This page intentionally left blank.

Les observations ont été faites à la température de 20°.

$s-p$.	V.	VALEUR DE v calculée.	VALEUR DE v observée.	
		$NaAzO_3$.		
88 (eau pure)	1	0,933	1,00	
65,5	0,82	0,569	0,615	$A'=0,0106$
51	0,73	0,394	0,352	
28	0,59	0,174	0,138	
0	»	0,00	0,00	
		K_2CO_3.		
108 (eau pure)	1	1,08	1,00	
94	0,79	0,74	0,794	
79,3	0,61	0,48	0,539	$A' = 0,01$
59,1	0,42	0,25	0,306	
29,8	0,24	0,071	0,098	
0	»	0,00	0,00	

Ces résultats peuvent être considérés comme suffisants.

Quelques séries trigonométriques; par Eugène Catalan.

1. Au moyen d'un procédé ingénieux, mais un peu compliqué, M. Baschwitz a trouvé la formule suivante :

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}7=\left(1-\frac{1}{5.3^2}\right)-\left(\frac{1}{7.3^3}-\frac{1}{11\,3^5}\right)+\left(\frac{1}{13\,3^6}-\frac{1}{17\,3^8}\right)-\dots, \quad (1)$$

assez curieuse.

Voici comment on peut la vérifier.

Soit

$$y=\sum_1^\infty\left[\frac{x^{6n-5}}{(6n-5)3^{3n-3}}-\frac{x^{6n-1}}{(6n-1)3^{3n-1}}\right](-1)^{n-1}, \quad (1)$$

x étant inférieur à $\sqrt{3}$. De là résulte

$$y' = \sum_1^\infty \left[\frac{x^{6n-6}}{3^{3n-3}} - \frac{x^{6n-2}}{3^{3n-1}}\right](-1)^{n-1}, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ou

$$y' = \sum_1^\infty \left[\left(\frac{x^2}{3}\right)^{3n-3} - \left(\frac{x^2}{3}\right)^{3n-1}\right](-1)^{n-1}; \quad . \quad . \quad (3)$$

ou, par la sommation de chacune des deux progressions,

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{3}\right)^3} - \frac{\left(\frac{x^2}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{x^2}{3}\right)^3} = -3\,\frac{x^4-9}{x^6+27};$$

ou encore, après suppression de x^2+3 :

$$y' = -3\,\frac{x^2-3}{x^4-3x^2+9}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

2. La fraction

$$\frac{x^2-3}{x^4-3x^2+9} = \frac{\frac{x}{3}-\frac{1}{2}}{x^2-3x+3} - \frac{\frac{x}{3}+\frac{1}{2}}{x^2+3x+3}$$

Donc

$$\begin{aligned} y' &= 3\left[\frac{\frac{x}{3}+\frac{1}{2}}{x^2+3x+3} - \frac{\frac{x}{3}-\frac{1}{2}}{x^2-3x+3}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2x+3}{x^2+3x+3} - \frac{2x-3}{x^2-3x+3}\right]. \quad . \quad . \quad (5) \end{aligned}$$

Conséquemment,

$$y = \frac{1}{2}\,\ell\,\frac{x^2+3x+3}{x^2-3x+3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Et, si $x = 1$: $y = \frac{1}{2}\mathcal{L}.7$; ou, par la formule (1) :

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}.7 = \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{(6n-5)3^{3n-3}} - \frac{1}{(6n-1)3^{3n-1}}\right](-1)^{n-1}, \quad (7)$$

ce qui ne diffère pas de l'égalité (1).

3. *Généralisation.* Prenons

$$y' = \frac{2x + a}{x^2 + ax + a^2} - \frac{2x - a}{x^2 - ax + a^2}\ (^*); \quad . \quad . \quad (8)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$y = \mathcal{L}\,\frac{x^2 + ax + a^2}{x^2 - ax + a^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

La réduction au dénominateur, $(x^2 + a^2)^2 - a^2x^2 = x^4 + a^2x^2 + a^4$, donne

$$y' = -2a\,\frac{x^2 - a^2}{x^4 + a^2x^2 + a^4} = -2a\,\frac{(x^2 - a^2)^2}{x^6 - a^6},$$

ou

$$y' = 2a\,\frac{(a^2 - x^2)^2}{a^6 - x^6}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Supposant $x^2 < a^2$, on a donc

$$y' = \frac{2}{a^5}(a^2 - x^2)^2\left(1 + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^{12}}{a^{12}} + \frac{x^{18}}{a^{18}} + \cdots\right); \quad . \quad . \quad (11)$$

(*) D'après la comparaison avec l'égalité (5), on devrait supposer

$$y' = \frac{2x + a}{x^2 + ax + a} - \frac{2x - a}{x^2 - ax + a}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8^{\text{bis}})$$

Mais, sauf le cas de $a = 3$, cette hypothèse ne conduit à aucun résultat simple.

puis

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}.\frac{x^2+ax+a^2}{x^2-ax+a^2}=\sum_1^\infty\left[\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{6n-1}}{6n-1}-2\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{6n-3}}{6n-3}+\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{6n-5}}{6n-5}\right]; \quad (12)$$

et, si $x=1$:

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{a^2+a+1}{a^2-a+1}=\sum_1^\infty\left[\frac{1}{(6n-1)a^{6n-1}}-\frac{2}{(6n-3)a^{6n-3}}+\frac{1}{(6n-5)a^{6n-5}}\right]. \quad (13)$$

4. Remarques. I. Cette formule donne, successivement,

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}.3=\sum_1^\infty\left[\frac{1}{6n-1}-\frac{2}{6n-3}+\frac{1}{6n-5}\right], \quad (14)$$

$$\frac{1}{2}(\mathcal{L}.7-\mathcal{L}.3)=\sum_1^\infty\left[\frac{1}{(6n-1)2^{6n-1}}-\frac{2}{(6n-3)2^{6n-3}}+\frac{1}{(6n-5)2^{6n-5}}\right], \quad (15)$$

$$\frac{1}{2}(\mathcal{L}.3-\mathcal{L}.7)=\sum_1^\infty\left[\frac{1}{(6n-1)3^{6n-1}}-\frac{2}{(6n-3)3^{6n-3}}+\frac{1}{(6n-5)3^{6n-5}}\right]; \quad (16)$$

de sorte que, le logarithme népérien de a^2-a+1 étant connu, on obtient, par une série très convergente, celui de a^2+a+1.

II. La formule (14) peut être simplifiée. En effet

$$\frac{1}{6n-1}-\frac{2}{6n-3}+\frac{1}{6n-5}=\frac{(6n-3)(12n-6)-2(6n-1)(6n-5)}{(6n-1)(6n-3)(6n-5)}$$

$$=\frac{8}{(6n-1)(6n-3)(6n-5)}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{L}.3=\frac{16}{3}\sum_1^\infty\frac{1}{(2n-1)(6n-1)(6n-5)}. \quad (17)$$

III. M. Baschwitz a trouvé

$$\mathfrak{L}.3 = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9}\right) + \cdots;$$

ou, sous forme abrégée :

$$\mathfrak{L}.3 = \sum_1^\infty \left[\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n}\right] (^*). \quad . \quad (18)$$

Par conséquent, au moyen d'une réduction évidente

$$\sum_1^\infty \left[\frac{9n-4}{n(3n-2)(3n-1)}\right] = 16 \sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)(6n-1)(6n-5)}. \quad . \quad (19)$$

IV. Le premier membre de l'égalité (13) ne change, pas quand on y remplace a par $\frac{1}{a}$. Mais cette égalité, vraie quand la variable est égale ou inférieure à 1, est fausse si a surpasse l'unité (**). En effet, dans ce cas, la série est *divergente*. Par exemple, $a = 4$ conduit à cette *absurdité* :

$$\frac{1}{2}\mathfrak{L}\frac{21}{13} = \left(\frac{4^5}{5} - 2.\frac{4^3}{3} + \frac{4}{1}\right) + \left(\frac{4^{11}}{11} - 2.\frac{4^9}{9} + \frac{4^7}{7}\right) + \cdots.$$

Liège, janvier 1891.

(*) Résultat connu. *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 605.

(**) La même remarque est applicable à la série de Mac-Laurin, quand la fonction développée a la forme $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.