



<http://www.biodiversitylibrary.org/>

**Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et
des beaux-arts de Belgique.**

Bruxelles.

<http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550>

ser.3:t.25 (1893): <http://www.biodiversitylibrary.org/item/111250>

Article/Chapter Title: Une conséquence du Problème des Partis

Author(s): Eugène Catalan

Page(s): Page 238, Page 239

Contributed by: Missouri Botanical Garden, Peter H. Raven Library

Sponsored by: Missouri Botanical Garden

Generated 19 January 2016 6:32 AM

<http://www.biodiversitylibrary.org/pdf4/047498700111250>

This page intentionally left blank.

on déduit

$$\lim (p - aq) = 0.$$

Par conséquent, la parallèle passe aussi près qu'on le veut d'un nœud, et comme elle ne sort pas de la bande considérée, celle-ci contient une infinité de nœuds.

Par suite, il est toujours possible de déterminer deux nombres y_p, x_p , entiers, de telle sorte que

$$\left| \frac{y_p - ax_p - b}{\sqrt{1 + a^2}} \right| < \varepsilon,$$

ε étant une quantité positive aussi voisine de zéro qu'on le veut.

—

Une conséquence du Problème des Partis; par E. Catalan.

Une ancienne Note sur ce célèbre problème, publiée dans les *Mélanges mathématiques* (*), contient la formule

$$\frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} (x+y)^{a+b-1} =$$

$$x^a \left[\frac{1}{a} (x+y)^{b-1} - \frac{b-1}{1} \frac{x}{a+1} (x+y)^{b-2} - \dots \pm \frac{x^{b-1}}{a+b-1} \right]$$

$$+ y^b \left[\frac{1}{b} (x+y)^{a-1} - \frac{a-1}{1} \frac{y}{b+1} (x+y)^{a-2} - \dots \pm \frac{y^{a-1}}{a+b-1} (**) \right], \quad (A)$$

dans laquelle a, b sont des nombres entiers.

(*) Tome I, p. 66.

(**) A l'endroit indiqué, on a imprimé, par erreur, $\frac{a+b-1}{y^{a-1}}$.

Si l'on suppose

$$x + y = c = \text{const},$$

on a, en remplaçant

$$\frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

par

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (a-1)}{b(b+1) \dots (a+b-1)} = \frac{1}{(a+b-1) C_{a+b-2, a-1}} : \\ c^{a+b-1} \\ \frac{1}{(a+b-1) C_{a+b-2, a-1}} = \\ c^{b-1} \frac{x^a}{a} - \frac{b-1}{1} c^{b-2} \frac{x^{a+1}}{a+1} + \dots \pm \frac{x^{a+b-1}}{a+b-1} \\ + c^{a-1} \frac{y^b}{b} - \frac{a-1}{1} c^{a-2} \frac{y^{b+1}}{b+1} + \dots \pm \frac{y^{a+b-1}}{a+b-1}. \quad (\text{B})$$

Le premier membre ne contenant ni x ni y , il en est de même pour le second. De cette remarque résulte un théorème d'Algèbre, à peu près évident quand $c = 1$:

a, b étant des nombres entiers, et x, y satisfaisant à la condition

$$x + y = c = \text{const},$$

la quantité

$$c^{b-1} \frac{x^a}{a} - C_{b-1,1} c^{b-2} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C_{b-1,2} c^{b-3} \frac{x^{a+2}}{a+2} - \dots \pm \frac{x^{a+b-1}}{a+b-1} \\ + c^{a-1} \frac{y^b}{b} - C_{a-1,1} c^{a-2} \frac{y^{b+1}}{b+1} + C_{a-1,2} c^{a-3} \frac{y^{b+2}}{b+2} - \dots \pm \frac{y^{a+b-1}}{a+b-1}$$

est indépendante de x et de y .

J'ignore si cette proposition est connue. De plus, elle ne me semble pas s'étendre, facilement, au cas de a, b non entiers.