Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe; par M. J. Neuberg.

Rapport de M. C. Le Paige, premier commissaire.

« Bien que j'aie depuis longtemps entre les mains le mémoire présenté à la Classe par M. Neuberg, je n'ai pas eu le loisir de l'étudier avec tout le soin que j'aurais voulu y donner; d'un autre côté, il me serait pénible d'en retarder encore l'impression en le conservant davantage. La Classe voudra donc bien me permettre de lui présenter une brève appréciation du travail de notre savant collègue de Liège, sans examiner en détail les nombreux et intéressants résultats qu'il contient.

M. Neuberg s'est proposé d'étudier les projections et contre-projections d'un triangle donné, semblables à un autre triangle donné, problème qui revient à couper un prisme triangulaire droit donné, de telle sorte que la section soit un triangle donné d'espèce, car les deux questions n'en font qu'une en réalité.

Notre honorable collègue fait voir, tout d'abord, que *si une figure* F, *donnée dans un plan* P, *est projetée et contre-projetée sur deux plans* P′, P″, *ayant même inclinaison sur* P *et dont les traces sur* P *sont deux droites rectangulaires, les figures obtenues* F′, F″ *sont semblables.*

De ce théorème général, très élégant, un cas particulier seulement avait été indiqué, celui où l'on projette et contre-projette une ellipse suivant un cercle.

Ce même résultat général se déduit au surplus, comme M. Neuberg le fait voir, de la solution, due à Gugler, du problème de Simon Lhuilier, solution que M. Neuberg retrouve par un procédé très simple qui lui appartient.

Après avoir défini une *série axiale* de triangles obtenus en partant d'un triangle fixe, $A_1A_2A_3$, projetés et contre-projetés sur des plans également inclinés deux à deux sur le plan de $A_1A_2A_3$ et formant deux faisceaux dont les axes sont deux droites rectangulaires de ce plan, et une *série modulaire*, où l'angle d'inclinaison est constant, les traces variant, l'auteur fait voir très simplement que les triangles de l'une ou l'autre série sont représentés, quant à leur forme, par des triangles de base fixe, et dont le sommet variable décrit une circonférence de cercle.

On obtient ainsi, pour une *série axiale*, une circonférence représentative Δ; pour une *série modulaire*, une autre circonférence Δ'.

Si maintenant on fait varier les éléments déterminatifs de la *série axiale* ou de la *série modulaire*, de façon à reproduire la *série affine*, doublement infinie, dont elles dérivent, les cercles Δ, Δ' sont en nombre simplement infini et s'associent de manière à former deux faisceaux (F), (F') orthogonaux.

A moins de donner à ce rapport des proportions exagérées, je me vois forcé, à mon grand regret, de mentionner, sans m'y arrêter, les nombreuses et élégantes propriétés que M. Neuberg démontre relativement à la figure qu'il appelle *figure de Toricelli;* d'un autre côté, il devient alors difficile d'énoncer les propositions découvertes par M. Neuberg sur les figures podaires et antipodaires, etc., et les multiples conséquences qu'il en déduit.

D'autres chapitres du beau mémoire de notre collègue présentent un caractère analytique; ce sont ceux où il considère l'expression de l'aire d'un triangle à l'aide de la longueur de ses côtés, comme une fonction quadratique des carrés des côtés. L'auteur applique les propriétés des fonctions dont il signale l'importance à l'étude des triangles qu'il s'est proposé d'étudier tout d'abord.

Mentionnons, en passant, la formule qui lie les angles des triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ et l'angle de leurs plans :

$$\cos\theta + \sec\theta = \frac{1}{2}\sum(\cot A_1 \cot B_2 + \cot A_2 \cot B_1).$$

Il faudrait signaler encore l'idée ingénieuse de représenter chaque triangle $B_1B_2B_3$ par un seul point et, comme conséquences, une solution nouvelle du problème de Simon Lhuilier et une représentation fort curieuse des séries affines, des séries axiales et des séries modulaires.

Enfin, sous le titre d'appendice, M. Neuberg consacre une dernière et importante partie de son mémoire à l'étude d'une question qui l'a déjà occupé à diverses reprises, celle du système de trois figures semblables $F_1F_2F_3$ situées dans un même plan.

Dans cette partie encore, je ne puis que signaler l'élégante simplicité des procédés de notre collègue, et la multitude de propriétés curieuses qui en découlent avec une extrême facilité : mentionnons, parmi ces dernières, le théorème suivant : *soit* $X_1X_2X_3$ *un triangle fixe. Un plan est superposé à ce triangle. On le fait tourner sur lui-même successivement autour des points* X_1, X_2, X_3 *d'angles égaux aux doubles des angles* $X_3X_1X_2$; $X_1X_2X_3$; $X_2X_3X_1$: *le plan revient à sa position primitive.*

Je le répète, en terminant : je regrette que diverses circonstances ne m'aient pas permis de consacrer au mémoire de M. Neuberg autant de temps que je l'aurais désiré.

Le peu que j'ai pu en dire suffira néanmoins, je pense, pour faire ressortir la qualité dominante de son travail, l'élégante simplicité de la méthode et la richesse des résultats obtenus dans l'étude d'une question qui, au premier aspect, paraît élémentaire et qui même semblerait devoir être épuisée après les travaux qu'y ont consacrés de nombreux géomètres.

C'est donc avec le plus vif plaisir que je propose à la Classe d'insérer dans ses *Mémoires* in-8° le travail de M. Neuberg, et d'adresser des remerciements à l'auteur. »

Rapport de M. Catalan, deuxième Commissaire.

« C'est le 22 juin, seulement, que le Mémoire de M. Neuberg m'a été communiqué. J'ai donc eu à peine le temps de le parcourir. Néanmoins, trois motifs me permettent de me rallier, sans hésiter, aux conclusions du premier Commissaire :

1° Le rapport de M. Le Paige contient une analyse, très bien faite, du travail soumis à la Classe;

2° Parmi toutes les personnes qui s'occupent de Géométrie, M. Neuberg jouit d'une grande et légitime réputation (*);

3° En étudiant une partie de son Mémoire, j'ai été frappé de la beauté, de la simplicité des résultats qu'il contient.

(*) Le *Cercle de Neuberg* est aussi connu, maintenant, que l'est *le point de Lemoine*.

L'Académie se rappelle peut-être qu'en 1884, M. Neuberg lui a soumis un *Mémoire sur le tétraèdre,* et que ce travail (*) a paru dans la collection *in-octavo. En ce temps-là*, j'écrivais, à mon savant Collègue : « vous avez le don (ou le génie) de la Géométrie. » Le nouveau Mémoire justifie, je le crois, cette appréciation.

Encore un mot, et je finis.

Dans une conversation que je viens d'avoir avec l'honorable Auteur, je lui ai demandé :

1° *D'augmenter le nombre des figures,* parce que, faute de ce moyen de lecture, certaines démonstrations sont difficiles à suivre;

2° *D'insister* davantage *sur quelques lemmes.* Habitué à tout deviner, l'Auteur suppose que ses lecteurs possèdent cette faculté. Comme exemple, je citerai le lemme préliminaire (page 2) (**);

3° *De changer*, s'il lui est possible, *quelques dénominations;*

4° *De remplacer l'appendice par un nouveau chapitre,* sauf à modifier le titre du Mémoire.

Ces changements allongeront un peu celui-ci; mais tout le monde y gagnera. »

(*) Il est devenu classique.

(**) On peut l'énoncer ainsi :

Soit un parallélogramme ABCD. Sur les prolongements des côtés CB, CD, on prend

$$BE = m BC, \quad DF = \frac{1}{m} CD.$$

Cela posé : 1° la droite EF passe en A ; 2° $\frac{AE}{AF} = const = m^2$.

Cette proposition, presque évidente, a de nombreuses conséquences.

—