This page intentionally left blank.

A propos d'une Note de M. Servais; par E. Catalan, Associé de l'Académie.

I.

Démonstration d'un théorème de M. Mannheim.

1. Ce beau théorème, encore peu connu, est ainsi énoncé par notre jeune Collègue de Gand :

Si, d'un point S, *on mène toutes les tangentes à une ligne algébrique* (*), *la somme des rapports des rayons de courbure relatifs aux points de contact, par les cubes* (**) *des tangentes respectives, est généralement égale à zéro* (***).

2. Dans le cas où la courbe est une ellipse, le théorème de mon savant et célèbre ancien élève se réduit, comme le fait observer M. Servais, à celui-ci :

Soient : t, t_1 *les longueurs des tangentes* SM, SM_1 ; n, n_1 *les longueurs des normales correspondantes* (celles-ci étant limitées au grand axe). *Soient, en outre,* ρ, ρ_1 *les rayons de courbure en* M, M_1. *On a*

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{t^3}{t_1^3}. \qquad \text{(1)}$$

3. Pour vérifier cette remarquable formule, j'observe que :

$$\rho = \frac{n^3}{p^2}, \quad \rho_1 = \frac{n_1^3}{p^2} \text{ (IV)}.$$

(*) Bien entendu, le point S est *dans le plan de la ligne.*

(**) Il faudrait : *aux cubes.* Je n'ai pu me procurer le texte, exact, de M. Mannheim.

(***) *Bulletin,* mars, 1892, p. 243.

(IV) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège,* seconde édition, p. 483.

Donc l'égalité précédente devient

$$\frac{t}{n} = \frac{t_1}{n_1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

4. Si cette proportion, très simple (*), était démontrée, le reste s'ensuivrait.

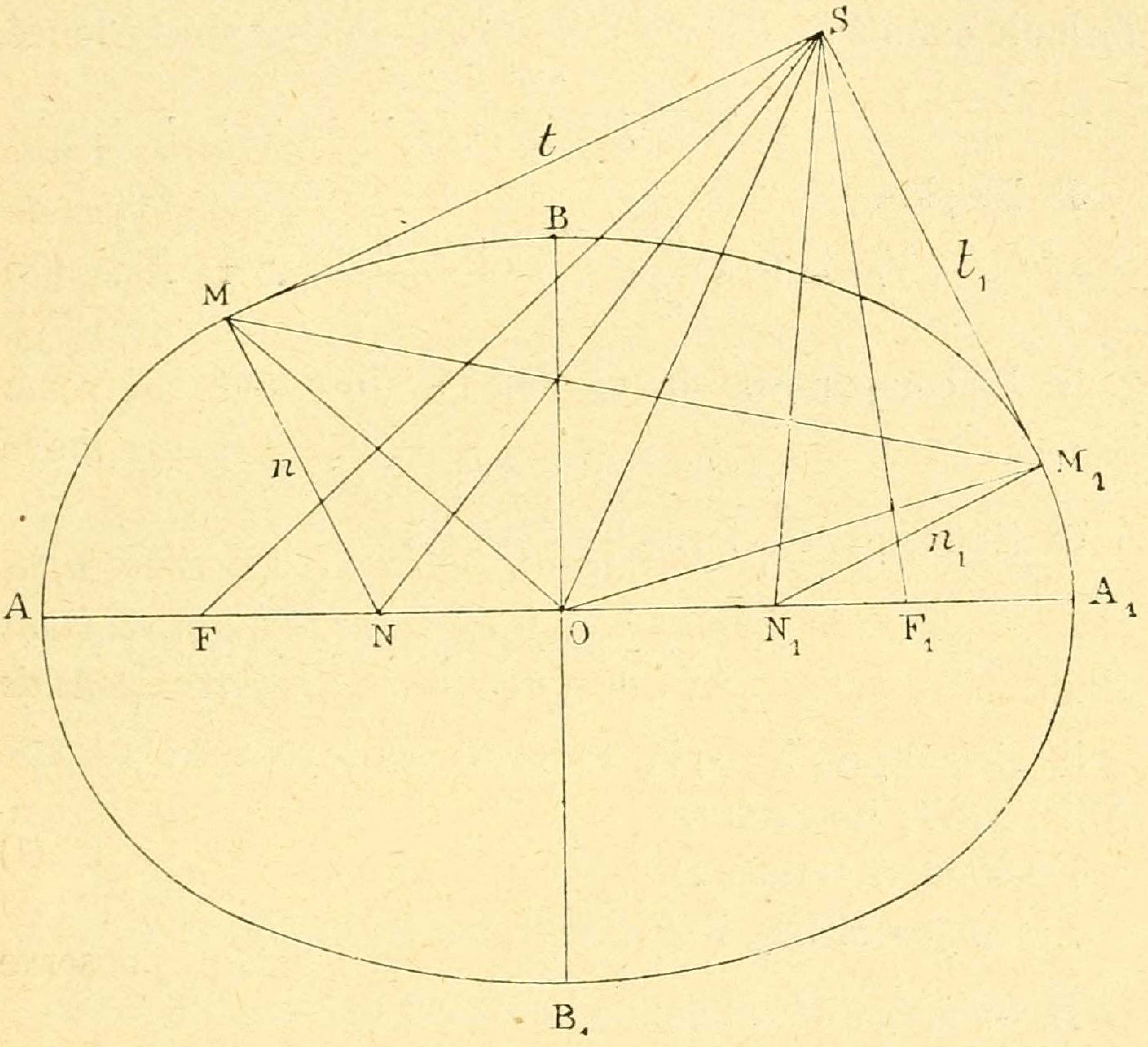

Fig. 1.

Or :

1° O étant le centre, *les triangles* OSM, OSM_1 *sont équivalents.*

En effet, l'ellipse est la projection orthogonale d'un

(*) Elle exprime que les *triangles rectangles* SMN, SM_1N_1, *sont semblables,* ou que *les angles* MSN, M_1SN_1 *sont égaux.*

cercle; et OSM, OSM_1 sont les projections de deux triangles égaux (*).

2° Si δ, δ_1 sont les distances du centre aux deux tangentes, on a donc

$$\delta t = \delta_1 t_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

3° x, y étant les coordonnées de M, on a aussi, par une formule connue,

$$\delta^2 = \frac{a^4 b^4}{a^4 y^2 + b^4 x^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

4° De plus,

$$n^2 = y^2 + \frac{b^4}{a^4} x^2 \ (^{**}) = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

5° La comparaison des égalités (4), (5) donne

$$n\delta = b^2 = n_1 \delta_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

6° Enfin, par les formules (3) et (6)

$$\frac{t}{n} = \frac{t_1}{n_1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2) \text{ C. Q. F. D.}$$

5. *Remarques* I. — F, F_1 étant les foyers, *les angles* NSF, N_1ST_1 *sont égaux.*

En d'autres termes :

Les angles MSM_1, FSF_1, NSN_1 *ont même bissectrice* (***).

II. — L'égalité (2) donne lieu à cet exercice de calcul : Si les inconnues x, x_1, y, y_1 satisfont aux équations

$$a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2 b^2, \qquad a^2\beta y_1 + b^2\alpha x_1 = a^2 b^2,$$
$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2, \qquad a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2,$$

(*) Ceci était écrit quand j'ai reçu de mon ami, G. de Longchamps, une carte postale contenant la même remarque.

(**) *Dans l'ellipse, la longueur de la sous normale* est $\frac{b^2}{a^2} x$.

(***) Probablement, ce petit théorème est connu.

on a, identiquement,

$$\frac{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2}{a^4y^2 + b^4x^2} = \frac{(\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2}{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}.$$

Cette propriété résulte, immédiatement, du théorème précédent, joint à celui-ci :

Les angles MSF, M_1ST_1 *sont égaux* (*).

III. — Par un calcul aussi simple que celui qui précède (4), on trouve cette extension de la formule (6) :

Soit l'ellipsoïde ayant, pour demi-axes :

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c.$$

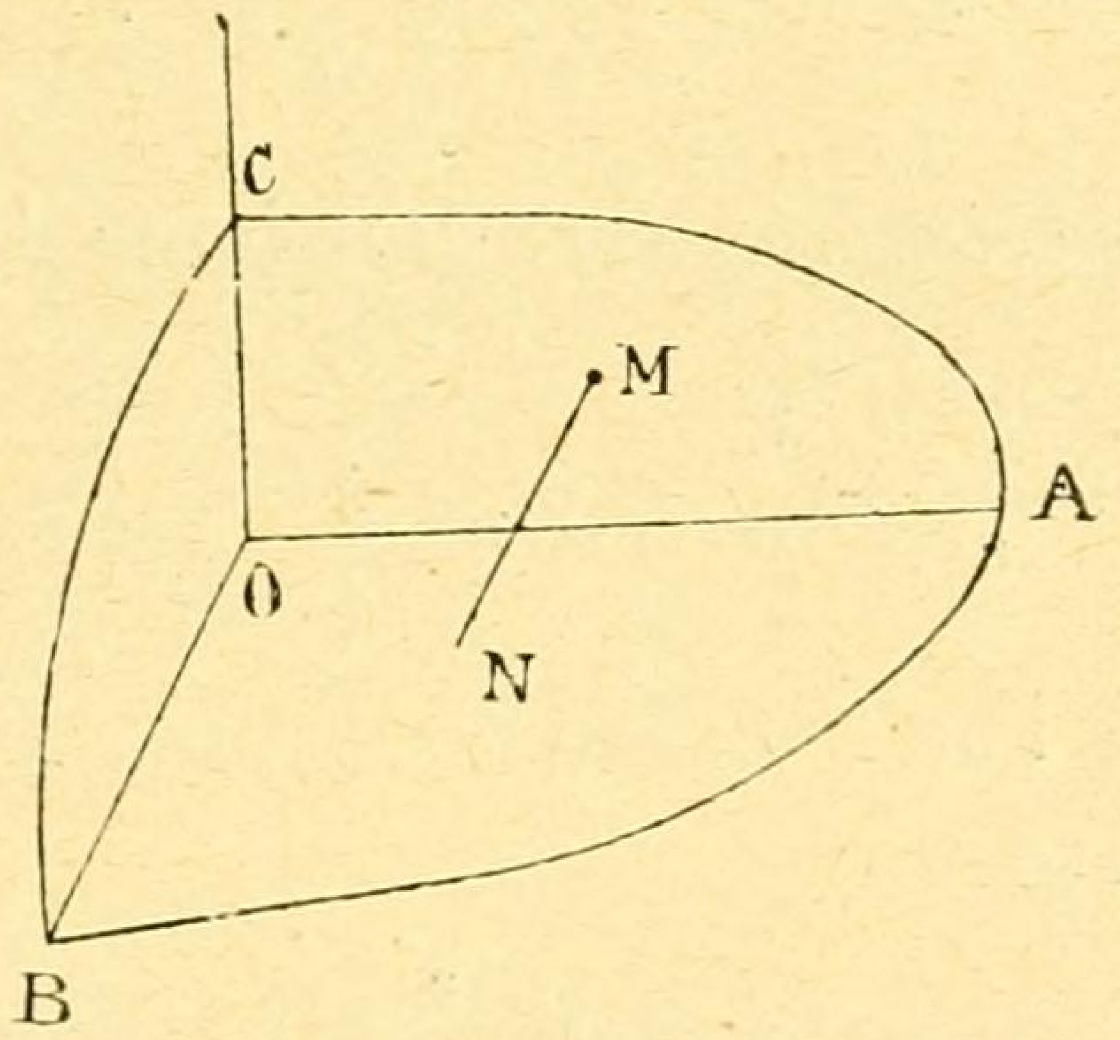

Fig. 2.

Soit MN *la normale en* M, *limitée au plan principal* AOB. *Soit, enfin,* δ *la distance au plan tangent en* M. *On a*

$$n\delta = c^2 \ (^{**}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

(*) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique,* tome I, p. 423.

(**) Ce théorème, que je croyais nouveau, est cité dans la *Géométrie analytique* de M. de Longchamps (1884, p. 297). J'ignore qui en est l'auteur.

II. — *Généralisation.*

6. Considérons deux ellipsoïdes, E, E_1, respectivement représentés par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2(\lambda x+\mu y)z=1, \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Leur intersection se compose :

1° De l'ellipse *principale* (**) dont les équations sont

$$z=0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

2° De l'ellipse *diamétrale* ayant pour équations :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \lambda x+\mu y=0 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Cela posé, si l'on conserve les notations employées ci-dessus, on trouve

$$n\delta=\frac{z}{\lambda x+\mu y+\dfrac{z}{c^2}} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Conséquemment, si le point de contact appartient à la section diamétrale :

$$n\delta=c^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

7. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Soient, dans deux plans rectangulaires, deux ellipses

(*) Les coordonnées sont rectangulaires.

(**) Elle est *principale* relativement à l'ellipsoïde E_1.

AA'BB', CC'DD', *concentriques. Par ces courbes, faisons passer un ellipsoïde* E_2 (*).

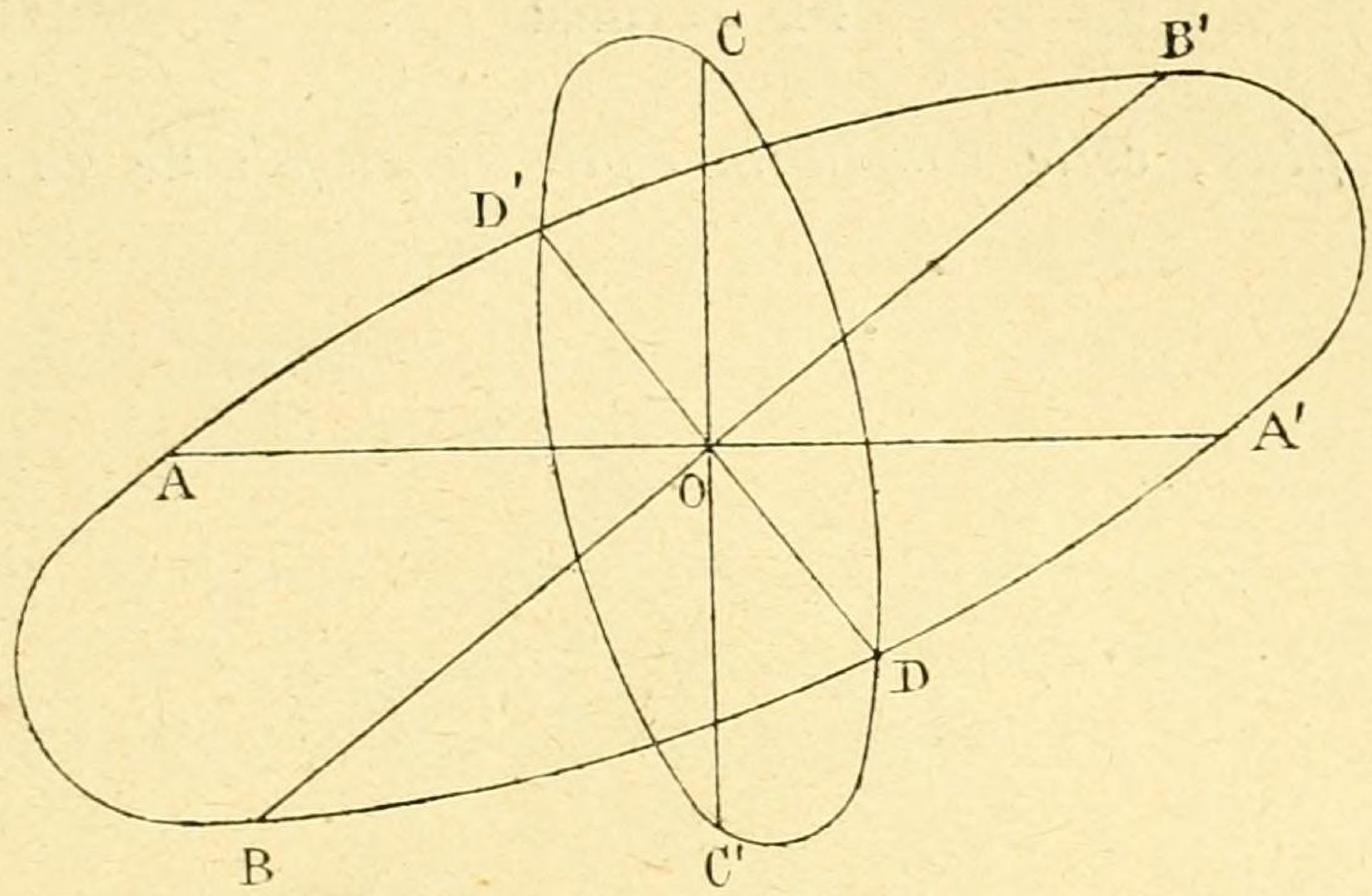

Fig. 3.

Si, par un point M *de* E_2, *on mène le plan tangent et la normale* (celle-ci étant limitée au plan CC'DD'), *on aura, en conservant les notations précédentes,*

$$n\delta = \overline{OC}^2.$$

III. — *Démonstration d'un théorème de M. Ribaucour* (**).

8. Cet ingénieux Géomètre, lauréat de l'Académie (***), a trouvé, dès sa sortie de l'École polytechnique, un joli théorème, que l'on peut énoncer ainsi :

Soient MT, MT *la tangente et la normale en un point* M *d'une conique à centre. Si, d'un point quelconque* S *de* MT,

(*) A cause de $\lambda x + \mu y = \lambda\left(x + \frac{\mu}{\lambda} y\right)$, il y en a une infinité.

(**) Et non *Ribaucourt.*

(***) En 1880.

on mène SP *perpendiculaire à la polaire de* S, SD *perpendiculaire au diamètre* OM; *on a*

$$PD = \text{const.}$$

De plus, cette constante égale le rayon de courbure en M.

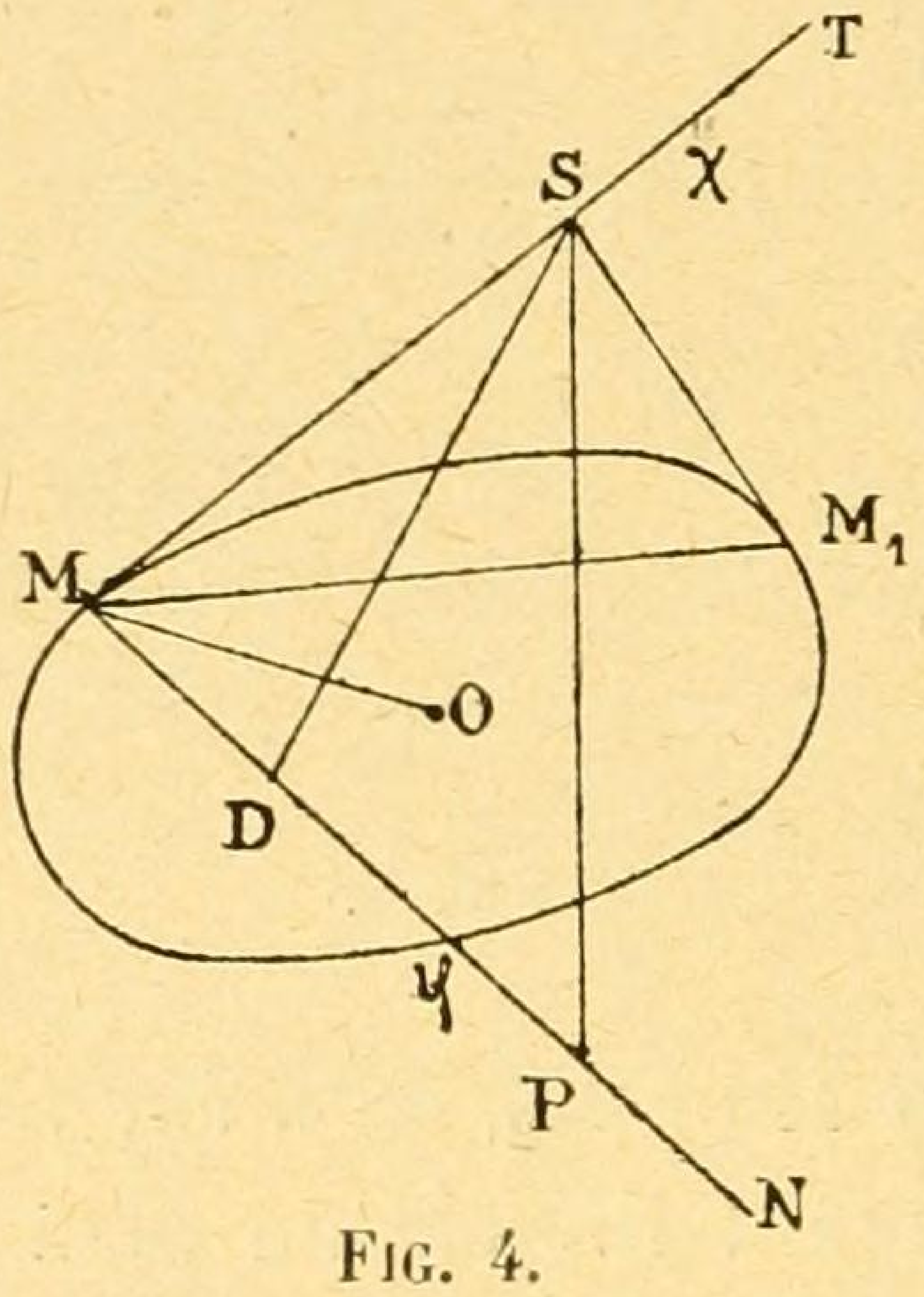

FIG. 4.

Rapportons la courbe aux droites MT, MN. Son équation sera

$$Ay^2 + 2Bxy + 2Dy + x^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

L'une des équations du centre, savoir, l'équation de MO, est donc

$$By + x = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Soit MS $= \alpha$. La perpendiculaire SD est représentée par

$$y = B(x - \alpha), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

d'après la règle connue.

La polaire MM_1 a pour équation

$$(B\alpha + D)y + \alpha x = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Donc SP est représentée par

$$y = \frac{B\alpha + D}{\alpha}(x - \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Si, dans les équations (14) et (16), on fait $x = 0$, on a :

$$MD = -B\alpha, \qquad MP = -(B\alpha + D).$$

Par conséquent,

$$PD = -D\text{; etc.}$$

Cette démonstration est, peut-être, la démonstration *primitive* de M. Ribaucour, à laquelle il a substitué *celle que lui a donnée un Géomètre bien connu* (*).

Sur les relations qui existent entre certains déterminants; par Jacques Deruyts, correspondant de l'Académie.

La Note actuelle se rapporte à l'étude des déterminants

$$pi_{v_1 v_2 \ldots v_i} = \left(\pm\, a1_{v_1} a2_{v_2} \ldots ai_{v_i}\right),$$

qui s'introduisent comme des coordonnées dans la géométrie de l'espace à $n - 1$ dimensions. Ces déterminants sont formés au moyen de i colonnes du tableau

$$\left.\begin{matrix} a1_1 a1_2 \ldots a1_n \\ a2_1 a2_2 \ldots a2_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ ai_1\, ai_2 \ldots ai_n, \end{matrix}\right\} \quad (\nabla_i)$$

où i est un nombre inférieur à n; les nombres $v_1, v_2 \ldots v_i$ ont ainsi les valeurs $1, 2 \ldots n$.

(*) N. A. (1868, p. 172). On devine, aisément, le nom de ce Géomètre.