Nouvelles recherches sur quelques formules de calcul intégral; par J. Beaupain.

Rapport de M. E. Catalan, premier commissaire.

« Ce nouveau Mémoire complète celui qui a été, il y a quelques mois, approuvé par l'Académie. M. Beaupain, creusant son sujet, cherche les cas, très nombreux, dans lesquels les transcendantes

$$\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p\,dx\ (^*),\quad \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}}(1-x)^r(1+x)^s\,dx,$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^r(1-x)^s-(1-x)^r(1+x)^s}{x}\,dx$$

sont réductibles à la fonction Γ; et, bien entendu, il démontre les formules qui permettent d'effectuer cette réduction.

Certaines intégrales définies, considérées par le jeune Géomètre, sont surtout intéressantes, parce qu'elles ont été

(*) Celle-ci est, pour ainsi dire, *conjuguée* de l'*intégrale eulérienne :*

$$\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1-x)^p\,dx.$$

traitées autrement par l'illustre Legendre. Ce sont, par exemple, les quantités :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^8}},$$

qu'il ramène aux intégrales elliptiques de première espèce (*). Au contraire, comme nous l'avons déjà dit, M. Beaupain les réduit aux fonctions Γ. Pour la seconde, cette réduction est évidente et connue; mais il n'en est pas de même à l'égard de la première; et, à plus forte raison, pour les intégrales

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{(1+x^4)\sqrt{1-x^8}}, \quad \int_0^1 \frac{x^6dx}{(1+x^4)\sqrt{1-x^8}}, \text{ etc.}$$

A priori, on ne voit pas qu'elles soient réductibles aux intégrales eulériennes. Il semble donc, si je ne me trompe, que M. Beaupain a complété, utilement, une théorie difficile et intéressante. Je n'ai pu, faute de temps, refaire tous les calculs contenus dans le nouveau Mémoire; mais, par la manière dont ils sont présentés et par les vérifications auxquelles s'est livré l'Auteur, il y a lieu de les croire exacts. D'ailleurs, il pourra les revoir encore.

En résumé, le nouveau Mémoire de M. Beaupain me paraît valoir, pour le moins, celui qui a reçu l'approbation de l'Académie, et j'ai l'honneur d'en proposer l'impression dans le *Recueil* in-4°. »

(*) *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 382.