This page intentionally left blank.

La Classe prononce le dépôt aux archives de deux communications de M. E. Delaurier.

La première, portant pour titre : *Théories nouvelles des causes des maladies et des fermentations*, a été examinée par MM. Fredericq, Henry et Errera.

La seconde, intitulée : *Nouvelle théorie de l'univers*, a été examinée par M. Lagrange.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Remarques sur un Mémoire de M. G. de Longchamps,
par E. Catalan, Associé de l'Académie.

Page 3 (*). Les *définitions* me paraissent un peu compliquées, eu égard à la nature du sujet.

Soit une série convergente :

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots \quad . \quad . \quad (1)$$

Il en résulte

$$y^2 = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdot \cdot + B_n x^4 + \ldots \quad . \quad . \quad (2)$$

en supposant

$$B_n = A_0 A_n + A_1 A_{n-1} + \cdots + A_n A_0 . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(*) Du manuscrit.

La notation B_n n'est-elle point préférable à celle-ci : $(A)_n$, que l'on ne sait trop comment *énoncer?* A quoi bon le substantif *isobare,* pour désigner B_n ?

M. de Longchamps suppose, constamment, que les $i+1$ coefficients

$$A_n, \quad A_{n+1}, \ldots A_{n+i}$$

satisfont à une équation connue, du premier degré :

$$\varphi(A_n, A_{n+1}, \ldots A_{n+i}) = 0.$$

Ils forment donc une série *récurrente, d'ordre* i (*).

L'honorable Auteur désigne y sous le nom de fonction *adjointe.* Adjointe à quoi ? Suivant Laplace, elle est la fonction *génératrice* de A_n.

Page 7. M. de Longchamps énonce la proposition suivante :

« *Cette convergence existe toutes les fois que le rapport* $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ *ne croît pas indéfiniment avec* n » ;

Et il essaie de la démontrer.

A ce compte, les séries

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,$$
$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

seraient toujours convergentes. Le savant Professeur au Lycée Charlemagne sait bien le contraire !

Page 9. L'Auteur développe, en série, la fonction elliptique définie par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + ay^2 + by^4}.$$

(*) Et non d'*échelle* i (*Traité élémentaire des séries*, p. 72).

Cette série étant

$$y = x + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^5 + \cdots,$$

il retrouve les valeurs données par *Didon :*

$$\alpha_2 = \frac{a}{1.2.3}, \quad \alpha_3 = \frac{a^2 + 12b}{1.2.3.4.5}, \quad \alpha_4 = \frac{a^3 + 132ab}{1.2\ldots7}, \ldots$$

Ici se posent deux questions :

1° La série est-elle convergente ? 2° Quelle est la *clef ?*

Page 11. La formule *connue* (*)

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1.2}{1.3.5} + \cdots + \frac{1.2\ldots n}{1.3\ldots(2n+1)} + \cdots$$

est donnée sans explication ***suffisante***. Quelle est la *clef ?* L'Auteur ne le dit pas.

Page 17. « Ou, en revenant à la notation habituelle,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + x^2}} = X_0 + X_1 x + \cdots + X_{n-1} x^{n-1} + \cdots \text{»} \quad (A)$$

La notation *habituelle* est

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = X_0 + X_1 z + \cdots + X_{n-1} z^{n-1} + \cdots \quad (B)$$

X_{n-1} est un polynôme, *fonction de* x ; tandis que, dans (A), X_{n-1} est une *fonction de* α.

Page 21.

$$a^2 \frac{dy}{da} - y^2 = 3H_1 x^4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

(*) *Deuxième Mémoire sur les fonctions* X_n, p. 81.

Posant

$$y = zx^2 + x,$$

M. de Longchamps trouve la transformée

$$dx = \frac{2z}{z^2 + 3H_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

toujours intégrable. Les deux cas *particuliers* qu'il considère sont donc inutiles.

Chapitre II. — *Les fonctions pseudo-bernoulliennes.*

Ce chapitre (et presque tout le Mémoire), me paraît pouvoir être résumé ainsi :

Reprenons les égalités

$$y = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$y^2 = B_0 + B_1 x + \cdots + B_n x^n + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$B_n = A_0 A_n + A_1 A_{n-1} + \cdots + A_{n-1} A_1 + A_n A_0, \quad . \quad (3)$$

et supposons qu'à partir d'une certaine valeur de n, $n = i$, on ait constamment

$$B_n = A_n (an + b). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

L'égalité (2) peut être écrite sous la forme :

$$y^2 = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_{i-1} x^{i-1}$$
$$+ A_i (ai + b) x^i + \cdots + A_n (an + b) x^n + \cdots$$

Mais, à cause de la formule (1) :

$$ax \frac{dy}{dx} = a \left[A_1 x + 2A_2 x^2 + \cdots + (i-1) A_{i-1} x^{i-1} \right]$$
$$+ a \left[iA_i x^i + (i+1) A_{i+1} x^{i+1} + \cdots + nA_n x^n + \cdots \right].$$

Donc, par soustraction,

$$
\begin{aligned}
y^2 - ax\frac{dy}{dx} = {} & B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_{i-1}x^{i-1} \\
& - a\left[A_1 x + 2A_2 x^2 + \cdots + (i-1)A_{i-1}x^{i-1}\right] \\
& + b\left[A_i x^i + A_{i+1}x^{i+1} + \cdots + A_n x^n + \cdots\right].
\end{aligned}
$$

La série entre parenthèse ayant pour somme

$$
y - \left[A_0 + A_1 x + \cdots + A_{i-1}x^{i-1}\right],
$$

l'équation précédente se réduit à

$$
\left.
\begin{aligned}
y^2 - ax\frac{dy}{dx} - by = {} & B_0 + B_1 x + \cdots + B_{i-1}x^{i-1} \\
& - a\left[A_1 x + 2A_2 x^2 + \cdots + (i-1)A_{i-1}x^{i-1}\right] \\
& - b\left[A_0 + A_1 x + \cdots + A_{i-1}x^{i-1}\right].
\end{aligned}
\right\} \quad (5)
$$

Lorsque, par exemple, $i = 2$;

$$
y^2 - ax\frac{dy}{dx} - by = B_0 + B_1 x - aA_1 x - b(A_0 + A_1 x).
$$

Cela posé, *si la série* (1) *est convergente, on saura intégrer l'équation* (5).

Page 24. « Il ne semble pas possible de trouver le rapport qui existe entre un Bernoullien et l'Eulérien correspondant. »

Ces deux suites de nombres peuvent être déterminées par une même formule (*)

(*) *Notes d'Algèbre et d'Analyse.* — Acad. roy. de Belg., 1871.

Page 26. *Nombres d'Euler*. La formule

$$2D_n + (D)_n = (2n + 1)\,\theta_{n+1}$$

semble compliquée (*).

Page 29. « On obtient une intégrale particulière (**) en posant

$$y = \alpha_1 x^{a-1} + \alpha_2 x^{2a-1} + \cdots + \alpha_n x^{n-1a-1} + \cdots \text{»}$$

« Cette équation appartient à la famille des équations » que l'on sait complètement intégrer, quand on en pos- » sède une intégrale particulière. »

La série est-elle *sommable*, même quand $a = 3$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, auquel cas l'équation de Riccati est

$$\frac{dy}{dx} - y^2 = x^2 ?$$

Voilà toute la question. Liouville a démontré (***) que les *seuls cas* d'intégrabilité sont ceux où l'exposant de y a l'une ou l'autre des formes

$$-\frac{4k}{2k+1}, \quad -\frac{4(k+1)}{2k+1},$$

k étant un nombre entier. Sa démonstration est-elle inexacte ? Je ne le pense pas.

(*) Voir, sur ce sujet, les *Mélanges mathématiques*, t. I.

(**) De l'équation

$$\frac{dy}{dx} - y^2 = (a-1)\,\alpha_1 x^{a-2}.$$

(***) *Journal de l'École polytechnique*, 22e Cahier.

Page 34. « L'équation

$$x^p \frac{dy}{dx} - y^2 = \mathrm{H}x^q$$

« ...... est intégrable par les fonctions hyper-bernoulliennes. » Toujours la même objection. Un exemple ne serait pas inutile. Celui que nous venons de citer :

$$\frac{dy}{dx} - y^2 = x^2,$$

qui paraît fort simple, conduit à

$$y = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \cdots$$

L'intégrale *particulière* est donc développée en série. Mais quelle est la somme de cette série ? (*).

(*) Quand $n = 2$, l'intégrale complète de l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} = ux^2,$$

à laquelle se ramène celle de Riccati, est

$$u = \mathrm{A}\left[1 + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^8}{3.4.7.8} + \frac{x^{12}}{3.4.7.8.11.12} + \cdots\right]$$
$$\mathrm{B}\left[x + \frac{x^5}{4.5} + \frac{x^9}{4.5.8.9} + \frac{x^{12}}{4.5.8.9.12.13} + \cdots\right].$$

(*Mémoire de Liouville*, p. 2.)

Page 44.

$$« -\int_0^x e^{qx^2}dx = \frac{xe^{qx^2}}{-1-2\alpha_1x^2+\alpha_2x^4+\cdots+\alpha_nx^{2n}+\cdots} ». \quad (4)$$

Le développement de l'exponentielle donne, au lieu du premier membre,

$$-\int_0^x dx\left(1+\frac{qx^2}{1}+\frac{q^2x^4}{1.2}+\frac{q^3x^6}{1.2.3}+\cdots\right),$$

ou

$$-\left[x+\frac{qx^3}{1.3}+\frac{q^2x^5}{1.2\ldots5}+\frac{q^3x^7}{1.2.3\ldots7}+\cdots\right].$$

Ainsi

$$\int_0^x e^{qx^2}dx = x+\frac{qx^3}{1.3}+\frac{q^2x^5}{1.2\ldots5}+\frac{q^3x^7}{1.2.3\ldots7}+\cdots; \quad (4^{bis})$$

ce qui est bien plus simple que la formule (4).

Page 47. « On observe que les trois premiers coeffi-
» cients échappent à la loi qui sert à déterminer tous les
» autres. On doit voir, dans ce fait, ... »

Dans toute série récurrente, les premiers termes sont *irréguliers.*

Post-scriptum (9 juillet). Dans son Rapport, M. Mansion fait observer que M. de Longchamps intègre, directement, l'équation de Riccati, et qu'il remplace, par une *série unique*, le *quotient de deux séries.* Ce résultat important m'avait échappé.

—