This page intentionally left blank.

pour le camphre. Il mentionne enfin des synthèses et des recherches qu'il a entreprises sur ces dernières substances ainsi que sur la camphorone; le résultat de ces recherches fera partie de son mémoire définitif.

Je propose volontiers l'insertion, dans le *Bulletin* de la séance, de la note préliminaire de M. Gillet. »

M. L. Henry, second commissaire, se rallie à cette proposition qui est adoptée par la Classe.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Problème et théorèmes d'Arithmétique ; par E. Catalan, Associé de l'Académie.

1. Depuis deux mille ans, peut-être, on connaît l'identité

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 \text{ (note A).}$$

En 1874, Le Besgue et Chabanel ont signalé celle-ci :

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 \text{ (note B).}$$

Il était donc naturel d'essayer si l'égalité

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha_2^1 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2)^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{n-1}^2 - \alpha_n^2)^2 \\ \quad + (2\alpha_1\alpha_n)^2 + (2\alpha_2\alpha_n)^2 + \cdots + (2\alpha_{n-1}\alpha_n)^2\end{array}\right\} \quad (1)$$

est identique. Mais, comme *les idées simples sont tardives*, c'est seulement, ces jours ci, que j'ai songé à cette relation (1).

Si l'on transpose

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{n-1}^2 - \alpha_n^2)^2,$$

on peut la remplacer par

$$2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{n-1}^2) \times 2\alpha_n^2 = 4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{n-1}^2) \times \alpha_n^2, \text{ etc.}$$

Ainsi, l'on a, non seulement une solution très simple de ce problème :

Trouver un nombre u *tel, que* u *et* u^2 *soient, chacun, la somme de* n *carrés* (note C); mais aussi ce théorème, généralisation de ceux qui ont été rappelés ci-dessus :

Le carré de la somme de n *carrés est, également, une somme de* n *carrés* (note D).

2. Remarque. — I. L'identité

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2$$

prouve que :

Sur la sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

il existe une infinité de points dont les coordonnées sont rationnelles.

II. Si l'on effectue, par multiplication, le carré de

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2,$$

on trouve n^2 carrés. Conséquemment, il est facile de *former un carré égal à la somme de* n *carrés, et égal à la somme de* n^2 *carrés.*

III. Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant supposés inégaux, si, sur le second membre de l'identité (1), on opère une série de permutations tournantes, ce second membre prend n formes différentes, tandis que le premier ne change pas. Donc, la décomposition de u^2 peut être effectuée de n manières (note E).

IV. Plus généralement, les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant toujours inégaux, si on les permute de toutes les manières possibles, l'identité (1) n'est pas altérée. Donc, ordinairement,

Le carré d'une somme de n *carrés est décomposable en* n *carrés, de* 1. 2. 3 ... n *manières* (note F).

(A.)

La démonstration *géométrique*, de cette identité, constitue la Proposition VIII du deuxième Livre d'Euclide (*).

(B.)

Dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, tome I, page 170, M. Neuberg, mon savant Confrère, m'a, pour ainsi dire, attribué cette identité, employée par Le Besgue. J'ignore s'il s'est trompé.

(*) Édition de Bâle, 1533; Peyrard, traduction des *OEuvres d'Euclide*, 1814, tome I; Legendre, *Éléments de Géométrie*, 1814, p. 70; etc.

(C.)

Le *Mémoire sur certaines décomposition en carrés* (Rome, 1884), contient une identité au moyen de laquelle on peut, d'une infinité de manières, résoudre ce problème :

Trouver un nombre égal à la somme de n *carrés, et dont le carré soit une somme de* 2n *carrés.*

(D.)

Applications. 1° Supposons

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1.$$

L'identité se réduit à

$$n^2 = (n-2)^2 + 4(n-1),$$

ce qui est évident.

2° Soient

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \ldots, \alpha_n = n.$$

Au moyen de la formule connue, on trouve

$$\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]^2 = \left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - 1\right]^2 + 4n^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

ou

$$(n+1)^2(2n+1)^2 - (2n^2 - 9n + 1)^2 = 24(n-1)n(2n-1)$$

ou

$$(4n^2 - 6n + 2) \times 12n = 24(n-1)n(2n-1),$$

ou enfin

$$2n^2 - 3n + 1 = (n-1)(2n-1).$$

(E.)

Soient $n = 5$, et

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	2	3	5	7
2	3	5	7	1
3	5	7	1	2
5	7	1	2	3
7	1	2	3	5

On a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = 88,$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 - 7^2 = -10,$$
$$2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 - 1^2 = 86,$$
$$3^2 + 5^2 + 7^2 + 1^2 - 2^2 = 80,$$
$$5^2 + 7^2 + 1^2 + 2^2 - 3^2 = 70,$$
$$7^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 - 5^2 = 38,$$
$$2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = 87,$$
$$3^2 + 5^2 + 7^2 + 1^2 = 84,$$
$$5^2 + 7^2 + 1^2 + 2^2 = 79,$$
$$7^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 63;$$

et l'on doit trouver :

$$88^2 - 10^2 = 4 \times 39 \times 7^2,$$
$$88^2 - 86^2 = 4 \times 87 \times 1,$$
$$88^2 - 80^2 = 4 \times 84 \times 4,$$
$$88^2 - 70^2 = 4 \times 79 \times 9,$$
$$88^2 - 38^2 = 4 \times 63 \times 25;$$

ce qui a lieu.

(F.)

Très probablement, le nombre des décompositions de u^2, en n carrés, est encore plus considérable.

En effet, si, dans l'identité d'Euler :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) = (aa'+bb'+cc'+dd')^2$$
$$+ (ab'-ba'+dc'-cd')^2 + (ac'-ca'+bd'-db')^2$$
$$+ (ad'-da'+cb'-bc')^2,$$

on suppose

$$b'=a, \qquad c'=b, \qquad d'=c, \qquad a'=d,$$

on obtient celle-ci :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = (ab+ad+bc+cd)^2$$
$$+ (a^2-c^2)^2 + (ab-ad+bc-cd)^2 + (ac-b^2+ac-d^2)^2,$$

ou

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)^2 = [(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_4)]^2 + (\alpha_1^2-\alpha_3^2)^2$$
$$+ [(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)]^2 + (2\alpha_1\alpha_3-\alpha_2^2-\alpha_4^2)^2.$$

Or, il ne semble pas que cette décomposition, en *quatre* carrés, résulte de l'identité (1) (*).

Liége, 27 décembre 1893.

P.-S. Au dernier moment, mon Collègue et ami G. de Longchamps me demande si le théorème de la page 1 n'est pas connu? J'en doute.

(*) On ne doit pas oublier que, d'après le théorème de Bachet, le nombre de ces décompositions doit se réduire à *deux*, *trois* ou *quatre*.

—