This page intentionally left blank.

Quoi qu'il en soit, cette étude, comme je l'ai dit ci-dessus, mérite d'être reprise, et le sera aussitôt que Vénus pourra être observée dans des conditions favorables.

J'espère que les travaux ultérieurs de l'Observatoire de Bruxelles contribueront à élucider définitivement la question de la durée de la rotation de Vénus, et je suis persuadé que les astronomes liront avec le plus grand intérêt la communication dont nous avons l'honneur de proposer l'impression à l'Académie. »

La Classe adopte les conclusions de ces rapports; le travail de M. Niesten paraîtra dans le *Bulletin* de la séance.

Calcul purement géométrique des distances . . . (*); par Clément Thiry, Étudiant à l'Université de Gand.

Rapport de M. Catalan, premier Commissaire.

I.

« A la page 9 de la Note intitulée : *Quelques formules relatives aux triangles rectilignes*, on lit : « Cette formule,
» relativement simple, est le résultat d'un long calcul. Si
» elle est exacte, comme je l'espère, il y a lieu de croire
» qu'on y peut parvenir par une méthode beaucoup plus
» simple que celle-ci. Cette méthode *élégante*, je l'ai
» cherchée en vain. »

Après avoir rappelé cette sorte de confession, l'Auteur de la Note présentée à l'Académie déclare que, depuis assez longtemps, il est en possession de cette méthode *élégante*. Je ne puis que l'en féliciter; mais pourquoi ne l'a-t-il pas publiée plus tôt?

(*) Ce titre occupe *cinq* lignes!

II.

Le *théorème de Stéwart*, dont M. Thiry fait, pour la seconde fois, d'heureuses applications, est celui que l'on peut énoncer ainsi :

Si l'on joint le sommet A *d'un triangle à un point quelconque* M *de la base* BC, *on a :*

$$\overline{AB}^2.CM + \overline{AC}^2.BM = (\overline{AM}^2 + BM.CM)\,BC \text{ (*)}.$$

Après l'avoir cité, l'illustre auteur de l'*Aperçu historique* ajoute (**) : « Euler l'a aussi démontrée (la proposi-
» tion de Stéwart) comme Lemme, pour inscrire, à un
» cercle, un triangle dont les côtés passent par trois points
» donnés (***). »

Encore un mot sur ce sujet :

Dans la *Géométrie de Position* (An XI, p. 263), Carnot démontre le *théorème de Stéwart*, sans nommer Stéwart, et il déclare que ce Lemme est très important. Ainsi, au commencement de ce siècle, l'illustre Auteur ignorait que la proposition dont il s'agit fût déjà ancienne! Si Carnot s'est trompé sur ce point d'histoire, l'un de ses plus humbles admirateurs est bien excusable de s'être trompé aussi.

(*) *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, p. 141.

(**) Voir mon édition de l'*Aperçu*, p. 175.

(***) *Mémoires de l'Académie de Pétersbourg*, année 1780. C'est, probablement, après avoir lu le Mémoire de ce grand homme, que je lui ai attribué, par erreur, la paternité du théorème de Stéwart. (*Théor. et Prob.*, p. 141.)

III.

Les autres théorèmes de Stéwart, beaucoup plus compliqués que celui dont il vient d'être question, ont été généralisés, en partie, par Chasles (*).

A propos de ces théorèmes, il me sera permis, je pense, de rappeler la proposition suivante, peu connue :

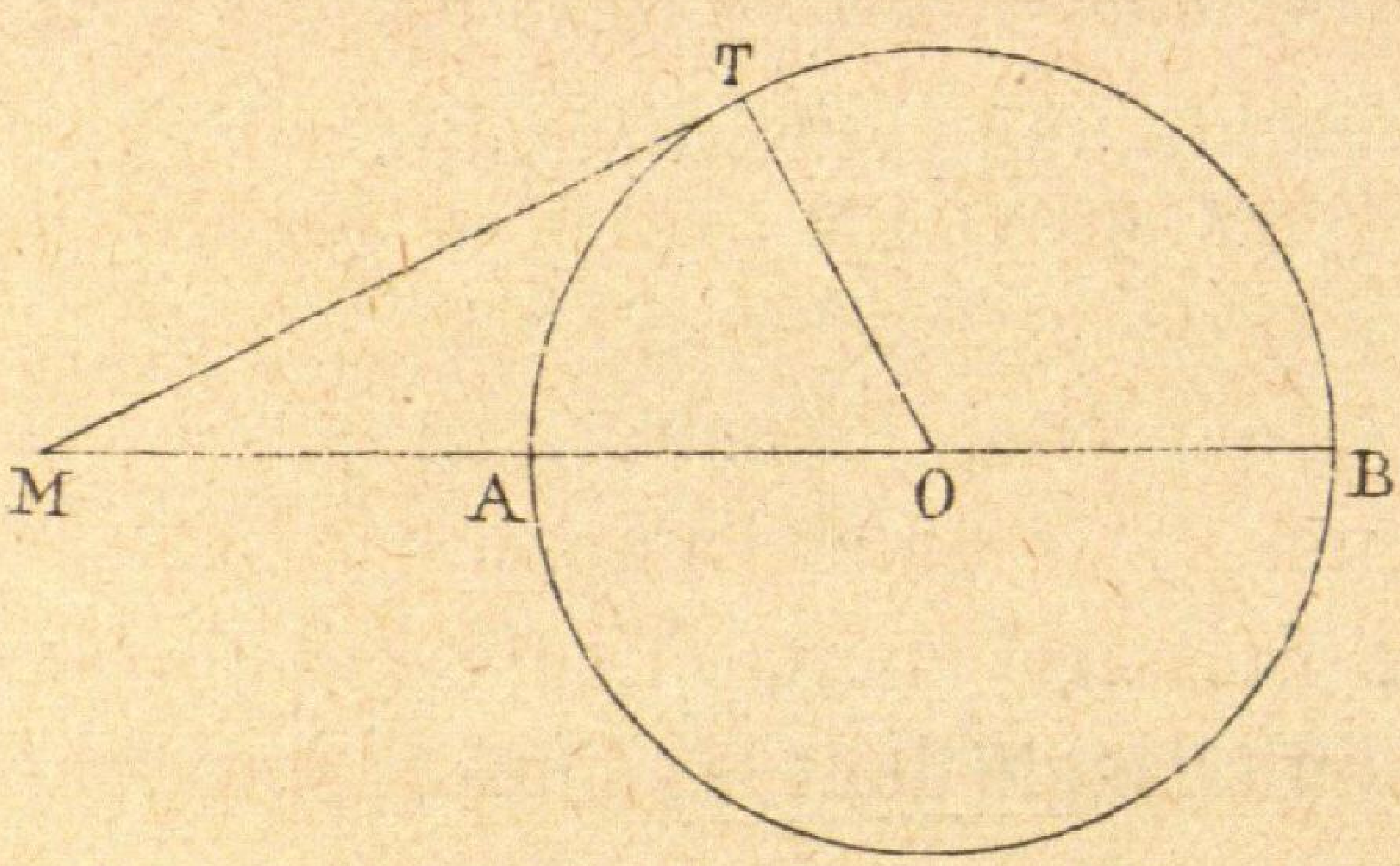

Fig. 1.

Soit un cercle O, *ayant pour rayon* c. *Si, d'un point extérieur* M, *on mène une tangente* MT *et le diamètre* MAOB, *on aura,* n *étant un nombre entier quelconque* (**) :

$$2\overline{OM}.\left[\overline{MB}^{2n-1}+\overline{MA}^{2n-1}\right]-\left(\overline{MB}^{n}-\overline{MA}^{n}\right)^{2}$$
$$=\overline{MT}^{2}\left[\left(\overline{MB}^{n-1}-\overline{MA}^{n-1}\right)^{2}+4\overline{MT}^{2n-2}\right] \text{ (***)}.$$

Revenons au *travail* de M. Thiry.

(*) *Loc. cit.*, p. 353.

(**) *Zéro* excepté.

(***) *Notes sur la théorie des fractions continues, et sur certaines séries*, p. 32. L'énoncé *actuel* est un peu simplifié. A l'endroit cité, on a imprimé, par erreur, *b* au lieu de *c*.

IV.

P étant un point situé dans le plan ABC, et K_n un certain point *remarquable*, appartenant à ce triangle, la *première formule générale*, établie par l'Auteur, est :

$$\overline{PK}_n^2 = \frac{a^n\overline{PA}^2 + b^n\overline{PB}^2 + c^n\overline{PC}^2}{a^n + b^n + c^n} - (abc)^2 \frac{\sum a^{n-2}b^{n-2}}{\sum a^n}. \quad (P)$$

Ici se présente une petite difficulté.

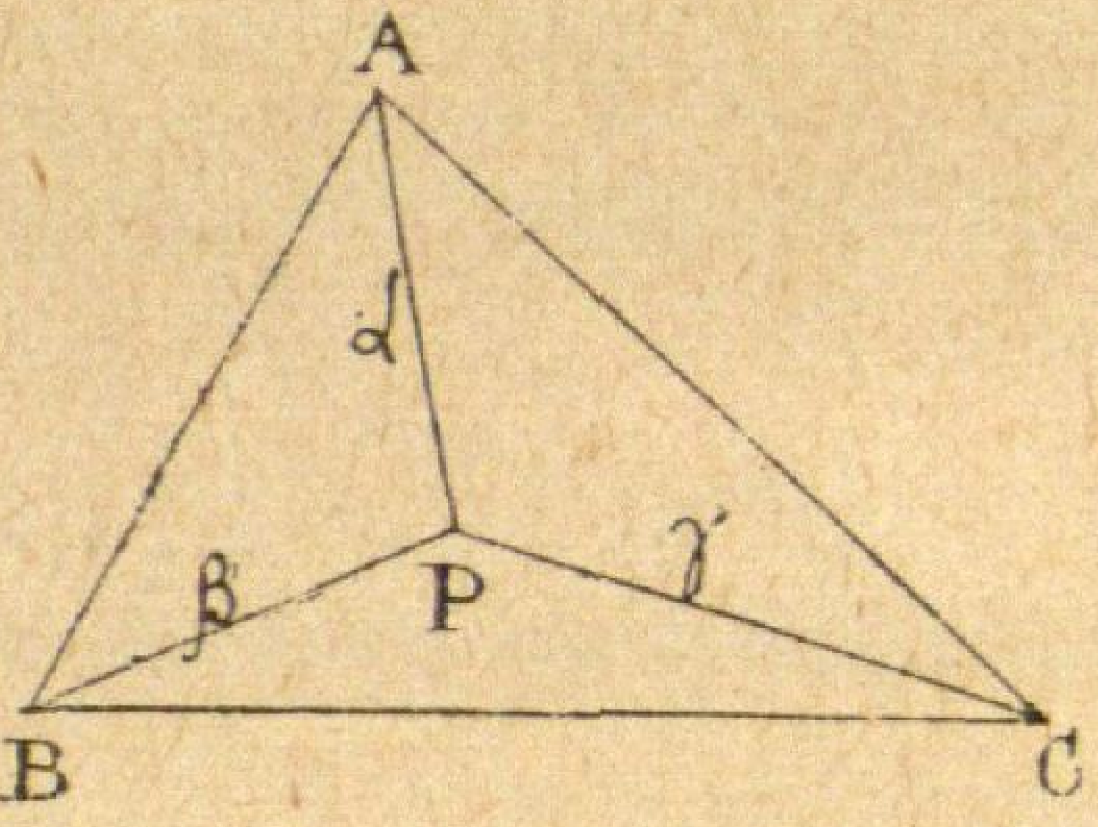

FIG. 2.

Le point P, que je suppose, pour fixer les idées, *intérieur* au triangle ABC, est déterminé par deux des trois distances PA, PB, PC.

Comment M. Thiry évalue-t-il la quantité $\sum a^n\overline{PA}^2$?

La relation entre les *six* distances a, b, c, PA, PB, PC, mise sous la forme la plus simple (me semble-t-il), est :

$$\sum(b^2+c^2-a^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)a^2\alpha^2 = a^2b^2c^2+a^2\beta^2\gamma^2+b^2\gamma^2\alpha^2+c^2\alpha^2\beta^2 \text{ (*)}. \quad (1)$$

Soit

$$S_n = a^n\alpha^2 + b^n\beta^2 + c^n\gamma^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Si l'on tire, de l'égalité (1), la valeur de α^2, S_n sera

(*) *Théor. et Prob.*, p. 353.

exprimée en fonction de β et de γ, mais d'une manière fort compliquée. Au lieu de ceci, on pourrait supposer que les *sommes initiales* S_0, S_1, S_2 sont connues; savoir :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= S_0, \\ a\alpha + b\beta + c\gamma &= S_1, \\ a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma &= S_2. \end{aligned}$$

Ces équations (*) donnent S_n sous une forme *symétrique*, mais encore un peu compliquée. Il y a là, pour M. Thiry, le sujet d'une recherche intéressante.

V.

La double formule

$$\overline{GI}^2 = r^2 + \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{3}p^2 = \frac{2}{3}r^2 - \frac{4}{3}Rr - \frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2)$$

est inexacte (**). En effet, si l'on remplace $a^2 + b^2 + c^2$ par $2(p^2 - r^2 - 4Rr)$, on trouve une *équation de condition* entre R et r.

VI.

Vers la fin de la Note (p. 13), l'Auteur démontre la *jolie relation :*

$$\sum a^n \overline{AK}_n^2 = \frac{a^2b^2c^2}{\sum a^n} \sum a^{n-2}b^{n-2}.$$

Elle résout, en partie, le problème indiqué dans le paragraphe IV de ce Rapport.

(*) Traitées d'abord par Cauchy, à ce que je crois.

(**) Peut-être ne renferme-t-elle qu'une faute de signe.

VII.

En résumé, le travail présenté à l'Académie est intéressant, et je pense qu'il y a lieu d'adresser des remerciements à l'Auteur. »

P. S. (4 avril) M. Thiry ayant *condensé* et *simplifié* son Mémoire, je me rallie aux conclusions des deux autres Commissaires, MM. Le Paige et Mansion.

Rapport de M. C. Le Paige, deuxieme commissaire.

« Je me rallie aux conclusions de mon savant confrère, M. Catalan; néanmoins. si l'auteur pouvait condenser *considérablement* son travail, de façon à n'en conserver que les parties essentielles, je pense que son étude formerait une addition intéressante au mémoire de M. Catalan. »

M. Mansion se rallie aux conclusions des deux premiers rapporteurs.

Nouveau rapport de M. C. Le Paige.

« Tout en maintenant les réserves que j'ai faites verbalement à la dernière séance de la Classe, en ce qui touche l'importance des travaux sur la géométrie appelée récente, je pense qu'il y a lieu, afin d'encourager un jeune géomètre, d'ordonner l'insertion de la nouvelle rédaction de son travail dans le *Bulletin* de l'Académie. »

Conformément à cet avis, partagé par MM. Mansion et Catalan, la Classe vote l'impression de la note de M. Thiry dans le *Bulletin* de la séance.
