2n-1,1}E_{2n-2} - C_{2n-1,3}E_{2n-4} + \ldots \pm E_0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(R)}.$$

Cette relation, différente de (K), peut être déduite de celle-ci jointe à l'équation (17).

(Liége, mars 1867.)

(*) Cette formule est en défaut dans le cas de $n=o$. Cela devait nécessairement arriver, attendu qu'elle n'est qu'une transformation de (G).

(**) On doit prendre le signe + si n est *impair*.

ADDITION.

XVII. On peut substituer, aux équations (2) et (17), une relation unique, donnant à la fois les Nombres de Bernoulli et les Nombres d'Euler. Pour la découvrir, reprenons les égalités

$$tg\,\frac{1}{2}x = \sum_1^\infty \frac{P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)}x^{2q-1}\,(4), \quad \frac{1}{\cos x} = \sum_0^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)}x^{2n} \quad . \ . \ . \quad (16);$$

et posons

$$y = \frac{1}{\cos x} + tgx, \quad P_{2n-1} = \frac{n}{4^{n-1}}G_{2n-1}, \quad E_{2n} = G_{2n};$$

nous aurons

$$y = \sum_0^\infty G_i \frac{x^i}{\Gamma(i+1)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (25,$$

$$y' = \sum_1^\infty G_i \frac{x^{i-1}}{\Gamma(i)}.$$

Mais

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1-\sin x};$$

donc

$$\left(G_1 + G_2\frac{x}{1} + G_3\frac{x^2}{1\,.\,2} + G_4\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\right)\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} - \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \ldots\right) = 1.$$

De là résulte

$$G_1 = 1, \ G_2 - G_1 = 0, \ G_3 - 2\,G_2 = 0, \ldots;$$

et, en général,

$$G_i - C_{i-1,1}\,.\,G_{i-1} + C_{i-1,3}\,.\,G_{i-3} - C_{i-1,5}\,G_{i-5} + \ldots = 0. \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (S).$$

Les valeurs des nombres G sont, d'après cette équation aux différences :

$$G_1 = 1,\ G_2 = 1,\ G_3 = 2,\ G_4 = 5,\ G_5 = 16,\ G_6 = 61,\ G_7 = 272,\ G_8 = 1\,385,\ G_9 = 7\,936,\ G_{10} = 50\,521, \ldots$$

Par conséquent,

$$E_2 = 1,\ E_4 = 5,\ E_6 = 61,\ E_8 = 1\,385,\ E_{10} = 50\,521, \ldots$$

et

$$P_1 = G_1 = 1,\ P_3 = \frac{2}{4} G_3 = 1,\ P_5 = \frac{3}{4^2} \cdot G_5 = 3,\ P_7 = \frac{4}{4^3} G_7 = 17,\ P_9 = \frac{5}{4^4} \cdot G_9 = 155, \ldots ;$$

comme précédemment.

XVIII. Dans le dix-huitième Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* Poisson a démontré les formules

$$tg x = 2 \int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} d\alpha, \quad \frac{1}{\cos x} = 2 \int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}} d\alpha.$$

Il en résulte immédiatement, à cause des égalités (4) et (16) :

$$P_{2q-1} = 8q \int_0^\infty \frac{\alpha^{2q-1}\, d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \quad (T) \qquad E_{2q} = 4^{q+1} \int_0^\infty \frac{\alpha^{2q}\, d\alpha}{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}} \quad (U).$$

De ces deux relations, la seconde a été trouvée ci-dessus; et la première, comme on le vérifie aisément, ne diffère pas, au fond, de la formule :

$$P_{2q-1} = 8q\,(4^q - 1) \int_0^\infty \frac{\alpha^{2q-1}\, d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Du reste, en partant de l'équation (25), et en y remplaçant y par

$$tg x + \frac{1}{\cos x} = 4 \int_0^\infty \frac{e^{(\pi+2x)\alpha} - e^{-(\pi+2x)\alpha}}{e^{2\pi\alpha} - e^{-2\pi\alpha}} d\alpha,$$

on trouve

$$G_i = 2^{i+2} \int_0^\infty \frac{e^{\pi\alpha} - (-1)^i e^{-\pi\alpha}}{e^{2\pi\alpha} - e^{-2\pi\alpha}} \alpha^i\, d\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (V);$$

et, suivant que i est *impair* ou *pair,* cette formule reproduit (T) ou (U).

XIX. La formule

$$P_{2q-1} = 8q(4^q - 1)\int_0^\infty \frac{t^{2q-1}\,dt}{e^{2\pi t} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

nous a donné

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t} - 1}(e^{tx} - e^{-tx})^2(4e^{2tx} + 7 + 4e^{-2tx}) = \frac{1}{4}tg^2 x \quad \ldots\ldots \quad (A).$$

En adoptant la nouvelle valeur de P_{2q-1}, on trouve, absolument de la même manière que ci-dessus,

$$\int_0^\infty \frac{tdt\,(e^{tx} - e^{-tx})^2}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} = \frac{1}{4}tg^2 x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A').$$

(Mai 1867.)

FIN.