MÉMOIRE

EN RÉPONSE A LA QUESTION SUIVANTE :

TROUVER LES LIGNES DE COURBURE DU LIEU DES POINTS DONT LA SOMME DES DISTANCES A DEUX DROITES QUI SE COUPENT EST CONSTANTE;

PAR

M. Eugène CATALAN.

MÉMOIRE

EN RÉPONSE A LA QUESTION SUIVANTE :

TROUVER LES LIGNES DE COURBURE DU LIEU DES POINTS DONT LA SOMME DES DISTANCES A DEUX DROITES QUI SE COUPENT EST CONSTANTE.

Trop ou trop peu.

Le cas où les droites sont perpendiculaires est assez simple : il a été résolu indirectement par M. Serret (*). Au contraire, si l'angle formé par les deux droites est quelconque, la détermination des lignes de courbure de la surface dont il s'agit paraît excessivement difficile, sinon impossible, dans l'état actuel de l'Analyse. Pour cette double raison, je me serais abstenu de prendre part au concours ouvert par l'Académie, si mes tentatives, infructueuses quant à la partie essentielle de la question proposée, ne m'avaient conduit néanmoins à quelques résultats nouveaux, soit sur la théorie des lignes de courbure, soit sur l'intégration des équations du premier ordre. Ce sont ces résultats que je soumets à l'examen de l'Académie.

(*) *Journal de Liouville*, t. XII, p. 247.

I.

Sur l'équation $Pp + Qq = R$.

---

1. Supposons, pour plus de simplicité, que P, Q, R soient les dérivées partielles d'une fonction F (x, y, z); savoir :

$$P = \frac{dF}{dx}, \quad Q = \frac{dF}{dy}, \quad R = \frac{dF}{dz}.$$

D'après cette hypothèse (*), l'intégration de l'équation

$$Pp + Qq = R \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

dans laquelle p, q désignent, à l'ordinaire, les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ d'une fonction inconnue z, équivaut à la solution de ce problème :

Déterminer toutes les surfaces Σ *qui coupent orthogonalement les surfaces* S *représentées par l'équation*

$$F(x, y, z) = c, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

c *étant une constante arbitraire.*

En effet, les cosinus des angles formés, avec trois axes rectangulaires, par les normales aux surfaces données et aux surfaces inconnues sont, respectivement, proportionnels aux quantités :

$$\begin{array}{ccc} P, & Q, & R, \\ p, & q, & -1; \end{array}$$

(*) Elle n'est pas toujours admissible; car la condition d'intégrabilité de l'équation

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

est, comme l'on sait,

$$P\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + Q\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) + R\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) = 0.$$

donc l'équation (1) exprime qu'en un point quelconque de la courbe d'intersection, ces deux droites sont perpendiculaires entre elles.

2. Pour trouver toutes ces surfaces *orthogonales*, ou pour intégrer l'équation (1) il faut, d'après la méthode connue : 1° poser les équations simultanées

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

2° intégrer ces équations; 3° en supposant que

$$f(x, y, z) = \alpha, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

$$f_1(x, y, z) = \beta, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

en soient les intégrales, prendre

$$f(x, y, z) = \varphi\,[f_1(x, y, z)], \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

φ étant une fonction arbitraire : toutes les surfaces Σ sont représentées par l'équation (6).

3. Nous ferons observer, en passant, que les équations (4) et (5) représentent deux familles de ces surfaces : celles qui répondent à

$$f(x, y, z) = \text{constante},$$

et à

$$f_1(x, y, z) = \text{constante}.$$

On arrive à la même conclusion en différentiant les équations (4), (5) et en ayant égard aux relations (3). En effet, on trouve ainsi

$$P\frac{df}{dx} + Q\frac{df}{dy} + R\frac{df}{dz} = 0, \quad P\frac{df_1}{dx} + Q\frac{df_1}{dy} + R\frac{df_1}{dz} = 0.$$

4. Remarquons encore que l'ensemble des équations (4), (5), pour des valeurs données de α, β, représente *une courbe normale à toutes les surfaces* (2). Quand on établit une équation de condition, $\alpha = \varphi(\beta)$, entre les paramètres α et β, le lieu de toutes ces courbes est l'une des surfaces ortho-

gonales Σ. Conséquemment, *chacune des surfaces* Σ *a ses génératrices orthogonales aux surfaces* S.

II.

Des lignes de courbure.

5. L'équation

$$\frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

que l'on peut d'ailleurs écrire ainsi :

$$\frac{d(x + pz)}{dp} = \frac{d(y + qz)}{dq}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

a été mise sous bien des formes. J'ignore si l'on a fait attention à la transformation suivante :

Si l'on remplace dz par $pdx + qdy$, on a d'abord

$$\frac{(1 + p^2)dx + pqdy}{dp} = \frac{(1 + q^2)dy + pqdx}{dq},$$

ou

$$\frac{dx}{(1 + q^2)dp - pqdq} = \frac{dy}{(1 + p^2)dq - pqdp},$$

ou

$$\frac{dx}{(1 + p^2 + q^2)dp - p(pdp + qdq)} = \frac{dy}{(1 + p^2 + q^2)dq - q(pdp + qdq)},$$

ou encore

$$\frac{dx}{d.\dfrac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}} = \frac{dy}{d.\dfrac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}}.$$

Soient λ, μ, ν les angles formés par la normale avec les axes ; nous aurons, au lieu de cette équation,

$$\frac{dx}{d.\cos\lambda} = \frac{dy}{d.\cos\mu}.$$

Donc, à cause de la symétrie,

$$\frac{dx}{d.\cos\lambda} = \frac{dy}{d.\cos\mu} = \frac{dz}{d.\cos\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Telle est la transformée à laquelle nous voulions parvenir. Pour l'établir directement, il suffit d'écrire ainsi les équations de la normale :

$$x - X = l\cos\lambda, \quad y - Y = l\cos\mu, \quad z - Z = l\cos\nu \text{ (*)} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

En exprimant que les deux normales infiniment voisines se rencontrent, on obtient :

$$dx = \cos\lambda . dl + ld.(\cos\lambda), \quad dy = \cos\mu dl + ld.(\cos\mu), \quad dz = \cos\nu dl + ld.(\cos\nu); \quad (11)$$

puis

$$\cos\lambda . dx + \cos\mu . dy + \cos\nu . dz = dl.$$

Le premier membre est nul; donc $dl = o$. Ainsi, *les deux normales infiniment voisines ont même longueur*. Ce résultat, évident *à priori*, montre que les relations (11) peuvent être remplacées par

$$\frac{dx}{d.\cos\lambda} = \frac{dy}{d.\cos\mu} = \frac{dz}{d.\cos\nu} = l. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

6. Les équations (9) ou (11) démontrent immédiatement le théorème de Joachimstal. En effet, si la ligne de courbure est plane, on a

$$Adx + Bdy + Cdz = o;$$

d'où

$$Ad.\cos\lambda + Bd.\cos\mu + Cd.\cos\nu = o;$$

c'est-à-dire

$$A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu = \text{constante};$$

etc.

(*) l représente la distance comprise entre le point (x, y, z) et le point (X, Y, Z) où se coupent les deux normales infiniment voisines.

III.

Systèmes orthogonaux.

---

7. Pour chercher les lignes de courbure d'une surface dont l'équation est

$$F(x, y, z) = o, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

on peut, au lieu d'intégrer les équations (7) ou les équations (9), opérer comme il suit.

En considérant l'équation (13) comme un cas particulier de

$$F(x, y, z) = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

formons d'abord l'équation

$$f(x, y, z) = \varphi[f_1(x, y, z)], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

qui représente toutes les surfaces Σ, normales aux surfaces données S. Attribuons ensuite à la fonction φ deux formes particulières, ψ et π : si les surfaces correspondantes, Σ_1 et Σ_2, sont orthogonales, elles détermineront, sur les surfaces S, les lignes de courbure de celles-ci. La condition d'*orthogonalité* est

$$\left(\frac{df}{dx}-\frac{df_1}{dx}\psi'\right)\left(\frac{df}{dx}-\frac{df_1}{dx}\pi'\right)+\left(\frac{df}{dy}-\frac{df_1}{dy}\psi'\right)\left(\frac{df}{dy}-\frac{df_1}{dy}\pi'\right)+\left(\frac{df}{dz}-\frac{df_1}{dz}\psi'\right)\left(\frac{df}{dz}-\frac{df_1}{dz}\pi'\right)=o,$$

ou

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2-\left[\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dy}+\frac{df}{dz}\frac{df_1}{dz}\right](\psi'+\pi')$$
$$+\left[\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{df_1}{dy}\right)^2+\left(\frac{df_1}{dz}\right)^2\right]\psi'\pi' = o. \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Dans cette équation :

$$\psi' = \psi'[f_1(x, y, z)] = \psi'(\beta), \quad \pi' = \pi'[f_1(x, y, z)] = \pi'(\beta).$$

En chaque point des lignes de courbure déterminées par la surface Σ_1, on a

$$f(x, y, z) = \psi(\beta), \quad \ldots \quad (15) \qquad f_1(x, y, z) = \beta \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Si donc, entre les équations (14), (15) et (16), on élimine deux des trois variables x, y, z, l'équation résultante devra être *identique*. En exprimant les conditions nécessaires pour que la troisième variable disparaisse ainsi en même temps que les deux autres, on obtiendra deux équations différentielles entre ψ, π et β.

8. *Remarque*. Si l'on ne peut disposer des fonctions ψ, π, de manière à éliminer x, y, z entre les équations (14), (15) et (16), on conclura, de cette impossibilité, que les surfaces Σ_1, Σ_2 n'existent pas, ou que les surfaces S n'appartiennent pas à un système orthogonal. D'après une remarque de M. Serret (*), ce cas d'exception devra se présenter fréquemment.

9. Comme application de la méthode précédente, prenons d'abord les paraboloïdes représentés par

$$\frac{xy}{z} = c \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Les équations (3) sont, dans ce cas,

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = -\frac{zdz}{xy}.$$

Celles-ci ont pour intégrales :

$$x^2 + z^2 = \alpha, \quad y^2 + z^2 = \beta;$$

en sorte que les surfaces Σ, normales aux paraboloïdes donnés, sont comprises dans l'équation

$$x^2 + z^2 = \varphi(y^2 + z^2).$$

Les équations (14), (15), (16) deviennent

$$x^2 + z^2 - z^2(\psi' + \pi') + (y^2 + z^2)\psi'\pi' = o, \quad x^2 + z^2 = \psi(\beta), \quad y^2 + z^2 = \beta.$$

(*) *Journal de Liouville*, t. XII, p. 242.

L'élimination de x et de y conduit à

$$\psi - z^2(\psi' + \pi') + \beta\psi'\pi' = 0.$$

Pour que cette équation soit identique, on doit avoir

$$\psi' + \pi' = 0, \quad \psi + \beta\psi'\pi' = 0;$$

d'où l'on conclut

$$\psi - \beta\psi'^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\psi}{\sqrt{\psi}} = \pm \frac{d\beta}{\sqrt{\beta}},$$

et enfin

$$\sqrt{\psi} = \text{const.} \pm \sqrt{\beta} \quad \text{. . . . . (18)}$$

10. De ces deux intégrales, l'une appartient aux surfaces Σ_1 et l'autre aux surfaces Σ_2; car si nous avions considéré les lignes de courbure déterminées par les surfaces Σ_2, nous aurions trouvé

$$\sqrt{\pi} = \text{const.} \pm \sqrt{\beta}. \quad \text{. . . . . (19)}$$

Les surfaces qui composent, avec les paraboloïdes donnés, un *système orthogonal*, sont donc représentées par

$$\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = a, \quad \text{. . . . . (20)}$$

$$\sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = b, \quad \text{. . . . . (21)}$$

a et b étant des constantes arbitraires. Par une voie bien différente, M. Serret est arrivé au même résultat (*).

11. Pour deuxième exemple, je choisirai les surfaces dont l'équation est

$$y^2z^2 - x^2z^2 = c \quad \text{. . . . . (22)}$$

Je trouve, successivement :

$$-\frac{dx}{z^2x} = \frac{dy}{z^2y} = \frac{dz}{(y^2 - x^2)z};$$

(*) *Journal de Liouville*, t. XII, p. 247.

$$x^2 + y^2 - z^2 = \alpha, \quad xy = \beta;$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = \varphi(xy); \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

$$4(x^2 + y^2 + z^2) - 4xy(\psi' + \pi') + (x^2 + y^2)\psi'\pi' = 0;$$

$$4(2z^2 + \psi) - 4\beta(\psi' + \pi') + (z^2 + \psi)\psi'\pi' = 0;$$

$$8 + \psi'\pi' = 0, \quad 4\psi - 4\beta(\psi' + \pi') + \psi\psi'\pi' = 0;$$

$$\psi + \beta\left(\frac{d\psi}{d\beta} - 8\frac{d\beta}{d\psi}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

Posons $\psi = t\beta$: il vient, au lieu de la dernière équation,

$$2(t^2 - 4)\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + 3t\beta\frac{d\beta}{dt} + \beta^2 = 0;$$

d'où

$$\frac{d\beta}{\beta} = \frac{-3t \pm \sqrt{t^2 + 32}}{4(t^2 - 4)}dt. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

Afin de rendre le second membre rationnel, posons encore

$$\sqrt{t^2 + 32} = t + 4\theta;$$

nous aurons :

$$t = \frac{2(2 - \theta^2)}{\theta}, \quad dt = -\frac{2(2 + \theta^2)}{\theta^2}d\theta, \quad t + 4\theta = \frac{2(2 + \theta^2)}{\theta}, \quad t^2 - 4 = \frac{4(\theta^2 - 1)(\theta^2 - 4)}{\theta^2};$$

puis

$$\frac{d\beta}{\beta} = \frac{(2 + \theta^2)d\theta}{4\theta} \cdot \frac{3(2 - \theta^2) \mp (2 + \theta^2)}{(\theta^2 - 1)(\theta^2 - 4)};$$

c'est-à-dire, en séparant les deux racines :

$$\frac{d\beta}{\beta} = -\frac{2 + \theta^2}{\theta(\theta^2 - 4)}d\theta, \quad \frac{d\beta}{\beta} = -\frac{2 + \theta^2}{2\theta(\theta^2 - 1)}d\theta \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

Les intégrales sont :

$$\beta = \frac{\sqrt{a\theta}}{(\theta^2 - 4)^{\frac{3}{4}}}, \quad \beta = \frac{b\theta}{(\theta^2 - 1)^{\frac{3}{4}}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

a et b étant des constantes arbitraires.

On a donc un système orthogonal en combinant les surfaces (22), soit avec les surfaces représentées par

$$xy = \frac{\sqrt{a\theta}}{(\theta^2 - 4)^{\frac{3}{4}}}, \quad \frac{x^2 + y^2 - z^2}{xy} = \frac{2(2 - \theta^2)}{\theta}, \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

soit avec celles qui sont représentées par

$$xy = \frac{b\theta}{(\theta^2 - 1)^{\frac{3}{4}}}, \quad \frac{x^2 + y^2 - z^2}{xy} = \frac{2(2 - \theta^2)}{\theta} \text{ (*)} \ldots \ldots \quad (29)$$

12. Considérons enfin les plans P représentés par l'équation

$$x = -cy + \mathrm{R}\sqrt{1 + c^2} \ldots \ldots \quad (30)$$

En opérant comme au paragraphe I, on trouve d'abord

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{c} = \frac{dz}{o};$$

c'est-à-dire

$$\frac{dy}{dx} = c, \quad z = \beta \ldots \ldots \quad (31)$$

L'élimination de c conduit à

$$(xdx + ydy)^2 = \mathrm{R}^2(dx^2 + dy^2).$$

Remplaçant les coordonnées rectangulaires par des coordonnées polaires, u et ω, on trouve aisément, pour intégrale de la dernière équation,

$$\omega + \arccos \frac{\mathrm{R}}{u} - \frac{1}{\mathrm{R}}\sqrt{u^2 - \mathrm{R}^2} = \alpha \text{ (**)} \ldots \ldots \quad (32)$$

(*) Par un changement de coordonnées, on peut mettre l'équation (22) sous la forme

$$xyz^2 = c,$$

ou, ce qui est équivalent, sous celle-ci :

$$\mathrm{l}x + \mathrm{l}y + 2\mathrm{l}z = \mathrm{l}c.$$

Cette équation (22) est donc, aussi bien que celle du n° 8, comprise dans la classe dont M. Serret s'est occupé.

(**) Cette intégrale répond à

$$d\omega = +\frac{\sqrt{u^2 - \mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}u}\,du.$$

Les surfaces orthogonales aux plans donnés sont donc représentées par

$$\omega + \text{arc cos}\,\frac{R}{u} - \frac{1}{R}\sqrt{u^2 - R^2} = \varphi(z) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

On trouve ensuite :

$$\frac{df}{dx} = -\frac{R\sin\omega + \sqrt{u^2 - R^2}\cos\omega}{Ru}, \quad \frac{df}{dy} = \frac{R\cos\omega - \sqrt{u^2 - R^2}\sin\omega}{Ru}, \quad \frac{df}{dz} = o,$$
$$\frac{df_1}{dx} = o, \quad \frac{df_1}{dy} = o, \quad \frac{df_1}{dz} = 1,$$

en sorte que l'équation (14) devient

$$\frac{1}{R^2} + \pi'\psi' = o \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

Les deux fonctions π', ψ' étant liées par une seule équation, *l'une d'elles peut être prise arbitrairement*. Par suite, aux plans (30) correspondent *deux séries de familles de surfaces orthogonales*. Les unes ont pour équation

$$\omega + \text{arc cos}\,\frac{R}{u} - \frac{1}{R}\sqrt{u^2 - R^2} = \psi(z), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

et les autres :

$$\omega + \text{arc cos}\,\frac{R}{u} - \frac{1}{R}\sqrt{u^2 - R^2} = -\frac{1}{R^2}\int\frac{dz}{\psi'(z)}; \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

la fonction $\psi(z)$ étant arbitraire.

13. Ces surfaces peuvent être définies d'une manière bien simple. Il est d'abord évident qu'elles admettent, pour sections horizontales (parallèles au plan des xy), des développantes de cercle, toutes égales entre elles. D'un autre côté, pour déterminer les courbes suivant lesquelles ces diverses surfaces coupent le cylindre auquel sont tangents tous les plans donnés, supposons $u = R$: les deux dernières équations deviennent, respectivement :

$$R\omega = \psi(z), \quad R\omega = -\frac{1}{R}\int\frac{dz}{\psi'(z)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

Celles-ci appartiennent à *deux courbes orthogonales*. D'ailleurs, quand on remplace $\psi(z)$ par $\psi(z)+a$, la seconde formule ne change pas. Conséquemment :

Soit A *une courbe tracée arbitrairement sur un cylindre de rayon* R, *et soient* A′, A″, A‴, ... *les positions qu'occuperait* A, *si cette courbe, se transportant parallèlement à elle-même, engendrait la surface du cylindre. Soient ensuite* B *une trajectoire orthogonale des courbes* A, A′, A″, ... *et* B′, B″, B‴, ... *les positions occupées par* B, *lorsque cette courbe se transporte parallèlement à elle-même, de manière à engendrer la surface du cylindre : les lignes* B′, B″, ... *sont aussi des trajectoires orthogonales de* A, A′, A″, ... *Si une développante du cercle de rayon* R *se meut perpendiculairement à l'axe du cylindre, de sorte que son sommet décrive, d'abord une quelconque des courbes de la première série, ensuite une quelconque des courbes de la seconde série ; les deux surfaces* Σ_1, Σ_2, *ainsi engendrées, sont orthogonales, et sont coupées orthogonalement par les plans tangents au cylindre.*

14. *Remarques.* I. Toutes les surfaces, appartenant à la même série, sont égales entre elles. On les obtient toutes en attribuant à l'une d'elles un mouvement *hélicoïdal* (*).

II. Si les courbes A sont des hélices, les courbes B sont aussi des hélices. Dans ce cas, les surfaces Σ_1 sont des héliçoïdes développables, tous égaux entre eux; et il en est de même pour les surfaces Σ_2.

15. Chacune des surfaces Σ_1 coupe toutes les surfaces Σ_2 suivant des génératrices, c'est-à-dire suivant des développantes de cercle. *Ces développantes, toutes égales entre elles, constituent* donc, soit pour les surfaces Σ_1, soit pour les surfaces Σ_2, *un premier système de lignes de courbure.*

Les lignes de courbure du second système sont les intersections des plans P avec les surfaces Σ_1 ou Σ_2. Pour une même série de surfaces, ces lignes de courbure sont encore *égales entre elles.* En supposant $c = \operatorname{tg} \gamma$, on trouve aisément :

$$\gamma - \frac{x}{R} = \psi(z), \quad \gamma - \frac{x}{R} = -\frac{1}{R^2}\int \frac{dz}{\psi'(z)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Si

$$\psi(z) = \frac{z}{R} + a,$$

(*) C'est-à-dire un mouvement composé d'une translation, parallèle à l'axe du cylindre, et d'une rotation autour de cet axe.

ces équations se réduisent à

$$\gamma - \frac{x}{R} = \frac{z}{R} + a, \quad \gamma - \frac{x}{R} = -\frac{z}{R} + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (59)$$

Les lignes de courbure des héliçoïdes développables sont donc *les tangentes aux hélices directrices;* ce qui est exact (*).

IV.

Surfaces parallèles.

---

16. *Définition.* Par un point M, pris sur une surface S, on élève une normale MM', ayant une longueur donnée l. Le lieu des points M' est une surface S' qui peut être dite *parallèle* à S.

17. *Remarque.* A chaque point M correspondent deux points M'; en sorte que la surface parallèle à une surface donnée S est toujours composée de deux nappes. Pour plus de simplicité, je n'en considérerai qu'une : la surface S, et la surface parallèle S', constituent alors une *couche* ayant partout la même épaisseur.

18. Théorème. *Si une surface* S' *est parallèle à la surface* S, *réciproquement celle-ci est parallèle à* S'.

Soient x, y, z les coordonnées du point M, et x', y', z' les coordonnées du point M'. Soient, en outre, λ, μ, ν les angles formés, avec les trois axes rectangulaires, par la droite M'M, normale en M à la surface donnée S.

Par définition :

$$x' = x + l\cos\lambda, \quad y' = y + l\cos\mu, \quad z' = z + l\cos\nu.$$

Donc

$$dx' = dx + ld.(\cos\lambda), \quad dy' = dy + ld.(\cos\mu), \quad dz' = dz + ld.(\cos\nu).$$

De plus :

$$dx\cos\lambda + dy\cos\mu + dz\cos\nu = o;$$

(*) Les résultats très-simples auxquels nous venons de parvenir subsistent, à quelques modifications près, quand le cylindre de révolution est remplacé par un cylindre à base quelconque.

donc

$$dx' \cos \lambda + dy' \cos \mu + dz' \cos \nu = o;$$

etc.

19. *Remarque.* Ce théorème, presque évident, et sans doute très-connu, justifie la dénomination de *surfaces parallèles,* que nous employons pour caractériser les surfaces S, S'.

20. THÉORÈME. *Les surfaces parallèles à une surface développable sont développables.*

Le plan tangent en un point M de la surface développable S est tangent tout le long de la génératrice G qui passe en ce point. Si donc l'extrémité M de la normale M'M décrit la droite G, l'autre extrémité M' décrira une droite G', parallèle à G. D'après le premier théorème, le plan tangent en M', à la surface S', lieu des droites G', est tangent tout le long de G'. Donc la surface S' est développable.

21. THÉORÈME. *Des surfaces parallèles* S, S', S'', ... *appartiennent toujours à un système orthogonal.*

Considérons, sur la surface S, une ligne de courbure C_1. Soit Σ_1 la surface développable, lieu des normales à S, menées aux différents points de C_1. La surface Σ_1 est orthogonale par rapport à toutes les surfaces S', S'', ... parallèles à S (18). La même conclusion subsiste pour la surface Σ_2, lieu des normales à S, menées par tous les points d'une ligne de courbure C_2, normale à C_1. Mais, évidemment, les surfaces Σ_1, Σ_2 sont orthogonales l'une à l'autre, tout le long de leur génératrice commune. Donc les *surfaces parallèles* S, S', S'', ..., les *surfaces développables* Σ_1, Σ_1', Σ_1'', ... et les *surfaces développables* Σ_2, Σ_2', Σ_2'', ... forment un système orthogonal.

22. THÉORÈME. *Il existe une infinité de systèmes orthogonaux composés de surfaces développables parallèles, d'autres surfaces développables parallèles, et de plans.*

Si la surface S est développable, l'une des lignes C_1, C_2 est droite : supposons que ce soit C_1. Alors la surface Σ_1 est plane. D'ailleurs, les courbes C_2, C_2', C_2'', ... trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes de S, sont *parallèles,* c'est-à-dire que C_2, C_2', par exemple, interceptent, sur ces génératrices, des segments égaux (*). Donc les surfaces développables Σ_2, Σ_2' sont parallèles. C'est ce qu'il fallait démontrer.

23. Le cas où les surfaces S sont développables paraît être l'un des plus simples et des plus intéressants. On y peut joindre celui des *surfaces-canaux*, dont nous parlerons tout à l'heure, et celui des surfaces de révolution : si les méridiens sont des courbes parallèles, les surfaces Σ_1 sont des cônes de révolution, et les surfaces Σ_2 sont les plans méridiens.

Notons encore le cas particulier où les surfaces S sont des héliçoïdes développables, égaux entre eux, obtenus en faisant glisser l'un d'eux le long du cylindre directeur. Les surfaces Σ_1 sont alors des héliçoïdes développables, et les surfaces Σ_2 sont des plans tangents au cylindre directeur (III, 14).

24. Lorsque la surface S sera donnée par son équation

$$f(x, y, z) = o, \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

il faudra, pour trouver l'équation des surfaces parallèles à S, éliminer x, y, z entre (40) et les relations

$$x' = x + l \cos \lambda, \quad y' = y + l \cos \mu, \quad z' = z + l \cos \nu \quad \ldots \quad (41)$$

Presque toujours, cette élimination sera fort pénible et l'équation résultante sera beaucoup plus compliquée que celle d'où l'on est parti. Par exemple, dans le cas très-particulier où la surface S serait le *cylindre elliptique* représenté par

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

on trouve que les cylindres parallèles à S ont pour équation

$$\left.\begin{aligned} &(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - l^2)^2(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2l^2 - b^2l^2 - a^2b^2)^2 \\ &+ 4a^2b^2l^2(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - l^2)^3 + 4(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2l^2 - b^2l^2 - a^2b^2)^3 \\ &+ 18a^2b^2l^2(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - l^2)(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2l^2 - b^2l^2 - a^2b^2) - 27a^4b^4l^4 = o. \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

(*) Cette propriété est évidente si l'on considère le développement de la surface S. Les courbes C_2, C_2', C_2'' ... deviennent les développantes de la ligne suivant laquelle se transforme l'arête de rebroussement de S.

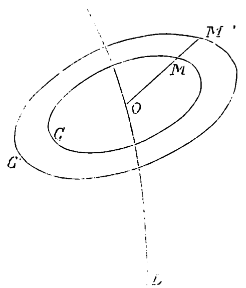
V.

Surfaces-canaux.

---

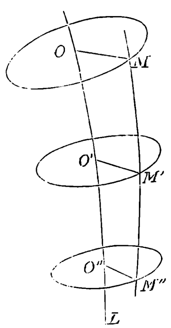
25. Depuis Monge, on appelle *surface-canal* l'enveloppe S d'une sphère de rayon donné : la ligne L parcourue par le centre de la sphère est l'*axe du canal*. Dans chacune de ses positions, la sphère touche le canal suivant une circonférence de grand cercle, dont le plan est normal à L. Cette circonférence C, *caractéristique* de la surface S, est en même temps l'une de ses lignes de courbure (*).

D'après cela, si l'on remplace la sphère de rayon R par une sphère de rayon R′, la nouvelle enveloppe S′ sera parallèle à S : en effet, deux *rayons* OM, OM′, de même direction, sont normaux aux deux surfaces, l'un en M, l'autre en M′, et leur différence MM′ est constante.



26. Soient donc S, S′, S″, ... des canaux parallèles. Les plans normaux à l'axe commun L déterminent, dans chacune de ces surfaces, ses *lignes de courbure circulaires*, et ils coupent orthogonalement tous les canaux (**) : ces plans sont donc les surfaces que nous avons désignées par Σ_1.

Pour trouver les surfaces Σ_2, observons que les rayons OM, O′M′, O″M″, ... menés aux différents points d'une ligne de courbure, appartiennent à une surface développable, et qu'ils sont normaux à l'axe L. Conséquemment : *Les surfaces* Σ_2 *qui, avec les canaux* S *et les plans* Σ_1, *composent le système orthogonal cherché, sont des surfaces développables, ayant pour directrice l'axe commun* L, *et dont les génératrices sont normales à* L.

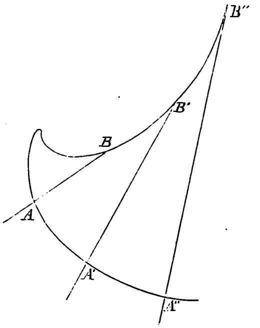


27. Supposons que l'axe soit une ligne plane AA′A″..., auquel cas les surfaces S peuvent porter le nom de *tores*. Soit BB′B″...

(*) Monge, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, pp. 36, 238 .....

(**) Ceci est d'accord avec le théorème de Joachimstal (6).

la développée de L. Considérons le cylindre qui aurait pour directrice cette développée, et dont les génératrices seraient perpendiculaires au plan de l'axe. Il est facile de reconnaître que, si une droite glisse tangentiellement au cylindre, en s'appuyant sur l'axe, et en faisant, avec le plan de cette courbe, un angle constant θ, la surface ainsi engendrée sera développable, et aura, pour arête de rebroussement, une certaine *hélice*, située sur le cylindre. En faisant varier l'angle θ, on obtient donc toutes les surfaces Σ_2 qui, avec les surfaces données S et les plans AB, A′B′, A″A″, ..., normaux à l'axe L, composent le système orthogonal.



28. *Remarque.* Pour une même valeur de θ, et le plan de L étant supposé horizontal, les génératrices rectilignes sont évidemment les *lignes de plus grande pente* de la surface Σ_2. Par conséquent, ces surfaces Σ_2 ne diffèrent pas des *surfaces à pente constante,* dont M. Saint-Venant s'est occupé, au moins dans le cas où la directrice L est une ellipse. D'après ce qui précède, les surfaces S sont alors des *tores elliptiques*, dont il serait fort difficile d'écrire l'équation (24) : néanmoins, nous connaissons les lignes de courbure de ces surfaces.

29. Lorsque l'axe L est une courbe quelconque, la détermination des surfaces Σ_2 exige que l'on résolve ce problème :

Trouver l'équation des surfaces développables engendrées par les normales à une courbe L.

Soient

$$X - x = a(Z - z), \quad Y - y = b(Z - z). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (44)$$

les équations de la normale au point (x, y, z) de L. Les inconnues a, b doivent satisfaire à la relation

$$adx + bdy + dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (45)$$

Pour rendre les calculs plus symétriques, je suppose

$$dx = ds \sin\varphi \sin\gamma, \quad dy = ds \cos\varphi \sin\gamma, \quad dz = ds \cos\gamma \quad : \quad . \quad . \quad . \qquad (46)$$

γ est l'angle que fait, avec l'axe des z, la tangente à L; φ est l'angle formé par la projection de cette tangente, sur le plan des xy, avec l'axe des y; etc. En ayant égard à la condition (45), je trouve

$$a = \frac{\sin\theta\cot\gamma}{\cos(\theta+\varphi)}, \quad b = -\frac{\cos\theta\cot\gamma}{\cos(\theta+\varphi)}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

θ étant une inconnue auxiliaire.

Deux normales consécutives doivent se rencontrer; donc

$$\frac{adz - dx}{da} = \frac{bdz - dy}{db},$$

ou

$$\frac{\sin\theta\cos^2\gamma - \sin\varphi\cos(\theta+\varphi)\sin^2\gamma}{da} + \frac{\cos\theta\cos^2\gamma + \cos\varphi\cos(\theta+\varphi)\sin^2\gamma}{db} = o,$$

ou encore

$$\cos^2\gamma(\cos\theta\, da + \sin\theta\, db) + \cos(\theta+\varphi)\sin^2\gamma(\cos\varphi da - \sin\varphi db) = o \quad . \quad . \quad (48)$$

Les valeurs (47) donnent

$$\cos\theta da + \sin\theta db = \frac{\cot\gamma}{\cos(\theta+\varphi)} d\theta,$$

$$\cos\varphi da - \sin\varphi db = \cot\gamma + \sin(\theta+\varphi) d. \frac{\cot\gamma}{\cos(\theta+\varphi)} \cdot$$

Par suite, l'équation (48) devient, après quelques réductions,

$$\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma\cos(\theta+\varphi)} d\theta - \sin(\theta+\varphi) d\gamma + \frac{\sin^2(\theta+\varphi)}{\cos(\theta+\varphi)} \sin\gamma\cos\gamma d\varphi = o,$$

ou enfin

$$\cos\gamma d\theta - \sin(\theta+\varphi)\cos(\theta+\varphi)\sin\gamma d\gamma + \sin^2(\theta+\varphi)\sin^2\gamma\cos\gamma d\varphi = o \quad . \quad . \quad (49)$$

Dans cette équation, φ est en général une fonction de γ, donnée par les équations de l'axe L; donc, en intégrant cette même équation, et en éliminant ensuite θ et γ entre l'équation intégrale et les relations (44) et (47), on obtiendra, sous forme finie, l'équation des surfaces Σ_2 : la constante arbitraire, introduite par l'intégration, particularisera chacune d'elles.

30. Supposons que l'axe L soit l'hélice représentée par

$$x = \cos z, \quad y = \sin z \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

Alors

$$\gamma = \frac{\pi}{4}, \quad \tau = -z, \quad a = \frac{\sin\theta}{\cos(\theta - z)}, \quad b = -\frac{\cos\theta}{\cos(\theta - z)} \quad \ldots \quad (51)$$

En même temps, l'équation (49) devient

$$2d\theta - \sin^2(\theta - z)\,dz = 0,$$

ou

$$dz = -\frac{2d\omega}{2 - \sin^2\omega}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

en posant

$$\theta = z + \omega \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (53)$$

Pour intégrer la formule (52), il suffit de prendre

$$tg\omega = t. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (54)$$

On obtient, en effet,

$$dz = -\frac{2dt}{2 + t^2};$$

puis

$$z = k - \sqrt{2}\,\text{arc}\,tg\,\frac{t}{\sqrt{2}}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (55)$$

et, par conséquent,

$$\theta = k + \text{arc}\,tgt - \sqrt{2}\,\text{arc}\,tg\,\frac{t}{\sqrt{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

Une génératrice quelconque de la surface développable formée par les normales à l'hélice donnée, et répondant à une valeur arbitraire de k, est alors représentée par les équations

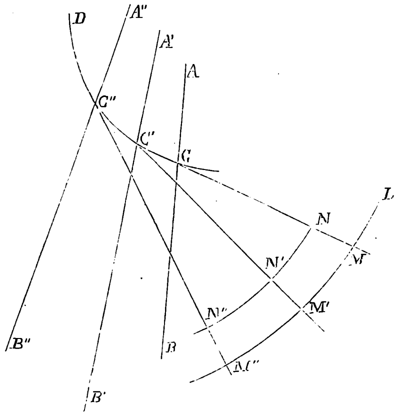
$$X - \cos z = \frac{\sin\theta}{\cos(\theta - z)}(Z - z), \quad Y - \sin z = -\frac{\cos\theta}{\cos(\theta - z)}(Z - z),$$

jointes aux formules (55) et (56).

31. Les considérations géométriques suppléent avec avantage aux calculs

précédents. En effet : 1° *Chacune des surfaces développables formées par les normales à la courbe* L *a pour arête de rebroussement une développée de* L; 2° *le lieu de ces développées est la surface appelée, par Monge, surface des pôles de* L; 3° *chacune de ces développées est une ligne géodésique*, c'est-à-dire qu'elle se transforme en ligne droite par le développement de la surface des pôles (*).

D'après cela, soient AB, A'B', A''B'', ... les axes des cercles osculateurs à la courbe donnée L, aux points M, M', M'',.... Par le point M, menons arbitrairement la normale MC, qui coupe AB en C; traçons, sur la *surface des axes* (ou des pôles), la ligne géodésique CC'C'', ... *tangente à* MC : les droites MC, M'C', M''C'', ... seront autant de génératrices de la surface développable cherchée Σ_2.



32. *Remarques*. I. L'intersection NN'N'' ... de la surface Σ_2 par la surface S qui a L pour axe, est également une développante de la ligne géodésique CC'C'' ...

II. Ces résultats généraux, sur lesquels nous pourrons peut-être revenir dans une autre occasion, sont d'accord avec ceux que nous avons indiqués ci-dessus (27).

VI.

Question proposée par l'Académie.

---

33. *Équation du lieu.* Si les droites données sont rectangulaires, on peut les prendre pour axes des x et des y; et alors l'équation du lieu est

$$\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = a; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (57)$$

ou, après la disparition des radicaux,

$$4a^2z^2 = (x^2 - y^2)^2 - 2a^2(x^2 + y^2) + a^4, \quad \ldots \ldots \quad (58)$$

(*) Monge, *Application de l'Analyse de la Géométrie*, pp. 392 et suivantes.

ou encore

$$4a^2z^2 = (a + x + y)\,(a + x - y)\,(a - x + y)\,(a - x - y) \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Si les droites font entre elles un angle quelconque 2θ, je prendrai, pour axe des x et des y, les bissectrices de cet angle et de l'angle supplémentaire; et alors la surface sera représentée, soit par l'équation

$$\sqrt{(x \sin\theta - y\cos\theta)^2 + z^2} + \sqrt{(x\sin\theta + y\cos\theta)^2 + z^2} = 2b, \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

soit par celle-ci :

$$b^2z^2 = (b^2 - x^2\sin^2\theta)\,(b^2 - y^2\cos^2\theta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

qui devient, dans le cas de l'angle droit,

$$4b^2z^2 = (x^2 - 2b^2)\,(y^2 - 2b^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

34. *Discussion.* Elle a été faite, pour le cas où les droites sont rectangulaires, par M. Dupain (*Nouvelles Annales de mathématiques*, tome XX, p. 57). Le cas général donnerait lieu à une discussion toute semblable, à laquelle nous ne croyons pas devoir nous arrêter. Nous ferons observer, seulement, que sur les surfaces dont il s'agit, il existe des *zones*, indéfinies, dont tous les points satisfont à cette condition, que la *différence* des distances de chacun d'eux aux côtés de l'angle, soit constante.

35. *Lignes de courbure de la surface* (57). On a vu, dans le paragraphe III, que les surfaces représentées par

$$\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = a, \quad \sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = b, \quad \frac{xy}{z} = c,$$

constituent un système orthogonal. La première surface étant celle dont nous nous occupons, il en résulte que ses lignes de courbure sont connues.

A cette solution indirecte, donnée d'abord par M. Serret, nous pouvons joindre plusieurs solutions directes.

36. En premier lieu, tirons, de l'équation (62), les valeurs de $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$, et substituons-les dans l'équation

$$\frac{d(x + pz)}{dp} = \frac{d(y + qz)}{dq} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Nous aurons successivement :

$$p = \frac{(y^2 - 2b^2)x}{4b^2 z}, \qquad q = \frac{(x^2 - 2b^2)y}{4b^2 z}, \quad \ldots \ldots \quad (63)$$

$$x + pz = \frac{(y^2 + 2b^2)x}{4b^2}, \qquad y + qz = \frac{(x^2 + 2b^2)y}{4b^2},$$

$$\frac{d.\,[(y^2 + 2b^2)x]}{d.\left[\frac{(y^2 - 2b^2)x}{z}\right]} = \frac{d\,[(x^2 + 2b^2)y]}{d.\left[\frac{(x^2 - 2b^2)y}{z}\right]} \quad \ldots \ldots \quad (64)$$

Cette équation, développée, devient

$$\left.\begin{aligned} &[(y^2 + 2b^2)\,dx + 2xydy]\,[z^2(x^2 - 2b^2)\,dy + 2xyz^2dx - (x^2 - 2b^2)\,yzdz] \\ = &[(x^2 + 2b^2)\,dy + 2xydx]\,[z^2(y^2 - 2b^2)\,dx + 2xyz^2dy - (y^2 - 2b^2)\,xzdz] \end{aligned}\right\}. \quad (65)$$

A cause de la formule (62), qui donne

$$zdz = \frac{(y^2 - 2b^2)\,xdx + (x^2 - 2b^2)\,ydy}{4b^2},$$

le second facteur du premier membre peut être remplacé par

$$\frac{1}{4b^2}(x^2 - 2b^2)\,[xy\,(y^2 - 2b^2)\,dx - 2\,(x^2 - 2b^2)\,b^2dy].$$

L'équation (65) équivaut donc à

$$\left.\begin{aligned} &(x^2 - 2b^2)\,[(y^2 + 2b^2)\,dx + 2xydy]\,[xy\,(y^2 - 2b^2)\,dx - 2b^2(x^2 - 2b^2)\,dy] \\ = &(y^2 - 2b^2)\,[(x^2 + 2b^2)dy + 2xydx]\,[xy\,(x^2 - 2b^2)dy - 2b^2(y^2 - 2b^2)\,dx] \end{aligned}\right\}. \quad (66)$$

Par suite, si l'on met celle-ci sous la forme

$$\mathrm{A}dx^2 + \mathrm{B}dxdy + \mathrm{C}dy^2 = o, \quad \ldots \ldots \quad (67)$$

on a :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A} &= xy(x^2 - 2b^2)\,(y^2 + 2b^2)\,(y^2 - 2b^2) + 4b^2xy\,(y^2 - 2b^2)^2, \\ \mathrm{B} &= 2\,(x^2 - 2b^2)\,[x^2y^2(y^2 - 2b^2) - b^2\,(x^2 - 2b^2)\,(y^2 + 2b^2)] \\ &\quad - 2\,(y^2 - 2b^2)\,[x^2y^2(x^2 - 2b^2) - b^2\,(y^2 - 2b^2)\,(x^2 + 2b^2)], \\ -\,\mathrm{C} &= xy(y^2 - 2b^2)\,(x^2 + 2b^2)\,(x^2 - 2b^2) + 4b^2xy\,(x^2 - 2b^2); \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (68)$$

ou, après quelques réductions :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= xy(y^2 - 2b^2)\,(x^2y^2 + 2b^2x^2 + 2b^2y^2 - 12b^4), \\ -\,\mathrm{B} &= 2b^2(x^2 - y^2)\,(x^2y^2 + 2b^2x^2 + 2b^2y^2 - 12b^4), \\ -\,\mathrm{C} &= xy(x^2 - 2b^2)\,(x^2y^2 + 2b^2x^2 + 2b^2y^2 - 12b^4). \end{aligned}$$

Après la suppression du facteur commun, l'équation (67) devient donc

$$xy(y^2 - 2b^2)\,dx^2 - 2b^2(x^2 - y^2)\,dxdy - xy(x^2 - 2b^2)\,dy^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Or,

$$b^4(x^2 - y^2)^2 + x^2y^2(x^2 - 2b^2)\,(y^2 - 2b^2) = [b^2(x^2 + y^2) - x^2y^2]^2;$$

donc

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b^2(x^2 - y^2) \pm [b^2(x^2 + y^2) - x^2y^2]}{xy(y^2 - 2b^2)};$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}, \quad . \quad . \quad . \quad (70) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y(x^2 - 2b^2)}{x(y^2 - 2b^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

L'intégrale de la première formule est

$$xy = \alpha; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

et celle de la seconde :

$$\frac{y^2 - 2b^2}{x^2 - 2b^2} = \beta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

37. *Remarques.* I. Les hyperboles représentées par ces deux équations ne diffèrent pas de celles que l'on obtient en éliminant z, soit entre les équations

$$\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = a, \quad \sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = b,$$

soit entre les équations

$$\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = a, \quad \frac{xy}{z} = c.$$

II. Le résultat de cette élimination est

$$y^2 - 2xy\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}} + x^2 = a^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

équation à laquelle on satisfait, quel que soit c, en posant

$$y^2 + x^2 = a^2, \quad xy = o;$$

d'où résulte :

$$x = o, \quad y = \pm a, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (75)$$

et

$$y = o, \quad x = \pm a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (76)$$

A ces systèmes de valeurs correspond $z = o$. Par conséquent, *toutes les lignes de courbure appartenant à l'un des deux systèmes passent par les quatre points où la surface est rencontrée par les droites données*. Ces points, très-remarquables, peuvent être appelés *ombilics principaux*.

III. L'équation (67) devient identique si l'on suppose

$$x^2y^2 + 2b^2x^2 + 2b^2y^2 - 12b^4 = o \quad \ldots \ldots \ldots \quad (77)$$

Il y a donc lieu de croire que celle-ci appartient à une *ligne ombilicale*. Pour vérifier s'il en est ainsi, je reprends les formules

$$z^2 = \frac{(x^2 - 2b^2)(y^2 - 2b^2)}{4b^2}, \quad \ldots \quad (62) \qquad p = \frac{(y^2 - 2b^2)x}{4b^2z}, \quad q = \frac{(x^2 - 2b^2)y}{4b^2z} \quad \ldots \quad (63)$$

Elles donnent :

$$r = -\frac{y^2 - 2b^2}{2(x^2 - 2b^2)z}, \quad s = \frac{xy}{4b^2z}, \quad t = -\frac{x^2 - 2b^2}{2(y^2 - 2b^2)z}; \quad \ldots \quad (64)$$

puis

$$1 + p^2 = \frac{x^2y^2 + 2b^2x^2 - 8b^4}{4b^2(x^2 - 2b^2)}, \quad 1 + q^2 = \frac{x^2y^2 + 2b^2y^2 - 8b^4}{4b^2(y^2 - 2b^2)}, \quad pq = \frac{xy}{4b^2}. \quad . \quad (65)$$

Ces valeurs, substituées dans les relations

$$\frac{1 + p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1 + q^2}{t},$$

les réduisent à

$$-\frac{x^2y^2 + 2b^2x^2 - 8b^4}{2b^2(y^2 - 2b^2)} = 1 = -\frac{x^2y^2 + 2b^2y^2 - 8b^4}{2b^2(x^2 - 2b^2)},$$

c'est-à-dire à l'*équation unique*

$$x^2y^2 + 2b^2x^2 + 2b^2y^2 - 12b^4 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

La surface admet donc une ligne ombilicale, ou plutôt une *ligne de courbures sphériques* (Leroy, *Analyse appliquée*, p. 333).

IV. Si l'on élimine x^2y^2 entre les équations (62) et (77), on trouve

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

Par conséquent, *la ligne ombilicale est située sur une sphère qui a pour centre le sommet de l'angle donné, et pour rayon, la constante* $2b$. Cette sphère passe par les ombilics principaux.

38. *Cas général. Première méthode.* L'équation (61), traitée comme l'équation (62), donne d'abord :

$$p = \frac{(y^2\cos^2\theta - b^2)x\sin^2\theta}{b^2z}, \qquad q = \frac{(x^2\sin^2\theta - b^2)y\cos^2\theta}{b^2z}, \quad \ldots \quad (79)$$

$$x + pz = \frac{(y^2\sin^2\theta + b^2)x\cos^2\theta}{b^2}, \quad y + qz = \frac{(x^2\cos^2\theta + b^2)y\sin^2\theta}{b^2}. \quad \ldots \quad (80)$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (7), conduisent à

$$\frac{\cos^2\theta d.\,[(y^2\sin^2\theta + b^2)x]}{\sin^2\theta.d.\left[\dfrac{(y^2\cos^2\theta - b^2)x}{z}\right]} = \frac{\sin^2\theta d.\,[(x^2\cos^2\theta + b^2)y]}{\cos^2\theta.d.\left[\dfrac{(x^2\sin^2\theta - b^2)y}{z}\right]};$$

ou, en développant, à

$$\left.\begin{aligned} &\cos^4\theta\,[(y^2\sin^2\theta + b^2)dx + 2xy\sin^2\theta dy]\;[z^2(x^2\sin^2\theta - b^2)dy + 2xyz^2\sin^2\theta dx - y(x^2\sin^2\theta - b^2)zdz] \\ = &\sin^4\theta\,[(x^2\cos^2\theta + b^2)dy + 2xy\cos^2\theta dx]\;[z^2(y^2\cos^2\theta - b^2)dx + 2xyz^2\cos^2\theta dy - x(y^2\cos^2\theta - b^2)zdz] \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

On a

$$b^2zdz = (y^2\cos^2\theta - b^2)xdx\sin^2\theta + (x^2\sin^2\theta - b^2)ydy\cos^2\theta;$$

de sorte que le dernier facteur du premier membre, dans l'équation (81), peut être remplacé par la quantité

$$\begin{aligned} &(x^2\sin^2\theta - b^2)^2(y^2\cos^2\theta - b^2)dy + 2xy(x^2\sin^2\theta - b^2)(y^2\cos^2\theta - b^2)\sin^2\theta dx \\ &\quad - (x^2\sin^2\theta - b^2)(y^2\cos^2\theta - b^2)xydx\sin^2\theta - (x^2\sin^2\theta - b^2)^2y^2dy\cos^2\theta, \end{aligned}$$

laquelle peut être mise sous la forme

$$(x^2\sin^2\theta - b^2)\;[xy(y^2\cos^2\theta - b^2)\sin^2\theta dx - b^2(x^2\sin^2\theta - b^2)dy].$$

L'équation (81) devient donc

$$\left.\begin{array}{l}\cos^4\theta(x^2\sin^2\theta - b^2)\,[(y^2\sin^2\theta + b^2)dx + 2xy\sin^2\theta dy]\,[xy(y^2\cos^2\theta - b^2)\sin^2\theta dx - b^2(x^2\sin^2\theta - b^2)dy] \\ = \sin^4\theta(y^2\cos^2\theta - b^2)\,[(x^2\cos^2\theta + b^2)dy + 2xy\cos^2\theta dx]\,[xy(x^2\sin^2\theta - b^2)\cos^2\theta dy - b^2(y^2\cos^2\theta - b^2)dx]\end{array}\right\}(82)$$

Si l'on écrit ainsi cette dernière :

$$\mathrm{A}dx^2 + \mathrm{B}dx\,dy + \mathrm{C}dy^2 = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (83)$$

on trouve :

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{A} = xy(y^2\cos^2\theta - b^2)\sin^2\theta\cos^2\theta\,[(y^2\sin^2\theta + b^2)(x^2\sin^2\theta - b^2)\cos^2\theta + 2b^2(y^2\cos^2\theta - b^2)\sin^2\theta], \\ \mathrm{B} = b^2\,[y^2\cos^2\theta - b^2)^2(x^2\sin^2\theta + b^2)\sin^4\theta - (x^2\sin^2\theta - b^2)^2(y^2\cos^2\theta + b^2)\cos^4\theta], \\ -\mathrm{C} = xy(x^2\sin^2\theta - b^2)\sin^2\theta\cos^2\theta\,[(x^2\cos^2\theta + b^2)(y^2\cos^2\theta - b^2)\sin^2\theta + 2b^2(x^2\sin^2\theta - b^2)\cos^2\theta]\end{array}\right\}(84)$$

Ces expressions sont si compliquées, que l'intégration de l'équation (83) paraît fort difficile.

39. *Remarque.* Lorsque $\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, les formules (84) se réduisent à celles que nous avons trouvées plus haut (36).

40. *Deuxième méthode.* Dans l'équation

$$b^2z^2 = (x^2\sin^2\theta - b^2)(y^2\cos^2\theta - b^2), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (61)$$

je suppose

$$x^2\sin^2\theta - b^2 = b\mathrm{X}, \quad y^2\cos^2\theta - b^2 = b\mathrm{Y}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (85)$$

c'est-à-dire

$$x\sin\theta = \sqrt{b(b + \mathrm{X})}, \quad y\cos\theta = \sqrt{b(b + \mathrm{Y})}.$$

Il résulte, de cette transformation :

$$z = \sqrt{\mathrm{XY}}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (86)$$

puis

$$p = \frac{\mathrm{Y}}{z}\frac{x\sin^2\theta}{b} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{b}}\sqrt{\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}(b + \mathrm{X})}, \quad q = \frac{\mathrm{X}}{z}\frac{y\cos^2\theta}{b} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{b}}\sqrt{\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}(b + \mathrm{Y})},$$

$$x + pz = \frac{b + \mathrm{Y}\sin^2\theta}{\sqrt{b}.\sin\theta}\sqrt{b + \mathrm{X}}, \qquad y + qz = \frac{b + \mathrm{X}\cos^2\theta}{\sqrt{b}.\cos\theta}\sqrt{b + \mathrm{Y}}.$$

Au moyen des dernières valeurs, l'équation (7) devient

$$\frac{\cos^2\theta d.[(b+Y\sin^2\theta)\sqrt{b+X}]}{d.\sqrt{\frac{Y}{X}(b+X)}} = \frac{\sin^2\theta d.[(b+X\cos^2\theta)\sqrt{b+Y}]}{d.\sqrt{\frac{X}{Y}(b+Y)}} \quad \ldots \quad (87)$$

Or :

$$d.[(b+Y\sin^2\theta)\sqrt{b+X}] = \frac{1}{2\sqrt{b+X}}[(b+Y\sin^2\theta)dX + 2\sin^2\theta(b+X)]dY,$$

$$d.\sqrt{\frac{X}{Y}(b+Y)} = \frac{(b+Y)YdX - bXdY}{2Y\sqrt{XY(b+Y}};$$

donc l'équation (87) équivaut à

$$\left.\begin{aligned} &X\cos^2\theta[(b+Y\sin^2\theta)dX + 2\sin^2\theta(b+X)dY][(b+Y)YdX - bXdY] \\ &= Y\sin^2\theta[(b+X\cos^2\theta)dY + 2\cos^2\theta(b+Y)dX][(b+X)XdY - bYdX] \end{aligned}\right\}. \quad (88)$$

Celle-ci a la forme

$$AdX^2 + BdXdY + CdY^2 = o, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

en supposant :

$$\begin{aligned} &A = X\cos^2\theta(b+Y\sin^2\theta)(b+Y)Y + 2b^2\sin^2\theta\cos^2\theta(b+Y)Y^2, \\ &B = X\cos^2\theta[2\sin^2\theta(b+X)(b+Y)Y - bX(b+Y\sin^2\theta)] \\ &- Y\sin^2\theta[2\cos^2\theta(b+X)(b+Y)X - bY(b+X\cos^2\theta)], \\ &- C = Y\sin^2\theta(b+X\cos^2\theta)(b+X)X + 2b^2\sin^2\theta\cos^2\theta(b+X)X^2; \end{aligned}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} A &= (b+Y)Y\cos^2\theta[X(b+Y\sin^2\theta) + 2bY\sin^2\theta], \\ B &= b[Y^2\sin^2\theta(b+X\cos^2\theta) - X^2\cos^2\theta(b+Y\sin^2\theta)], \\ -C &= (b+X)X\sin^2\theta[Y(b+X\cos^2\theta) + 2bX\cos^2\theta]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (90)$$

Ces valeurs, plus simples que celles du nº 38, ne permettent pas, néanmoins, d'espérer que l'équation (89) soit intégrable.

41. *Troisième méthode.* Pour essayer de déterminer les surfaces orthogonales à la surface donnée, je prends l'équation de celle-ci sous la forme

$$\sqrt{(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 + z^2} + \sqrt{(x\sin\theta + y\cos\theta)^2 + z^2} = o; \quad \ldots \quad (91)$$

et, pour abréger, je pose :

$$x \sin\theta - y\cos\theta = x', \quad y\sin\theta + y\cos\theta = y'; \quad \ldots\ldots \quad (92)$$

puis

$$P' = \frac{da}{dx'} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + z^2}}, \quad Q' = \frac{da}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + z^2}}. \quad \ldots\ldots \quad (93)$$

Il résulte, de ces valeurs :

$$P = \frac{da}{dx} = (P' + Q')\sin\theta, \quad Q = \frac{da}{dy} = (Q' - P')\cos\theta; \quad \ldots\ldots \quad (94)$$

puis, pour la surface cherchée :

$$p = \frac{dz}{dx} = (p' + q')\sin\theta, \quad q = \frac{dz}{dy} = (q' - p')\cos\theta; \quad \ldots\ldots \quad (95)$$

en supposant

$$p' = \frac{dz}{dx'}, \quad q' = \frac{dz}{dy'}.$$

L'équation

$$Pp + Qq = R \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

est donc, dans le cas actuel,

$$(P' + Q')(p' + q')\sin^2\theta + (P' - Q')(p' - q')\cos^2\theta = R,$$

ou

$$(P' - Q'\cos^2\theta)p' + (Q' - P'\cos^2\theta)q' = R. \quad \ldots\ldots \quad (96)$$

On doit (2) intégrer le système

$$\frac{dx'}{P' - Q'\cos^2\theta} = \frac{dy'}{Q' - P'\cos^2\theta} = \frac{dz}{R} \quad \ldots\ldots \quad (97)$$

A cet effet, soient

$$x' = uz, \quad y' = vz; \quad \ldots\ldots \quad (98)$$

d'où

$$P' = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad Q' = \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}; \quad \ldots \quad (99)$$

les équations (97) deviendront

$$Rzdu = (P' - Q' \cos^2\theta - Ru)\,dz,$$
$$Rzdv = (Q' - P' \cos^2\theta - Rv)\,dz;$$

c'est-à-dire

$$Rzdu = -(v\cos^2\theta + u)\frac{dz}{\sqrt{1+v^2}}, \quad Rzdv = -(u\cos^2\theta + v)\frac{dz}{\sqrt{1+u^2}} \quad . \quad (100)$$

On conclut, de ces deux-ci,

$$\frac{du}{dv} = \frac{v\cos^2\theta + u}{u\cos^2\theta + v}\,\frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1+v^2}};$$

ou, en supposant

$$\cos^2\theta = \frac{g}{h}: \quad \ldots\ldots \quad (101)$$

$$(gu + hv)\sqrt{1+v^2}\,du = (gv + hu)\sqrt{1+u^2}\,dv \quad \ldots\ldots \quad (102)$$

42. L'intégration de cette équation (102) paraît d'abord assez pénible : pour y parvenir, j'ai dû avoir recours au procédé suivant.

Mettant g et h en facteurs communs, j'écris ainsi l'équation :

$$g(u\sqrt{1+v^2}\,du - v\sqrt{1+u^2}\,dv) + h(v\sqrt{1+v^2}\,du - u\sqrt{1+u^2}\,dv) = 0.$$

Celle-ci équivaut à

$$g\left(\frac{udu}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{vdv}{\sqrt{1+v^2}}\right) + huv\left(\frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} - \frac{dv}{v\sqrt{1+v^2}}\right) = 0. \quad . \quad (103)$$

Maintenant, soient α, β deux nouvelles variables, telles que :

$$\left.\begin{aligned} \frac{udu}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{vdv}{\sqrt{1+v^2}} &= d\alpha, \\ \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} - \frac{dv}{v\sqrt{1+v^2}} &= \frac{d\beta}{\beta}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (104)$$

il en résulte, au lieu de l'équation (103) :

$$gd\alpha + huv\frac{d\beta}{\beta} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (105)$$

On satisfait aux équations différentielles (104) en prenant :

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{1+u^2} - \sqrt{1+v^2}, \\ \beta &= \frac{\sqrt{1+u^2}-1}{u} \cdot \frac{v}{\sqrt{1+v^2}-1}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (106)$$

On conclut aisément, de ces valeurs,

$$uv = \frac{2\alpha\beta}{\beta^2 - 1};$$

de sorte que l'équation (105) devient

$$g\,\frac{d\alpha}{\alpha} + 2h\,\frac{d\beta}{\beta^2 - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

Celle-ci a pour intégrale

$$\alpha^g \left(\frac{\beta - 1}{\beta + 2}\right)^h = k^g, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

k^g étant la constante arbitraire.

La question incidente que nous nous étions proposée peut être regardée comme résolue; car les équations (106) donnent u et v en fonction de α et de β, ou seulement en fonction de β et de la constante k. Ces valeurs, substituées dans l'une ou dans l'autre des équations (100), permettront d'intégrer celle-ci. Le résultat a la forme

$$l.\,\frac{z}{k'} \int F(\beta, k)\,d\beta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

k' étant la constante arbitraire.

43. D'après la méthode indiquée au paragraphe I, les surfaces orthogonales à la surface donnée seront représentées par

$$k' = \varphi(k),$$

la fonction φ étant arbitraire, et les constantes k', k étant remplacées par leurs valeurs en x, y, z, au moyen des équations (92) et suivantes. Il est facile de comprendre que ce calcul est purement inextricable. A plus forte raison sera-t-il impossible de trouver les formes ψ, π, de la fonction φ, qui correspondent à un système orthogonal (s'il en existe un). Cette troisième méthode ne peut donc, pas plus que les deux premières, nous conduire au but (*).

44. *Remarques.* I. *Les surfaces qui ont pour équations :*

$$\sqrt{x'^2+z^2}+\sqrt{y'^2+z^2}=a,\quad \sqrt{x'^2+z^2}-\sqrt{y'^2+z^2}=b,\quad .\ .\ .\ \ (110)$$

sont orthogonales.

En effet :

$$\left.\begin{aligned} P&=\frac{da}{dx}=(P'+Q')\sin\theta, & Q&=\frac{da}{dy}=\ \ (Q'-P')\cos\theta, & R&=\frac{da}{dz}=P'\frac{z}{x'}+Q'\frac{z}{y'}; \\ P_1&=\frac{db}{dx}=(P'-Q')\sin\theta, & Q_1&=\frac{db}{dy}=-(Q'+P')\cos\theta, & R_1&=\frac{db}{dz}=P'\frac{z}{x'}-Q'\frac{z}{y'}; \end{aligned}\right\}\ \ (111)$$

donc

$$PP_1+QQ_1+RR_1=P'^2\left(1+\frac{z^2}{x'^2}\right)-Q'^2\left(1+\frac{z^2}{y'^2}\right)=0.$$

II. La courbe d'intersection de ces deux surfaces, évidemment située sur les cylindres de révolution qui ont pour axes les droites données, et pour rayons $a+b$ et $a-b$, est située aussi sur l'ellipsoïde représenté par

$$x^2\sin^2\theta+y^2\cos^2\theta+z^2=a^2+b^2.$$

III. Lorsque les rayons varient de manière que la somme de leurs carrés soit constante, cet ellipsoïde est invariable.

IV. Si $\pm b=a$, les équations (110) se décomposent en

$$y'=0,\quad z=0,\quad x'=\pm a,$$

ou en

$$x'=0,\quad z=0,\quad y'=\pm a.$$

(*) Il en est de même de plusieurs autres transformations, que j'ai essayées en vain. Je signalerai celle qui consiste à prendre p et q pour variables, au lieu de x et y : elle conduit souvent à un résultat simple.

« C'est donc par des *pointes* que les quatre nappes infinies touchent les surfaces fermées. » (Dupain. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XX, p. 63.)

45. Les surfaces (110) étant orthogonales, on peut chercher si elles peuvent être coupées orthogonalement par une troisième surface. Pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir, en même temps :

$$Pp + Qq = R, \quad P_1 p + Q_1 q = R_1;$$

c'est-à-dire, à cause des valeurs (111) :

$$(P' + Q')p \sin\theta + (Q' - P')q\cos\theta = P'\frac{z}{x'} + Q'\frac{z}{y'},$$

$$(P' - Q')p \sin\theta - (Q' + P')q\cos\theta = P'\frac{z}{x'} - Q'\frac{z}{y'};$$

ou encore :

$$px'\sin\theta - qx'\cos\theta = z, \quad py'\sin\theta + qy'\cos\theta = z;$$

ou enfin, en ayant égard aux relations (92) :

$$py + qx = o, \quad . \ . \ . \quad (112) \qquad z = px\sin^2\theta + qy\cos^2\theta \quad . \ . \ . \quad (113)$$

L'équation (112) a pour intégrale

$$z = \varphi(x^2 - y^2).$$

Au moyen de cette valeur, l'équation (113) devient

$$\frac{\varphi(x^2 - y^2)}{\varphi'(x^2 - y^2)} = 2(x^2\sin^2\theta - y^2\cos^2\theta).$$

Cette dernière relation exige que $\sin^2\theta = \cos^2\theta = \frac{1}{2}$, donc : *Si les deux droites données sont obliques, les surfaces représentées par les équations* (110) *n'appartiennent pas à un système orthogonal.*

FIN.