**Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.**
Bruxelles.
http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550

**ser.3:t.25 (1893):** http://www.biodiversitylibrary.org/item/111250

Article/Chapter Title: Une conséquence du Problème des Partis
Author(s): Eugène Catalan
Page(s): Page 430, Page 431, Page 432

This page intentionally left blank.

## COMMUNICATIONS ET LECTURES.

---

*Une conséquence du Problème des Partis* (suite et fin) (*);
par E. Catalan.

Je reprends l'équation (A), mise sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}c^{a+b-1} = \\ c^{b-1}\dfrac{x^a}{a} - \dfrac{b-1}{1}c^{b-2}\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + \dfrac{(b-1)(b-2)}{1.2}c^{b-3}\dfrac{x^{a+2}}{a+2} - \dots \pm \dfrac{x^{a+b-1}}{a+b-1} \\ + c^{a-1}\dfrac{y^b}{b} - \dfrac{a-1}{1}c^{a-2}\dfrac{y^{b+1}}{b+1} + \dfrac{(a-1)(a-2)}{1.2}c^{a-3}\dfrac{y^{b+2}}{b+2} - \dots \pm \dfrac{y^{a+b-1}}{a+b-1}. \end{array}\right\} \quad (A')$$

Pour passer au cas de $c = 1$, il suffit de poser

$$x = c(1-z), \qquad y = cz.$$

Par la suppression du facteur $c^{a+b-1}$, on obtient ainsi, au lieu de (A′),

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \\ \dfrac{(1-z)^a}{a} - \dfrac{b-1}{1}\dfrac{(1-z)^{a+1}}{a+1} + \dfrac{(b-1)(b-2)}{1.2}\dfrac{(1-z)^{a+2}}{a+2} - \dots \pm \dfrac{(1-z)^{a+b-1}}{a+b-1} \\ + \dfrac{z^b}{b} - \dfrac{a-1}{1}\dfrac{z^{b+1}}{b+1} + \dfrac{(a-1)(a-2)}{1.2}\dfrac{z^{b+2}}{b+2} - \dots \pm \dfrac{z^{a+b-1}}{a+b-1}. \end{array}\right\} \quad (C)$$

Lorsque $z = 1$, cette égalité se réduit à

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{1}{b} - \frac{a-1}{1}\frac{1}{b+1} + \frac{(a-1)(a-2)}{1.2}\frac{1}{b+2} - \dots \pm \frac{1}{a+b-1},$$

---

(*) Voir *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, t. XXV, p. 238, 1893.

ou à

$$\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} = \frac{1}{b} - \frac{a}{1}\frac{1}{b+1} + \frac{a(a-1)}{1.2}\frac{1}{b+2} - \dots \pm \frac{1}{a+b}; \quad (\mathrm{C}')$$

par le changement de $a$ en $a+1$.

Multiplions les deux membres par

$$\frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(b)}$$

A cause de

$$\Gamma(a+b+1) = b(b+1)\dots(b+a)\Gamma(b),$$

nous aurons

$$\Gamma(a+1) = b(b+1)(b+2)\dots(b+a)\left[\frac{1}{b} - \frac{a}{1}\frac{1}{b+1} + \dots \pm \frac{1}{a+b}\right]; \quad (\mathrm{D})$$

ou, $a$ étant un *nombre entier* :

$$\left.\begin{array}{c} 1.2.3\dots a = \\ (b+1)(b+2)\dots(b+a) - \frac{a}{1}b(b+2)\dots(b+a) + \frac{a(a-1)}{1.2}b(b+1)(b+3)\dots(b+a) \\ \pm b(b+1)\dots(b+a-1). \end{array}\right\} (\mathrm{D}')$$

Le second membre est le développement de

$$\Delta^a\left[b(b+1)\dots(b+a-1)\right].$$

Donc l'égalité (D′) revient à

$$1.2.3\dots a = \Delta^a\left[b(b+1)(b+2)\dots(b+a-1)\right]. \quad (\mathrm{D}'')$$

Cette formule connue (*) ne suppose pas que $b$ soit un nombre entier : elle subsiste pour *b quelconque*.

---

(*) *Manuel des Candidats...*, tome I, p. 200.

L'égalité (C) ayant été démontrée pour $z = 1$, il suffit, pour l'établir généralement, de vérifier que le second membre est *constant*. Or, la dérivée de cette fonction de $z$ est

$$-\left[(1-z)^{a-1} - \frac{b-1}{1}(1-z) + \frac{(b-1)(b-2)}{1.2}(1-z)^{a+1} - \cdots \pm (1-z)^{a+b-2}\right]$$

$$+ z^{b-1} - \frac{a-1}{1}z^{b} + \frac{(a-1)(a-2)}{1.2}z^{b+1} - \cdots \pm z^{a+b-2},$$

ou

$$(1-z)^{a-1}\left[1 - \frac{b-1}{1}(1-z) + \frac{(b-1)(b-2)}{1.2}(1-z)^{2} - \cdots \pm (1-z)^{b-1}\right]$$

$$+ z^{b-1}\left[1 - \frac{a-1}{1}z + \frac{(a-1)(a-2)}{1.2}z^{2} - \cdots \pm z^{a-1}\right];$$

ou, d'après les premières hypothèses sur $a$ et $b$ :

$$-(1-z)^{a-1}\left[1-(1-z)\right]^{b-1} + z^{b-1}(1-z)^{a-1};$$

ou enfin, *zéro*.

En résumé :

1° L'égalité (C) est vraie, quand $a$ et $b$ sont des *nombres entiers*;

2° Dans (D), (D'), (D''), $a$ étant un *nombre entier*, $b$ peut être quelconque ;

3° Si $a$ et $b$, à la fois, ne sont pas des nombres entiers, l'égalité (C) est *absurde* (*).

---

(*) Soit, par exemple, $a = b = \frac{1}{2}$. On trouve

$$\varpi = 2(1-z)^{\frac{1}{2}} + \cdots \pm \frac{1}{0}$$

$$+ 2z^{\frac{1}{2}} + \cdots \pm \frac{1}{0};$$

ce qui n'a pas de sens.

—